



Pesquisa operacional, introdução à programação linear e solução gráfica

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

2023/1



Sumário



1 Pesquisa Operacional e Tomada de Decisões



- Tarefa básica da gestão
- Alternativas viáveis



- ① Identificar o problema
- ② Formular objetivos
- ③ Analisar limitações
- ④ Avaliar alternativas



Segundo Marins (2011)

“É o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões com relação a operações sob seu controle”



Origens



- Termo **Pesquisa Operacional**: tradução direta de *Operational research*.
- Inglaterra (1934): invenção do **radar**.
- 1936: Estação de Pesquisa Manor Bawdsey (Suffolk) – como interceptar **aviões inimigos**?
- A. P. Rowe (1938), superintendente da estação: criação do termo.
 - ▶ **Eficiência** de técnicas de operações a partir de experimentos com interceptação.
 - ▶ Análise científica do **uso operacional** de recursos militares: **II Guerra Mundial**.



- Pós-Guerra: rápida ascensão na Inglaterra e EUA
- EUA (1947): SCOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) – Pentágono
 - ▶ Marshall Wood (economista) e George Dantzig (matemático – método **simplex**).
 - ▶ Programação **linear**
- 1952: ORSA (Sociedade Americana de Pesquisa Operacional)
- 1953: ORS (Sociedade de Pesquisa Operacional) – Inglaterra

Focos distintos

- Pesquisa inglesa: estudos de caso, problemas específicos
- Pesquisa americana: **modelos** e **métodos** matemáticos



Alguns temas pesquisados:

- Teoria de estoques
- Teoria de filas
- Reposição de equipamentos
- Agendamento de tarefas em máquinas
- Teoria de jogos
- Fluxos de redes
- **Otimização** linear



- 1o. Simpósio: ITA – S. José dos Campos (1968)
- Criação do curso de Engenharia de Produção (ITA)
- **SOBRAPO**: Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional¹

¹www.sobrapo.org.br



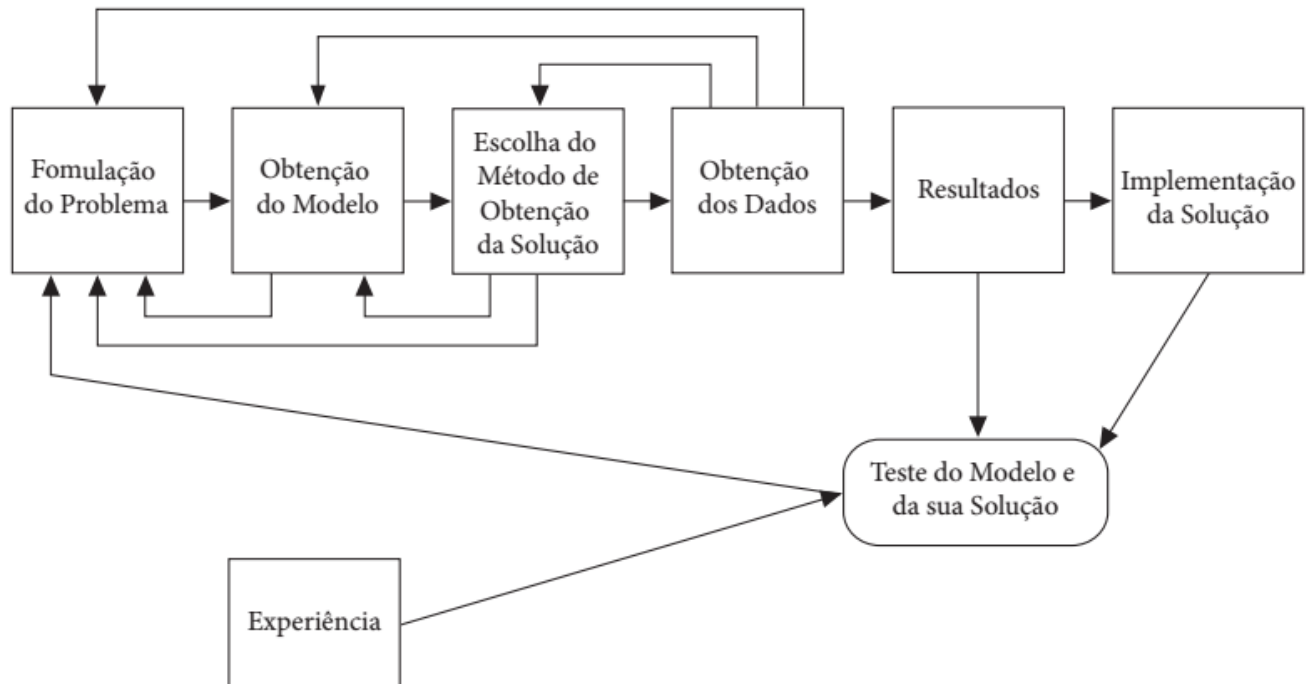
Um caso histórico: Problema da Dieta



- Um dos primeiros e mais famosos problemas a ser resolvido
- George Stigler (economista): construir um modelo de dieta de baixo custo
- Chegou a cinco alimentos (farinha, leite, repolho, espinafre e feijão) e um custo anual de \$39,93 (1939)
 - ▶ Em 1947, usando o simplex, Jack Laderman reduziu um custo para \$39,69
 - ▶ Foram necessários nove funcionários, usando calculadoras de mesa operadas manualmente
 - ▶ 120 homens-dia
- Stigler recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1982

Stigler, G. J. (1945). The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27(2), 303. <https://doi.org/10.2307/1231810>

Dantzig, G. B. (1990). The Diet Problem. *Interfaces*, 20(4), 43–47.
<http://www.jstor.org/stable/25061369>



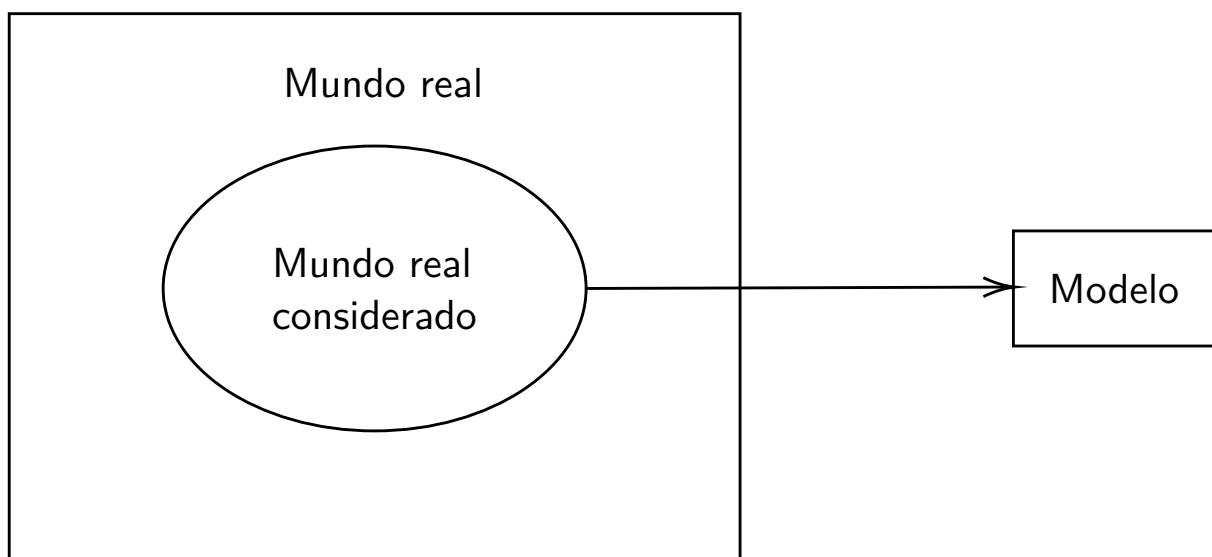
Formulação do problema



- Problemas reais: forma vaga e imprecisa
- Algumas questões:
 - ▶ Quem tomará decisões?
 - ▶ Quais os objetivos?
 - ▶ Que aspectos estão sujeitos ao controle dos decisores (**variáveis de decisão**) e sob quais limitações (**restrições**)?
 - ▶ Quais aspectos fogem do controle dos decisores?



- **Modelos**: representações *simplificadas* da realidade
- Modelagem: 2 características importantes:
 - ▶ Permite analisar o problema, indicando relações entre variáveis, quais dados relevantes e variáveis de maior importância
 - ▶ Permite estudo de alternativas de ação sem interromper sistema em estudo.
- Podem ser **físicos** (ex.: maquetes), **analógicos** (ex.: organograma) e **matemáticos**.





- Típico de PO: modelo **matemático**.
- Varia conforme a área (programação linear, programação em redes, teoria de filas, etc.)
- Técnicas novas surgem constantemente
- **Softwares:**
 - ▶ Solver do Excel
 - ▶ GLPK – GNU Linear Programming Kit (<https://www.gnu.org/software/glpk/>)
 - ▶ LINDO – Linear Discrete Optimizer (www.lindo.com)
 - ▶ ILOG (www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio)
 - ▶ Simulações: PROMODEL (www.belge.com.br/promodel.php) e ARENA (www.paragon.com.br)
 - ▶ etc.



Teste do modelo e da solução obtida



- O modelo precisa ser testado.
 - ▶ Teste permite identificar problemas na criação do modelo (ex.: aspecto importante omitido, refinamento de aspecto incluído etc.)
 - ▶ Em alguns casos, teste pode ser comparado com dados anteriores.



- Implantação da solução final ao sistema.
- Intervenções podem ser necessárias no caso de alguma falha não prevista.



Exemplo de problema: cerca (Taha)



Exemplo

*Um fazendeiro comprou L metros de uma tela e pretende cercar uma pequena área da fazenda para criação de gado. O fazendeiro somente sabe fazer **ângulos retos**. O fazendeiro quer que a área cercada seja a **maior possível**.*

- Área deve ser **retangular** (ângulos retos)
- Se l e c são respectivamente a **largura** e o **comprimento** do retângulo, queremos **maximizar**

$$z = l \times c,$$

sujeita às **restrições**:

- ▶ $2(l + c) = L$,
- ▶ $l \geq 0, c \geq 0$.

Infinitas soluções

- **viáveis**: atendem a *todas* restrições
- **ótima**: melhor solução viável

Formato geral

Maximizar ou **Minimizar** uma
função objetivo sujeita a
restrições



Exemplo

$$\text{maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15$$

$$1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Obtenção da Solução

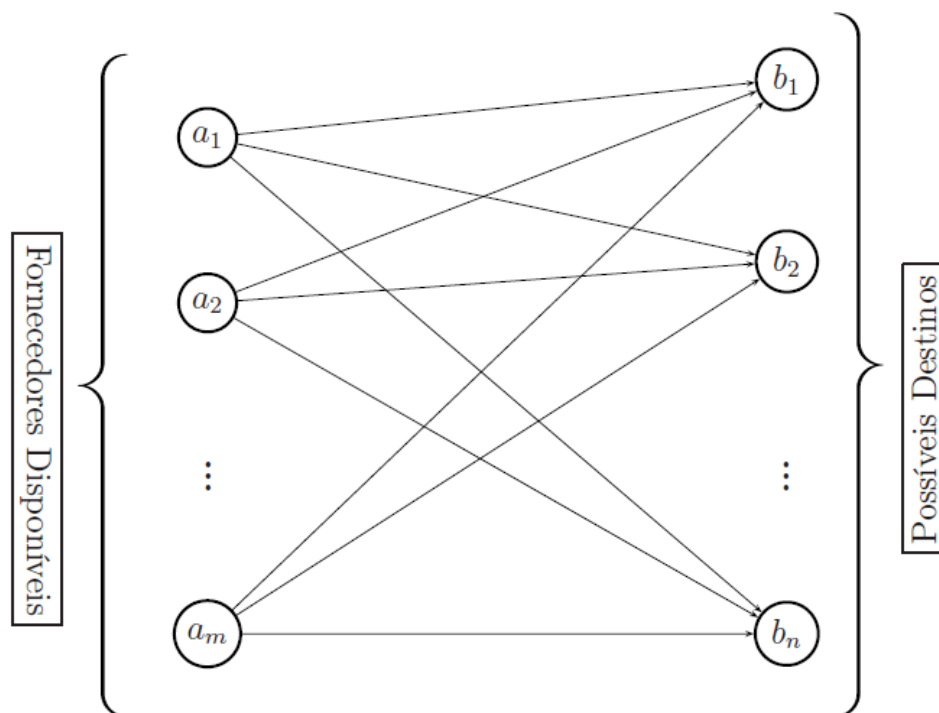
$$z = 15.55$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{9}, \quad x_3 = \frac{38}{9}$$



Exemplo

O modelo de transporte visa **minimizar o custo total do transporte** necessário para abastecer n centros consumidores (destinos) a partir de m centros fornecedores (origens)





Programação Linear

- *Mix* de produção
- Mistura de matérias-primas
- Modelos de equilíbrio econômico
- Carteiras de investimentos
- Roteamento de veículos
- Jogos entre empresas

Modelos em Redes

- Rotas econômicas de transporte
- Distribuição e transporte de bens
- Alocação de pessoal
- Monitoramento de projetos

Teoria das Filas

- Congestionamento de tráfego
- Operações de hospitais
- Dimensionamento de equipes de serviço



Alguns Links Interessantes



O que é a PO?

- Vídeo da OR Society:
<https://youtu.be/tX6Rw7KJGjE>

Empresas de PO

- Reportagem da Revista Época de 19/01/2017:
<https://encurtador.com.br/rS016>

PO e Covid

- Artigo publicado na Academia Brasileira de Ciências em 23/03/2023:
<https://encurtador.com.br/hluB6>



- ① ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.
- ② MARINS, F. A. S. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
- ③ TAHA, H. *Pesquisa operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

Esse material foi desenvolvido ao longo de diversos anos pelos professores da FACOM/UFU: Paulo H. R. Gabriel, Ivan Sendin e Renato Pimentel



- ② Introdução à programação linear



Nesta seção, será considerada uma subclasse particular de problemas de PO, a dos problemas de **programação linear**.

A característica que define tal subclasse está no **modelo matemático**.



Equação linear



- Equação da forma

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = c_0$$

- Elementos:

- ▶ c_0, c_1, \dots, c_n : **coeficientes** (conhecidos)
- ▶ x_1, x_2, \dots, x_n : **variáveis** (desconhecidos)

- Um conjunto de equações lineares relacionadas a um mesmo grupo de variáveis recebe o nome de **sistema linear**.



Modelo de PL – como qualquer modelo de PO – possui 3 componentes básicos:

- ① **Variáveis de decisão**, que se deseja determinar;
- ② Uma ou um conjunto de **restrições** que a solução deve satisfazer;
- ③ Um **objetivo** (meta) a ser otimizado (*maximizado* ou *minimizado*).

Variáveis de Decisão

As variáveis de decisão são as **incógnitas** a serem determinadas pela solução do modelo e os **parâmetros** (coeficientes) são valores fixos no problema

Restrições

De modo a levarmos em conta as **limitações** físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou **viáveis**)

Função Objetivo

É uma função matemática que define a **qualidade** da solução em função das variáveis de decisão; é um **critério** de escolha das variáveis de decisão representado por uma função



Pode-se dizer que:

O problema do modelo matemático de Pesquisa Operacional é escolher os **valores** das variáveis de decisão de forma a obter o melhor resultado da função objetivo sujeita às restrições especificadas.



Recomendações



- O decisor tem autoridade para escolher a quantidade (valor numérico) do item? Se sim, esta é uma variável de decisão;
- Ser preciso com relação às **unidades** de cada variável de decisão (ex.: se alguma moeda, alguma medida de comprimento, volume, massa ou tempo, etc.);
- Não confundir variáveis de decisão com os *parâmetros* do problema, como ex.: número de máquinas na fábrica, quantidade de cada recurso usado na fabricação de um produto, custos de produção, custos de transporte, etc.

Exemplo

Um investidor possui \$90.000,00 para investir em ações. Ele está interessado em duas empresas:

- *Tele Mundo, cujas ações custam \$50,00 cada e o retorno esperado é de \$6,00 ao ano;*
- *Cosmo Fonte, cujas ações custam \$30,00 cada e o retorno esperado é de \$4,00 ao ano.*

Além disso, ele não quer investir mais que \$60.000,00 em uma única empresa. Como ele deve planejar seu investimento, de modo a maximizar seu lucro anual?

- **Variáveis de decisão:** Correspondem às quantidades de ações em cada empresa (por exemplo: TM e CF , ou x_1 e x_2);
- **Parâmetros:** São os preços e retorno de cada ação;
- **Restrições:** São as limitações impostas pelo investidor e pela quantidade de dinheiro disponível para investir; além disso, por uma questão de lógica, ele não pode investir um valor **negativo** em cada ação;
- **Função Objetivo:** é a Função matemática que determina o retorno em função das variáveis de decisão e que (neste caso) deve ser maximizada.

Função objetivo

$$\max L = 6TM + 4CF$$

Restrições

$$50TM + 30CF \leq 90.000$$

$$50TM \leq 60.000$$

$$30CF \leq 60.000$$

Condições de não-negatividade

$$TM \geq 0$$

$$CF \geq 0$$



Algumas observações



- Um tema comum na PO é a busca de uma **solução ótima**;
- É necessário que fique claro que essas soluções são ótimas **apenas** em relação ao modelo que está sendo usado;
- Como o modelo é apenas uma representação da realidade, **não** há garantia de que a solução ótima para o modelo se comprovará como a melhor possível que poderia ter sido implementada para o problema real;
- Entretanto, se o modelo for bem formulado e experimentado, as soluções tendem a ser uma boa representação para a solução a ser adotada no caso real.



Exemplo

Uma empresa precisa decidir quais modelos de geladeira produzir em sua nova planta. Existem dois modelos disponíveis: luxo e básico. No máximo, 1500 unidades do modelo luxo e 6000 unidades do modelo básico podem ser vendidas por mês. Empresa contratou 25000 homens-hora de trabalho por mês. Os modelos luxos precisam de 10 homens-hora de trabalho para serem produzidos e os modelos básicos, 8 homens-hora. A capacidade da linha de montagem é de 4500 geladeiras por mês, pois as geladeiras dividem a mesma linha. O lucro unitário do modelo luxo é \$100,00 por mês, enquanto o modelo básico lucra \$50,00 durante o mesmo período. Determine quanto produzir de cada geladeira, de modo a satisfazer todas as restrições e maximizar o lucro da empresa.

Variáveis de Decisão

Sejam x_1 e x_2 as quantidades (unidades) produzidas dos modelos luxo e básico, respectivamente.

Função Objetivo

Admitindo que a função lucro é uma função linear de x_1 e x_2 , esse lucro deve ser maximizado por uma escolha de x_1 e x_2 , tal que:

$$\max L = 100x_1 + 50x_2$$

Como existem recursos limitados, há restrições:

Restrições

- ① $10x_1 + 8x_2 \leq 25000$ (homens-hora)
- ② $x_1 + x_2 \leq 4500$ (linha de montagem)
- ③ $x_1 \leq 1500$ (máximo a ser vendido do luxo)
- ④ $x_2 \leq 6000$ (máximo a ser vendido do básico)
- ⑤ $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ (não-negatividade)



Definição Formal

Um problema de Programação Linear (PL) é um problema de programação matemática em que as Funções Objetivos e de Restrição são **lineares**.

Forma Geral:

$$\max(\min) \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i$$



Algumas Definições



Solução

Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão, independente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível.

Solução Viável

Uma solução em que **todas** as restrições são satisfeitas. O conjunto de todos os pontos que satisfazem todas as restrições é chamado de **Conjunto Viável** (S).

Solução Ótima

Uma solução viável que tem o valor **mais favorável** da função objetivo, isto é, maximiza ou minimiza a função objetivo em toda a região viável. Pode ser única ou não.



Proporcionalidade

A contribuição de cada variável ao valor da função objetivo é **diretamente proporcional** ao valor da variável, conforme representado pelo termo $c_j x_j$ na função objetivo.

De modo semelhante, a contribuição de cada variável às restrições é proporcional ao valor da variável x_j , como representado pelo termo $a_{ij} x_j$ na restrição.

Aditividade

Toda função em um modelo de programação linear é a soma das contribuições individuais das respectivas variáveis.



Divisibilidade

As variáveis de decisão em um modelo de programação linear podem assumir quaisquer valores, inclusive valores não-inteiros, que satisfaçam as restrições funcionais e de não-negatividade.

Quando as variáveis do modelo de programação linear só puderem assumir valores inteiros, deve-se impor esta condição ao próprio modelo. Passa-se, então, a lidar com um modelo de **programação linear inteira**.

Certeza

O valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de programação linear é assumido como uma **constante conhecida**.



Problemas de mistura consistem em combinar materiais obtidos da natureza (ou sobras de outros já previamente combinados) para gerar novos materiais ou produtos com características convenientes.



Exemplos de problema de mistura I



- ① **Rações:** Fábricas de rações produzem variados tipos de rações para determinados animais (bovinos, equinos, caprinos, caninos de pequenos e grande portes etc.)
 - ▶ Mistura de alimentos ou farinhas de restos de alimentos (milho, farelo de arroz, etc.)
 - ▶ Preços de mercados destes produtos são conhecidos
 - ▶ **Composição nutricional** é conhecida. Nutrição veterinária especifica necessidades mínimas e máximas dos nutrientes por kg para cada espécie de animal.
 - ▶ Problema de **minimizar custo**: *quais devem ser as quantidades ideais de cada ingrediente por kg de modo que necessidades nutricionais sejam atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível?*



- ② **Ligas metálicas:** Fundições produzem diversos tipos de aço a partir de diversos insumos: lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, etc.
- ▶ Forno de alta temperatura para permitir a mistura
 - ▶ A **composição**, em termos de elementos como carbono, silício, manganês etc. é determinada por **normas técnicas** da metalurgia, bem como composição dos produtos a serem misturados.
 - ▶ Preços dos insumos podem variar substancialmente. Entretanto, são conhecidos.
 - ▶ *deve-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, de modo que a composição atenda as normas e preço final seja menor possível*



- ③ **Areias para filtro (ETA)**
- ▶ Permeabilidade: areias usadas em **estações de tratamento de água** para interceptar impurezas da água afluenta
 - ▶ Unidades de filtração: areias de portos passíveis de exploração com composições distintas
 - ▶ Custos de dragagem, transporte, seleção e preparo variam p/ cada porto
 - ▶ Areias dispostas em camadas, devendo obedecer composições estabelecidas em norma
 - ▶ *Como combinar os volumes de areia de cada porto, de modo a atender às especificações, com menor custo possível?*



- Obtenção de **produto** (mistura), combinando-se materiais disponíveis
- Materiais (ingredientes) possuem os **componentes** desejados na mistura
- Produtos devem satisfazer determinadas **especificações**
- **Objetivo**: determinar as quantidades dos ingredientes para criar mistura com composição especificada com menor custo possível (**minimização**).

Minimizar

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito às restrições:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

- x_j : quantidade do ingrediente j por unidade da mistura;
- a_{ij} : fração do componente i no ingrediente j ;
- b_i : fração do componente i na mistura;
- c_j : custo unitário do ingrediente j .



Exemplo

Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração para aves, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível. Temos disponíveis dois ingredientes (milho e farinha de osso), cujos custos (em \$ por Kg) e ingredientes (em unidades por Kg) estão listados na tabela a seguir:

	Vitamina A	Vitamina B	Proteínas	Custo
Milho	2	3	1	65
Farinha de osso	3	2		30

Deseja-se que a ração contenha, no mínimo, 7 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 1 de proteína.



Modelo Matemático



$$\min C = 65x_1 + 30x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 9$$

$$1x_1 + 0x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$



Problemas de *mix de produção* envolvem decidir quais produtos, e quanto fabricar de cada produto em um certo período.



Formulação matemática do *mix* de produção



- Tendo em vista a **capacidade limitada** de produção – máquinas, RH, capital, armazenagem, etc. – e os diversos produtos que a empresa pode fabricar e vender, deseja-se determinar **quais produtos fabricar** e **quanto fabricar** de cada produto, de modo a **maximizar** o lucro, num determinado **período**.

Maximizar

$$f(x_1, \dots, x_n) = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \dots + \ell_n x_n$$

Sujeito às restrições:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq C_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq C_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq C_m$$

$$d_j \leq x_j \leq v_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- x_j : quantidade do produto j a ser produzida por período;
- C_i : capacidade do recurso i , $i = 1, 2, \dots, m$ no período.
- a_{ij} : unidades do recurso i usadas para produzir uma unidade de j ;
- d_j (v_j): produção mínima (máxima) do produto j no período;
- ℓ_j : lucro obtido pela empresa por cada unidade de j .

O Exemplo 2.2 visto anteriormente (problema das geladeiras) é um exemplo de problema de *mix* de produção.



Exemplo

Uma empresa deseja programar a produção de um utensílio de cozinha e requer o uso de 2 recursos: mão-de-obra e material. Ela está considerando a fabricação de 3 modelos de acordo com os dados da tabela que segue, sendo que a disponibilidade diária de mão-de-obra é 150 horas, e o suprimento de material é 200 kg/dia.

	Modelo		
	A	B	C
Mão-de-obra (horas/unidade)	7	3	6
Material (kg/unidade)	4	4	5
Lucro (\$/unidade)	4	2	3



Modelagem



- x_a, x_b, x_c : produções diárias de A, B e C.
- Restrições:
 - ▶ $7x_a + 3x_b + 6x_c \leq 150$ (limitação de mão-de-obra)
 - ▶ $4x_a + 4x_b + 5x_c \leq 200$ (limitação de material)
 - ▶ $x_a \geq 0, x_b \geq 0, x_c \geq 0$ (não-negatividade)
- Função objetivo: maximização do lucro total
 $L = 4x_a + 2x_b + 3x_c$



- ① Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de \$5,00 e o do cinto é de \$2,00, pede-se: o modelo do sistema de produção do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro por hora.
- ② Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a \$20,00 de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a \$10,00 de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas a \$30,00 de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.



Exercícios II



- ③ Uma fundição tem de produzir 10 toneladas de um tipo de liga metálica e, para isso, tem disponível: lingotes de ferro, grafite e sucata. 2 componentes são relevantes para a liga: carbono e silício. A tabela fornece a fração destes elementos nos ingredientes disponíveis, seus custos unitários, suas disponibilidades em estoque, bem como a composição da liga de acordo com as especificações. Quais quantidades dos ingredientes devem compor a liga, de modo que as especificações sejam satisfeitas e o custo seja mínimo?

Composição (%)	Ingredientes			Especificações liga	
	Lingotes	Grafite	Sucata	Mínimo	Máximo
Carbono	0,0050	0,90	0,090	0,00	0,095
Silício	0,14	-	0,27	0,19	0,20
Custos (R\$/ton)	90	180	25		
Estoque (ton)	5	5	12		



- ① ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.
- ② MARINS, F. A. S. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
- ③ NOGUEIRA, F. *Pesquisa Operacional*, UFJF.
- ④ TAHA, H. *Pesquisa operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU)

Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU



③ Solução gráfica



- A **visualização** de soluções de um problema pode ser útil para melhorar a intuição sobre o mesmo.
- Mesmo quando somente limitada a um desenho esquematizado sobre o plano.
- No caso de PL, permite delinear um **método de solução** – i.é., encontrar a **solução ótima**.

- Consideram-se aqui problemas com apenas **duas variáveis**
- (Representação das soluções factíveis e da solução ótima num **plano cartesiano**)

Nota

Vamos considerar, por questões de conveniência, todas as restrições sob a forma de **inequações**.

Exemplo

Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ sujeito a:

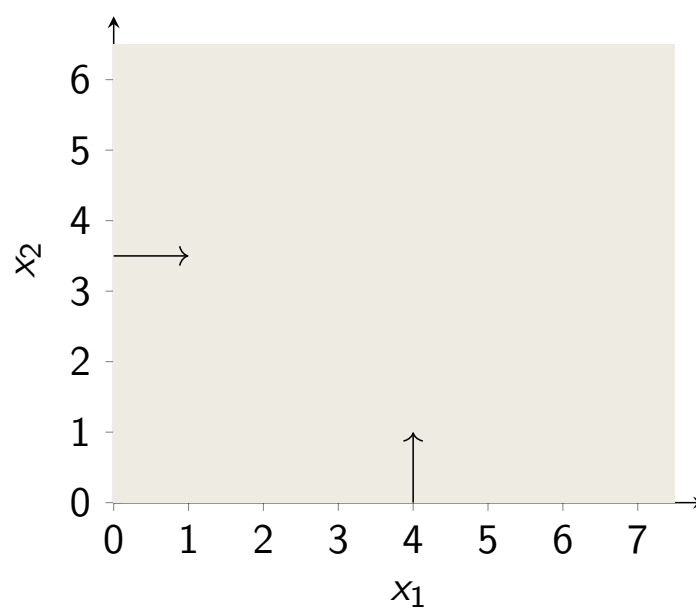
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 2$$

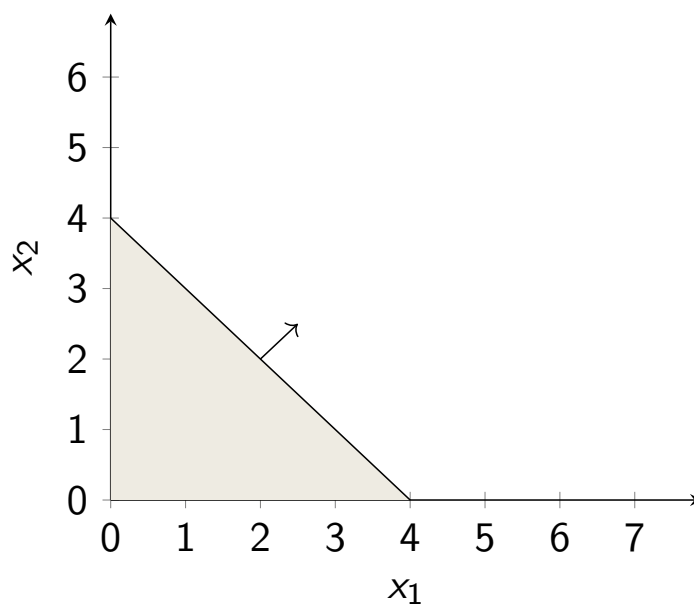
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

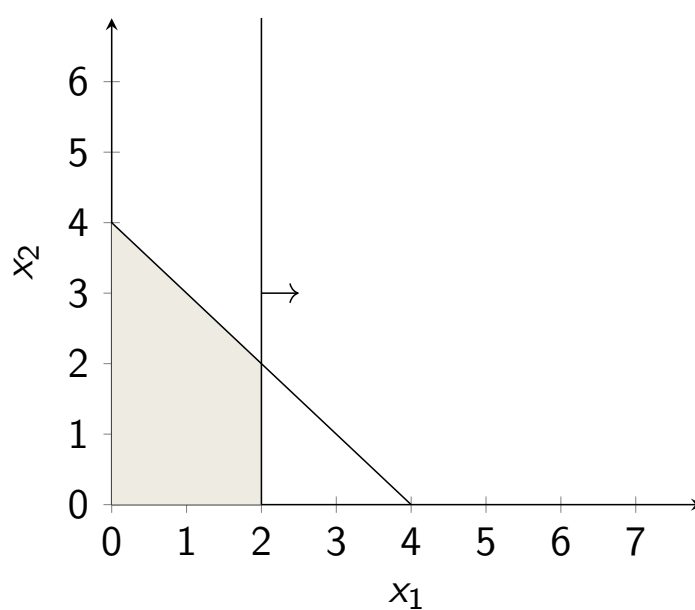
- Condições de **não-negatividade**:



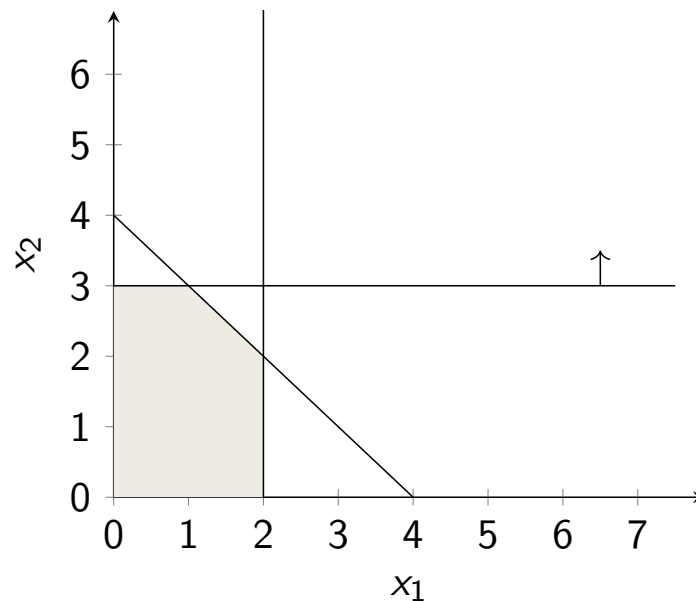
- Adicionando a restrição $x_1 + x_2 \leq 4$ às de não-negatividade:



- Adicionando a restrição $x_1 \leq 2$ às anteriores:



- Por fim, adicionando a restrição $x_2 \leq 3$ às anteriores: obtém-se a **região factível** ou **região viável** do problema: qualquer ponto da região é uma **solução viável** do mesmo.



Determinação da solução ótima



Considerando o exemplo, a função objetivo

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2,$$

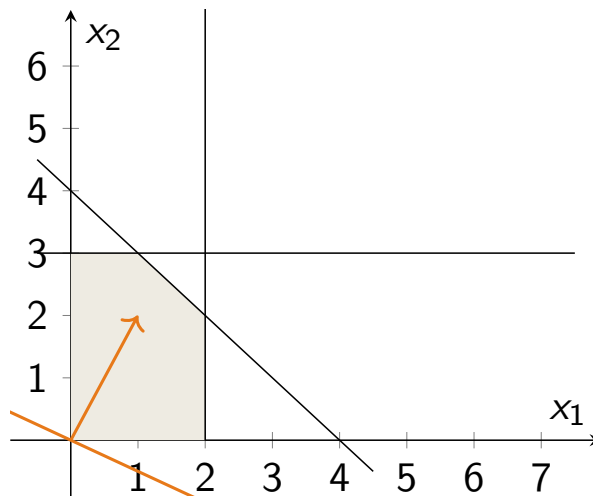
pode assumir infinitos valores – qualquer par (x_1, x_2) .

Os pontos (x_1, x_2) do \mathbb{R}^2 que resultam em $f = 0$ estão na reta $x_1 + 2x_2 = 0$. Esta reta define a **curva de nível 0** da função.

Curva de nível

A curva de nível f_0 de uma função f é dada pelo conjunto de pontos no \mathbb{R}^2 os quais, aplicados à função f , resultam em $f = f_0$.

- Representando a curva de nível 0 no gráfico, junto com o **sentido de crescimento**.



Vetor gradiente



O **vetor gradiente** de uma função $f(x_1, x_2)$, dado por

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

indica o **sentido de maior crescimento** da função. Se a função for linear, o gradiente será constante (a direção e o sentido não variam)

- Consequentemente, indica a direção onde as curvas de f assumem valores **maiores**.
- No caso de **retas**, é constante e perpendicular às mesmas.

Observação

Na prática, também podemos testar tomando pontos de um lado e de outro de uma curva de nível, e verificando o valor de f .

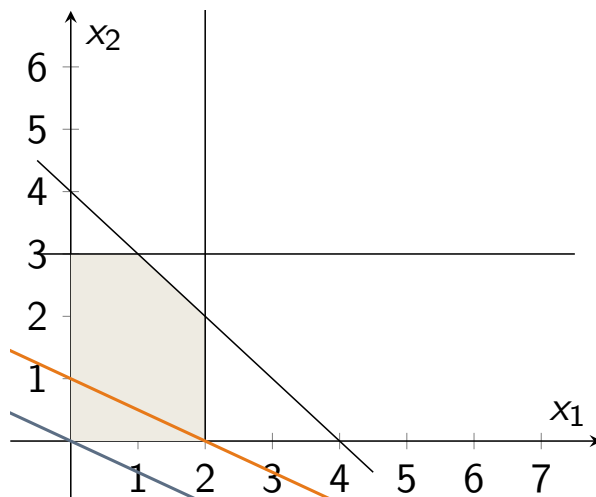
Temos, para a função objetivo do problema,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + 2x_2), \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + 2x_2) \right) = (1, 2),$$

indicado pelo vetor representado no gráfico anterior.

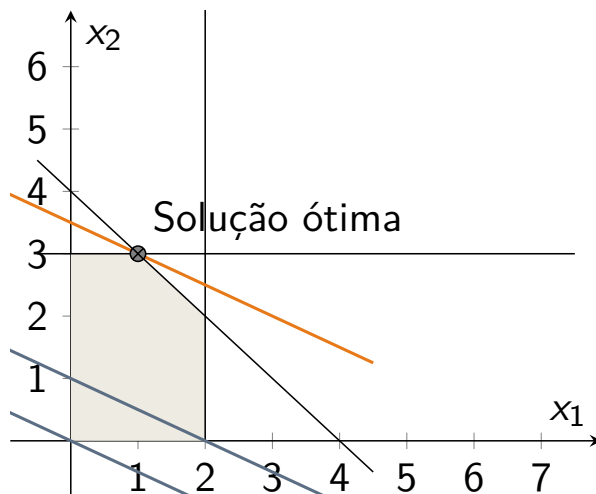
Como se deseja **maximizar** a função objetivo, busca-se o **maior valor possível** de f dentro da região viável. Portanto, “caminha-se” no sentido para o qual o vetor gradiente aponta.

- Acrescentando-se agora ao gráfico a curva de nível 2:



- Ainda não se chegou à solução ótima.

- Acrescentando-se a curva de nível 7:



- Solução ótima obtida ($f(x_1, x_2) = 7$).
- Portanto, a solução do problema existe e é única: $(x_1, x_2) = (1, 3)$ – maximiza f , respeitando as restrições.



- ① O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de PL é um **conjunto convexo**.
- ② Toda **solução básica viável** (SBV) do sistema de equações lineares de um modelo de PL é um **ponto extremo** do conjunto de soluções viáveis.
- ③ Se uma função objetivo possui um único ponto de ótimo finito, então este é um **ponto extremo** do **conjunto convexo** de soluções viáveis.
- ④ Se a função objetivo assume o valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis (soluções múltiplas), então ela assume este valor para pelo menos **dois pontos extremos** do conjunto convexo e para qualquer **combinação convexa** desses pontos extremos, isto é, todos os pontos do segmento de reta que une estes dois pontos (em outras palavras, a aresta do polígono que contém estes dois pontos).



Solução do problema das geladeiras



Voltando ao modelo da produção de geladeiras (*mix* de produção):

$$\max \quad L = 100x_1 + 50x_2$$

sujeito a

$$10x_1 + 8x_2 \leq 25000$$

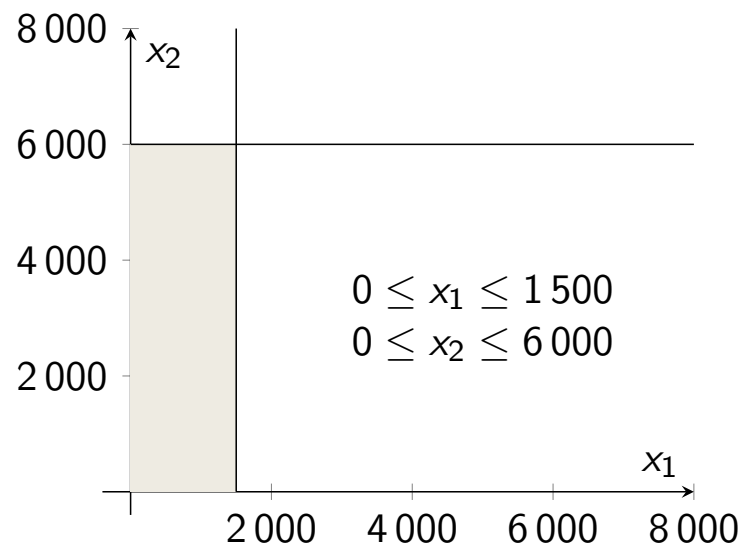
$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

$$x_1 \leq 1500$$

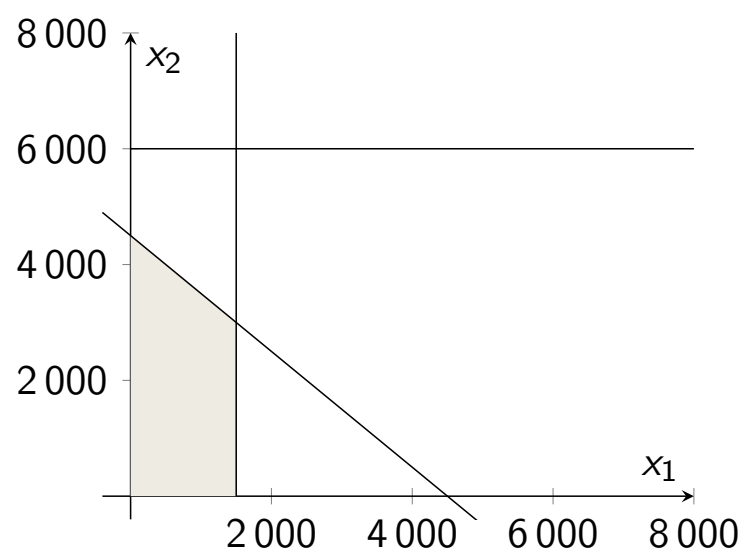
$$x_2 \leq 6000$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

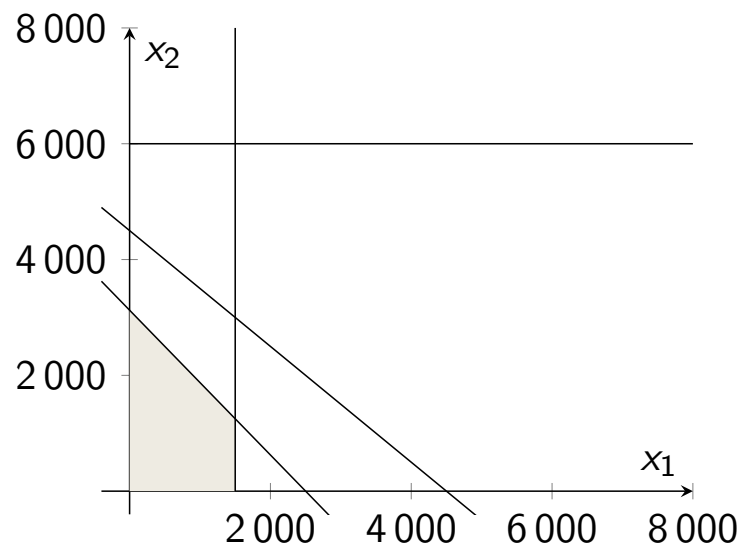
- Restrições de não-negatividade e demanda máxima:



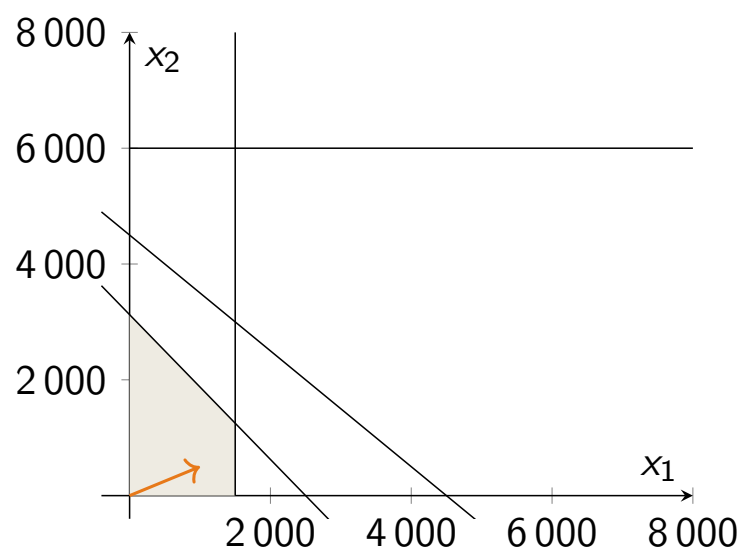
- $x_1 + x_2 \leq 4500$ (capacidade da linha de montagem)



- $10x_1 + 8x_2 \leq 25\,000$ (limitação da mão-de-obra)

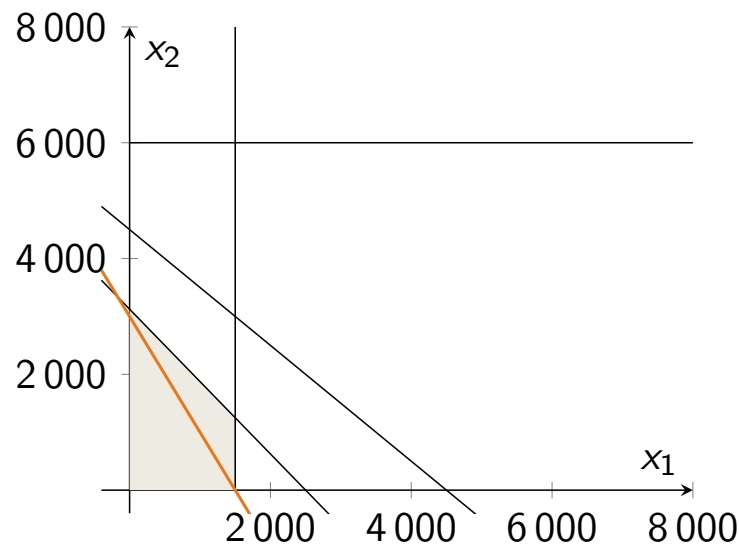


- $\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$
 - Sentido de crescimento: $\nabla f = (100, 50)$

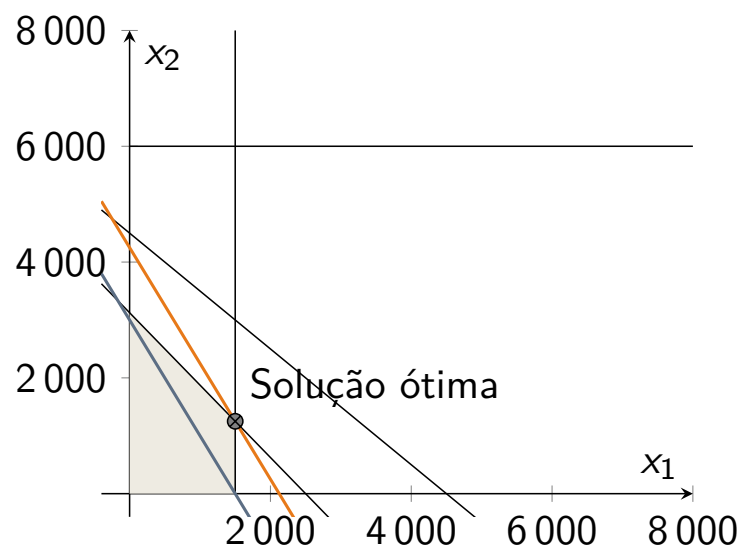


- Candidatos a solução ótima: pontos $(1500, 0)$, $(1500, 1250)$ e $(0, 3125)$ (pontos extremos na direção do crescimento).

- $\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$
 - ▶ Na **solução básica viável** (1500,0), temos $f = 150\,000$.



- $\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$
 - ▶ Na **solução básica viável** (1500,1250), temos $f = 212\,500$.



- Esta é a **solução ótima**, pois a solução básica viável não testada – (0,3125) – está no sentido oposto ao de crescimento da função objetivo, em relação à curva de nível.

- Logo, a empresa deve produzir 1500 geladeiras do modelo luxo, e 1250 do modelo básico por mês, maximizando o lucro, que será de \$ 212 500.



Solução do problema da ração



Voltando ao modelo da ração (problema de mistura):

$$\min \quad C = 65x_1 + 30x_2$$

sujeito a:

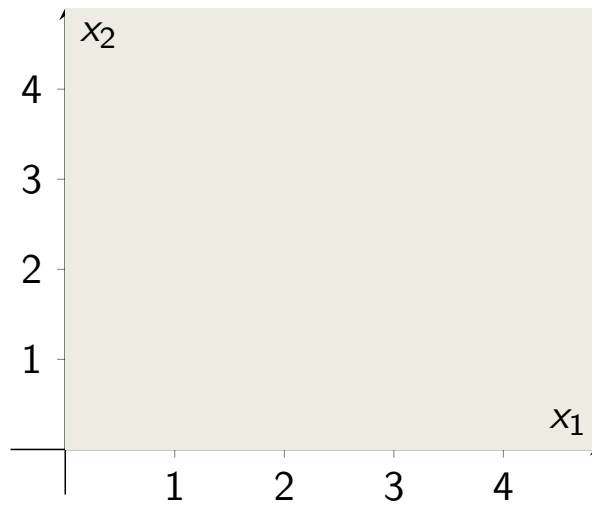
$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 9$$

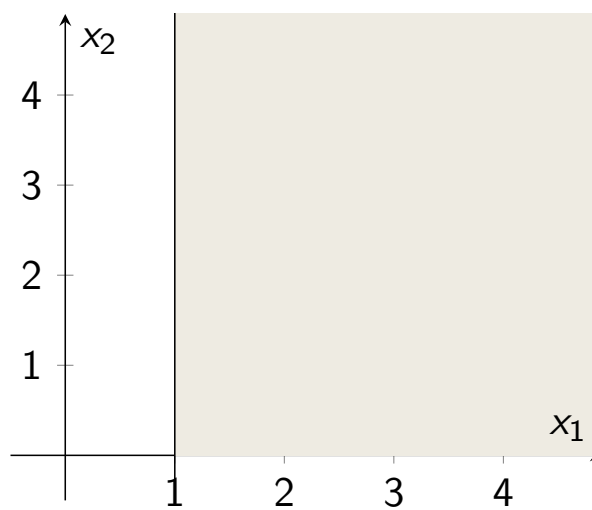
$$1x_1 + 0x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

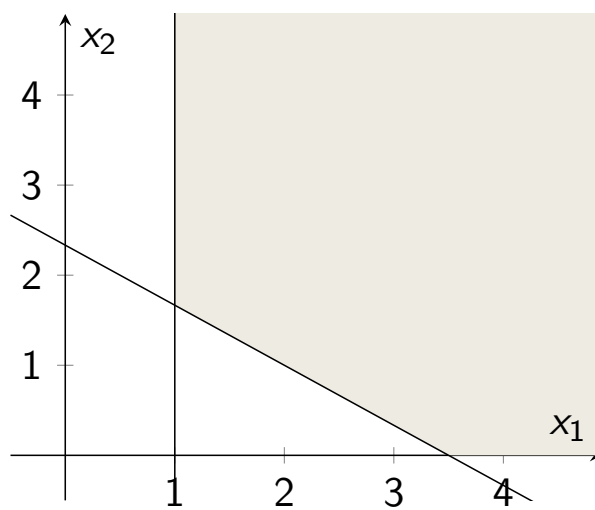
- Não-negatividade



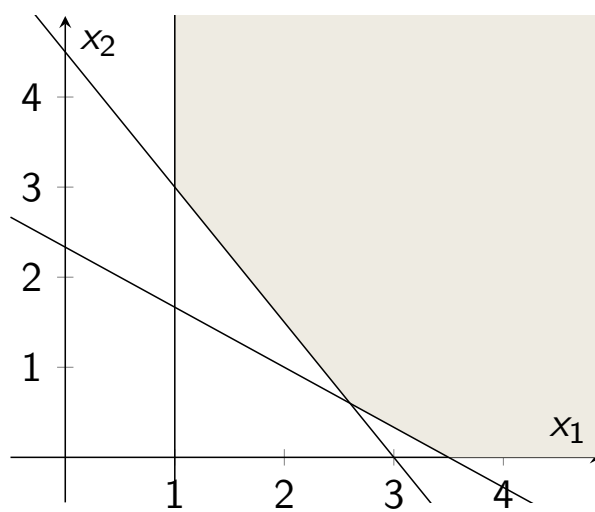
- $1x_1 + 0x_2 \geq 1$.



- $2x_1 + 3x_2 \geq 7.$

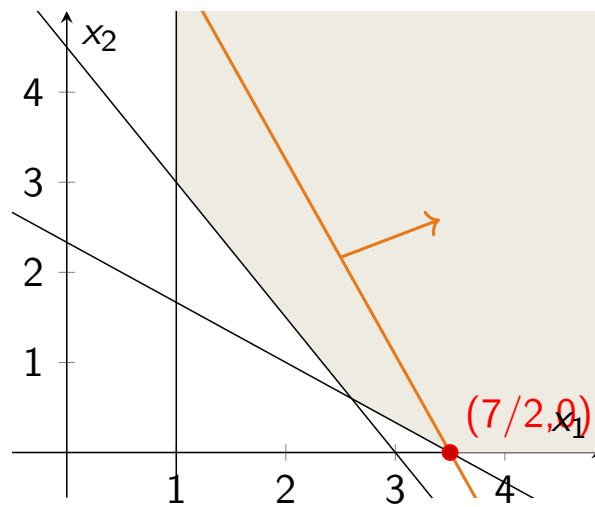


- $3x_1 + 2x_2 \geq 9.$



- $\min C = 65x_1 + 30x_2$

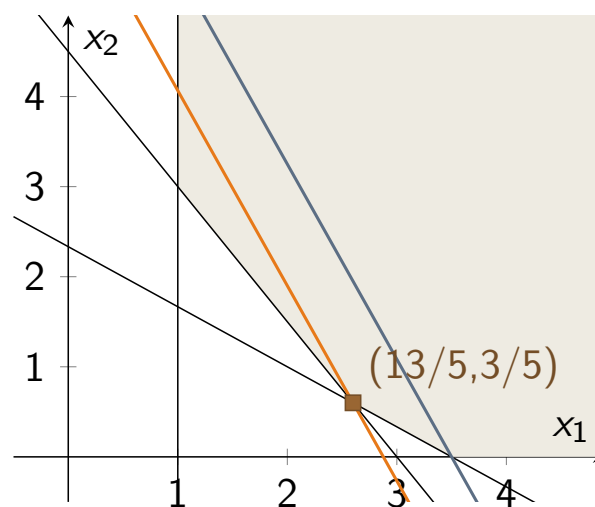
- ▶ Na **solução básica viável** $(7/2, 0)$, temos $C = \$227,5$.



- Problema de **minimização**: caminha-se no sentido **oposto** ao de crescimento de C .

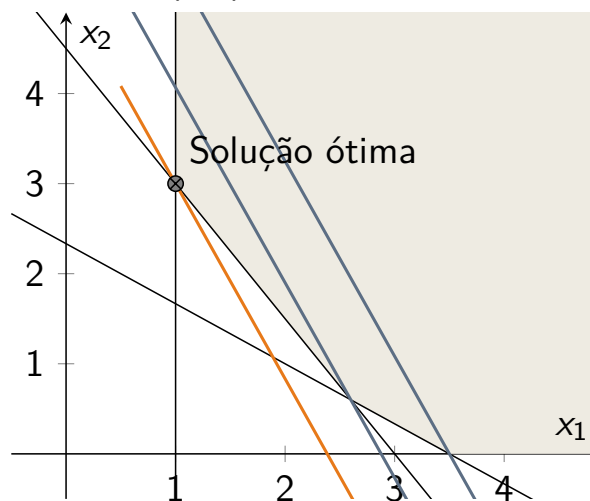
- $\min C = 65x_1 + 30x_2$

- ▶ Na **solução básica viável** $(13/5, 3/5)$, temos $C = \$187$.



- $\min C = 65x_1 + 30x_2$

- ▶ Na **solução básica viável** $(1,3)$, temos $C = \$155$.



- $(1,3)$ é a **solução ótima** do problema da ração. Neste ponto, o custo total é o menor possível, \$ 155.



Outras situações



Exemplo

Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ sujeito a:

$$-3x_1 + x_2 \leq 2$$

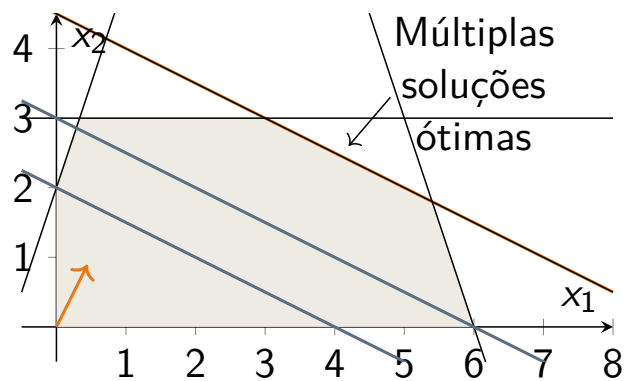
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

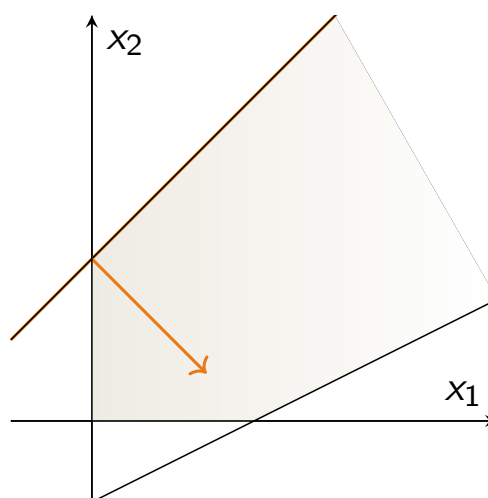
- $\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$



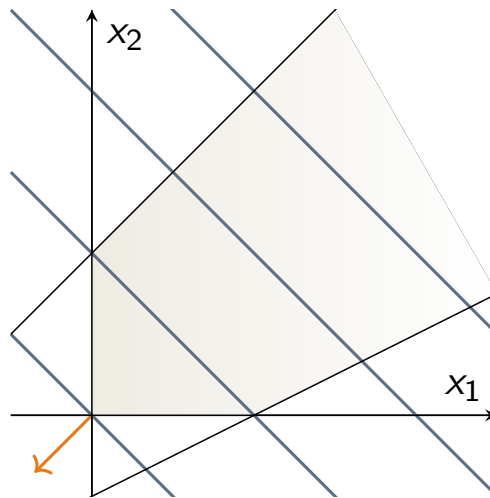
Região viável ilimitada



- Infinitas soluções ótimas (minimização)



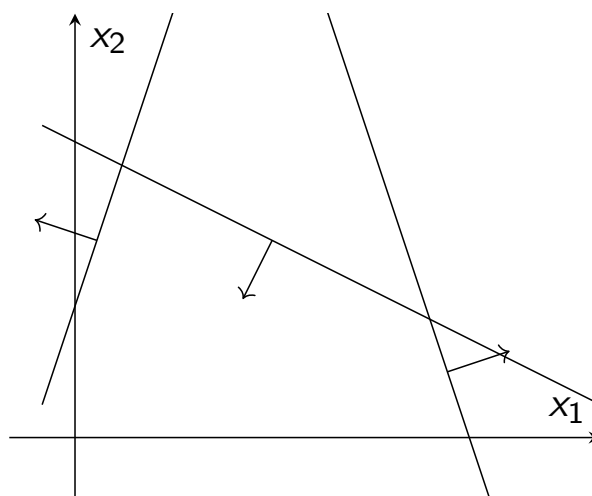
- Não existe solução ótima (minimização)



Região vazia



- Região viável vazia: não existe solução ótima (restrições conflitantes)





- 1 Faça a solução gráfica do exercício do sapateiro e do exercício das frutas vistos anteriormente. Dica: no problema das frutas, a quantidade de laranjas é conhecida (dada).



Referências



- 1 ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2006.
- 2 MARINS, F. A. S. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU)

Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU