

Cálculo— Exame

Assinale, de forma clara, na folha de resolução a sua opção, isto é, **uma e uma só** das seguintes: **P1**, **P2** ou **Exame**.

P1

20 valores

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. (10 valores)

Considere a função $f :] - 6, 6[\setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura.

(a) Indique o contradomínio de f .

(b) A função f é injectiva? E sobrejectiva?

(c) Indique o conjunto de pontos de acumulação do domínio de f .

(d) O que pode dizer sobre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ quando $a = -4$, $a = -1$, $a = 0$, $a = 2$?

(e) Indique os pontos de descontinuidade de f .

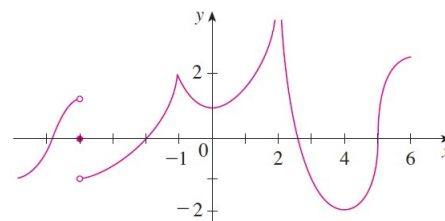
(f) Indique, se existir, um ponto onde f seja derivável e um ponto onde f não é derivável.

(g) Indique e classifique os pontos críticos de f .

(h) O que pode dizer sobre f' e f'' no intervalo $[3, 5]$?

(i) Represente o polinómio de Taylor de f de ordem 2 num ponto à sua escolha, calculando se possível os seus coeficientes ou indicando o seu sinal.

(j) A função f é primitivável?



2. (2 valores)

Considere $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\sin x}$.

(a) Explique porque razão a regra de L'Hôpital não é aplicável ao cálculo deste limite.

(b) Calcule, se existir, o limite.

3. (3 valores)

Usando a equação que define a reta tangente ao gráfico da função definida por $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, no ponto $x = 0$ justifique que $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$.

4. (2 valores)

Defina uma função F que nunca se anule sabendo que $F'(x) = 2x + 2$.

5. (3 valores)

Calcule as seguintes primitivas

(a) $\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$

(b) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x dx$

V.S.F.F

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. (5 valores)

Calcule

(a) $\int_{-3}^5 |x-1| dx$

(b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, usando $x = \sin t$.

2. (3 valores)

Considere a região do plano limitada por $y = \sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x = 4$ e pelo eixo das ordenadas. Esboce a região e calcule a sua área.

3. (2 valores)

Sendo $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a sua Transformada de Laplace é definida por $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$. Determine a Transformada de Laplace de f quando $f(x) = e^{2x}$ e $s > 2$.

4. (2 valores)

Estude a natureza da série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^5 + 6}$.

5. (3 valores)

Determine o domínio de convergência da série $\sum_{n \geq 1} \frac{(2x)^n}{n}$.

6. (5 valores)

Em cada uma das seguintes alíneas, apresente um exemplo ou justifique porque não existe

- (a) uma função não nula definida em $[0, 2]$ tal que $\int_0^2 f(x) dx = 0$.
- (b) uma função, definida no intervalo I , integrável e não primitivável;
- (c) um integral impróprio no intervalo $[-1, 2]$;
- (d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \geq n} u_1$ seja divergente e $\sum_{n \geq 1} u_n^2$ seja convergente;
- (e) uma série de potências $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ convergente quando $x = 2$ e divergente quando $x = 1$.

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Responda às seguintes questões

- P1: (5 valores) 1b, 1d, 1f, 1h, 1j, (3 valores) 5b, 5c
- P2: (3 valores) 1b, (3 valores) 2, (2 valores) 5
- (4 valores)

Em cada uma das seguintes alíneas, apresente um exemplo ou justifique porque não existe

- (a) uma função par de domínio $[0, 4]$
- (b) um número real x tal que $\cosh x = 0$
- (c) um integral impróprio no intervalo $[-1, 2]$
- (d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \geq n} u_1$ seja divergente e $\sum_{n \geq 1} u_n^2$ seja convergente.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0