Primeira Lista de Exercícios - Modelagem e Solução Gráfica

Guilherme Santa Cecilia

1. **Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de $100,00 e o lucro unitário de P2 é de $150,00. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os 2 produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.**

```
#Produtos
# Variaveis de decisao
var P1 >= 0; # quantidade produto 1
var P2 >= 0; # quantidade produto 2

# Funcao objetivo
maximize lucro: 100*P1 + 150*P2;

# Restricoes
s.t. R1 : 2*P1 + 3*P2 <= 120; # horas por mes
s.t. R2 : P1 <= 40; # máximo de unidades P1
s.t. R3 : P2 <= 30; # máximo de unidades P2
```

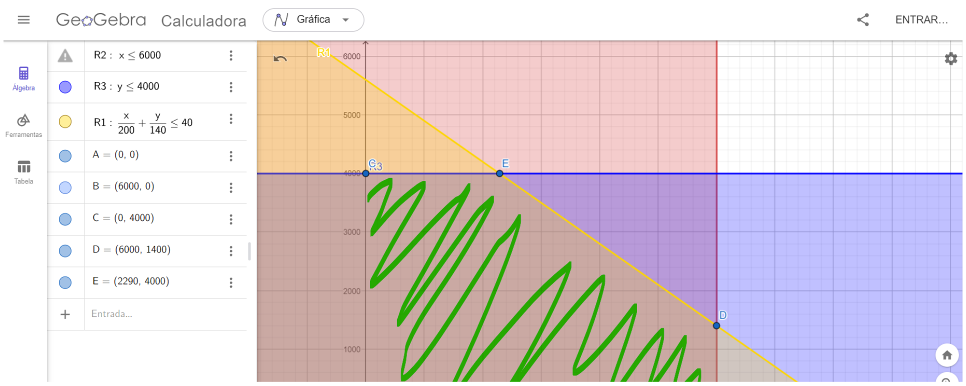
2. **Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa “A” com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa “B”, com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores? Construa o modelo do sistema.**

```
#Programa de TV
# Variaveis de decisao
var A >= 0; # vezes programa A no ar
var B >= 0; # vezes programa B no ar

# Funcao objetivo
maximize telespectadores: 30000*A + 10000*B;

# Restricoes
```

```
s.t. R1 : A + B >= 5; # minimo de miutos de musica
s.t. R2 : 20*A + 10*B <= 80; # máximo de minutos de musica
```

3. **Uma fábrica de aço precisa decidir como alocar o horário da semana seguinte em um laminador, que é uma máquina que, recebendo lâminas de aço como entrada, pode produzir dois produtos: tiras e bobinas, a diferentes razões:**
   • Tiras: 200 tons/h;
   • Bobinas: 140 tons/h.
   O lucro para cada produto é dado como segue:
   • Tiras: $ 25/ton;
   • Bobinas: $ 30/ton.
   Com base nos pedidos já feitos, não se deve produzir durante a semana mais do que:
   • Tiras: 6000 tons;
   • Bobinas: 4000 tons.
   Dado que há uma disponibilidade de 40 horas semanais de produção à disposição, o problema consiste em decidir quantas toneladas de cada um dos dois produtos, de modo a maximizar o lucro.
   (a) Formular o problema de modo a permitir a determinação de quantas toneladas de tiras e bobinas de aço devem ser produzidas.
   (b) Resolver o problema, usando solução gráfica: quantas toneladas produzir de cada, e qual o lucro máximo esperado?

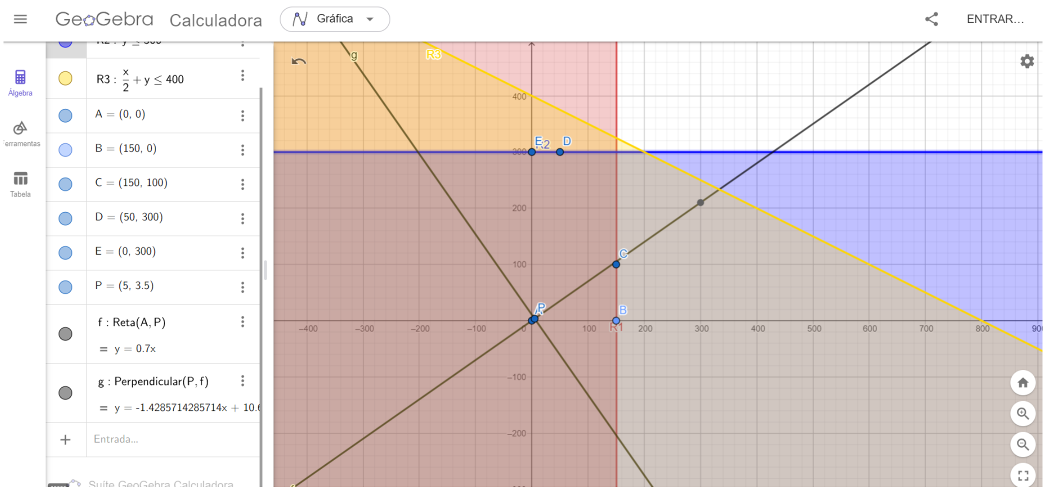
```
#fabrica de aço
# Variaveis de decisao
var T >= 0; # toneladas do produto tira
var B >= 0; # toneladas do produto bobina

# Funcao objetivo
maximize lucro: 25*T + 30*B;

# Restricoes
s.t. R1 : T/200 + B/140 <= 40; # disponibilidade de horas
s.t. R2 : T <= 6000; # máximo de toneladas de tiras
s.t. R3 : B <= 4000; # máximo de toneladas de bobinas
```



Solução ótima: ponto D = (6000, 1400)

4. **Uma companhia produz duas camisas: manga longa e manga curta. Na companhia, o único ponto crítico é a mão-de-obra disponível. A camisa de manga longa consome 50% a mais de mão-de-obra do que a de manga curta. Se toda a produção fosse concentrada na disponibilização de camisas de manga curta, a companhia poderia entregar 400 camisas da mesma por dia. O mercado limita a produção diária das camisas em 150 mangas longas e 300 mangas curtas. O lucro bruto por camisa de manga longa é de $ 5 e o de manga curta, $ 3,5.**
   (a) Formular o problema de modo a permitir a determinação das quantidades de camisas a produzir de modo a otimizar o lucro.
   (b) Resolver o problema, usando solução gráfica: quantas camisas produzir de cada tipo, e qual o lucro máximo esperado?

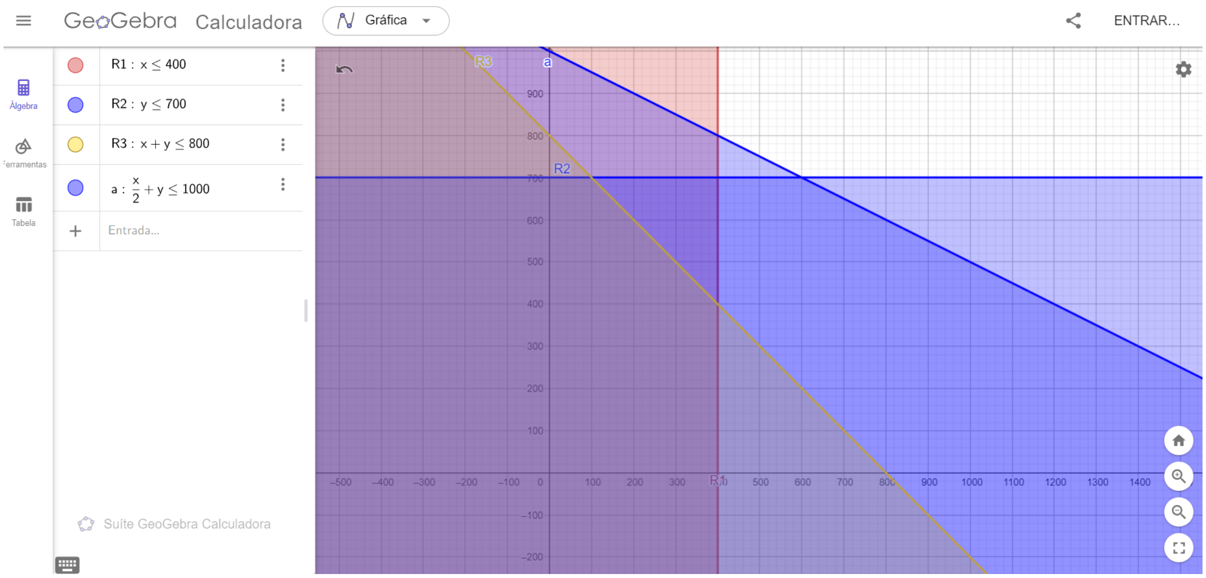
```
#camisetas
# Variaveis de decisao
var L >= 0; # quantidade de camisas de manga longa produzidas
var C >= 0; # quantidade de camisas de manga curta produzidas

# Funcao objetivo
maximize lucro: 5*L + 3.5*C;

# Restricoes
s.t. R1 : L/2 + C <= 400 ; # longa tem o dobro de consumo de mao de obra de C
s.t. R2 : L <= 150; # maximo de produção de longa
s.t. R3 : C <= 300; # maximo de produção de curta
```



Solução ótima: ponto G = (150, 300)

5. **Uma empresa fabrica dois modelos de cintos de couro. O modelo M1, de melhor qualidade, requer o dobro do tempo de fabricação em relação ao modelo M2. Se todos os cintos fossem do modelo M2, a empresa poderia produzir 1.000 unidades por dia. A disponibilidade de couro permite fabricar 800 cintos de ambos os modelos por dia. Os cintos empregam fivelas diferentes, cuja disponibilidade diária é de 400 para M1 e 700 para M2. Os lucros unitários são de $4,00 para M1 e $3,00 para M2. Pede-se:**
(a) Faça a modelagem completa do problema, descrevendo as variáveis de decisão, qual a função objetivo e qual otimização deve ser feita, e quais as restrições impostas ao mesmo.
(b) Determine, através de solução gráfica, qual a produção ideal, em termos de M1 e M2.

```
#cintos
# Variaveis de decisao
var M1 >= 0; # quantidade de cintos do modelo M1
var M2 >= 0; # quantidade de cintos do modelo M2

# Funcao objetivo
maximize lucro: 4*M1 + 3*M2;

# Restricoes
s.t. R1 : M1/2 + M2 <= 1000 ; # M1 tem o dobro de consumo de tempoem relação a M2
s.t. R2 : M1 + M2 <= 800; # maximo de produção de ambos os cintos
s.t. R3 : M1 <= 400; # fivelas disponiveis para m1
s.t. R4 : M2 <= 700; # fivelas disponiveis para m2
```



Solução ótima: ponto (400,400)

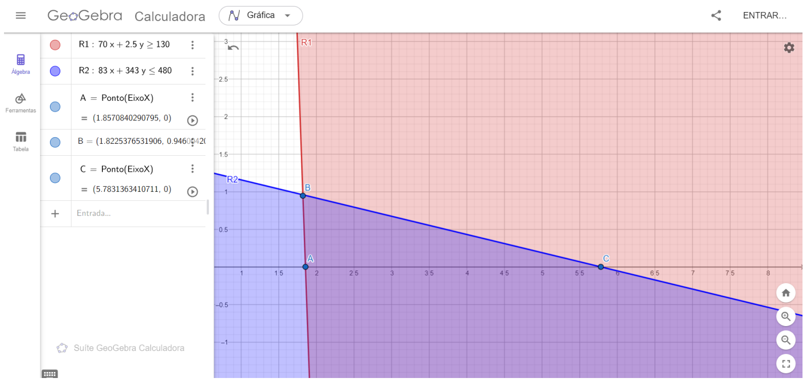
6. **Uma pessoa deseja balancear os alimentos que consome no café da manhã, de modo que minimize o custo. Para isso, ela pretende se alimentar de modo que consuma no mínimo 130 mg de cálcio e no máximo 480 kcal. O valor nutritivo e o preço por porção dos alimentos a serem considerados são dados por:**

Tipo de alimento	Porção	Cálcio (mg)	Energia (kcal)	Preço (R$)
Leite achocolatado	100 ml	70	83	0,90
Pão de forma	100 g	2,5	343	0,10

(a) Faça a modelagem do problema.

(b) Quanto de cada alimento consumir? Use a solução gráfica para determinar a resposta.

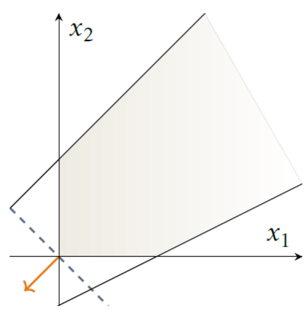
```
#alimentos
# Variaveis de decisao
var L >= 0; # quantidade de porções de leite
var P >= 0; # quantidade de porções de pão

# Funcao objetivo
minimize custo: 0.9*L + 0.1*P;

# Restricoes
s.t. R1 : 70*L + 2.5*P >= 130; # minimo de calcio
s.t. R2 : 83*L + 343*P <= 480; # maximo de kcal
```



Solução ótima: ponto (1.8571,0)

7. **Faça a solução gráfica para o exemplo do investidor das ações Cosmo Fonte e Tele Mundo, visto em sala (ver material de curso), e responda: quantas ações comprar de cada empresa, e qual o lucro máximo esperado?**

8. **Observe a situação abaixo:**



Além das restrições de não-negatividade, há um par de retas representando as restrições adicionais, delimitando a região viável entre elas. Esta é ilimitada para x1 →+∞ e x2 →+∞. A seta na figura indica a direção do vetor gradiente da função objetivo (representada em tracejado na sua curva de nível 0). Considerando-se que este é um problema de minimização desta função objetivo, o que se pode dizer sobre sua otimização: existe um ótimo? Se sim, ele é único? Justifique.

9. **Um fabricante deseja produzir uma liga metálica que seja composta, em peso, de 30% do metal A e de 70% do metal B. Cinco ligas são disponíveis a preços variados como dado a seguir:**

Liga	1	2	3	4	5
% A	10	25	50	75	95
% B	90	75	50	25	5
Preço/kg	$ 5	$ 4	$ 3	$ 2	$ 1,50

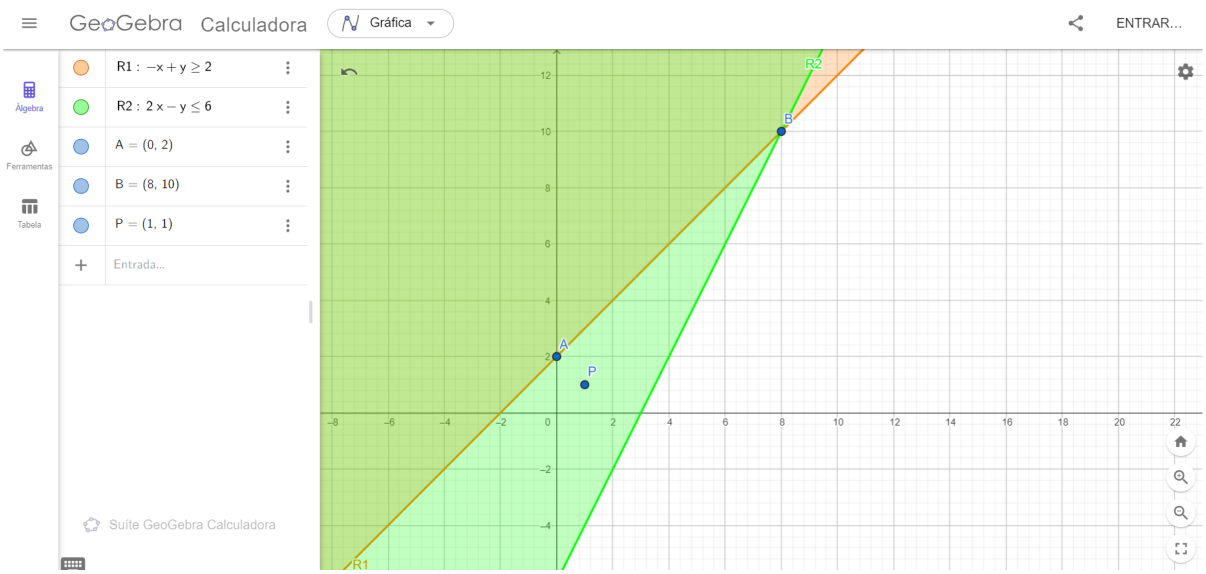
A liga deve ser produzida a partir de uma combinação de algumas das ligas disponíveis. Formule o problema como um modelo de programação linear.

```
#alimentos
# Variaveis de decisao
var x1 >= 0; # peso em kg da liga metalica 1
var x2 >= 0; # peso em kg da liga metalica 2
var x3 >= 0; # peso em kg da liga metalica 3
var x4 >= 0; # peso em kg da liga metalica 3
var x5 >= 0; # peso em kg da liga metalica 4

# Funcao objetivo
minimize custo: 5*x1 + 4*x2 + 3*x3 + 2*x4 + 1.5*x5;

# Restricoes
s.t. R1 : 10*x1 + 25*x2 + 50*x3 + 75*x4 + 95*x5 = 30; # liga A
s.t. R2 : 90*x1 + 75*x2 + 50*x3 + 25*x4 + 5*x5 = 70; # liga B
```

10. **Considere o seguinte modelo:**
minimizar $f0(x1,x2) = x1 + x2$
sujeito a $-x1 + x2 \geq 2$
$2x1 - x2 \leq 6$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

```
# Variaveis de decisao
var x1 >= 0; #
var x2 >= 0; #

# Funcao objetivo
minimize f: x1 + x2;

# Restricoes
s.t. R1 : -x1 + x2 >= 2; #
s.t. R2 : 2*x1 -x2 <= 6; #
```

(a) Resolva o problema graficamente.



(b) Considere agora: maximizar f (x1,x2) = x1 + x2 sujeito às mesmas restrições. O que mudou?

É inviável pois tende a infinito, visto que não possuem restrições que garantem a maximização sem tender a infinito

(c) considere o problema do item anterior e inclua a terceira restrição x1 + x2 ≤ 1. Resolva o problema resultante.

```
# Variaveis de decisao
var x1 >= 0; #
var x2 >= 0; #

# Funcao objetivo
maximize f: x1 + x2;

# Restricoes
s.t. R1 : -x1 + x2 >= 2; #
s.t. R2 : 2*x1 -x2 <= 6; #
s.t. R3 : x1 + x2 <= 1; #
```

É inviável pois as restrições não se cruzam, ou seja, não existe uma solulção possível que obedeça as três restrições estabelecidas