Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Problemas de transporte

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

2023/1

Sumário

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;
  - Problemas de transbordo;

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;
  - Problemas de transbordo;
  - Problemas de designação.

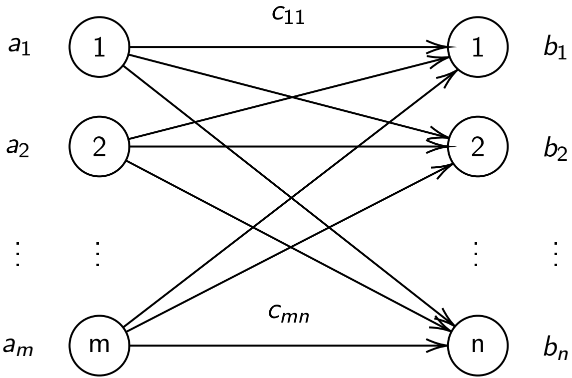
- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;
  - Problemas de transbordo;
  - Problemas de designação.
- Referem-se, por exemplo, ao **transporte** ou **distribuição** de mercadorias, dos centros de produção aos mercados consumidores;

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;
  - Problemas de transbordo;
  - Problemas de designação.
- Referem-se, por exemplo, ao **transporte** ou **distribuição** de mercadorias, dos centros de produção aos mercados consumidores;
- Problemas de **minimização do custo** – impacto direto no lucro de cada produto;

- Dentro da PL, existem diversos modelos obtidos a partir de problemas reais
- Com relação a problemas de **logística**, podemos destacar:
  - Problemas de transporte;
  - Problemas de transbordo;
  - Problemas de designação.
- Referem-se, por exemplo, ao **transporte** ou **distribuição** de mercadorias, dos centros de produção aos mercados consumidores;
- Problemas de **minimização do custo** – impacto direto no lucro de cada produto;
- Limitações de oferta e demanda devem ser respeitadas – admite-se serem conhecidas.

- m centros de produção (**origens**);

- m centros de produção (**origens**);
- n centros consumidores (**destinos**);



Componentes do modelo

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

b_j : as quantidades requeridas (**demandadas**), em cada destino j

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

b_j : as quantidades requeridas (**demandadas**), em cada destino j

c_{ij} : o **custo unitário** de transporte da origem i ao destino j

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

b_j : as quantidades requeridas (**demandadas**), em cada destino j

c_{ij} : o **custo unitário** de transporte da origem i ao destino j

x_{ij} : a **quantidade** a ser transportada da origem i ao destino j

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

b_j : as quantidades requeridas (**demandadas**), em cada destino j

c_{ij} : o **custo unitário** de transporte da origem i ao destino j

x_{ij} : a **quantidade** a ser transportada da origem i ao destino j

- O que é transportado a partir de cada origem i para todos os destinos não pode ultrapassar a quantidade disponível do produto na mesma:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$$

Componentes do modelo

a_i : as quantidades disponíveis, ou **ofertadas**, em cada origem i

b_j : as quantidades requeridas (**demandadas**), em cada destino j

c_{ij} : o **custo unitário** de transporte da origem i ao destino j

x_{ij} : a **quantidade** a ser transportada da origem i ao destino j

- O que é transportado a partir de cada origem i para todos os destinos não pode ultrapassar a quantidade disponível do produto na mesma:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$$

- Da mesma forma, espera-se que as demandas de cada destino sejam satisfeitas:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

- O problema consiste em

$$\min C(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{(custo total)}$$

sujeito às restrições

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i && i = 1, \ldots, m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j && j = 1, \ldots, n \\
&x_{ij} \leq 0 && i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

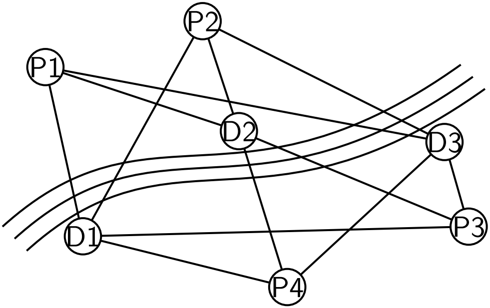
Exemplo: construção de rodovia[1]

- Na construção de uma rodovia, empregam-se jazidas de rochas para obtenção de pedra britada.

[1] Adaptado de ARENALES (2006)

Exemplo: construção de rodovia[1]

- Na construção de uma rodovia, empregam-se jazidas de rochas para obtenção de pedra britada.
- É conveniente transportar este material de jazidas em pedreiras localizadas nas proximidades para alguns pontos preestabelecidos ao longo do caminho em que passará a estrada.



Esquema para $m = 4$ pedreiras e $n = 3$ depósitos

[1]Adaptado de ARENALES (2006)

- A tabela a seguir contém os dados do problema. Os custos e demandas são dados por tonelada de pedra britada.

	Depósitos			
Pedreiras	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	30	13	21	433
2	12	40	26	215
3	27	15	35	782
4	37	25	19	300
demanda	697	421	612	

Se x_{ij} é a quantidade (em toneladas) da pedreira i para o depósito j, pode-se formular o problema como:

$$\begin{aligned}\min C = {} & 30x_{11} + 13x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 40x_{22} + 26x_{23} \\ & + 27x_{31} + 15x_{32} + 35x_{33} + 37x_{41} + 25x_{42} + 19x_{43}\end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{gathered}
x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 433 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 215 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 782 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 300 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 697 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 421 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 612 \\
x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{43} \geq 0
\end{gathered}$$

- Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1 , C_2, C_3 e C_4. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Distribuição para centros de consumo

- Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1 , C_2, C_3 e C_4. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Formule o modelo de transporte para se determinar o programa que torna mínimo o custo total de transporte entre as quatro cidades e os três centros consumidores.

Se $x_{ij} \geq 0$ é a quantidade de produtos transportados da unidade $i, i = 1, \ldots, 3$ para o centro $j, j = 1, \ldots, 4$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \min C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} \\ + 9x_{23} + x_{24} + 11x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34} \end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 9 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 8 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4 \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{34} \geq 0 \end{gathered}$$

1. Uma rede de depósitos de material de construção tem 4 lojas que devem ser abastecidas com 50 m^3 (L1), 80 m^3 (L2), 40 m^3 (L3), 100 m^3 (L4) de areia grossa. Essa areia pode ser encarregada em 3 portos P1, P2 e P3, cujas distâncias às lojas estão no quadro (em km):

	L1	L2	L3	L4
P1	30	20	24	18
P2	12	36	30	24
P3	8	15	25	20

O caminhão pode transportar 10 m^3 por viagem. Os portos tem areia para suprir qualquer demanda.
Estabelecer um plano de transporte que minimize a distância total percorrida entre os portos e as lojas e supra as necessidades das lojas.
Construa o modelo linear do problema.

2. Um dado produto é produzido em diferentes fábricas do país com capacidades de produção limitadas e deve ser levado a centros de distribuição (depósitos) em regiões onde há demandas a serem satisfeitas. O custo de transporte de cada fábrica a cada depósito é proporcional à quantidade transportada. A tabela a seguir fornece os custos unitários de transporte de cada fábrica para cada depósito, bem como as demandas em cada depósito e as produções de cada fábrica.

Depósitos/ Fábricas	Florianópolis	Rio de Janeiro	Salvador	Manaus	Produções
Curitiba	1	0,8	3	4,5	470
São Paulo	1,5	0,6	2,5	3	400
Aracaju	6	5	1,2	2,8	400
Demanda	350	300	300	120	

Faça a modelagem do problema.

3. A MG Auto tem três fábricas: uma em Los Angeles, uma em Detroit e outra em Nova Orleans, e duas grandes centrais de distribuição: uma em Denver e outra em Miami. As capacidades das três fábricas para o próximo trimestre são 1000, 1500 e 1200 carros. As demandas trimestrais nas duas centrais de distribuição são 2300 e 1400 carros. O mapa de distâncias entre as fábricas e as centrais de distribuição é dado na tabela a seguir.

Distância	Denver	Miami
Los Angeles	1000 mi	2690 mi
Detroit	1250 mi	1350 mi
Nova Orleans	1275 mi	850 mi

A empresa encarregada do transporte cobra 8 centavos por milha por carro. Formule o problema de transporte.

- Os problemas de transporte vistos são casos particulares de problemas de **programação linear**

Resolução de problemas de transporte

- Os problemas de transporte vistos são casos particulares de problemas de **programação linear**
- Como todo problema de PL, é possível a resolução algébrica via algoritmo simplex.

- Os problemas de transporte vistos são casos particulares de problemas de **programação linear**
- Como todo problema de PL, é possível a resolução algébrica via algoritmo simplex.
- Entretanto, é possível aproveitar as **particularidades** do problema de transporte para resolvê-lo de forma **mais eficiente** que o caso geral do simplex.

- Vamos considerar *a priori* que existe **igualdade** entre a oferta e a demanda, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Equilíbrio entre oferta e demanda

- Vamos considerar *a priori* que existe **igualdade** entre a oferta e a demanda, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Quando isso ocorre, dizemos que o problema está **em equilíbrio**;

Equilíbrio entre oferta e demanda

- Vamos considerar *a priori* que existe **igualdade** entre a oferta e a demanda, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Quando isso ocorre, dizemos que o problema está **em equilíbrio**;
- Outros casos serão discutidos adiante.

Exemplo

- Vamos retomar um exemplo visto anteriormente – o de distribuição para centros de consumo:

Exemplo

- Vamos retomar um exemplo visto anteriormente – o de distribuição para centros de consumo:
- Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1 , C_2, C_3 e C_4. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Exemplo

- Vamos retomar um exemplo visto anteriormente – o de distribuição para centros de consumo:
- Uma empresa fabrica um determinado produto em três cidades P_1, P_2 e P_3; o produto destina-se a quatro centros de consumo C_1 , C_2, C_3 e C_4. O custo estimado de transportar o produto das fábricas para os centros consumidores, assim como a demanda de cada centro e a oferta de cada fábrica é dado na tabela a seguir:

	Destino				
Origem	C_1	C_2	C_3	C_4	**Oferta**
P_1	10	7	6	5	9
P_2	2	8	9	1	10
P_3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Note que a quantidade ofertada e a demandada são as mesmas (27), portanto o problema está em equilíbrio.

- O modelo é dado por:

$$\min C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + x_{24} + 11x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34}$$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 8$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4$$
$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{34} \geq 0$$

- O modelo é dado por:

$$\min C = 10x_{11} + 7x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 8x_{22} \\ + 9x_{23} + x_{24} + 11x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34}$$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 9$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 8$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4$$
$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{34} \geq 0$$

- Nas **restrições de oferta**, substituíram-se as desigualdades por igualdades – simplificação que reforça o conceito do equilíbrio.

Quadro de soluções

- O **quadro de soluções** de um problema de transporte é um esquema de representação do problema em forma de tabela, para a metodologia de resolução a ser usada.

Quadro de soluções

- O **quadro de soluções** de um problema de transporte é um esquema de representação do problema em forma de tabela, para a metodologia de resolução a ser usada.
- Para um problema geral, é dado como

Origem \ Destino	1	2	...	n	**Oferta**
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
$\vdots$	...	...	$\ddots$	...	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Demanda	b_1	b_2	...	b_n	

Voltando ao exemplo anterior, o quadro de soluções é dado por

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Método *stepping stone*

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**

Método *stepping stone*

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**
- Esse método segue os mesmos passos do método simplex:

Método *stepping stone*

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**
- Esse método segue os mesmos passos do método simplex:
    1. Encontre uma solução básica (factível) inicial;

Método *stepping stone*

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**
- Esse método segue os mesmos passos do método simplex:
  1. Encontre uma solução básica (factível) inicial;
  2. Verifique se a solução é ótima;

Método *stepping stone*

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**
- Esse método segue os mesmos passos do método simplex:
  1. Encontre uma solução básica (factível) inicial;
  2. Verifique se a solução é ótima;
  3. Se não for ótima, encontre uma nova solução, a partir da atual, e volte ao passo anterior;

- Um método bastante usado na resolução de problemas de transporte é o chamado **stepping stone**
- Esse método segue os mesmos passos do método simplex:
  1. Encontre uma solução básica (factível) inicial;
  2. Verifique se a solução é ótima;
  3. Se não for ótima, encontre uma nova solução, a partir da atual, e volte ao passo anterior;
  4. Se for ótima, interrompa.

Solução Inicial

- Sabe-se que uma solução inicial deverá ser uma solução básica viável do **sistema** formado pelas **restrições** do modelo

- Sabe-se que uma solução inicial deverá ser uma solução básica viável do **sistema** formado pelas **restrições** do modelo
- Além disso:

Solução Inicial

- Sabe-se que uma solução inicial deverá ser uma solução básica viável do **sistema** formado pelas **restrições** do modelo
- Além disso:

Teorema

Qualquer equação do sistema formado pelas restrições do modelo pode ser obtida por uma **combinação linear** das demais, indicando que só existem $(m + n - 1)$ equações independentes naquele sistema.

Solução Inicial

- Sabe-se que uma solução inicial deverá ser uma solução básica viável do **sistema** formado pelas **restrições** do modelo
- Além disso:

Teorema

Qualquer equação do sistema formado pelas restrições do modelo pode ser obtida por uma **combinação linear** das demais, indicando que só existem $(m + n - 1)$ equações independentes naquele sistema.

- A consequência (corolário) desse teorema é que a base será formada por $(m + n - 1)$ variáveis básicas;

Solução Inicial

- Sabe-se que uma solução inicial deverá ser uma solução básica viável do **sistema** formado pelas **restrições** do modelo
- Além disso:

Teorema

Qualquer equação do sistema formado pelas restrições do modelo pode ser obtida por uma **combinação linear** das demais, indicando que só existem $(m + n - 1)$ equações independentes naquele sistema.

- A consequência (corolário) desse teorema é que a base será formada por $(m + n - 1)$ variáveis básicas;
- Existem diferentes critérios para encontrarmos a solução básica inicial.

Serão vistas duas maneiras de encontrar a solução inicial:

1. Regra do **canto Noroeste**

Serão vistas duas maneiras de encontrar a solução inicial:

1. Regra do **canto Noroeste**
2. Processo de **custo mínimo**

Regra do canto Noroeste

A regra será aplicada ao quadro de soluções segundo os seguintes passos:

1. Comece pela célula **superior esquerda** (ou seja, o "canto Noroeste" do quadro), associado ao custo c_{11};

Regra do canto Noroeste

A regra será aplicada ao quadro de soluções segundo os seguintes passos:

1. Comece pela célula **superior esquerda** (ou seja, o "canto Noroeste" do quadro), associado ao custo c_{11};
2. Coloque nessa célula a **maior quantidade permitida** pela oferta (linha) e demanda (coluna) correspondentes;

Regra do canto Noroeste

A regra será aplicada ao quadro de soluções segundo os seguintes passos:

1. Comece pela célula **superior esquerda** (ou seja, o "canto Noroeste" do quadro), associado ao custo c_{11};
2. Coloque nessa célula a **maior quantidade permitida** pela oferta (linha) e demanda (coluna) correspondentes;
3. Atualize os valores da oferta e da demanda que foram modicados pelo passo (2);

Regra do canto Noroeste

A regra será aplicada ao quadro de soluções segundo os seguintes passos:

1. Comece pela célula **superior esquerda** (ou seja, o "canto Noroeste" do quadro), associado ao custo c_{11};
2. Coloque nessa célula a **maior quantidade permitida** pela oferta (linha) e demanda (coluna) correspondentes;
3. Atualize os valores da oferta e da demanda que foram modicados pelo passo (2);
4. Siga para a célula à **direita** se houver alguma **oferta** restante e volte ao passo (2); Caso contrário, siga para a célula **inferior** e volte ao passo (2).

- Considere o quadro do exemplo anterior:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

Regra do Canto Noroeste

- Considere o quadro do exemplo anterior:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Na célula (1,1) (canto noroeste) atribuímos 7 unidades, que é a quantidade máxima de demanda do destino 1;

Regra do Canto Noroeste

- Considere o quadro do exemplo anterior:

Destino / Origem	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Na célula (1,1) (canto noroeste) atribuímos 7 unidades, que é a quantidade máxima de demanda do destino 1;
- Assim, toda demanda do destino 1 foi atendida e ainda restaram 2 unidades na origem 1.

Regra do Canto Noroeste

- Considere o quadro do exemplo anterior:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Na célula (1,1) (canto noroeste) atribuímos 7 unidades, que é a quantidade máxima de demanda do destino 1;
- Assim, toda demanda do destino 1 foi atendida e ainda restaram 2 unidades na origem 1.
- Devemos, então, seguir para a célula (1,2) e atribuir-lhe 2 unidades, que é o máximo valor que a origem 1 tem disponível.

Regra do Canto Noroeste

- O processo se repete até alcançarmos a **célula inferior direita** do quadro de soluções

- O processo se repete até alcançarmos a **célula inferior direita** do quadro de soluções
- Assim, encontraremos uma solução **inicial factível**

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10 **7**→	7 **2**↓	6	5	$\cancel{9}$ $\cancel{2}$
2	2	8 **4**→	9 **6**↓	1	$\cancel{10}$ $\cancel{6}$
3	11	12	8 **4**→	4 **4**	$\cancel{8}$ $\cancel{4}$
Demanda	$\cancel{7}$	$\cancel{6}$ $\cancel{4}$	$\cancel{10}$ $\cancel{4}$	$\cancel{4}$	

- O processo se repete até alcançarmos a **célula inferior direita** do quadro de soluções
- Assim, encontraremos uma solução **inicial factível**

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10 **7**→	7 **2**↓	6	5	~~9~~ ~~2~~
2	2	8 **4**→	9 **6**↓	1	~~10~~ ~~6~~
3	11	12	8 **4**→	4 **4**	~~8~~ ~~4~~
Demanda	~~7~~	~~6~~ ~~4~~	~~10~~ ~~4~~	~~4~~	

- No caso, temos

$$x_{11} = 7, x_{12} = 2, x_{22} = 4, x_{23} = 6, x_{33} = 4, x_{34} = 4 \text{ e } C = 218$$

Observação

É importante observar que na regra do canto Noroeste a solução inicial é obtida **sem** levar em consideração os **custos** dos transportes c_{ij}, isto é, depende exclusivamente das ofertas das origens e das demandas dos destinos.

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**
- Os seguintes passos devem ser seguidos:

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**
- Os seguintes passos devem ser seguidos:
  1. Localize no quadro o **menor** c_{ij} que **não tenha** oferta ou demanda nula

Processo de Custo Mínimo

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**
- Os seguintes passos devem ser seguidos:
  1. Localize no quadro o **menor** c_{ij} que **não tenha** oferta ou demanda nula
  2. Coloque na célula a **maior quantidade** permitida pela oferta e demanda correspondente

Processo de Custo Mínimo

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**
- Os seguintes passos devem ser seguidos:
  1. Localize no quadro o **menor** c_{ij} que **não tenha** oferta ou demanda nula
  2. Coloque na célula a **maior quantidade** permitida pela oferta e demanda correspondente
  3. Atualize os valores da oferta e da demanda que foram modicadas pelo passo (2) e volte ao passo (1).

Processo de Custo Mínimo

- Este processo para fornecer uma solução inicial leva em consideração, além das ofertas e das demandas, os valores dos **custos**
- Os seguintes passos devem ser seguidos:
  1. Localize no quadro o **menor** c_{ij} que **não tenha** oferta ou demanda nula
  2. Coloque na célula a **maior quantidade** permitida pela oferta e demanda correspondente
  3. Atualize os valores da oferta e da demanda que foram modicadas pelo passo (2) e volte ao passo (1).
- O processo se repete até que sejam esgotadas as ofertas e suprimidas as demandas de todos os destinos

Processo de Custo Mínimo

- No exemplo, o menor c_{ij} que aparece é 1, na célula (2,4).

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- No exemplo, o menor c_{ij} que aparece é 1, na célula (2,4).

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Logo, nesta célula, atribui-se a quantidade máxima de unidades permitida, levando em conta a restrição de oferta e demanda;

- No exemplo, o menor c_{ij} que aparece é 1, na célula (2,4).

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
Demanda	7	6	10	4	

- Logo, nesta célula, atribui-se a quantidade máxima de unidades permitida, levando em conta a restrição de oferta e demanda;
- Insere-se, assim, 4 unidades nesta célula, que é a demanda do destino 4, e atualiza-se a oferta da origem 2 para 6 unidades uma vez que 4 foram consumidas.

- Eliminando o destino 4 do quadro, o menor custo é igual a 2 e corresponde à célula (2,1);

- Eliminando o destino 4 do quadro, o menor custo é igual a 2 e corresponde à célula (2,1);
- A esta célula, serão atribuídas 6 unidades, esgotando-se a oferta da origem 2 e diminuindo a demanda do destino 1 para 1 unidade.

- Eliminando o destino 4 do quadro, o menor custo é igual a 2 e corresponde à célula (2,1);
- A esta célula, serão atribuídas 6 unidades, esgotando-se a oferta da origem 2 e diminuindo a demanda do destino 1 para 1 unidade.
- Este processo se repete até que todas as ofertas sejam consumidas e todas as demandas atendidas, quando então encontramos uma solução **inicial factível**.

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	~~9~~
2	2 **6**	8	9	1 **4**	~~10~~ ~~6~~
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	~~8~~ ~~7~~ ~~1~~
Demanda	~~7~~ ~~1~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~4~~	

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	$\cancel{9}$
2	2 **6**	8	9	1 **4**	$\cancel{10}$ $\cancel{6}$
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	$\cancel{8}$ $\cancel{7}$ $\cancel{1}$
Demanda	$\cancel{7}$ $\cancel{1}$	$\cancel{6}$	$\cancel{10}$ $\cancel{1}$	$\cancel{4}$	

- No exemplo, a solução inicial obtida foi:

$$x_{13} = 9 \;\; x_{21} = 6 \;\; x_{24} = 4 \;\; x_{31} = 1 \;\; x_{32} = 6 \;\; x_{33} = 1$$

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	~~9~~
2	2 **6**	8	9	1 **4**	~~10~~ ~~6~~
3	11 **1**	12 **6**	8 **1**	4	~~8~~ ~~7~~ ~~1~~
Demanda	~~7~~ ~~1~~	~~6~~	~~10~~ ~~1~~	~~4~~	

- No exemplo, a solução inicial obtida foi:

$$x_{13} = 9 \;\; x_{21} = 6 \;\; x_{24} = 4 \;\; x_{31} = 1 \;\; x_{32} = 6 \;\; x_{33} = 1$$

- Nesse caso, o custo da solução inicial será $C = 161$

Teste de otimalidade

- Conhecida uma solução básica viável inicial, devemos obter a função objetivo somente em função das variáveis não básicas, para saber se a presente solução já é ótima.

- Conhecida uma solução básica viável inicial, devemos obter a função objetivo somente em função das variáveis não básicas, para saber se a presente solução já é ótima.
- Da mesma forma como é feito no método simplex, caso a solução ainda não seja ótima devemos determinar a variável que entra e a que sai da base.

- É necessário eliminar as **variáveis básicas** da função objetivo e, para isso, devemos somar a ela múltiplos das restrições do modelo.

- É necessário eliminar as **variáveis básicas** da função objetivo e, para isso, devemos somar a ela múltiplos das restrições do modelo.
- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_m$ os valores que irão multiplicar as equações de **oferta**, antes de somá-las à função objetivo;

Método $u - v$

- É necessário eliminar as **variáveis básicas** da função objetivo e, para isso, devemos somar a ela múltiplos das restrições do modelo.
- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_m$ os valores que irão multiplicar as equações de **oferta**, antes de somá-las à função objetivo;
- Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os múltiplos análogos para cada restrição de **demanda**:

$$\min C - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1 \qquad (u_1)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m \qquad (u_m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1 \qquad (v_1)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n \qquad (v_n)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

- Conhecida uma solução viável básica, devemos ter:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

para cada uma das $(m + n - 1)$ variáveis básicas, de modo a eliminá-las da função objetivo.

- Conhecida uma solução viável básica, devemos ter:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

  para cada uma das $(m + n - 1)$ variáveis básicas, de modo a eliminá-las da função objetivo.
- Uma vez que o número de variáveis básicas é igual a $(m + n - 1)$ vamos ter $(m + n - 1)$ equações desse tipo;

- Conhecida uma solução viável básica, devemos ter:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

  para cada uma das $(m + n - 1)$ variáveis básicas, de modo a eliminá-las da função objetivo.
- Uma vez que o número de variáveis básicas é igual a $(m + n - 1)$ vamos ter $(m + n - 1)$ equações desse tipo;
- Uma vez que o número de incógnitas u_i e v_j é $(m + n)$, temos $(m + n - 1)$ equações, podemos atribuir um valor arbitrário a **uma dessas variáveis** sem violar as equações.

- Como exemplo, considere o quadro de soluções do método do custo mínimo.

- Como exemplo, considere o quadro de soluções do método do custo mínimo.
- Temos as seguintes equações, para as **variáveis básicas**:

$$
\begin{aligned}
x_{13} &: 6 - u_1 - v_3 = 0\\
x_{21} &: 2 - u_2 - v_1 = 0\\
x_{24} &: 1 - u_2 - v_4 = 0\\
x_{31} &: 11 - u_3 - v_1 = 0\\
x_{32} &: 12 - u_3 - v_2 = 0\\
x_{33} &: 8 - u_3 - v_3 = 0
\end{aligned}
$$

- Atribuindo um valor arbitrário a u_1, descobrimos os demais valores de u_i e v_j.

- Atribuindo um valor arbitrário a u_1, descobrimos os demais valores de u_i e v_j.
- Por exemplo, para $u_1 = 0$, temos:

$$v_1 = 9 \;\; v_2 = 10 \;\; v_3 = 6 \;\; v_4 = 8$$

$$u_1 = 0 \;\; u_2 = -7 \;\; u_3 = 2$$

- A partir dos valores de u_i e v_j, calcularemos os **coeficientes** das variáveis **não-básicas** da função objetivo.

- A partir dos valores de u_i e v_j, calcularemos os **coeficientes** das variáveis **não-básicas** da função objetivo.
- Ou seja:

$$x_{ij} : c_{ij} - u_i - v_j \, .$$

- A partir dos valores de u_i e v_j, calcularemos os **coeficientes** das variáveis **não-básicas** da função objetivo.
- Ou seja:

$$x_{ij} : c_{ij} - u_i - v_j \,.$$

- Para este exemplo, temos:

$$\begin{aligned}
x_{11} &: 10 - 0 - 9 = 1 \\
x_{12} &: 7 - 0 - 10 = -3 \\
x_{14} &: 5 - 0 - 8 = -3 \\
x_{22} &: 8 + 7 - 10 = 5 \\
x_{23} &: 9 + 7 - 6 = 10 \\
x_{34} &: 4 - 2 - 8 = -6
\end{aligned}$$

- Uma solução viável básica é **ótima** se, e somente se, $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ para todo i, j tal que x_{ij} seja uma variável **não básica**.

- Uma solução viável básica é **ótima** se, e somente se, $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ para todo i, j tal que x_{ij} seja uma variável **não básica**.
- Sendo assim, como as variáveis x_{12}, x_{14} e x_{34} apresentaram coeficientes **negativos** a solução ainda não é ótima.

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;

Construindo uma Nova Solução Factível

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;
- Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução.

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;
- Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução.
- Como acontece com o método simplex tradicional devemos:

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;
- Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução.
- Como acontece com o método simplex tradicional devemos:
  1. Determinar a variável que entra na base

Construindo uma Nova Solução Factível

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;
- Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução.
- Como acontece com o método simplex tradicional devemos:
    1. Determinar a variável que entra na base
    2. Determinar variável que sai da base

Construindo uma Nova Solução Factível

- Uma vez aplicado o Método $u - v$, podemos dizer se uma solução básica é ótima ou não;
- Caso não seja ótima, iniciamos a busca por uma nova solução.
- Como acontece com o método simplex tradicional devemos:
  1. Determinar a variável que entra na base
  2. Determinar variável que sai da base
  3. Identificar a nova solução factível

Passo 1: Encontrar a variável que entra na base

Passo 1: Encontrar a variável que entra na base

- Considerando apenas as variáveis **não básicas**, devemos escolher aquelas tais que

$$c_{ij} - u_i - v_j < 0$$

.

Passo 1: Encontrar a variável que entra na base

- Considerando apenas as variáveis **não básicas**, devemos escolher aquelas tais que

$$c_{ij} - u_i - v_j < 0$$

.

- No exemplo, escolhemos x_{12}, x_{14} e x_{34};

Passo 1: Encontrar a variável que entra na base

- Considerando apenas as variáveis **não básicas**, devemos escolher aquelas tais que
$$c_{ij} - u_i - v_j < 0$$
.
- No exemplo, escolhemos x_{12}, x_{14} e x_{34};
- Garantimos, assim, que o custo total seja **reduzido**.

Passo 1: Encontrar a variável que entra na base

- Considerando apenas as variáveis **não básicas**, devemos escolher aquelas tais que
$$c_{ij} - u_i - v_j < 0$$
.
- No exemplo, escolhemos x_{12}, x_{14} e x_{34};
- Garantimos, assim, que o custo total seja **reduzido**.
- Seguindo esse raciocínio, dentre as candidatas, escolhemos a de **menor valor**, ou seja, x_{34}, cujo coeficiente é -6.

Passo 2: Encontrar a variável que sai da base

Passo 2: Encontrar a variável que sai da base

- O aumento do valor da variável que entra na base dispara uma **reação em cadeia** para compensar mudanças nas demais variáveis básicas, de modo a continuar satisfazendo as restrições de oferta e demanda.

Passo 2: Encontrar a variável que sai da base

- O aumento do valor da variável que entra na base dispara uma **reação em cadeia** para compensar mudanças nas demais variáveis básicas, de modo a continuar satisfazendo as restrições de oferta e demanda.
- A primeira variável básica que chegar a **zero** se torna a variável que deixa a base.

Passo 2: Encontrar a variável que sai da base

- O aumento do valor da variável que entra na base dispara uma **reação em cadeia** para compensar mudanças nas demais variáveis básicas, de modo a continuar satisfazendo as restrições de oferta e demanda.
- A primeira variável básica que chegar a **zero** se torna a variável que deixa a base.
- Suponha que a variável x_{34} entrará na base com um valor $\theta \geq 0$, que deve ser o maior possível.

Passo 2 (continuação)

Passo 2 (continuação)

- Estabelecemos, então, um valor θ para variável x_{34}, o que significa diminuir x_{24} na mesma quantidade para restabelecer a demanda igual a 4 (coluna 4)

Passo 2 (continuação)

- Estabelecemos, então, um valor θ para variável x_{34}, o que significa diminuir x_{24} na mesma quantidade para restabelecer a demanda igual a 4 (coluna 4)
- Essa mudança requer, então, aumentar x_{21} na mesma quantidade para continuar obedecendo a oferta (linha 2)

Passo 2 (continuação)

- Estabelecemos, então, um valor θ para variável x_{34}, o que significa diminuir x_{24} na mesma quantidade para restabelecer a demanda igual a 4 (coluna 4)
- Essa mudança requer, então, aumentar x_{21} na mesma quantidade para continuar obedecendo a oferta (linha 2)
- Mais uma vez, tal mudança requer diminuir a variável x_{31} na mesma quantidade para restabelecer a demanda 7 (coluna 1)

Passo 2 (continuação)

- Estabelecemos, então, um valor θ para variável x_{34}, o que significa diminuir x_{24} na mesma quantidade para restabelecer a demanda igual a 4 (coluna 4)
- Essa mudança requer, então, aumentar x_{21} na mesma quantidade para continuar obedecendo a oferta (linha 2)
- Mais uma vez, tal mudança requer diminuir a variável x_{31} na mesma quantidade para restabelecer a demanda 7 (coluna 1)
- Esse decrescimento também restabelece a oferta da origem 3 igual 8 (linha 3)

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	9
2	2 $\mathbf{6} + \theta$	8	9	1 $\mathbf{4} - \theta$	10
3	11 $\mathbf{1} - \theta$	12 **6**	8 **1**	4 θ	8
Demanda	7	6	10	4	

Passo 2 (continuação)

Passo 2 (continuação)

- Devemos, agora, determinar o maior valor permitido a θ, isto é, o valor de θ que gera a variável básica que se anula mais rapidamente.

Passo 2 (continuação)

- Devemos, agora, determinar o maior valor permitido a θ, isto é, o valor de θ que gera a variável básica que se anula mais rapidamente.
- Do quadro anterior, temos:

$$\begin{aligned} x_{21} &= 6 + \theta \\ x_{24} = 4 - \theta \geq 0 \therefore \theta &\leq 4 \\ x_{31} = 1 - \theta \geq 0 \therefore \theta &\leq 1 \end{aligned}$$

Passo 2 (continuação)

- Devemos, agora, determinar o maior valor permitido a θ, isto é, o valor de θ que gera a variável básica que se anula mais rapidamente.
- Do quadro anterior, temos:

$$\begin{aligned} x_{21} &= 6 + \theta \\ x_{24} = 4 - \theta \geq 0 \therefore \theta &\leq 4 \\ x_{31} = 1 - \theta \geq 0 \therefore \theta &\leq 1 \end{aligned}$$

- Então $\theta = 1$ e x_{31} é a variável que sai da base, por ser a primeira a se anular.

Passo 3: Encontrar a nova solução básica

Passo 3: Encontrar a nova solução básica

- A nova solução viável básica é identificada adicionando-se o valor de θ no último quadro.

Passo 3: Encontrar a nova solução básica

- A nova solução viável básica é identificada adicionando-se o valor de θ no último quadro.
- O valor da variável que sai é $x_{31} = 1$, e o quadro ficará:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	9
2	2 **7**	8	9	1 **3**	10
3	11 **0**	12 **6**	8 **1**	4 **1**	8
Demanda	7	6	10	4	

Passo 3: Encontrar a nova solução básica

- A nova solução viável básica é identificada adicionando-se o valor de θ no último quadro.
- O valor da variável que sai é $x_{31} = 1$, e o quadro ficará:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7	6 **9**	5	9
2	2 **7**	8	9	1 **3**	10
3	11 **0**	12 **6**	8 **1**	4 **1**	8
Demanda	7	6	10	4	

- E o custo dessa solução será: $C = 155$

- Precisamos, agora, saber se a nova solução é ótima.

- Precisamos, agora, saber se a nova solução é ótima.
- Para isso, calculamos novamente os valores de u_i e v_j:

$$
\begin{aligned}
x_{13} &: 6 - u_1 - v_3 = 0 \\
x_{21} &: 2 - u_2 - v_1 = 0 \\
x_{24} &: 1 - u_2 - v_4 = 0 \\
x_{32} &: 12 - u_3 - v_2 = 0 \\
x_{33} &: 8 - u_3 - v_3 = 0 \\
x_{34} &: 4 - u_3 - v_4 = 0
\end{aligned}
$$

- Precisamos, agora, saber se a nova solução é ótima.
- Para isso, calculamos novamente os valores de u_i e v_j:

$$x_{13} : 6 - u_1 - v_3 = 0$$
$$x_{21} : 2 - u_2 - v_1 = 0$$
$$x_{24} : 1 - u_2 - v_4 = 0$$
$$x_{32} : 12 - u_3 - v_2 = 0$$
$$x_{33} : 8 - u_3 - v_3 = 0$$
$$x_{34} : 4 - u_3 - v_4 = 0$$

- Fazendo $u_3 = 0$, temos:

$$u_1 = -2 \quad u_2 = -3$$

$$v_4 = 4 \quad v_1 = 5 \quad v_3 = 8 \quad v_2 = 12$$

- Em seguida, encontramos o valor de cada coeficiente das variáveis não básicas ($c_{ij} - u_i - v_j$):

$$\begin{aligned}
x_{11} &: 10 + 2 - 5 = 7 \\
x_{12} &: 7 + 2 - 12 = -3 \\
x_{14} &: 5 + 2 - 4 = 3 \\
x_{22} &: 8 + 3 - 12 = -1 \\
x_{23} &: 9 + 3 - 8 = 4 \\
x_{31} &: 11 - 0 - 5 = 6
\end{aligned}$$

- Em seguida, encontramos o valor de cada coeficiente das variáveis não básicas $(c_{ij} - u_i - v_j)$:

$$\begin{aligned}
x_{11} &: 10 + 2 - 5 = 7 \\
x_{12} &: 7 + 2 - 12 = -3 \\
x_{14} &: 5 + 2 - 4 = 3 \\
x_{22} &: 8 + 3 - 12 = -1 \\
x_{23} &: 9 + 3 - 8 = 4 \\
x_{31} &: 11 - 0 - 5 = 6
\end{aligned}$$

- Como há coeficientes negativos, a solução não é ótima e a variável que deve entrar na base é x_{12} por apresentar o menor coeficiente negativo (-3)

- Finalmente, calculamos o valor de θ:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7 θ	6 $\mathbf{9} - \theta$	5	9
2	2 7	8	9	1 3	10
3	11	12 $\mathbf{6} - \theta$	8 $\mathbf{1} + \theta$	4 **1**	8
Demanda	7	6	10	4	

$$x_{13} = 9 - \theta \geq 0 \quad \therefore \quad \theta \leq 9$$
$$x_{32} = 6 - \theta \geq 0 \quad \therefore \quad \theta \leq 6$$
$$x_{33} = 1 + \theta \geq 0$$

- Finalmente, calculamos o valor de θ:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7 θ	6 $\mathbf{9} - \theta$	5	9
2	2 7	8	9	1 3	10
3	11	12 $\mathbf{6} - \theta$	8 $\mathbf{1} + \theta$	4 **1**	8
Demanda	7	6	10	4	

$$x_{13} = 9 - \theta \geq 0 \quad \therefore \quad \theta \leq 9$$
$$x_{32} = 6 - \theta \geq 0 \quad \therefore \quad \theta \leq 6$$
$$x_{33} = 1 + \theta \geq 0$$

- Sendo assim, o valor máximo que θ pode assumir é 6 e a variável que deve deixar a base é x_{32}

- O valor da variável que sai é $x_{31} = 1$ o quadro ficará:

Origem \ Destino	1	2	3	4	**Oferta**
1	10	7 / **6**	6 / **3**	5	9
2	2 / 7	8	9	1 / 3	10
3	11	12 / **0**	8 / **7**	4 / **1**	8
Demanda	7	6	10	4	

- Ao final desse passo, calculamos novamente os valores de u_i e v_j:

$$
\begin{aligned}
x_{12} &: 7 - u_1 - v_2 = 0 \\
x_{13} &: 6 - u_1 - v_3 = 0 \\
x_{21} &: 2 - u_2 - v_1 = 0 \\
x_{24} &: 1 - u_2 - v_4 = 0 \\
x_{33} &: 8 - u_3 - v_3 = 0 \\
x_{34} &: 4 - u_3 - v_4 = 0
\end{aligned}
$$

- Ao final desse passo, calculamos novamente os valores de u_i e v_j:

$$
\begin{aligned}
x_{12} &: 7 - u_1 - v_2 = 0 \\
x_{13} &: 6 - u_1 - v_3 = 0 \\
x_{21} &: 2 - u_2 - v_1 = 0 \\
x_{24} &: 1 - u_2 - v_4 = 0 \\
x_{33} &: 8 - u_3 - v_3 = 0 \\
x_{34} &: 4 - u_3 - v_4 = 0
\end{aligned}
$$

- Para $u_1 = 0$, temos:

$$v_2 = 7 \quad u_3 = 2 \quad u_2 = -1$$

$$v_1 = 3 \quad v_3 = 6 \quad v_4 = 2$$

- E os valores dos coeficientes:

$$
\begin{aligned}
x_{11} &: 10 - 0 - 3 = 7 \\
x_{14} &: 5 - 0 - 2 = 3 \\
x_{22} &: 8 + 1 - 7 = 2 \\
x_{23} &: 9 + 1 - 6 = 4 \\
x_{31} &: 11 - 2 - 3 = 6 \\
x_{32} &: 12 - 2 - 7 = 3
\end{aligned}
$$

- E os valores dos coeficientes:

$$\begin{aligned}
x_{11} &: 10 - 0 - 3 = 7 \\
x_{14} &: 5 - 0 - 2 = 3 \\
x_{22} &: 8 + 1 - 7 = 2 \\
x_{23} &: 9 + 1 - 6 = 4 \\
x_{31} &: 11 - 2 - 3 = 6 \\
x_{32} &: 12 - 2 - 7 = 3
\end{aligned}$$

- Como não há coeficiente negativo a solução é ótima:

$$x_{12} = 6 \;\; x_{13} = 3 \;\; x_{21} = 7 \;\; x_{24} = 3 \;\; x_{33} = 7 \;\; x_{34} = 1$$

$$C = 137$$

Problemas desbalanceados

Para a resolução de problemas **desbalanceados** usando o *stepping-stone*:

- **Oferta maior que a demanda** ($\sum_i a_i > \sum_j b_j$):
  Introduzir um **destino fantasma** (também chamado **sentinela** ou ***dummy***) cujos custos unitários de transporte sejam todos zero, independente da origem; e com demanda igual à diferença entre o total ofertado e o total demandado.

Problemas desbalanceados

Para a resolução de problemas **desbalanceados** usando o *stepping-stone*:

- **Oferta maior que a demanda** ($\sum_i a_i > \sum_j b_j$):
  Introduzir um **destino fantasma** (também chamado **sentinela** ou ***dummy***) cujos custos unitários de transporte sejam todos zero, independente da origem; e com demanda igual à diferença entre o total ofertado e o total demandado.
- **Demanda maior que oferta** ($\sum_i a_i < \sum_j b_j$):
  Introduzir uma **fonte de oferta fantasma** (fonte *dummy*), com custos unitários zero para todos os destinos, e com oferta igual à diferença entre o total demandado e o total ofertado.

1. Busque a solução do problema 3 de transporte visto anteriormente (MG Auto).
2. Considere que um produto é fabricado em 3 unidades F_1, F_2, F_3, sendo posteriormente estocado em 4 depósitos D_1, D_2, D_3 e D_4. As capacidades fabris são $a_1 = 40$, $a_2 = 80$ e $a_3 = 110$, respectivamente para F_1, F_2 e F_3. Nos depósitos devem se atender as demandas: $b_1 = 20$, $b_2 = 30$, $b_3 = 100$ e $b_4 = 80$, respectivamente, para D_1, D_2, D_3 e D_4.
   Os custos unitários de transportes são dados na tabela:

	D_1	D_2	D_3	D_4
F_1	10	5	12	4
F_2	2	0	1	9
F_3	13	11	14	6

Faça a modelagem do problema, e em seguida, usando o método *stepping-stone*, encontre sua solução ótima.

3. Determine a solução do exemplo da construção da rodovia visto anteriormente, substituindo as desigualdades por igualdades nas restrições de oferta.
4. Resolva o exercício 2 de modelagem visto anteriormente, recorrendo aos pontos *dummy* apropriados.

Referências

1. ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.
2. LACHTERMACHER, G. *Pesquisa operacional na tomada de decisões*, 2ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.
3. MARINS, F. A. S. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
4. NOGUEIRA, F. *Pesquisa Operacional*, UFJF.
5. TAHA, H. *Pesquisa operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU). Material desenvolvido com base no trabalho da Profa. Alane A. Silva (UFPE).
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

Sumário

- Em determinadas situações, podem-se usar **localidades intermediárias** entre a origem e o destino dos produtos a serem transportados

- Em determinadas situações, podem-se usar **localidades intermediárias** entre a origem e o destino dos produtos a serem transportados
  - Tais localidades são denominadas **de transbordo**;

Introdução

- Em determinadas situações, podem-se usar **localidades intermediárias** entre a origem e o destino dos produtos a serem transportados
  - Tais localidades são denominadas **de transbordo**;
  - Podem representar, por exemplo, depósitos ou centros de distribuição regionais;

- Em determinadas situações, podem-se usar **localidades intermediárias** entre a origem e o destino dos produtos a serem transportados
  - Tais localidades são denominadas **de transbordo**;
  - Podem representar, por exemplo, depósitos ou centros de distribuição regionais;
  - Problemas de transporte contendo estes pontos intermediários são chamados de **problemas de transbordo**.

Modelagem

Em problemas de transbordo, consideram-se alguns aspectos:

- O que é transportado das unidades intermediárias (de transbordo) aos mercados consumidores não deve ultrapassar a quantidade de produto que chega a tais pontos;

Em problemas de transbordo, consideram-se alguns aspectos:

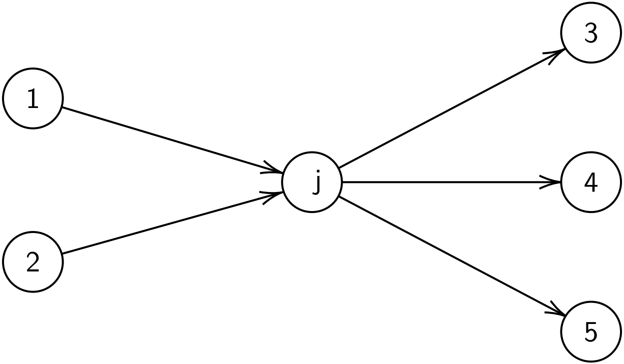
- O que é transportado das unidades intermediárias (de transbordo) aos mercados consumidores não deve ultrapassar a quantidade de produto que chega a tais pontos;
- Transportar além do necessário pode ser mais caro do que transportar somente o necessário.

Em problemas de transbordo, consideram-se alguns aspectos:

- O que é transportado das unidades intermediárias (de transbordo) aos mercados consumidores não deve ultrapassar a quantidade de produto que chega a tais pontos;
- Transportar além do necessário pode ser mais caro do que transportar somente o necessário.
  - A quantidade transportada de cada unidade de transbordo aos mercados consumidores deve ser igual a que chega à mesma dos centros de produção. Logo, deve-se adicionar o modelo de transporte uma restrição

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k x_{jk}$$

    para cada unidade de transbordo j.



$$x_{1j} + x_{2j} = x_{j3} + x_{j4} + x_{j5} \, .$$

Exemplo

- (ARENALES, 2006) Considere uma empresa de bebidas com 2 centros de produção (Araraquara e S. José dos Campos, com um suprimento de 800 e 1 000 unidades, respectivamente) e 3 mercados consumidores principais – S. Paulo, Belo Horizonte e R. de Janeiro, com demandas respectivas de 500, 400 e 900 unidades.

Exemplo

- (ARENALES, 2006) Considere uma empresa de bebidas com 2 centros de produção (Araraquara e S. José dos Campos, com um suprimento de 800 e 1 000 unidades, respectivamente) e 3 mercados consumidores principais – S. Paulo, Belo Horizonte e R. de Janeiro, com demandas respectivas de 500, 400 e 900 unidades.
- A empresa dispõe de 2 depósitos para abastecer tais mercados, localizados em Campinas e Barra Mansa. Suponha que os mercados sejam abastecidos somente a partir de tais depósitos.
  Os custos unitários de transporte de cada centro de produção para cada depósito, e de cada depósito para cada mercado consumidor é dado pelas tabelas que seguem.

- Custos unitários de transporte de centros de produção aos depósitos

Centros de suprimento	Depósitos	
	Campinas (3)	Barra Mansa (4)
Araraquara (1)	1	3
S. José dos Campos (2)	1	2

- Custos unitários de transporte de centros de produção aos depósitos

Centros de suprimento	Depósitos	
	Campinas (3)	Barra Mansa (4)
Araraquara (1)	1	3
S. José dos Campos (2)	1	2

- Custos unitários dos depósitos aos mercados consumidores

Depósitos	Mercados consumidores		
	São Paulo (5)	B. Horizonte (6)	R. Janeiro (7)
Campinas (3)	1	3	3
Barra Mansa (4)	3	4	1

Sendo x_{ij} a quantidade transportada do ponto i ao ponto j:

$$\begin{aligned}\min f(x_{13},\ldots,x_{47}) = x_{13} + 3x_{14} + x_{23} + 2x_{24} \\ + x_{35} + 3x_{36} + 3x_{37} + 3x_{45} + 4x_{46} + x_{47}\end{aligned}$$

sujeito a

$$\begin{gathered} x_{13} + x_{14} \leq 800 \\ x_{23} + x_{24} \leq 1000 \\ x_{35} + x_{45} = 500 \\ x_{36} + x_{46} = 400 \\ x_{37} + x_{47} = 900 \\ x_{13} + x_{23} = x_{35} + x_{36} + x_{37} \\ x_{14} + x_{24} = x_{45} + x_{46} + x_{47} \\ x_{13} \geq 0, x_{14} \geq 0, \ \ldots, x_{47} \geq 0\,. \end{gathered}$$

Referências

1. ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU). Material desenvolvido com base no trabalho da Profa. Alane A. Silva (UFPE).
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

Sumário

4 Problema de designação

- Um caso especial do modelo de transportes é aquele em que cada origem tem **uma unidade disponível** e cada destino requer, também, **uma unidade**.

- Um caso especial do modelo de transportes é aquele em que cada origem tem **uma unidade disponível** e cada destino requer, também, **uma unidade**.
- Por exemplo:

- Um caso especial do modelo de transportes é aquele em que cada origem tem **uma unidade disponível** e cada destino requer, também, **uma unidade**.
- Por exemplo:
  - Escalar vendedores para pontos de venda;

- Um caso especial do modelo de transportes é aquele em que cada origem tem **uma unidade disponível** e cada destino requer, também, **uma unidade**.
- Por exemplo:
  - Escalar vendedores para pontos de venda;
  - Distribuir atividades entre membros de uma equipe;

Introdução

- Um caso especial do modelo de transportes é aquele em que cada origem tem **uma unidade disponível** e cada destino requer, também, **uma unidade**.
- Por exemplo:
  - Escalar vendedores para pontos de venda;
  - Distribuir atividades entre membros de uma equipe;
  - Alocar máquinas para resolver diferentes tarefas.

Exemplo

Deseja-se designar quatro operários para quatro tarefas, de maneira que o número total de homens-hora seja mínimo. Cada homem desempenha cada tarefa em um determinado número de horas, conforme indicam os dados da matriz de custos a seguir:

	Operário 1	Operário 2	Operário 3	Operário 4
Tarefa 1	10	12	15	16
Tarefa 2	14	12	13	18
Tarefa 3	10	16	19	15
Tarefa 4	14	12	13	15

- Diferente dos problemas de transporte tradicionais, temos apenas 1 na origem e 1 no destino.

- Diferente dos problemas de transporte tradicionais, temos apenas 1 na origem e 1 no destino.
- Assim, pelas **arestas** (**"caminhos"**) devemos apenas transferir **uma** ou **nenhuma** "carga".

- Diferente dos problemas de transporte tradicionais, temos apenas 1 na origem e 1 no destino.
- Assim, pelas **arestas** (**"caminhos"**) devemos apenas transferir **uma** ou **nenhuma** "carga".
- Logo, nossa variável de decisão pode assumir apenas dois valores: 0 ou 1.

- Diferente dos problemas de transporte tradicionais, temos apenas 1 na origem e 1 no destino.
- Assim, pelas **arestas** (**"caminhos"**) devemos apenas transferir **uma** ou **nenhuma** "carga".
- Logo, nossa variável de decisão pode assumir apenas dois valores: 0 ou 1.
- Definimos, então:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } i \text{ for atribuída ao operário } j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Assim, o modelo de designação pode ser escrito da seguinte maneira:

- Assim, o modelo de designação pode ser escrito da seguinte maneira:

Função Objetivo

$$\min C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- Assim, o modelo de designação pode ser escrito da seguinte maneira:

Função Objetivo

$$\min C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Restrições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ \ j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Retornando ao exemplo ($m = 4$ tarefas para $n = 4$ operários):

$$\min C = 10x_{11} + 12x_{12} + 15x_{13} + 16x_{14} + 14x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 18x_{24} +$$

$$10x_{31} + 16x_{32} + 19x_{33} + 15x_{34} + 14x_{41} + 12x_{42} + 13x_{43} + 15x_{44}$$

sujeito a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Algoritmo de Designação

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**

Algoritmo de Designação

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.

Algoritmo de Designação

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.
- No entanto, existe um método bastante eficiente (baseado no método *stepping stone*) para resolução do problema.

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.
- No entanto, existe um método bastante eficiente (baseado no método *stepping stone*) para resolução do problema.
- Esse método é chamado **método húngaro**.

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.
- No entanto, existe um método bastante eficiente (baseado no método *stepping stone*) para resolução do problema.
- Esse método é chamado **método húngaro**.
- Antes de aplicá-lo, porém, devemos verificar se o modelo está **equilibrado**.

Algoritmo de Designação

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.
- No entanto, existe um método bastante eficiente (baseado no método *stepping stone*) para resolução do problema.
- Esse método é chamado **método húngaro**.
- Antes de aplicá-lo, porém, devemos verificar se o modelo está **equilibrado**.
  - No modelo de designação, o número de origens deve ser igual ao número de destinos – **Matriz quadrada**;

Algoritmo de Designação

- Devido às suas particularidades, a resolução do problema de designação torna-se complexa por meio do método simplex.
- De fato, não temos mais variáveis de decisão contínuas, mas **discretas**
  - Somente **valores inteiros** válidos, mais especificamente, somente **0 ou 1**.
- No entanto, existe um método bastante eficiente (baseado no método *stepping stone*) para resolução do problema.
- Esse método é chamado **método húngaro**.
- Antes de aplicá-lo, porém, devemos verificar se o modelo está **equilibrado**.
  - No modelo de designação, o número de origens deve ser igual ao número de destinos – **Matriz quadrada**;
  - Caso isso não ocorra, devemos construir origens ou destinos auxiliares, com custo de transferência zero.

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).
2. Designar origens para destinos nas células em que aparece o elemento nulo; dar preferência às linhas ou colunas que tenham **apenas um zero** disponível; cada designação efetuada invalida os outros zeros na linha e na coluna da célula designada; se a designação se completa, o problema está resolvido.

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).
2. Designar origens para destinos nas células em que aparece o elemento nulo; dar preferência às linhas ou colunas que tenham **apenas um zero** disponível; cada designação efetuada invalida os outros zeros na linha e na coluna da célula designada; se a designação se completa, o problema está resolvido.
3. Se não estiver resolvido, devemos:

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).
2. Designar origens para destinos nas células em que aparece o elemento nulo; dar preferência às linhas ou colunas que tenham **apenas um zero** disponível; cada designação efetuada invalida os outros zeros na linha e na coluna da célula designada; se a designação se completa, o problema está resolvido.
3. Se não estiver resolvido, devemos:
    1. Cobrir os zeros da tabela com o **menor** número de traços – horizontais e verticais – possível;

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).
2. Designar origens para destinos nas células em que aparece o elemento nulo; dar preferência às linhas ou colunas que tenham **apenas um zero** disponível; cada designação efetuada invalida os outros zeros na linha e na coluna da célula designada; se a designação se completa, o problema está resolvido.
3. Se não estiver resolvido, devemos:
    1. Cobrir os zeros da tabela com o **menor** número de traços – horizontais e verticais – possível;
    2. Subtrair o menor valor dentre os números não cobertos, de todos os elementos da tabela;

Passos do Método Húngaro

1. Subtrair de cada linha seu **menor valor**; em seguida fazer o mesmo com as colunas; cada linha e cada coluna deverá, então, apresentar pelo menos um elemento nulo (zero).
2. Designar origens para destinos nas células em que aparece o elemento nulo; dar preferência às linhas ou colunas que tenham **apenas um zero** disponível; cada designação efetuada invalida os outros zeros na linha e na coluna da célula designada; se a designação se completa, o problema está resolvido.
3. Se não estiver resolvido, devemos:
    1. Cobrir os zeros da tabela com o **menor** número de traços – horizontais e verticais – possível;
    2. Subtrair o menor valor dentre os números não cobertos, de todos os elementos da tabela;
    3. Retornar ao item (2).

Exemplo

- Para a matriz de custos do exemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 16 \\ 14 & 12 & 13 & 18 \\ 10 & 16 & 19 & 15 \\ 14 & 12 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

Exemplo

- Para a matriz de custos do exemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 16 \\ 14 & 12 & 13 & 18 \\ 10 & 16 & 19 & 15 \\ 14 & 12 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

- Subtraindo o menor elemento das linhas (respectivamente: 10,12,10,12):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Subtraindo o menor elemento das colunas (respectivamente: 0,0,1,3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Subtraindo o menor elemento das colunas (respectivamente: 0,0,1,3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Designando nos zeros de linhas ou colunas (de preferência, linhas ou colunas com apenas um zero) e anulando os outros zeros:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2 & 4 & 3 \\ 2 & \mathbf{0} & X & 3 \\ X & 6 & 8 & 2 \\ 2 & X & X & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Subtraindo o menor elemento das colunas (respectivamente: 0,0,1,3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Designando nos zeros de linhas ou colunas (de preferência, linhas ou colunas com apenas um zero) e anulando os outros zeros:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2 & 4 & 3 \\ 2 & \mathbf{0} & X & 3 \\ X & 6 & 8 & 2 \\ 2 & X & X & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Não encontramos uma solução ótima, pois a terceira linha não apresenta uma **designação válida**.

- Cobrimos, então, os zeros, usando o menor número possível de traços.

$$\begin{pmatrix} | & 2 & 4 & 3 \\ | & - & - & - \\ | & 6 & 8 & 2 \\ | & - & - & - \end{pmatrix}$$

- Cobrimos, então, os zeros, usando o menor número possível de traços.

$$\begin{pmatrix} | & 2 & 4 & 3 \\ | & - & - & - \\ | & 6 & 8 & 2 \\ | & - & - & - \end{pmatrix}$$

- A matriz resultante dessa eliminação é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

cujo menor valor é 2

- Cobrimos, então, os zeros, usando o menor número possível de traços.

$$\begin{pmatrix} | & 2 & 4 & 3 \\ | & - & - & - \\ | & 6 & 8 & 2 \\ | & - & - & - \end{pmatrix}$$

- A matriz resultante dessa eliminação é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

  cujo menor valor é 2

- Subtraímos 2 de toda matriz resultante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- E “recolocamos” essa matriz na original:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(note que os valores que havíamos eliminado não são modificados)

- E "recolocamos" essa matriz na original:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(note que os valores que havíamos eliminado não são modificados)

- Finalmente, designando novamente nos zeros de linhas ou colunas (de preferência, linhas ou colunas com apenas um zero) e anulando os outros zeros:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & X & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & X & 3 \\ X & 4 & 6 & \mathbf{0} \\ 2 & X & \mathbf{0} & X \end{pmatrix}$$

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:
  - Tarefa 1 é atribuída ao Operário 1

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:
  - Tarefa 1 é atribuída ao Operário 1
  - Tarefa 2 é atribuída ao Operário 2

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:
  - Tarefa 1 é atribuída ao Operário 1
  - Tarefa 2 é atribuída ao Operário 2
  - Tarefa 3 é atribuída ao Operário 4

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:
  - Tarefa 1 é atribuída ao Operário 1
  - Tarefa 2 é atribuída ao Operário 2
  - Tarefa 3 é atribuída ao Operário 4
  - Tarefa 4 é atribuída ao Operário 3

- Como resultado, temos: $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{34} = 1, x_{43} = 1$, ou seja:
  - Tarefa 1 é atribuída ao Operário 1
  - Tarefa 2 é atribuída ao Operário 2
  - Tarefa 3 é atribuída ao Operário 4
  - Tarefa 4 é atribuída ao Operário 3
- Os demais valores de x_{ij} são nulos

1. (TAHA, 2008) Os três filhos de Joe Klyne – John, Karen e Terri – querem ganhar algum dinheiro para gastar durante uma excursão da escola. O Sr. Klyne escolheu três tarefas para seus filhos: 1) cortar grama; 2) pintar a porta da garagem; e 3) lavar os carros da família. Para evitar concorrência entre os filhos, ele pediu que cada um apresentasse propostas fechadas do que fosse considerado um pagamento justo para realizar cada uma das tarefas. Ficou combinado que os três concordariam com a decisão do pai sobre quem executaria qual tarefa. A tabela a seguir resume as propostas recebidas, em $:

	Cortar	Pintar	Lavar
John	15	10	9
Karen	9	15	10
Terri	10	12	8

Como o Sr. Klyne deve designar as tarefas?

Exercícios II

2. Um treinador precisa formar um time de nadadoras para competir em uma prova olímpica de 400 metros *medley*. As nadadoras apresentam as seguintes médias de tempo (em segundos) em provas individuais de 100 metros, em cada estilo:

	Livre	Peito	Borboleta	Costas
Flor	54	54	51	53
Gabriela	51	57	52	52
Teresa	50	53	54	56
Tieta	56	54	55	53

Modele esse problema e resolva-o pelo método húngaro.

Referências

1. TAHA, H. *Pesquisa operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

Os materiais desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU). Material desenvolvido com base no trabalho da Profa. Alane A. Silva (UFPE).
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU