/ /

Lista 01 - Parte 02

nome: João Mateus Dias do Carmo Matrícula: 390187

1º Desenvolvimento da Rotação do vetor 'v' em torno do vetor 'u', com o ângulo θ. (usando como base o desenvolvimento do professor).

$$V' = Ru(\theta) \cdot V$$

↳ vetor inicial

↳ Eixo que será a base da rotação u com o ângulo θ.

Vetor V Rotacionado.

$$V' = (\cos(\theta))V + (1-\cos(\theta))u(u \cdot v) + (\text{sen}(\theta))(u \times v)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_x & u_y & u_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yV_z - zV_y \\ zV_x - xV_z \\ xV_y - yV_x \end{vmatrix}$$

Aplicando na equação geral: $V' = V'_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$

$$V' = \begin{bmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta)V_x + (1-\cos(\theta)) \cdot x(xV_x + yV_y + zV_z) + \sin(\theta)(yV_z - zV_y) \\ \cos(\theta)V_y + (1-\cos(\theta)) \cdot y(xV_x + yV_y + zV_z) + \sin(\theta)(zV_x - xV_z) \\ \cos(\theta)V_z + (1-\cos(\theta)) \cdot z(xV_x + yV_y + zV_z) + \sin(\theta)(xV_y - yV_x) \end{vmatrix}$$

Desenvolvento matematicamente de forma a isolar os termos da matriz $Ru(\theta)$ e o vetor inicial V, temos:

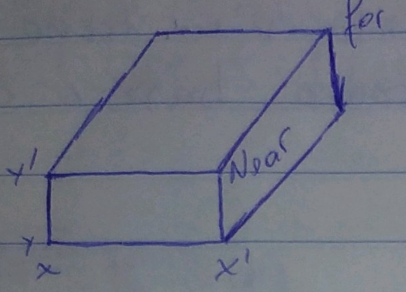
$$V' = \begin{bmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x^2(1-\cos(\theta)) + \cos(\theta) & xy(1-\cos(\theta)) - \sin(\theta)z & xz(1-\cos(\theta)) + \sin(\theta)y \\ yx(1-\cos(\theta)) + \sin(\theta)z & y^2(1-\cos(\theta)) + \cos(\theta) & yz(1-\cos(\theta)) - \sin(\theta)x \\ zx(1-\cos(\theta)) + \sin(\theta)y & zy(1-\cos(\theta)) + \sin(\theta)x & z^2(1-\cos(\theta)) + \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{Ru(\theta)}$$

logo:

$$V' = Ru(\theta) \cdot (V_x, V_y, V_z)$$

(/ /)

2-a) O mapeamento é dado pela transformação baseada em um paralelepípedo, da forma abaixo:



$$\text{Centro} = \left(\frac{x'+x}{2}, \frac{Y'+Y}{2}, \frac{-near-far}{2} \right)$$

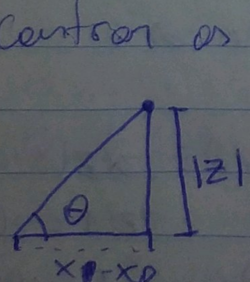
logo a transformação total é dada via uma translação e uma escala:

$$Np = \begin{bmatrix} 2/x'-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/Y'-Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/far-near & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{(x'+x)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(Y'+Y)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{far+near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/x'-x & 0 & 0 & -\frac{(x'+x)}{x'-x} \\ 0 & 2/Y'-Y & 0 & -\frac{(Y'+Y)}{Y'-Y} \\ 0 & 0 & 2/far-near & +\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2º-b) Essa projeção pode ser vista como uma adaptação da anterior apenas aplicando um cisalhamento baseado em dois ângulos θ e ϕ. Como perdemos informação do z nesta técnica, precisamos encontrar os novos x_p e Y_p.

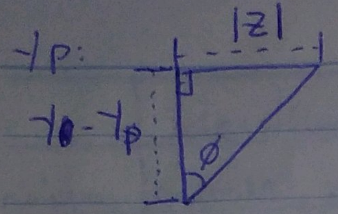
x_p:



$$\cot g(\theta) = \frac{x - x_p}{|Z|}$$ ou como $\forall z : z < 0$, logo:

$$\cot g(\theta) = \frac{x - x_p}{-z}$$, Assim:

$$x_p = x + \cot g(\theta) \cdot z$$



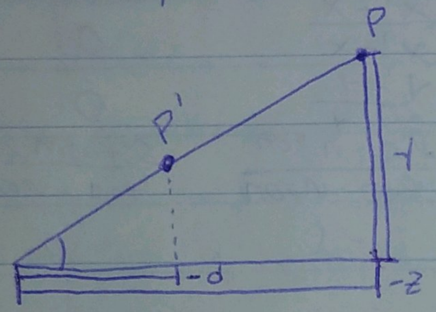
Seguindo a lógica do passo anterior (Xp), chegamos em:

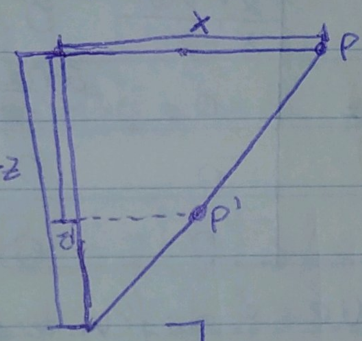
$$Y_p = Y + \cot g(\phi) \cdot Z$$

Aplicando na matriz:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + \cot g(\theta)\cdot Z \\ Y + \cot g(\phi)\cdot Z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ctg(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & ctg(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3º) De forma similar a questão anterior, queremos achar a relação $P' = Persp \cdot P$, iremos analisar os pontos Xp e Yp.





USANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO EM AMBOS OS CASOS.

$$Y_p = \frac{Yd}{Z}$$

$$X_p = \frac{Xd}{Z}$$

Colocando em termos de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Xd}{Z} \\ \frac{Yd}{Z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\times Z}{=} \begin{bmatrix} X\cdot d \\ Y\cdot d \\ Z\cdot d \\ Z \end{bmatrix} \underset{/d}{=} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ Z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \underset{d=-1}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definindo α e β para resolver o problema do determinante da matriz ser 0, temos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ \alpha Z + \beta \\ -Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

De forma que o sistema abaixo seja verdadeiro:

$$\begin{cases} -\alpha + \beta/near = 1 \\ -\alpha + \beta/far = -1 \end{cases}$$

/ /

Resolvendo o sistema e aplicando na matriz.

$$N_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{far-near} & \frac{2\cdot far\cdot near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é a primeira, sendo assim não leva em conta escalas (S) e cisalhamento (Sh).

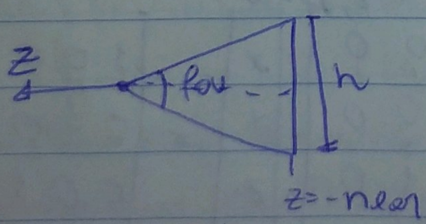
Usando a ideia dada na questão anterior de cisalhamento e as escalas serão aplicadas apenas em x_p e y_p, levando em consideração os termos far e near, podemos deduzir a matriz final como:

$$N_p = \begin{bmatrix} \frac{2near}{x'-x} & 0 & \frac{x'+x}{x'-x} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{y'-y} & \frac{y'+y}{y'-y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{far-near} & \frac{2\cdot far\cdot near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Já o gluPerspective é definido como:

fov ⇒ Ângulo de abertura

ar ⇒ Relação entre largura da base com altura.



$$tg\left(\frac{fov}{2}\right) = \frac{h}{2} / near$$

$$h = 2\cdot near\cdot tg\left(\frac{fov}{2}\right)$$

Como é simétrico, temos:

- $y'-y = h = 2\cdot near\cdot tg\left(\frac{fov}{2}\right)$
- $x'-x = w = ar\cdot h = 2\cdot ar\cdot near\cdot tang\left(\frac{fov}{2}\right)$

Usando Semelhança:

- $2near / x'-x = \frac{2\cdot near}{ar\cdot 2\cdot near\cdot tg\left(\frac{fov}{2}\right)} = \underbrace{1/ar\cdot tg\left(\frac{fov}{2}\right)}_{f} = \frac{f}{ar}$
- $2near / y'-y = 1/tg\left(\frac{fov}{2}\right)$

Aplicando na matriz:

$$Nf = \begin{bmatrix} f/ar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{far-near} & \frac{2far\,near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4º) a) $\vec{P}(u) = P_x(u)\hat{i} + P_y(u)\hat{j} + P_z(u)\hat{k}$, ou (P_x, P_y, P_z)

$$\vec{P}(u) = \begin{bmatrix} P_x(u) \\ P_y(u) \\ P_z(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + u(P_x - L_x) \\ P_y + u(P_y - L_y) \\ P_z + u(P_z - L_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + u(-L_x) \\ P_y + u(-L_y) \\ P_z + u(-L_z) \end{bmatrix}$$

Para o plano $z = k$: $P_z + u(-L_z) = k \rightarrow u = \frac{k - P_z}{(-L_z)}$

◦ Aplicando em x:

$$P_x + \left(\frac{k - P_z}{(-L_z)}\right)(-L_x) \Rightarrow \frac{P_x(-L_z) + P_z L_x - L_x k}{(-L_z)}$$

◦ Aplicando em y:

$$P_y + \left(\frac{k - P_z}{(-L_z)}\right)(-L_y) \Rightarrow \frac{P_y(-L_z) + P_z L_y - L_y k}{(-L_z)}$$

Aplicando nas coordenadas Homogêneas:

$$\begin{bmatrix} \frac{P_x(-L_z) + P_z L_x - L_x k}{(-L_z)} \\ \frac{P_y(-L_z) + P_z L_y - L_y k}{(-L_z)} \\ k \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-L_z)} \begin{bmatrix} P_x(-L_z) + P_z L_x - L_x k \\ P_y(-L_z) + P_z L_y - L_y k \\ k(-L_z) \\ -L_z \end{bmatrix}$$

Montando a matriz final.

$$\begin{bmatrix} -L_z & 0 & L_x & -L_x k \\ 0 & -L_z & L_y & -L_y k \\ 0 & 0 & 0 & -L_z k \\ 0 & 0 & 0 & -L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

(/ /)

4º) b) ∘ $P(u) = P + u(-L)$ // $q \cdot n = -d$

Aplicando:

~~P(u)~~ $P(u) \cdot n = -d$

$$\Big(P + u(-L)\Big) \cdot n = -d \Rightarrow \boxed{u = \frac{n \cdot P + d}{L \cdot n}}$$

Aplicando na equação da reta:

$$P' = P + \left(\frac{n \cdot P + d}{L \cdot n}\right) \cdot (-L) \Rightarrow$$

desenvolvendo

~~$P' = (L \cdot n)\vec{P} - (n_x P_x$~~

$$P' = \frac{(L \cdot n)\vec{P} - (n_x P_x + n_y P_y + n_z P_z) \cdot \vec{L} - d \cdot \vec{L}}{L \cdot n}$$

Separando em cada coordenada e ajustando para as coordenadas homogêneas, temos:

∘ $(L \cdot n) P_x' = (L \cdot n - n_x L_x) P_x - n_y L_x P_y - n_z L_x P_z - d \cdot L_x$

∘ $(L \cdot n) P_y' = (-n_x L_y) P_x + (L \cdot n - n_y L_y) P_y - n_z L_y P_z - d L_y$

∘ $(L \cdot n) P_z' = (-n_x L_z) P_x - n_y L_z P_y + (L \cdot n - n_z L_z) P_z - d L_z$

∘ $(L \cdot n) = L \cdot n$

Passando para a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} L \cdot n - n_x L_x & -n_y L_x & -n_z L_x & -d L_x \\ -n_x L_y & L \cdot n - n_y L_y & -n_z L_y & -d L_y \\ -n_x L_z & -n_y L_z & L \cdot n - n_z L_z & -d L_z \\ 0 & 0 & 0 & L \cdot n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

4º) c) → Informações:

$L = (-1, 0.5, 1)$
$P = (1, 0.5, 0)$
$n = (0, 0, 1)$
$d = 1$

$L \cdot n = 1$

→ Primeiro caso: Luz pontual

o USANDO A MATRIZ:

$$\begin{bmatrix} L\cdot n + d - n_x L_x & -n_x L_x & -n_z L_x & -d L_x \\ -n_x L_y & L\cdot n + d - n_y L_y & -n_z L_y & -d L_y \\ -n_x L_z & -n_y L_z & L n + d - n_z L_z & -d L_z \\ -n_x & -n_y & -n_z & L\cdot n \end{bmatrix}$$

o Aplicando → o Aplicando o Ponto

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ok!

→ Segundo Caso: Luz no Infinito

o USANDO A MATRIZ:

$$\begin{bmatrix} L n - n_x L_x & -n_y L_x & -n_z \cdot L_x & -d L_x \\ -n_x L_y & L n - n_y L_y & -n_z L_y & -d L_y \\ -n_x L_z & -n_y L_z & L n - n_z L_z & -d L_z \\ 0 & 0 & 0 & L n \end{bmatrix}$$

→ Aplicando → o Aplicando o ponto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ok!