Algoritmia Aplicada

Ano lectivo 2011-2012

Aula 6 – Algoritmos Matemáticos:
Cálculo de polinómios

Sumário

- Cálculo de polinómios
  - Método geral
  - Regra de Horner
  - Caso de polinómios com um só termo
    (métodos de quadratura)

Cálculo de Polinómios

- **Um valor para x, calcular p(x)**
- **Exemplo**

  $p(x) = 7x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x + 1$
- **Um método *(1)***

Calcular $7x^4$ … Depois calcular $3x^3$ e somar … etc.

→ Implica recálculo de potências

Cálculo de Polinómios

- **Um valor para x, calcular p(x)**
- **Exemplo**

  $p(x) = 7x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x + 1$
- **Outro método *(2)***

Guardar potências de x à medida que vão sendo calculadas

→ Requer memória adicional

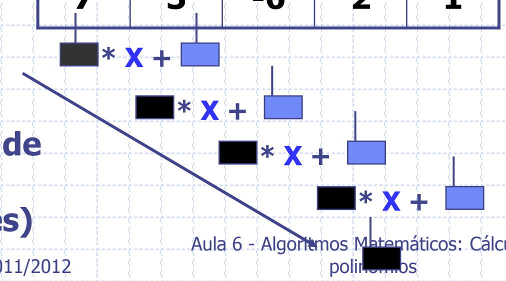
Cálculo de Polinómios

- **Regra de Horner *(3)***

p(x) = x(x(x(x(7)+ 3)- 6)+ 2) + 1

Alternam-se as multiplicações e as adições e não há recálculo nem uso de memória adicional.

	4	3	2	1	0
P =	**7**	**3**	**-6**	**2**	**1**



Sequência de cálculo (4 iterações)

Cálculo de um Polinómio em vários pontos

- **Calcular p(x) de grau N em N diferentes pontos x**

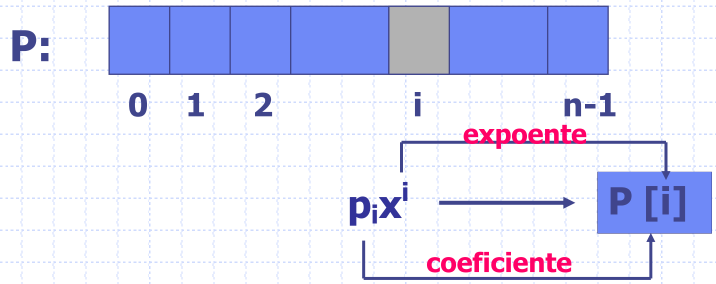
- **Regra de Horner → N multiplicações para um ponto**

Então:

- **necessárias N * N = N² multiplicações**
- **Há métodos mais eficientes para este efeito**

Algoritmos para Cálculo de Polinómios

- **P** array que armazena o polinómio **p(x)**



$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots + p_i x^i + \ldots p_{n-1} x^{n-1}$$

- **POL** é o valor do polinómio num dado ponto **x**

Algoritmos para cálculo de polinómios

Método *(1)*

```
GRAU ← N-1
POL ← 0
DO FOR I=GRAU TO 0 STEP -1
    PROD ← 1
    DO FOR J=1 TO I
        PROD ← PROD * X
    POL ← POL + P[I] * PROD
```

Nota: $x^i = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{i \text{ factores}}$

2 acumuladores

Algoritmos para cálculo de polinómios

Método ***(2)***

```
GRAU ← N-1
POL ← 0
PROD ← 1
DO FOR I=0 TO GRAU
     POL ← POL + P[I] * PROD
     PROD ← PROD * X
```

2 acumuladores

Algoritmos para cálculo de polinómios

Regra de Horner ***(3)***

```
GRAU ← N-1
POL ← P[GRAU]
DO FOR I=GRAU-1 TO 0 STEP -1
     POL ← POL * X + P[I]
```

1 acumulador apenas

Caso particular: polinómio com um só termo

- O problema reduz-se a X^N **Exponenciação**
  - **Hipótese óbvia, mas não eficiente:**

Cálculo de X^N

Através de N-1 multiplicações

$$X^N = \prod_{i=1}^{N} X$$

```
POL ← X
DO FOR I=2 TO N
    POL ← POL * X
```


Caso particular: polinómio com um só termo

- **Se N é potência de 2**
  - **Método da quadratura sucessiva → muito mais eficiente**

Cálculo de X^N

- **Cálculo dos sucessivos termos**
- **Cada um deles sendo o quadrado do anterior**
- **Até obter** X^N

Método da quadratura sucessiva

- **N é potência de 2**
- **Exemplo:**

Cálculo de X^{32} →

- **Apenas 5 multiplicações método QS**
- **31 multiplicações pelo método directo**

$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^4 \rightarrow x^8 \rightarrow x^{16} \rightarrow x^{32}$

$x*x \quad x^2*x^2 \quad x^4*x^4 \quad x^8*x^8 \quad x^{16}*x^{16}$

- **Note-se que:** $5 = \log_2 32$ (ou seja, $2^5=32$)
- **Cálculo de x^N** → **$\log_2 N$ multiplicações**

(N é potência de 2)

Método da quadratura sucessiva

- **N é potência de 2**
- **Algoritmo**

```
POL ← X
DO FOR I=LOG2(N) TO 1 STEP -1
    POL ← POL * POL
```

- **Cálculo de x^N** → **$\log_2 N$ multiplicações**

(N é potência de 2)

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** **(2 acumuladores)**
- **Exemplo:**

Cálculo de X^{55}

- **Cálculo de** X^{32} **(5 multiplicações)**
- **4 multiplicações**

TOTAL: 9 multiplicações

$$x \xrightarrow{x*x} x^2 \xrightarrow{x^2*x^2} x^4 \xrightarrow{x^4*x^4} x^8 \xrightarrow{x^8*x^8} x^{16} \xrightarrow{x^{16}*x^{16}} x^{32} \qquad (1)$$

$$x * x^2 * x^4 * x^{16} * x^{32} = x^{55} \qquad (2)$$

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** **(2 acumuladores)**

Quais as parcelas que entram no produto *(2)* ?

55 =	1	1	0	1	1	1 (2)
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	32	16	8	4	2	1

Representação em binário de N=55

$$55 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1$$

55	2						
1	27	2					
	1	13	2				
		1	6	2			
			0	3	2		
				1	1	2	
					1	0	

$$x^{55} = x^{(32+16+4+2+1)}$$

$$x^{55} = x^{32} * x^{16} * x^4 * x^2 * x$$

Por esta ordem

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** (2 acumuladores)
- **Algoritmo** para calcular X^N

```
POL ← 1
PROD ← X
DO WHILE N<> 0
     RESTO ← N MOD 2
     N ←N \2
     IF RESTO = 1
     THEN POL ← POL * PROD
     PROD ← PROD * PROD
```

Uso de 2 acumuladores → **possível melhorar, usando um só acumulador**

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** (1 acumulador)
- **Procedimento:**
  - **Obter a representação em binário de N**
  - **Considerar os bits da esquerda para a direita**
  - **Em cada passo quadrar o acumulador**
    - **Se o actual bit for 1, multiplicar ainda o acumulador por x**
  - **Iniciar o processo com acumulador em 1**

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** **(1 acumulador)**
- **Exemplo 1:** x^{32}

32 = 1 0 0 0 0 0 (2)

Por esta ordem

$$\xleftrightarrow{1} \quad \xleftrightarrow{0} \quad \xleftrightarrow{0} \quad \xleftrightarrow{0} \quad \xleftrightarrow{0} \quad \xleftrightarrow{0}$$

$$1 \quad 1 \quad x \quad x^2 \quad x^4 \quad x^8 \quad x^{16} \quad x^{32}$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$$

$$\underline{1\times 1} \quad \underline{1\times x} \quad \underline{x\times x} \quad \underline{x^2\times x^2} \quad \underline{x^4\times x^4} \quad \underline{x^8\times x^8} \quad \underline{x^{16}\times x^{16}}$$

Método da quadratura sucessiva

- **Extensão a um qualquer N** **(1 acumulador)**
- **Exemplo 2:** x^{55}

55 = 1 1 0 1 1 1 (2)

Por esta ordem

$$\xleftrightarrow{1} \quad \xleftrightarrow{1} \quad \xleftrightarrow{0} \quad \xleftrightarrow{1} \quad \xleftrightarrow{1} \quad \xleftrightarrow{1}$$

$$1 \quad 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^6 \quad x^{12} \quad x^{13} \quad x^{26} \quad x^{27} \quad x^{54} \quad x^{55}$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$$

$$\underline{1\times 1} \quad \underline{1\times x} \quad \underline{x\times x} \quad \underline{x^2\times x} \quad \underline{x^3\times x^3} \quad \underline{x^6\times x^6} \quad \underline{x^{12}\times x} \quad \underline{x^{13}\times x^{13}} \quad \underline{x^{26}\times x} \quad \underline{x^{27}\times x^{27}} \quad \underline{x^{54}\times x}$$

Próxima aula

- Integração