Algoritmia Aplicada

Ano lectivo 2011-2012

Aula 7 – Algoritmos Matemáticos: Integração

Sumário

- Integração
  - Integração simbólica
  - Métodos de quadratura simples
    - Método dos rectângulos
    - Método dos trapézios

Integração simbólica

$$f(x) = Express\tilde{a}o\ Matem\acute{a}tica$$

Função original a integrar

$$g(x) = \int f(x)dx = Express\tilde{a}o\ Matem\acute{a}tica$$

Integral

- **A expressão matemática de f(x) é transformada na expressão matemática de g(x), usando um conjunto de "regras de integração"**
- **Não há manipulação de valores numéricos**

Integração simbólica

- **Regras de integração**
  - **Muitas regras**
  - **Implementação computacional é complexa se f(x) tiver uma expressão matemática complicada**
  - **Há regras de fácil implementação como:**

$$\int_0^x x^{i-1}dx = \frac{x^i}{i}, \quad para \quad i > 0.$$

  - **Caso da integração de um polinómio**

Integração simbólica

Integração de polinómios

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_{i-1}x^{i-1} + \dots + p_{N-1}x^{N-1}$$

$$\int_0^x p(x)dx = p_0 x + \frac{p_1}{2}x^2 + \frac{p_2}{3}x^3 + \dots + \frac{p_{i-1}}{i}x^i + \dots + \frac{p_{N-1}}{N}x^N$$

Exemplo

Regra: $\int_0^x x^{i-1}dx = \frac{x^i}{i}, \quad para \quad i > 0.$

$$p(x) = 1 + 2x + x^3 + 3x^4$$

$$\int_0^x p(x)dx = x + x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5$$

Integração simbólica

Integração de polinómios

Algoritmo

p(x) num array P

$\int_0^x p(x)dx$ **num array G**

```
G [0]← 0
DO FOR I=N to 1 STEP –1
    G[I] ← P [I-1] / I
```

Regra: $\int_0^x x^{i-1}dx = \frac{x^i}{i}, \quad para \quad i > 0.$

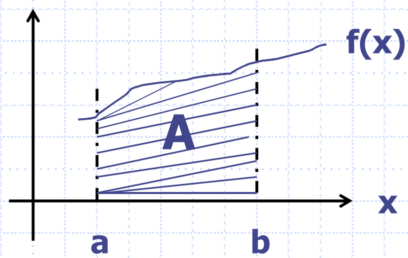
Exemplo

	0	1	2	3	4
P =	1	2	0	1	3

	0	1	2	3	4	5
G =	0	1	1	0	1/4	3/5

Métodos de quadratura simples

- Conceitos prévios

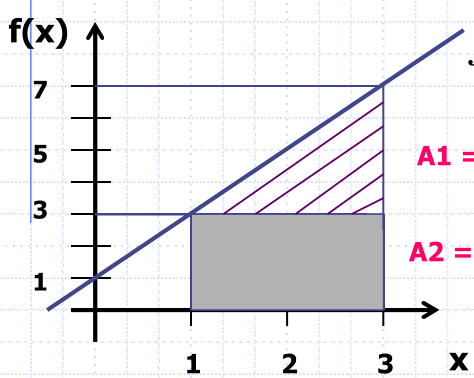


$$\int_a^b f(x)dx = \acute{A}rea\ A$$

- **Exemplo** $f(x) = 2x + 1$

$$\int_1^3 (2x+1)dx = \left[x^2 + x\right]_1^3 = (3^2+3) - (1^2+1) = 10$$

Métodos de quadratura simples



$f(x) = 2x + 1$

A1 =(Base x Altura)/2 =(2x4)/2=4

A2 = Base x Altura=2 x 3=6

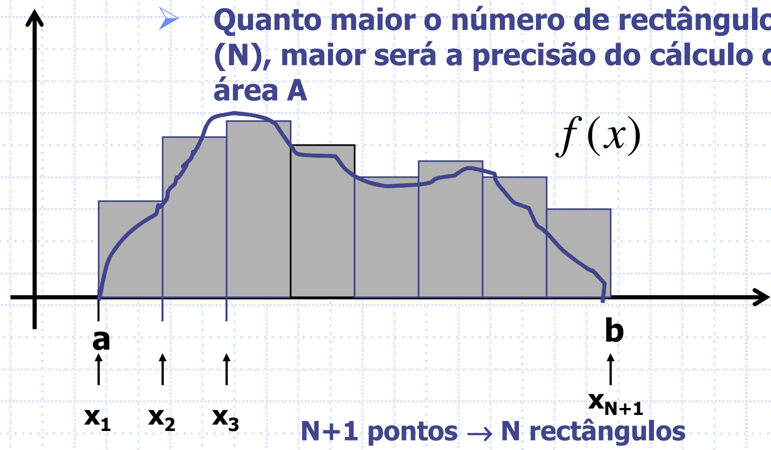
A= A1 + A2 =10

- **Métodos QS baseiam-se no cálculo aproximado da área A**

Método dos rectângulos

$$\int_a^b f(x)dx = \acute{A}rea\ A$$

- **A área A é calculada através de um somatório de áreas de rectângulos (em número N)**
- **Quanto maior o número de rectângulos (N), maior será a precisão do cálculo da área A**

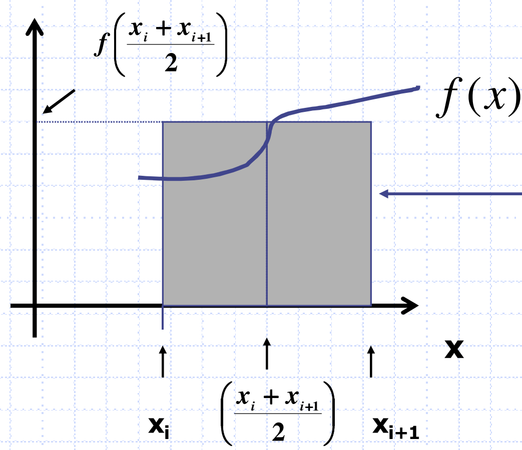


N+1 pontos → N rectângulos

Método dos rectângulos

N+1 pontos → N rectângulos

"zoom" do rectângulo i



$$(x_{i+1} - x_i).f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

$$\uparrow\ Base \times Altura\ \uparrow$$

Área do rectângulo i

Método dos rectângulos

- A área total dos N rectângulos será:

$$R = \sum_{i=1}^{N} (x_{i+1} - x_i).f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

- E portanto, se N for elevado, teremos:

$$\int_a^b f(x)dx \cong R$$

- Normalmente, todos os N rectângulos têm a mesma base, isto é: $(x_{i+1} - x_i) = w,\ para\ \ todo\ \ o\ \ i$

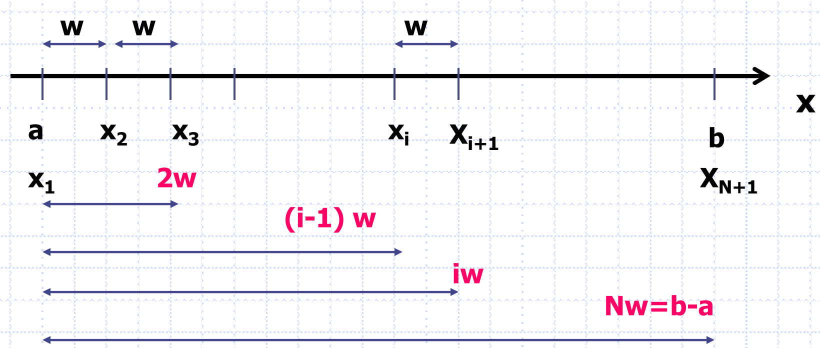
- Com: $w = \dfrac{b-a}{N}$

Divisão do intervalo [a,b] em N partes iguais

Método dos rectângulos

- Então, poderemos reescrever R: $R = \sum_{i=1}^{N} w.f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$
- Simplificação:
  - X_1=a; x_2=a+w; x_3= a+2w; … X_i= a +(i-1)w

    X_{i+1}= a +iw; x_{N+1}= a+Nw=b



Método dos rectângulos

- **Donde:** $$\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{(a+(i-1)w)+(a+iw)}{2}$$ $$= a - \frac{w}{2} + iw$$
- **E portanto:** $$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = f\left(a - \frac{w}{2} + iw\right)$$
- **Substituindo na expressão:** $$R = \sum_{i=1}^{N} w.f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$
- **Vem finalmente:** $$R = \sum_{i=1}^{N} w.f\left(a - \frac{w}{2} + iw\right)$$

$$w = \frac{b-a}{N}$$

Método dos rectângulos

$$R = \sum_{i=1}^{N} w.f\left(a - \frac{w}{2} + iw\right)$$

- **Algoritmo para cálculo de R**

```
Função IntegralRectangulos (a, b, N)
R← 0
W ← (b-a)/N
DO FOR I=1 TO N
    R← R + W* f(a- W/2 + I*W)
RETURN (R)
```

Dada uma função f(x), o algoritmo calcula o integral $\int_a^b f(x)dx$ **pelo Mét. Rectângulos, considerando uma divisão do intervalo [a,b] em N intervalos iguais.**

O valor aproximado do integral é R

Método dos rectângulos
Exemplo de aplicação

Calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$ **pelo *Método dos rectângulos***

Resultados obtidos pelo algoritmo para 3 casos

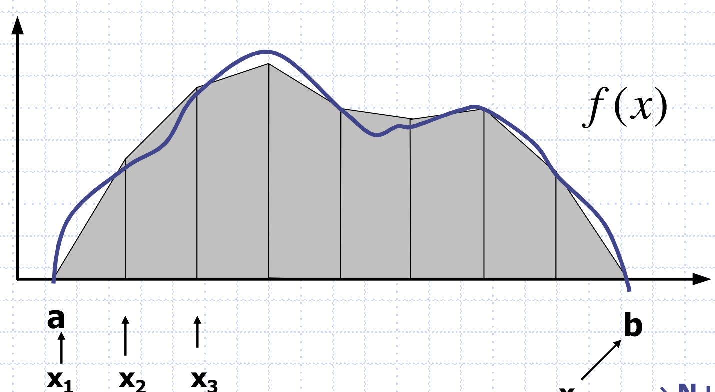
Caso	a	b	N	R	Precisão
1º	1	2	10	0,6928353604100	Correcto até 2ª casa
2º	1	2	100	0,6931440556283	Correcto até 5ª casa
3º	1	2	1000	0,6931471493100	Correcto até 7ª casa

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - 0 = 0.6931471805599\ldots$$

Método dos trapézios

$$\int_a^b f(x)dx = \acute{A}rea\ A$$

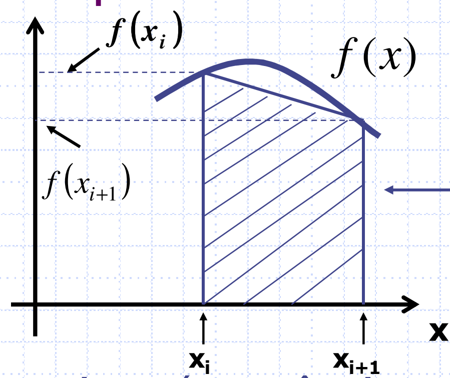
- **A área A é calculada através de um somatório de áreas de trapézios (em número N)**



→ N+1 pontos

Método dos trapézios

N trapézios
N+1 pontos



"zoom" do trapézio i

$$\underbrace{\frac{(x_{i+1}-x_i).(f(x_i)-f(x_{i+1}))}{2}}_{\text{área triângulo superior}} + \underbrace{(x_{i+1}-x_i).f(x_{i+1})}_{\text{área rectângulo}} =$$

$$= (x_{i+1}-x_i).\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

Área do trapézio i

Método dos trapézios

- **A área total dos N trapézios será:**

$$T = \sum_{i=1}^{N} (x_{i+1}-x_i).\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

- **E portanto, se N for elevado, teremos:**

$$\int_a^b f(x)dx \cong T$$

- **Considerando que todos os trapézios têm base igual a W, isto é:**

$$(x_{i+1}-x_i) = w, \;\; para \;\; todo \;\; o \;\; i$$

- **Com:** $w = \dfrac{b-a}{N}$ **Divisão do intervalo [a,b] em N partes iguais**

Método dos trapézios

- Então, poderemos reescrever T:

$$T = \sum_{i=1}^{N} w.\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

- Sabendo-se que:
  - X_i=a + (i-1)w

    X_{i+1}= a +iw
- Finalmente:

$$T = \sum_{i=1}^{N} W.\frac{f(a+(i-1)w) + f(a+iw)}{2}$$

Método dos trapézios

$$T = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{W}_{(b-a)/N}.\frac{f(a+(i-1)w) + f(a+iw)}{2}$$

- **Algoritmo** para cálculo de T

```
Função IntegralTrapezios (a, b, N)
T  ⟵ 0
W ⟵ (b-a)/N
DO FOR I=1 TO N
    T⟵ T+W*(f(a+(I-1)*W)+f(a+I*W))/2
RETURN (T)
```

Dada uma função f(x), o algoritmo calcula o integral $\int_a^b f(x)dx$ pelo Mét. Trapézios, considerando uma divisão do **intervalo [a,b]** em **N** intervalos iguais.

O valor **aproximado** do integral é **T**

Método dos trapézios
Exemplo de aplicação

Calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

pelo *Método dos trapézios*

Resultados obtidos pelo algoritmo para 3 casos

Caso	a	b	N	T	Precisão
1º	1	2	10	0,6937714031754	Correcto até 3ª casa
2º	1	2	100	0,6931534304818	Correcto até 4ª casa
3º	1	2	1000	0,6931472430599	Correcto até 6ª casa

Menor precisão do que a obtida com o "Método dos rectângulos"

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0.6931471805599...$$

Próxima aula

- Integração
  - Métodos de quadratura compostos:
    - Método de *Simpson*
  - Métodos de quadratura adaptativa