

Cálculo  
Teste 2

Nome completo

Número

**JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.**

I  
(4 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se  $f$  é uma função ímpar e  $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$  então  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ .

2. Se  $f$  é contínua em  $[1, 2]$  então  $\int_1^2 x f(x) dx = x \int_1^2 f(x) dx$ .

3. Se  $f$  é contínua e  $G(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$  então  $G'(x) = 2xf(x^2)$ .

4. Se a sucessão de termo geral  $u_n$  é convergente então  $\sum_{n \geq 1} u_n$  é convergente.

II  
(16 valores)

1. (2 valores)

Considere o integral  $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$ .

- (a) Calcule uma soma inferior, com  $n = 2$  que aproxime o valor do integral.
- (b) Estabeleça uma comparação entre o valor obtido na alínea anterior e  $\ln 2$ .

2. (3 valores)

Considere o integral  $\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx$ .

- (a) Usando a substituição  $x = \ln t$ , mostre que o integral anterior se pode escrever como  $\int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2} dt$ .
- (b) Calcule o integral dado.

3. (2 valores)

**Estabeleça** um integral que lhe permita determinar o comprimento da curva de equação  $y = \sqrt{1 - x^2}$  entre os pontos cujas abcissas são 0 e  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

4. (3 valores)

Calcule, se possível,  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ .

5. (3 valores)

Considere a série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^3}$ .

- (a) Defina o termo geral da sucessão geradora da série.
- (b) Indique o termo de ordem 5 da sucessão das somas parciais.
- (c) Estude a natureza da série.

6. (3 valores)

Escreva a série de Taylor em torno de  $a = 0$  da função  $f(x) = \ln(1 + x)$  indicando o seu domínio de convergência