Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
06 de janeiro de 2016
[duração 2h]

Cálculo

Teste 2–Proposta de correção

Nome completo	Número

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

I
(4 valores)

Relativamente às questões deste grupo indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se f é uma função ímpar e $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 4$ então $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 4$.

Falso.

Se f é uma função ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem. Assim, a área limitada pelo gráfico da função e o eixo das abcissas entre $x = -2$ e $x = 0$ é igual à área limitada pelo gráfico da função e o eixo das abcissas entre $x = 0$ e $x = -2$. No entanto, num caso a região encontra-se acima do eixo das abcissas e na outra abaixo: no primeiro caso o valor do integral será positivo e no segundo negativo.

2. Se f é contínua em $[1, 2]$ então $\displaystyle\int_{1}^{2} x\,f(x)\,dx = x\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Falso.

O resultado do lado esquerdo da igualdade é um número e do lado direito é uma função (depende de x).

3. Se f é contínua e $G(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2} f(t)\,dt$ então $G'(x) = 2xf(x^2)$.

Verdade.

Seja $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\,dt$. Do Teorema Fundamenta do Cálculo, sabemos que $F'(x) = f(x)$. Ora $G(x) = F(x^2)$. Assim, da derivada da função composta

$$G'(x) = [F(x^2)]' = 2x\,f(x^2).$$

4. Se a sucessão de termo geral u_n é convergente então $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

Falso.

Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$. Tem-se $\lim_n u_n = 0$, pelo que a sucessão converge. No entanto a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é a série harmónica que é divergente.

II

(16 valores)

1. (2 valores)

Considere o integral $\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt$.

(a) Calcule uma soma inferior, com $n = 2$ que aproxime o valor do integral.

(b) Estabeleça uma comparação entre o valor obtido na alínea anterior e $\ln 2$.

(a) Escolhendo $[1,2] = [1, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$ tem-se

$$S_{inf} = \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} f(2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

(b) Comece-se por notar que

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = \left[\ln t\right|_{t=1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Sendo uma soma inferior, o valor encontrado na alínea anterior é uma aproximação por defeito para o valor do integral, isto é

$$\frac{7}{12} \leq \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = \ln 2.$$

2. (3 valores)

Considere o integral $\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}}\, dx$.

(a) Usando a substituição $x = \ln t$, mostre que o integral anterior se pode escrever como $\int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$.

(b) Calcule o integral dado.

(a) Do teorema da mudança de variável em integrais sabe-se que, considerando a mudança de variável definida por $x = g(t)$ se tem

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\, dt.$$

Sejam, então, $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}$ e $g(t) = \ln t, t \in \mathbb{R}^+$ e considere-se a mudança de variável definida por $x = g(t)$. Tem-se

$$\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow \ln t = 1 \Rightarrow t = e \\ x = 2 \Rightarrow \ln t = 2 \Rightarrow t = e^2 \end{array} \qquad f(g(t)) = \frac{t}{1 - t^2}, \qquad \text{e} \qquad g'(t) = \frac{1}{t}$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}}\, dx = \int_e^{e^2} \frac{t}{1 - t^2}\frac{1}{t}\, dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt.$$

(b) Este integral pode ser calculado usando diretamente usando $\int \frac{u'}{1 - u^2}\, dx = \operatorname{argth} u + \mathcal{C}$:

Ou, atendendo a alínea anterior, recorrendo ao método das frações parciais e às propriedades da função logaritmo

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{1 - e^{2x}}\, dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{1 - t^2}\, dt = -\int_e^{e^2} \frac{1}{t^2 - 1}\, dt = -\frac{1}{2}\int_e^{e^2} \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\, dt \\ = -\frac{1}{2}\left[\ln(t - 1) - \ln(t + 1)\right|_{t=e}^{e^2} \\ = -\frac{1}{2}\left[(\ln(e^2 - 1) - \ln(e^2 + 1)) - (\ln(e - 1) - \ln(e + 1))\right] \\ = -\frac{1}{2}\left[\ln\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\frac{e - 1}{e + 1}\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \times \frac{e + 1}{e - 1}\right) \\ = -\ln\sqrt{\frac{(e + 1)^2}{e^2 + 1}} = \ln\sqrt{\frac{e^2 + 1}{(e + 1)^2}} \end{aligned}$$

3. (2 valores)

Estabeleça um integral que lhe permita determinar o comprimento da curva de equação $y = \sqrt{1-x^2}$ entre os pontos cujas abcissas são 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por definição a medida do comprimento da curva definida pela equação $y = f(x)$ entre os os de abcissas α e β é

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Neste caso, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pelo que, da derivada da função composta,

$$f'(x) = [(1-x^2)^{1/2}]' = \frac{1}{2} \times (1-x^2)'(1-x^2)^{1/2-1} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

e o integral pedido é

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

4. (3 valores)

Calcule, se possível, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ cujo domínio é $]-\infty, 1[$. A função integranda torna-se ilimitada num dos extremos do integral ($x = 1$) pelo que o integral em estudo é um integral impróprio (do tipo 2). Por definição

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \lim_{b \longrightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx \\
&= \lim_{b \longrightarrow 1^-} \int_0^b (1-x)^{-1/2}\, dx \\
&= -\lim_{b \longrightarrow 1^-} \int_0^b -(1-x)^{-1/2}\, dx \\
&= -\lim_{b \longrightarrow 1^-} \left[2(1-x)^{1/2}\right|_{x=0}^{b} = -2 \lim_{b \longrightarrow 1^-} \left[\sqrt{1-b} - \sqrt{1}\right] = 2.
\end{aligned}$$

5. (3 valores)

Considere a série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^3}$.

(a) Defina o termo geral da sucessão geradora da série.

(b) Indique o termo de ordem 5 da sucessão das somas parciais.

(c) Estude a natureza da série.

(a) O termo geral da sucessão geradora da série é $u_n = \frac{\cos n}{n^3}$.

(b) O termo geral da sucessão das somas parciais é $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Assim, o termo de ordem 5 é

$$s_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \cos 1 + \frac{\cos 2}{2^3} + \frac{\cos 3}{3^3} + \frac{\cos 4}{4^3} + \frac{\cos 5}{5^3}.$$

(c) A série em estudo é uma série cujos termos não têm sinal fixo. De facto, basta notar que $u_1 = \cos 1 > 0$ mas $u_2 = \frac{\cos 2}{2^3} < 0$. Há, então, que estudar a série dos módulos

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \left|\frac{\cos n}{n^3}\right|.$$

Uma vez que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$, para $n \geq 1$ vale

$$|u_n| = \left|\frac{\cos n}{n^3}\right| = |\cos n|\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

Mas a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ é uma série de Riemann de expoente 3 (> 1), logo é uma série convergente. Pelo primeiro critério de comparação para séries de termos não negativos, conclui-se que

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\cos n}{n^3}\right|$$

é uma série convergente. Então, a série dada é absolutamente convergente.

6. (3 valores)

Escreva a série de Taylor em torno de $a = 0$ da função $f(x) = \ln(1 + x)$ indicando o seu domínio de convergência.

Dada uma função infinitamente derivável, a sua série de Taylor em torno do ponto $a = 0$ é

$$\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

Aqui $f(x) = \ln(1 + x)$ e $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, mas esta última função pode ser vista como a soma de uma série de potências de razão $r = -x$ desde que $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n\geq 1}(-x)^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Então, como f' é integrável

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\int_0^x t^n\,dt\right) = \sum_{n\geq 0}\left((-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{x}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Por outro lado

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x).$$

Isto é,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < 1.$$

e esta é a expansão em série de potências de x da função f. Sabe-se que se f é representada por uma série de potências de x, então a série de potências é a série de Taylor da função em torno de $a = 0$.