Resolução lista 01 - Parte 1

nome: João Mateus Dias do Carmo

1º) $Tobj' = T(1,2,0)\, R_z(45)\, R_y(-90)\, S(1,1,2) * \text{Ponto}$

$Tobj'' = T(2,1,0)\, R_y(90)\, R_x(90)\, S(1,0.5,1) * \text{Ponto}$

Tobj' :

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&2 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-90) & 0 & \sin(-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90) & 0 & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&2 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Calculando a matiz resultante do Tobj', temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando a matriz inversa, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\cdot 2 & 0 & 3/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostrando para P*:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$Tobj''$:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(90)&0&\sin(90)&0\\ 0&1&0&0\\ -\sin(90)&0&\cos(90)&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&\cos(90)&-\sin(90)&0\\ 0&\sin(90)&\cos(90)&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0.5&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Calculando a matriz Resultante e a matriz inversa, temos:

$$\begin{bmatrix} 0&0.5&0&2\\ 0&0&-1&1\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Calculando a inversa:

$$\begin{bmatrix} 0&0&-1&0\\ 2&0&0&-4\\ 0&-1&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Mostrando para $p\#$:

$$\begin{bmatrix} 0&0.5&0&2\\ 0&0&-1&1\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\1\\-1\\1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Determinando T como:

$$\cancel{T = Tobj'^{-1} \cdot Tobj''}$$

$$T = Tobj'' \cdot (Tobj')^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0&1/2&0&2\\ 0&0&-1&1\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ -1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\ -3/2\sqrt{2}&-1/2\sqrt{2}&0&3/2\sqrt{2}\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Calculando T:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provando que:

$P^{\#} = T \cdot P^{*}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OK ✓

Em termos de código, tem

```
glScale(1, 1, 0.5)
glRotate(90, 0, 1, 0)
glRotate(-45, 0, 0, 1)
glTranslate(-1, -2, 0)
glTranslate(2, 1, 0)
glRotate(90, 0, 1, 0)
glRotate(90, 1, 0, 0)
glScale(1, 0.5, 1)
```

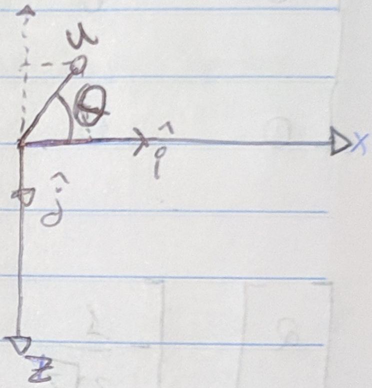
2º) a) Analisando primeiro a rotação:

→ Rotação Eixo Y:

Partindo da base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como é em torno do eixo Y, temos Y é constante, logo os termos em Azul não serão alterados:



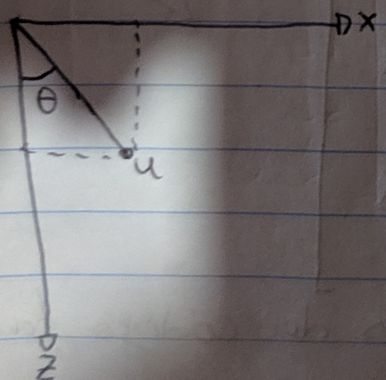
Analisando graficamente: $\hat{i}=(1,0,0)$:

Supondo $||u||=1$:

$\begin{cases} \text{Projeção em } x: \cos(\theta) \\ \text{Projeção em } z: -\sin(\theta) \end{cases}$

Para $\hat{K}=(1,0,0)$: Supondo $||u||=1$

$\begin{cases} \text{Projeção em } \cancel{x}: \sin(\theta) \\ \text{Projeção em } z: \cos(\theta) \end{cases}$



→ Aplicando as projeções na base canônica:

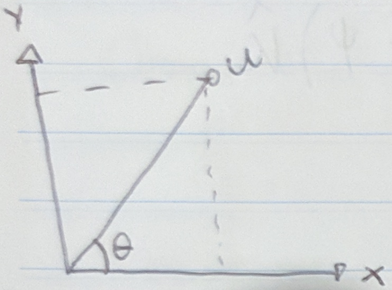
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

→ Roração em torno o Eixo z.

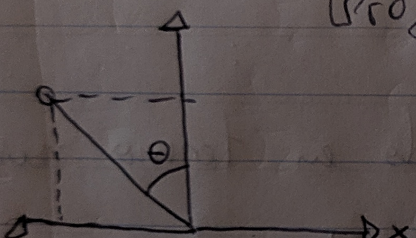
Usando a lógica da questão anterior e as mesmas definições partindo da Base Canônica:

Supondo: $\|\vec{U}\| = 1$, Base $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para $\hat{i} = (1,0,0)$: $\begin{cases} \text{Projeção em } x: \cos(\theta) \\ \text{Projeção em } y: \sin(\theta) \end{cases}$



Para $\hat{j} = (0,1,0)$: $\begin{cases} \text{Projeção em } x: -\sin(\theta) \\ \text{Projeção em } y: \cos(\theta) \end{cases}$



Aplicando na Base canônica:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como são feitas duas rotações e uma translação na Base canônica

$T \cdot R_z \cdot R_y \cdot \text{Base}$

Temos R_z e R_y numericamente:

$$R_z: \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y: \begin{bmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) \end{bmatrix}$$

/ /

Para encontrar o T:

Supondo um ponto P dado pelo vetor $\vec{u}$, é desejado transladar o ponto P para um ponto P' dado pelo vetor $\vec{u}'$:

- Sabendo que

$$\vec{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \psi\hat{k} \quad e \quad \vec{u}' = \alpha'\hat{i} + \beta'\hat{j} + \psi'\hat{k}$$

O vetor deslocamento:

$$\vec{u}' - \vec{u} = (\alpha' - \alpha)\hat{i} + (\beta' - \beta)\hat{j} + (\psi' - \psi)\hat{k}$$

ou reescrevendo:

$$\begin{bmatrix} \alpha + dx \\ \beta + dy \\ \psi + dz \end{bmatrix}$$ Normalizando via artifício matemático: $$\begin{bmatrix} \alpha + dx \\ \beta + dy \\ \psi + dz \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando a Matriz Identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando em termos numéricos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_r$$

Calculando o resultante de $T_r R_y R_z$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

$\hat{i}' = (0, 0, -1)$

$\hat{j} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

$\hat{k} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

Quando é feito $T \cdot (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ temos $(1, 2, 0)$ Que é a representação da nova base em termos da origem

2º b) ~~Tc~~ =

Tc é a inversa de Tobj" Tirando o fator da escala, assim, temos Tc:

$$Tc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como há uma relação de equivalência do

glMulMatrix(M)

glTranslated(-eyex, -eyey, -eyz)

como o gluLooAt:

gluLookAt(2, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0)