Algoritmia Aplicada

Ano lectivo 2011-2012

Aula 5 – Algoritmos Matemáticos: Polinómios

Sumário

- Revisão
- Representação computacional de polinómios a uma variável
- Representação computacional de polinómios a várias variáveis
- Adição de polinómios
- Multiplicação de polinómios: Caso geral

Polinómios - Revisão

➢ **Uma variável**

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots + p_ix^i + \ldots p_{n-1}x^{n-1}$$

coeficientes: $p_0 , p_1 , p_2 , p_3 ,\ldots, p_{n-1}$ **(n coeficientes)**

termo de grau i: p_ix^i **(n termos)**

grau do polinómio = n-1 **(admitindo que $p_{n-1} \neq 0$)**

Polinómios - Revisão

➢ **Várias variáveis**

Exemplo:

$$p(x,y) = 3 + 7x + 14y^2 - 9x^2 y^7 + 18x^6y^7$$

Polinómio de grau 13 **(6 + 7 =13)**

Polinómios - Revisão

- **Polinómio esparso**

$$\textbf{Esparsidade} = \frac{\text{Nº termos nulos}}{\text{Nº total termos}} \times 100\%$$

- **O polinómio é esparso se esparsidade é elevada**

Polinómios - Revisão

- **Exemplo:**

$p(x) = 2 + 3x^2 + 5x^{80}$

Grau do polinómio = 80

Nº termos polinómio = 81

Nº termos não nulos = 3

Esparsidade = (81-3) / 81 * 100% = 96,3%

Polinómio muito esparso

Representação computacional de polinómios a uma variável

Caso geral

- **Representação num array P**

P:

0	1	2	…	i	…	n-1

- **Termo geral** $p_i x^i \longrightarrow$ **P [i]**

expoente

coeficiente

Representação computacional de polinómios a uma variável

Exemplo

$$p(x) = 2 + 3x^2 + 4x^3 - 2x^4$$

P:

0	1	2	3	4
2	0	3	4	-2

Nota:

$2 = 2x^0$

$0 = 0x^1$

Representação computacional de polinómios a uma variável

- **Caso de polinómios esparsos**

$p(x) = 3x + 5x^{16}$

P:

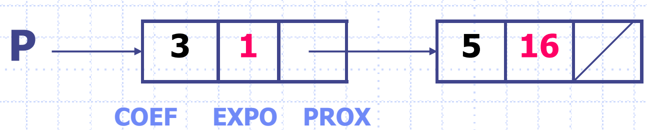
0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

- **Implementação com arrays é muito ineficiente; maioria das posições contém zeros**

Representação computacional de polinómios a uma variável

- **Caso de polinómios esparsos**

$p(x) = 3x + 5x^{16}$



- **Representação numa lista encadeada apontada por P $\rightarrow$ é preferível**

Representação computacional de polinómios a várias variáveis

$p(x,y) = 3 + 7x + 14y^2 + 25y^7 - 9x^2y^7 + 18x^6y^7$

P:

Expoentes de x ↓ / Expoentes de y →	0	1	2	3	4	5	6	7
0	3	0	14	0	0	0	0	25
1	7	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	-9
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	18

- **Representação num array bidimensional P**
- **8 x 7 = 56 posições / 6 coeficientes; desperdício memória**

Representação computacional de polinómios a várias variáveis

$p(x,y) = 3 + 7x + 14y^2 + 25y^7 - 9x^2y^7 + 18x^6y^7$

- **Representação numa lista encadeada apontada por P → é preferível**

Representação computacional de polinómios a várias variáveis

$p(x,y) = 3 + 7x + 14y^2 + 25y^7 - 9x^2y^7 + 18x^6y^7$

- **Representação numa lista generalizada (lista de listas)**

NODO

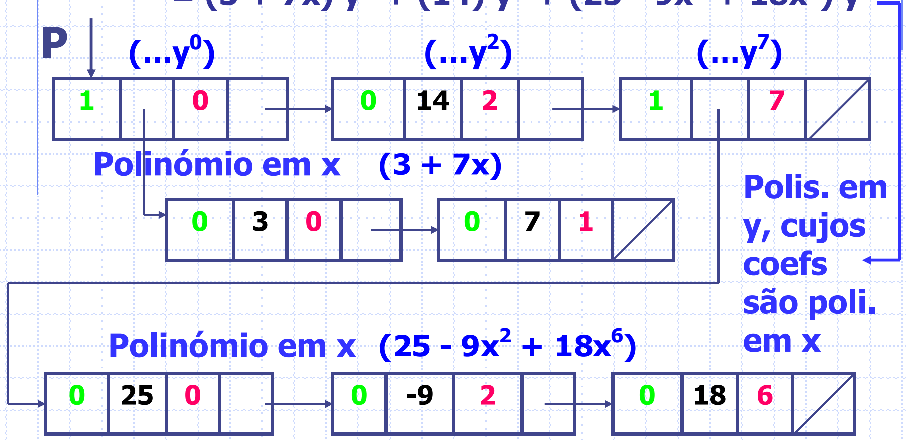
CASO	COEF	EXPO	PROX

CASO {
- **0 → campo COEF contém um coeficiente do polinómio**
- **1 → campo COEF contém um apontador para uma lista representando um polinómio**

Representação computacional de polinómios a várias variáveis

$p(x,y) = 3 + 7x + 14y^2 + 25y^7 - 9x^2y^7 + 18x^6y^7$

$= (3 + 7x)\,y^0 + (14)\,y^2 + (25 - 9x^2 + 18x^6)\,y^7$



Adição de polinómios

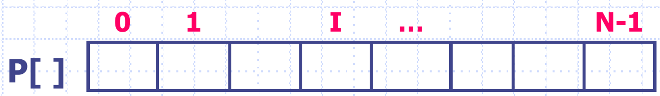
- **Caso geral**

  $r(x) = p(x) + q(x) \rightarrow r_i x^i = (p_i + q_i)x^i$

- **Exemplo** **$(1 + 2x - 3x^3) + (2 - x) = 3 + x - 3x^3$**

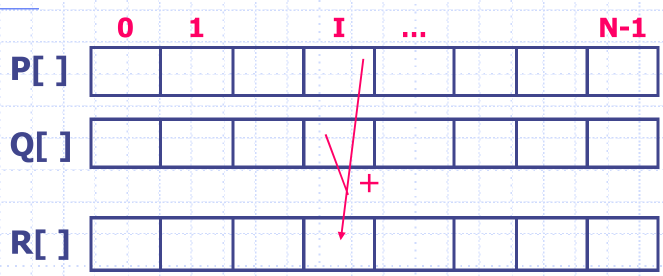
  - **Representação num array P**

$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_ix^i + \dots p_{n-1}x^{n-1}$



P [0 .. N-1] com P[J] ≡ pj

Adição de polinómios



R[I] ← P[I] + Q[I]

```
1.  GRAU ← N-1
2.  DO FOR I=0 TO GRAU
3.       R[I] ← P[I]+ Q[I]
```

Multiplicação de polinómios

- **Caso geral**

$$r(x) = p(x) * q(x)$$

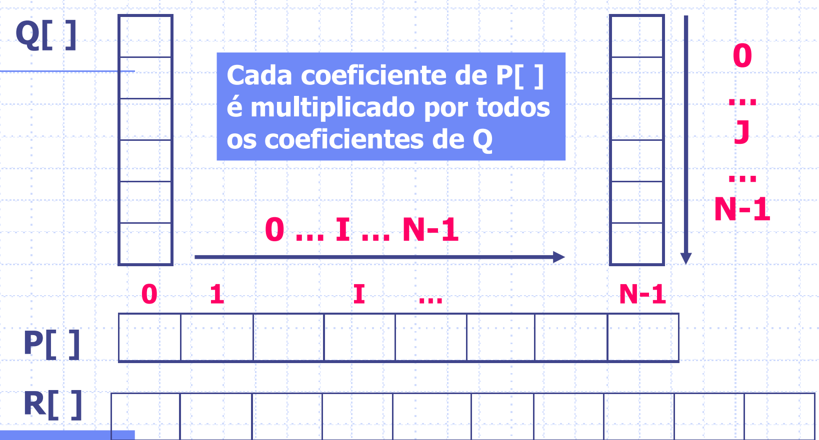
- **Exemplo**

$$(1 + 2x - 3x^3) * (2 - x) =$$

$$(2 - x) + (4x - 2x^2) + (-6x^3 + 3x^4) =$$

$$3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

Multiplicação de polinómios



Há outros produtos que conduzem ao mesmo expoente

$$R[I + J] \leftarrow R[I + J] + P[I] * Q[J]$$

$$p_i x^i \cdot q_j x^j = p_i\, q_j\, x^{(i+j)}$$

Multiplicação de polinómios

Algoritmo POLINOMIO_MULT

```
1. GRAU_R ← 2*(N-1)
2. DO FOR I=0 TO GRAU_R
2.1     R[I] ← 0
3.  DO FOR I=0 TO N-1
3.1     DO FOR J=0 TO N-1
3.1.1       R[I+J] ← R[I+J]+ P[I]*Q[J]
```

Nota: $p_{n-1}x^{n-1} \cdot q_{n-1}x^{n-1} =$

$p_{n-1}\, q_{n-1}\, x^{2(n-1)}$

Próxima aula

- Algoritmos Matemáticos
  - Cálculo de Polinómios
  - Integração