Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Método simplex

Paulo Henrique Ribeiro Gabriel

2023/1

Sumário

O método simplex

- O método **simplex** visa a **resolução algébrica** de um problema de PL.
- Problemas agora não se limitam mais a 2 variáveis de decisão (como na solução gráfica)
- **1º passo**: Criação de **Variáveis de folga** ou **excesso**: transformam o modelo num **sistema linear** de **equações** a ser resolvido.

Eliminação das desigualdades

- Inicialmente, é preciso eliminar as **desigualdades** presentes nas restrições do modelo.
  - Criam-se assim novas **equações lineares** no problema, a partir das inequações anteriores.
- Exemplo:

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

- Como o **lado esquerdo** é **menor ou igual** a 5 (a diferença é desconhecida), a adição de uma variável **não-negativa**, chamada, por exemplo, x_3, que represente tal diferença, permite que a inequação seja escrita como uma equação:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

- $x_3 \geq 0$ é denominada **variável de folga**.

- De modo similar, no caso da inequação

$$x_1 + 3x_2 \geq 7,$$

onde tem-se o lado esquerdo **maior ou igual** ao lado direito, é possível representar a diferença pela **subtração** de uma variável de folga não-negativa:

$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 7\,.$$

- Algumas referências chamam neste caso a nova variável de **variável de excesso**.

Observação

Apenas as **restrições técnicas** são reescritas como equações.
As restrições de não-negatividade são mantidas.

Forma padrão

Um problema de PL está na **forma padrão** quando:

1. É um problema de **maximização**;
2. As restrições são do tipo $\leq$;
3. O lado direito das restrições (termo independente) é sempre não-negativo;
4. As variáveis de decisão são não-negativas.

Observação

Alguns autores – ex.: Marins (2011) – trabalham com definições alternativas para a forma padrão. A adotada no curso foi considerada por questões didáticas.

Exemplo

$$\max Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\max Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - 5x_1 - 2x_2 = 0$$

sujeito a

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

- Como a **função objetivo** é dada como uma equação, não é necessária a introdução de variáveis de folga na mesma.
- Note que a função objetivo foi reescrita, de modo a deixar o lado direito nulo.

Quadro inicial

- A tabela ou **quadro** abaixo auxilia na resolução:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	0
$L_1^{(0)}$	x_3	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

- Na linha L_0 encontram-se os coeficientes da função objetivo.
- Nas linhas $L_i, i = 1, \ldots, 3$, encontram-se os coeficientes das restrições.
- O super-índice entre parênteses (k) das linhas indica que as mesmas são as linhas obtidas após a k-ésima iteração do simplex.
  - (0) indica que estas são as linhas do quadro inicial.
- O vetor **b** contém as **constantes** (termos independentes) das restrições, bem como da função objetivo reescrita.

Solução básica viável inicial

$$x_3 = 3 \qquad x_1 = 0$$
$$x_4 = 4 \qquad x_2 = 0$$
$$x_5 = 9 \qquad Z = 0$$

Algoritmo I

1. A solução já é a ótima? Se sim, o problema encontra-se resolvido, e o algoritmo se encerra nesta etapa.
   - Este é um problema de **maximização**. A solução será ótima se **não houver coeficientes negativos** na linha L_0 da função objetivo.
   - Caso haja – este é o caso do exemplo – é preciso passar à etapa seguinte, **iterativa**.

Algoritmo II

2. As **variáveis de folga** formam uma **base** do $\mathbb{R}^m$ (m é o número de restrições), pois a matriz $m \times m$ formada pelas linhas $L_i, i = 1, \ldots, m$ e respectivas colunas de tais variáveis é uma **matriz identidade**, portanto com determinante diferente de 0.
   - No quadro inicial, portanto, as **variáveis de folga** são chamadas de **básicas** (representadas na coluna à esquerda no mesmo), e as **variáveis de decisão** originais do problema, **não básicas**.
   - Esta etapa do algoritmo consiste em **colocar na base** uma variável de decisão, retirando da mesma uma das variáveis básicas (deve ser repetida até que a condição da etapa 1 seja satisfeita)

Etapas do passo 2 I

1. Identificar quem entrará na base (**condição de otimalidade**): **Regra de Dantzig**: Procura-se, na linha L_0, qual o coeficiente negativo de **maior valor absoluto** (i.é., de menor valor). A variável associada a ele é a que entrará na base.
   - No exemplo, entrará na base x_1, pois $|-5| > |-2|$. A coluna em destaque é a **coluna pivô** da iteração.

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	0
$L_1^{(0)}$	x_3	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

Etapas do passo 2 II

2. A variável básica que **sairá da base** é aquela cuja divisão da constante $b_i, i = 1, \ldots, m$ (a linha L_0 da função objetivo nunca é considerada) pelo coeficiente correspondente c_{ij} da coluna pivô seja o **menor de todos** – apenas **divisões não-negativas** e **finitas** são consideradas. Esta é a **Condição de viabilidade**.
   - No caso, temos $m = 3$, $j = 1$ (selecionou-se x_1 para deixar a base) e as divisões

$$\frac{b_1}{c_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{b_2}{c_{21}} = \frac{4}{0} = \infty \text{ (ignora-se)} \qquad \frac{b_3}{c_{31}} = \frac{9}{1} = 9$$

   - Portanto, x_3 (associada a linha L_1) **deixará a base** e a linha L_1 passa a ser a **linha pivô** desta iteração – razão mínima não-negativa nesta linha.

Etapas do passo 2 III

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	0
$L_1^{(0)}$	$\leftarrow x_3$	**1**	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

- O elemento $c_{11} = 1$, dado pelo cruzamento das linhas e colunas pivô, é o **número pivô** da iteração.

Etapas do passo 2 IV

3. Redefine-se a linha pivô, dividindo-se a mesma pelo número pivô.
   - No caso,

$$L_1^{(1)} = \frac{L_1^{(0)}}{c_{11}} = \frac{L_1^{(0)}}{1}$$

   - Note que agora x_1 faz parte da base, e x_3 passou a ser não-básica.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	0
$L_1^{(1)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

   - Detalhamento:

	1	0	1	0	0	3	$L_1^{(0)}$
$\div 1$:	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**3**	$L_1^{(1)}$

Etapas do passo 2 V

4. As demais linhas (incluindo a da função objetivo) são também redefinidas:

$$L_k^{(1)} = L_k^{(0)} - c_{kj}\, L_i^{(1)}, k = 0, \ldots, m, k \neq i,$$

onde i e j são os índices da (nova) linha pivô e coluna pivô, respectivamente.

Etapas do passo 2 VI

- Linha 0 (função objetivo): $L_0^{(1)} = L_0^{(0)} - (-5)\, L_1^{(1)}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-2	5	0	0	15
$L_1^{(1)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

- Detalhamento:

	1	0	1	0	0	3	$L_1^{(1)}$
$\times 5$:	5	0	5	0	0	15	
	-5	-2	0	0	0	0	$L_0^{(0)}$
	0	-2	**5**	**0**	**0**	**15**	$L_0^{(1)}$

Etapas do passo 2 VII

- Linha 2: $L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - 0\, L_1^{(1)} = L_2^{(0)}$ (inalterada)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-2	5	0	0	15
$L_1^{(1)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(1)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	1	2	0	0	1	9

Etapas do passo 2 VIII

- Linha 3: $L_3^{(1)} = L_3^{(0)} - 1\, L_1^{(1)}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-2	5	0	0	15
$L_1^{(1)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(1)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(1)}$	x_5	0	2	-1	0	1	6

- Detalhamento:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & L_1^{(1)} \\
\times(-1): & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & \\
 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 9 & L_3^{(0)} \\
\hline
 & \mathbf{0} & \mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & L_0^{(1)}
\end{array}$$

Etapas do passo 2 IX

- A primeira iteração está concluída.

Solução básica viável após iteração 1

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 0$$
$$x_4 = 4 \qquad x_3 = 0$$
$$x_5 = 6 \qquad Z = 15$$

Nova iteração do passo 2

- Como se pode observar na tabela anterior, ainda há um coeficiente negativo na linha L_0.
- Portanto, repete-se o passo 2.
  - Agora x_2 entrará na base, e x_5 sairá. Portanto, o número pivô é $C_{23} = 2$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	4	0	1	21
$L_1^{(2)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(2)}$	x_4	0	0	1/2	1	$-1/2$	1
$L_3^{(2)}$	x_2	0	1	$-1/2$	0	1/2	3

Solução básica viável após iteração 2 (solução ótima)

$$x_1 = 3 \qquad x_3 = 0$$
$$x_4 = 1 \qquad x_5 = 0$$
$$x_2 = 3 \qquad Z = 21$$

1. Empate na entrada da base

Na condição de otimalidade, quando se busca a variável que entrará na base; se houver empate escolhe-se arbitrariamente qual deverá de fato entrar. **Única implicação**: pode-se escolher um caminho mais longo ou mais curto – dependendo da escolha – para se chegar à solução ótima

Exemplo: problema envolvendo maximização da função objetivo

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Note que o **maior coeficiente** é 4, e está associado a **duas variáveis** (x_1 e x_2). Na 1a. iteração, deve-se escolher qual das duas entrará (aparecerão como -4 no quadro inicial).

2. Empate na saída da base

Na condição de viabilidade, quando se busca a variável que sairá na base, se houver empate em geral *também* se escolhe arbitrariamente qual deverá de fato sair.

Exemplo:
max $Z = 5x_1 + 2x_2$, sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	0
$L_1^{(0)}$	x_3	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(0)}$	x_5	4	3	0	0	1	12

x_1 entrará na base. As candidatas a sair da base (menor razão não-negativa):

$$x_3 : \frac{b_1}{c_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \qquad\qquad x_5 : \frac{b_3}{c_{31}} = \frac{12}{4} = 3$$

Escolhe-se, por exemplo, x_3 para deixar a base:

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-2	5	0	0	15
$L_1^{(1)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(1)}$	x_4	0	1	0	1	0	4
$L_3^{(1)}$	$\leftarrow x_5$	0	3	-4	0	1	0

Note que x_5 é nula, mesmo sendo variável básica. Isto ocorre devido à condição de empate e a solução viável encontrada é dita **degenerada**.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	$7/3$	0	$2/3$	15
$L_1^{(2)}$	x_1	1	0	1	0	0	3
$L_2^{(2)}$	x_4	0	0	$4/3$	1	$-1/3$	4
$L_3^{(2)}$	x_2	0	1	$-4/3$	0	$1/3$	0

Pode ocorrer a **ciclagem** (ou **retorno cíclico**) – o valor da função objetivo não melhora, sendo possível que o método entre em uma sequência de iterações sem nunca melhorar tal valor e satisfazer a condição de otimalidade. Neste exemplo, esta última foi satisfeita (encontrou-se solução ótima).

Exemplo de caso em que ocorre ciclagem (Taha, 2008):

$$\max Z = \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeito a

$$\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$
$$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

- O sistema encontra-se na forma padrão.
- Na forma de equações:

$$\max Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) - \frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 = 0$$

sujeito a

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
x_3 + x_7 = 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0
\end{gathered}$$

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	0
$L_1^{(0)}$	$\leftarrow x_5$	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0	0
$L_2^{(0)}$	x_6	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0	0
$L_3^{(0)}$	x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0	0
$L_1^{(1)}$	x_1	1	-32	-4	36	4	0	0	0
$L_2^{(1)}$	$\leftarrow x_6$	0	4	$3/2$	-15	-2	1	0	0
$L_3^{(1)}$	x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

		x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	-2	18	1	1	0	0
$L_1^{(2)}$	$\leftarrow x_1$	1	0	8	-84	-12	8	0	0
$L_2^{(2)}$	x_2	0	1	$3/8$	$-15/4$	$-1/2$	$1/4$	0	0
$L_3^{(2)}$	x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

		x_1	x_2	x_3	$\downarrow x_4$	x_5	x_6	x_7	**b**
$L_0^{(3)}$	Z	$1/4$	0	0	-3	-2	3	0	0
$L_1^{(3)}$	x_3	$1/8$	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0	0
$L_2^{(3)}$	$\leftarrow x_2$	$-3/64$	1	0	$3/16$	$1/16$	$-1/8$	0	0
$L_3^{(3)}$	x_7	$-1/8$	0	0	$21/2$	$3/2$	-1	1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow x_5$	x_6	x_7	**b**
$L_0^{(4)}$	Z	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0	0
$L_1^{(4)}$	$\leftarrow x_3$	$-5/2$	56	1	0	2	-6	0	0
$L_2^{(4)}$	x_4	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0	0
$L_3^{(4)}$	x_7	$5/2$	-56	0	0	-2	6	1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow x_6$	x_7	**b**
$L_0^{(5)}$	Z	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0	0
$L_1^{(5)}$	x_5	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0	0
$L_2^{(5)}$	$\leftarrow x_4$	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	$1/3$	0	0
$L_3^{(5)}$	x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{b}$
$L_0^{(6)}$	Z	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	0
$L_1^{(6)}$	$\leftarrow x_5$	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0	0
$L_2^{(6)}$	x_6	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0	0
$L_3^{(6)}$	x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

Tal quadro é exatamente igual ao inicial: ao se prosseguir com o algoritmo, a mesma sequência de quadros se repetirá sem melhoria do valor da função objetivo (**laço infinito**).

3. Soluções múltiplas

Modelo de PL apresenta mais de uma solução ótima.

Exemplo:

max $Z = 2x_1 + 4x_2$, sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-2	-4	0	0	0
$L_1^{(0)}$	$\leftarrow x_3$	1	2	1	0	5
$L_2^{(0)}$	x_4	1	1	0	1	4

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	0	2	0	10
$L_1^{(1)}$	x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	$5/2$
$L_2^{(1)}$	$\leftarrow x_4$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$3/2$

A solução é ótima, e tem-se $x_1 = 0, x_2 = 5/2$ e $Z = 10$. O coeficiente de x_1 (não-básica) em L_0 é zero, indicando que a mesma pode entrar na base, de modo que o valor da função objetivo fique inalterado – apenas os valores das variáveis se alteram.

		x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	2	0	10
$L_1^{(2)}$	x_2	0	1	1	-1	1
$L_2^{(2)}$	x_1	1	0	-1	2	3

Forçando-se a saída de x_4 da base, inserindo-se x_1 em seu lugar, tem-se nova solução em $x_1 = 3, x_2 = 1$ e $Z = 10$.
Qualquer **combinação convexa** desta solução e da anterior também será uma solução ótima. Graficamente: segmento de reta entre os pontos (0,5/2) e (3,1)

4. Função objetivo ilimitada

- Outro resultado possível é aquele no qual nenhuma variável se qualifica para ser a variável básica a deixar a base.
- Este resultado ocorre quando a variável que entra na base pode ser aumentada indefinidamente sem dar valores negativos a qualquer das variáveis básicas atuais. Na forma tabular, isso significa que todos os coeficientes da coluna pivô (excluindo-se a linha L_0) são negativos ou zero.
- Neste caso, as restrições não impedem que o valor da função objetivo cresça indefinidamente.
- Isto ocorre, provavelmente, porque o modelo foi mal formulado, seja por omitir restrições relevantes, seja por declará-las de modo incorreto.

Exemplo:
max $Z = 2x_1 + x_2$ sujeito a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-2	-1	0	0	0
$L_1^{(0)}$	$\leftarrow x_3$	1	-1	1	0	10
$L_2^{(0)}$	x_4	2	0	0	1	40

Todos os coeficientes das restrições sob x_2 são todos negativos ou zero. Note que x_2 pode ser aumentada indefinidamente sem desobedecer nenhuma das restrições. Embora x_1 entre na base pelo critério de otimalidade, note que caso x_2 entrasse na base, nem x_3 nem x_4 poderia sair da mesma pelo critério de viabilidade.

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	0	-3	2	0	20
$L_1^{(1)}$	x_1	1	-1	1	0	10
$L_2^{(1)}$	$\leftarrow x_4$	0	2	-2	1	20

		x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	-1	$3/2$	50
$L_1^{(2)}$	x_1	1	0	0	$1/2$	20
$L_2^{(2)}$	x_2	0	1	-1	$1/2$	10

Como consequência do observado para x_2 no quadro inicial, agora x_3 possui as mesmas características, sendo a única variável candidata a entrar na base: nem x_1 nem x_2 podem sair.

Obs.: É suficiente a análise do quadro inicial para concluir que a solução é ilimitada.

5. Problema de minimização

Quando a função objetivo tiver de ser minimizada pode-se fazer duas coisas, a saber:

- **Inverter** o teste de otimização e o critério de entrada na base. Assim, se todos os coeficientes da linha L_0 forem negativos, ou nulos, a solução é ótima. Caso contrário, escolha a variável x_j para entrar que apresente o **maior valor**.
- Transformar o problema de minimização em um problema de maximização. Sabe-se que achar o mínimo de uma função é equivalente a encontrar o máximo do simétrico desta função.
  - **Exemplo:** $\min W = 2x_1 + 3x_2 \Leftrightarrow \max Z = -2x_1 - 3x_2$. Depois, na solução final, fazer $W = -Z$.

- Um aspecto de problemas de minimização é que em geral as restrições contém desigualdades do tipo $\geq$ (maior-ou-igual).
- Os exemplos abordados com o simplex são todos problemas de **maximização**, onde as restrições são do tipo

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \leq b_i,$$

onde a constante do lado direito b_i é tal que $b_i \geq 0$ (**forma padrão**).

  - Sob esta forma, as variáveis acrescentadas são de folga e o problema pode ser resolvido como visto.
  - Problemas com restrições envolvendo a desigualdade $\geq$ ou mesmo igualdade ($=$) exigem etapas adicionais.

Lado direito negativo

- Para que a resolução vista possa ser empregada, é preciso que o lado direito das restrições seja não-negativo.
- Por exemplo, a restrição

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

leva ao surgimento da equação

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3, x_3 \geq 0\,.$$

- O problema é resolvido fazendo-se a multiplicação de ambos os lados por -1:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 3\,.$$

- Neste caso, o coeficiente de x_3 é -1. Logo, esta não pode entrar na base (na equação reescrita é variável **de excesso**). Isto equivale a partirmos da inequação

$$x_1 - x_2 \geq 3\,.$$

(nada mais do que a inequação original multiplicada por -1 – a desigualdade é invertida).

Solução inicial artificial

- Para se iniciar a resolução de problemas de PL "mal comportados" (com restrições do tipo $\geq$ e $=$) deve se adotar **variáveis artificiais**
- Estas desempenham o papel de folgas na primeira iteração.
- São descartadas em iterações posteriores.
- Dois métodos:
  - Método do M-grande;
  - Método das duas fases.

Considere o seguinte problema:

max $Z = 5x_1 + 2x_2$
sujeito a:

$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 9$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

max Z tal que $Z - 5x_1 - 2x_2 = 0$
sujeito a:

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 9$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

- Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = 0$.
- Variáveis básicas: $x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = -9$.
- **Não é solução viável**, pois x_5 deveria ser não-negativa.

Pode-se acrescentar uma **variável artificial** na equação problemática. Esta variável ocupará o lugar de x_5 na base inicial. Logo:

max Z tal que $Z - 5x_1 - 2x_2 = 0$
sujeito a:

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 + t_1 = 9$$
$$x_1, \ldots, x_5, t_1 \geq 0$$

- Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.
- Variáveis básicas: $x_3 = 3, x_4 = 4, t_1 = 9$.

- Os sistemas somente se equivalem se a variável artificial t_1 for nula.
- As variáveis artificiais não têm significado no problema real, mas permitem a inicialização do processo de maneira automática.

Método do M-grande

- Como as variáveis artificiais não fazem parte do modelo, estas sofrerão **punições** na função objetivo:
  - As punições visam **zerar** tais variáveis na solução ótima.
  - Isto sempre ocorrerá se houver solução viável.

Regra de penalização das variáveis artificiais

Dado $M > 0$, valor suficientemente alto ($M \to \infty$), o coeficiente na função objetivo representa uma punição adequada quando igual a:

- $-M$, em problemas de maximização;
- M, em problemas de minimização.

- O valor de M deve ser suficientemente grande *em relação aos demais coeficientes da função objetivo*, de modo a forçar as variáveis a ter valor nulo no ótimo.

Retornando ao exemplo anterior:

max $Z = 5x_1 + 2x_2 - Mt_1$
sujeito a:

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 + t_1 = 9$$
$$x_1, \ldots, x_5, t_1 \geq 0$$

max Z tal que
$Z - 5x_1 - 2x_2 + 100t_1 = 0$
sujeito a:

$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 + t_1 = 9$$
$$x_1, \ldots, x_5, t_1 \geq 0$$

- Como os coeficientes na função objetivo são 5 e 2, parece razoável definir $M = 100$.

- Quadro inicial:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-5	-2	0	0	0	100	0
$L_1^{(0)}$	x_3	1	0	1	0	0	0	3
$L_2^{(0)}$	x_4	0	1	0	1	0	0	4
$L_3^{(0)}$	t_1	1	2	0	0	-1	1	9

- A linha L_0 é **inconsistente** com o resto da tabela, uma vez que $t_1 = 9$ (t_1 está na base) e portanto $Z = -900$.
- Para empregar a resolução do simplex, é preciso que os coeficientes das variáveis básicas na linha L_0 sejam todos nulos. Este ajuste inicial pode ser feito redefinindo-se esta linha como sendo a soma dela mesma com a linha associada a t_1 multiplicada por $-M$:

$$L_0^{(0)} = L_0^{(0)} - ML_3^{(0)} = L_0^{(0)} - 100L_3^{(0)}$$

- O quadro inicial então se torna

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	t_1	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-105	-202	0	0	100	0	-900
$L_1^{(0)}$	x_3	1	0	1	0	0	0	3
$L_2^{(0)}$	$\leftarrow x_4$	0	1	0	1	0	0	4
$L_3^{(0)}$	t_1	1	2	0	0	-1	1	9

- Detalhamento:

	1	2	0	0	-1	1	9	$L_3^{(0)}$
$\times(-100)$:	-100	-200	0	0	100	-100	-900	
	-5	-2	0	0	0	100	0	$L_0^{(0)}$ original
	-105	-202	**0**	**0**	**100**	**0**	-900	$L_0^{(0)}$ ajustada

Solução básica viável inicial

$$x_3 = 3 \qquad x_1 = 0$$
$$x_4 = 4 \qquad x_2 = 0$$
$$t_1 = 9 \qquad x_5 = 0$$
$$Z = -900$$

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	**b**
$L_0^{(1)}$	Z	-105	0	0	202	100	0	-92
$L_1^{(1)}$	x_3	1	0	1	0	0	0	3
$L_2^{(1)}$	x_2	0	1	0	1	0	0	4
$L_3^{(1)}$	$\leftarrow t_1$	1	0	0	-2	-1	1	1

		x_1	x_2	x_3	$\downarrow x_4$	x_5	t_1	**b**
$L_0^{(2)}$	Z	0	0	0	-8	-5	105	13
$L_1^{(2)}$	$\leftarrow x_3$	0	0	1	2	1	-1	2
$L_2^{(2)}$	x_2	0	1	0	1	0	0	4
$L_3^{(2)}$	x_1	1	0	0	-2	-1	1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow x_5$	t_1	**b**
$L_0^{(3)}$	Z	0	0	4	0	-1	101	21
$L_1^{(3)}$	$\leftarrow x_4$	0	0	$1/2$	1	$1/2$	$-1/2$	1
$L_2^{(3)}$	x_2	0	1	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3
$L_3^{(3)}$	x_1	1	0	1	0	0	0	3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	**b**
$L_0^{(4)}$	Z	0	0	5	2	0	100	23
$L_1^{(4)}$	x_5	0	0	1	2	1	-1	2
$L_2^{(4)}$	x_2	0	1	0	1	0	0	4
$L_3^{(4)}$	x_1	1	0	1	0	0	0	3

O método do M-grande pode resultar em **erros de arredondamento** durante a fase de punição do valor M – definido sempre de forma relativamente arbitrária.

- Na prática, usa-se o **método das duas fases**, desenvolvido posteriormente.
- O método das duas fases está implementado em praticamente todos os pacotes comerciais para resolução de problemas de PL.

Método das duas fases

- Alternativa ao método do M-grande, contornando a dificuldade do mesmo por eliminar o uso da constante M.
- Inicialmente, variáveis artificiais são introduzidas ao modelo, como no método anterior.
- Como o nome sugere, há **duas fases** ou etapas:
  - **Fase I**: consiste em resolver um **problema de minimização** cuja função objetivo é dada pelo *somatório das variáveis artificiais*. Espera-se que o mínimo seja **zero** (requisito para Fase II).

Observação

Caso o valor mínimo da soma seja **diferente de zero**, o problema **não tem nenhuma solução viável**, o que **encerra o processo** – variável artificial positiva indica que restrição original não foi satisfeita.

  - **Fase II**: Usa-se a solução da Fase I como solução básica viável inicial para o problema original.

Seja o problema:

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Variáveis de folga:

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como não há uma solução básica viável são inseridas as variáveis artificiais t_1 e t_2 às restrições envolvendo $\geq$ e $=$:

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + t_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + t_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_4 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

A função objetivo inicial será portanto

$$W = t_1 + t_2$$

Fase I

$$\min W = t_1 + t_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + t_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + t_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_4 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	**b**
$L_0^{(0)}$	$-W$	0	0	0	0	1	1	0
$L_1^{(0)}$	t_1	3	1	0	0	1	0	3
$L_2^{(0)}$	t_2	4	3	-1	0	0	1	6
$L_3^{(0)}$	x_4	1	2	0	1	0	0	4

Como a linha L_0 é **incompatível** com o sistema – possui coeficientes para variáveis t_1 e t_2 da base – faz-se $L_0^{(0)} = L_0^{(0)} - L_1^{(0)} - L_2^{(0)}$:

		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	**b**
$L_0^{(0)}$	$-W$	-7	-4	1	0	0	0	-9
$L_1^{(0)}$	$\leftarrow t_1$	3	1	0	0	1	0	3
$L_2^{(0)}$	t_2	4	3	-1	0	0	1	6
$L_3^{(0)}$	x_4	1	2	0	1	0	0	4

Detalhamento:

	3	1	0	0	1	0	3	$L_1^{(0)}$
	4	3	-1	0	0	1	6	$L_2^{(0)}$
$L_1^{(0)} \times (-1)$:	-3	-1	0	0	-1	0	-3	
$L_2^{(0)} \times (-1)$:	-4	-3	1	0	0	-1	-6	
	0	0	0	0	1	1	0	$L_0^{(0)}$ original
	-7	-4	1	**0**	**0**	**0**	-9	$L_0^{(0)}$ redefinido

		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	t_1	t_2	**b**
$L_0^{(1)}$	$-W$	0	$-5/3$	1	0	$7/3$	0	-2
$L_1^{(1)}$	x_1	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1
$L_2^{(1)}$	$\leftarrow t_2$	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2
$L_3^{(1)}$	x_4	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	0	3

		x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	**b**
$L_0^{(2)}$	$-W$	0	0	0	0	1	1	0
$L_1^{(2)}$	x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$
$L_2^{(2)}$	x_2	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$
$L_3^{(2)}$	x_4	0	0	1	1	1	1	1

- No quadro (2), $-W = 0$ (logo, $W = 0$), e não há coeficientes negativos para as variáveis fora da base. Portanto, a fase I está concluída.
- A solução básica viável é dada por:

$$x_1 = 3/5 \qquad x_2 = 6/5 \qquad x_4 = 1$$

  (apenas variáveis básicas). As demais, bem como a função objetivo W são nulas.
- Neste momento, pode-se eliminar totalmente as colunas das variáveis artificiais t_1 e t_2 e passar à fase II.
  - Eliminam-se também as linhas, quando for o caso (variáveis artificiais fora da base).

Após eliminar as colunas das variáveis artificiais, reescreve-se o problema original como:

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 1/5x_3 &= 3/5 \\ x_2 - 3/5x_3 &= 6/5 \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_4 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Quadro inicial desta fase – note que é preciso adequar a linha L_0 antes de prosseguir para o algoritmo do simplex:

		x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
$L_0^{(0)}$	Z	-4	-1	0	0	0
$L_1^{(0)}$	x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
$L_2^{(0)}$	x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
$L_3^{(0)}$	x_4	0	0	1	1	1

Exercícios I

1. Determine a solução ótima a partir do quadro anterior (Fase II).
2. Usando simplex, determine a solução do problema

$$\min f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Referências

1. MARINS, F. A. S. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.
2. TAHA, H. *Pesquisa operacional*. 8ª. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Paulo H. R. Gabriel (FACOM/UFU)
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU