

# **INTRODUÇÃO A ONDAS E LINHAS**

**PAULO ANTONIO MARIOTTO**

Professor Titular

**Escola Politécnica da USP**

2019

# PREFÁCIO

Neste texto são abordados aspectos de propagação de ondas eletromagnéticas planas com aplicações a guias de ondas elementares e a linhas de transmissão. O texto é organizado de modo a caber num semestre de um curso de Engenheiros Eletricistas e os tópicos foram escolhidos de modo a ressaltar os aspectos mais importantes destes fenômenos.

## APRESENTAÇÃO

O estudo das *Ondas e Linhas* dedica-se àquela parte do eletromagnetismo básico referente aos fenômenos rapidamente variáveis com o tempo. As noções fundamentais de ambas são necessárias em todos os ramos da Engenharia Elétrica, pois, até ramos que se utilizam de frequências baixas, em regime permanente, não deixam de estar sujeitos aos fenômenos rapidamente variáveis que acompanham os transitórios de manobra.

O presente texto teve origem na compilação de tópicos sobre ondas planas e linhas de transmissão de forma a cobrir as necessidades básicas do curso de Engenheiros Eletricistas ministrado na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e teve sua primeira versão publicada em 1981.

De um modo geral, os livros disponíveis – muitos deles verdadeiros tratados – são muito específicos nos assuntos cobertos, tornando-se necessária a referência a vários textos para bem cobrir o assunto de *Ondas e Linhas*, dentro de um semestre letivo. Deste modo, julguei conveniente a redação deste texto que nada mais é que a reunião de assuntos básicos normalmente encontrados em livros diferentes, os quais procuro apresentar de forma concatenada e com simbologia coerente, ajudados por exemplos insertos para ajudar a fixação dos conceitos introduzidos.

Os dois primeiros capítulos dizem respeito às ondas planas. O primeiro capítulo é básico e seu estudo é essencial à compreensão do texto. Já no capítulo seguinte, referente à reflexão e refração de ondas planas é dada uma ênfase inicial às ondas planas; em seguida, o estudo prossegue para os casos de incidência oblíqua que, além de seu valor intrínseco, serve de base para a compreensão física da propagação em guias de onda retangulares.

No Cap. 3 introduzo conceitos e aplicações relativos a guias de ondas retangulares. Investigo vários modos de propagação e em particular o modo  $TE_{10}$  do qual são apresentadas várias considerações e aplicações.

No Cap. 4 mostro como as ondas eletromagnéticas podem ser criadas através de um elemento de corrente. O assunto é apresentado de forma elementar mas

com detalhes suficientes, de modo a apontar ao leitor considerações importantes sobre a geração de ondas.

No Cap. 5, depois de uma pequena introdução às equações de linha, são estudados essencialmente os transitórios em linhas de transmissão sem perdas no domínio do tempo. No capítulo seguinte, o problema a linhas com perdas é generalizado, recorrendo para a solução à transformada de Laplace que se mostrou bastante útil na análise e interpretação de exemplos fundamentais e de outros casos interessantes.

O Cap. 7 é destinado ao estudo das linhas de transmissão em regime permanente senoidal. Em particular, são apresentadas soluções em regime permanente, noções de velocidade de fase e velocidade grupo, distribuições de tensões e de correntes ao longo da linha, a carta de Smith, linhas sem e com distorção, transformadores de impedância, etc..

Achei, também, interessante incluir um capítulo (o oitavo) sobre linhas artificiais. Na verdade, a linha artificial não envolve ondas progressivas, mas suas aplicações são tão relacionadas com as linhas reais que vale a pena compará-las. Caso interessante, que é discutido, é o das linhas híbridas, que partilha propriedades de linhas reais e de linhas artificiais.

Finalmente, é introduzido nessa edição um apêndice contendo respostas aos problemas propostos no fim de cada capítulo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a colaboração dos colegas da área de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo que, durante o período de desenvolvimento deste texto e depois durante a aplicação da primeira versão do mesmo, apresentaram comentários e sugestões visando ao aprimoramento do mesmo. Em especial, agradeço aos Profs. Drs. Silvio Ernesto Barbin, Jorge Mieczyslaw Janiszewski, Luiz Cezar Trintinalia e Plínio Francisco dos Santos Rodrigues.

março 2004

Paulo Antonio Mariotto

# SUMÁRIO

## 1. Propagação de ondas planas

1.1	Introdução	1.1
1.2	Equações de onda	1.2
1.3	Ondas planas num dielétrico perfeito	1.3
1.4	Polarização de ondas planas	1.10
1.5	Uso da notação complexa para excitação senoidal	1.13
1.6	O uso da notação complexa no cálculo de potência	1.15
1.7	Vectores complexos	1.17
1.8	Equações de Maxwell em forma complexa	1.19
1.9	Equações de onda com excitação senoidal	1.19
1.10	O vector de Poynting expresso por vectores de campo complexos	1.22
1.11	Ondas em dielétricos reais e condutores	1.22
	Fontes de consulta	1.26
	Problemas propostos	1.27

## 2. Reflexão e refração de ondas planas

2.1	Introdução	2.1
2.2	Reflexão de ondas planas com incidência normal sobre condutores perfeitos	2.1
2.3	Incidência normal sobre um dielétrico perfeito	2.3
2.4	Reflexões em vários dielétricos	2.6
2.5	Taxa de onda estacionária	2.8
2.6	Rotação de eixos coordenados	2.8
2.7	Incidência oblíqua sobre um condutor perfeito	2.9
2.8	Velocidade de fase para a incidência oblíqua	2.13
2.9	Impedância de onda para a incidência oblíqua	2.15
2.10	Incidência oblíqua sobre dielétricos	2.16
2.11	Ângulo de polarização ou de Brewster	2.23
2.12	Reflexão total	2.24
	Fontes de consulta	2.25
	Problemas propostos	2.25

## 3. Noções sobre guias de onda

3.1	Introdução	3.1
3.2	Equações básicas	3.2
3.3	Tipos de onda; condições de contorno	3.5
3.4	Soluções gerais em coordenadas retangulares	3.7
3.5	Ondas em ductos limitados	3.8
3.6	A onda $TE_{10}$ num guia retangular	3.13
	Fontes de consulta	3.18
	Problemas propostos	3.18

**4. Radiação**

4.1	Introdução .....	4.1
4.2	Radiação de um elemento de corrente .....	4.1
	Fonte de consulta .....	4.6

**5. Conceitos sobre linhas de transmissão**

5.1	Introdução .....	5.1
5.2	Linha infinita sem perdas .....	5.1
5.3	Modelo distribuído .....	5.4
5.4	Solução das equações das linhas sem perdas .....	5.6
5.5	Reflexão e transmissão em descontinuidade .....	5.7
5.6	Transitórios em linhas sem perdas .....	5.11
	Fontes de consulta .....	5.16
	Problemas propostos .....	5.16

**6. As linhas e a transformada de Laplace**

6.1	Introdução .....	6.1
6.2	Linhas de transmissão com perdas .....	6.1
6.3	Solução das equações de linha com perdas .....	6.2
6.4	Solução no domínio do tempo .....	6.5
6.5	Impedância e coeficiente de reflexão num ponto da linha ...	6.7
6.6	Onde estamos? .....	6.10
6.7	Linhas finitas .....	6.11
6.8	Linha excitada com um gerador de tensão .....	6.12
6.9	Condições iniciais não-quiescentes em transitórios .....	6.18
	Fontes de consulta .....	6.19
	Problemas propostos .....	6.20

**7. Linhas de transmissão em regime permanente**

7.1	Introdução .....	7.1
7.2	Soluções em regime permanente .....	7.2
7.3	Velocidade de fase .....	7.4
7.4	Linhas sem perdas; comprimento de onda .....	7.4
7.5	Analogia de linhas de transmissão com propagação de ondas .....	7.5
7.6	Taxa de onda estacionária .....	7.6
7.7	Recapitulação .....	7.8
7.8	Impedância num ponto genérico da linha; aproximações ...	7.8
7.9	Determinação experimental da impedância característica ..	7.10
7.10	Um exemplo .....	7.11
7.11	A carta de Smith .....	7.12
7.12	Tensões e correntes ao longo da linha .....	7.17
7.13	Potência em linhas de transmissão .....	7.19
7.14	Perdas em linhas sem distorção .....	7.20
7.15	Transformadores de impedância .....	7.23

7.16	Linhas com distorção; velocidade de grupo .....	7.30
	Fontes de consulta .....	7.31
	Problemas propostos .....	7.31
 <b>8. Linhas artificiais</b>		
8.1	Introdução .....	8.1
8.2	Impedância de curto-circuito e de circuito aberto .....	8.2
8.3	Redes equivalentes com secções- $\Pi$ .....	8.3
8.4	Redes equivalentes com secções-T .....	8.5
8.5	Cálculo das funções inversas .....	8.6
8.6	Resposta em frequência .....	8.8
8.7	Linhas híbridas; pupinização .....	8.9
	Fontes de consulta .....	8.11
	Problemas propostos .....	8.11
 <b>Apêndice. Respostas aos Problemas Propostos</b>		
A.1	Introdução .....	A.1
A.2	Respostas .....	A.2

# 1. PROPAGAÇÃO DE ONDAS PLANAS

Este capítulo introduz conceitos e ferramentas básicos relativos ao estudo de ondas eletromagnéticas planas. Inicialmente são apresentadas as *equações de onda* de forma genérica como decorrência do caso especial das equações de Maxwell para campos eletromagnéticos. Estas equações são, em seguida, particularizadas ao caso de *ondas planas* cujas propriedades são, então, analisadas e detalhadas.

## 1.1 INTRODUÇÃO

Os conceitos aqui apresentados pressupõem que o leitor já tenha alguma familiaridade com os fenômenos eletromagnéticos e com as equações de Maxwell. Conceitos básicos da teoria de circuitos, bem como da análise vetorial, são, também, supostamente conhecidos e necessários ao estudo e à compreensão deste texto.

O objetivo do texto é constituir-se numa introdução ao estudo de fenômenos eletromagnéticos nos quais as correntes de deslocamento são preponderantes às correntes de condução, situações que ocorrem quando a frequência de variação dos campos é relativamente elevada e os meios têm condutividade baixa (ou nula).

Neste capítulo mostramos, inicialmente, que os campos eletromagnéticos nas condições expostas são regidos por **equações de onda**, *i.e.*, equações nas quais as derivadas segundas em relação ao espaço são proporcionais à derivada segunda em relação ao tempo.

Um estudo detalhado das ondas eletromagnéticas está muito além do propósito deste texto que se restringirá à demonstração da existência das ondas eletromagnéticas, como consequência das equações de Maxwell, e a aplicação dessa teoria às chamadas **ondas planas**.

Apesar de tratar-se de um caso idealizado, as ondas planas são boas aproximações de ondas reais em muitas situações encontradas na natureza. Por exemplo, a aproximação das ondas planas serve para explicar muitos dos fenômenos ocorrentes na óptica. Também, as ondas de rádio, em pontos distantes do transmissor ou de objetos difratantes, são muito bem representadas por ondas planas. Mesmo configurações mais complexas de ondas eletromagnéticas podem ser tratadas por superposição de ondas planas.

Desta maneira, o estudo das ondas planas impõe-se como um instrumento muito importante para a análise dos casos citados. Além disso, o estudo dos fenômenos de propagação, reflexão e refração, facilmente compreendidos no caso de ondas planas, serve de base ao estudo e à compreensão dos mesmos em casos mais complexos.

## 1.2 EQUAÇÃO DE ONDA

Consideremos inicialmente uma região do espaço que não contenha fontes, de forma que os termos relativos a correntes e cargas possam ser omitidos na equações de Maxwell. Admitamos que sejam possíveis variações arbitrárias dos campos com o tempo e que o *meio seja homogêneo* (todos os seus pontos tenham as mesmas propriedades), *isotrópico* (suas propriedades independam da orientação dos campos no meio) e *linear* (satisfaça às propriedades de aditividade e multiplicação por constante) e tenha *condutividade nula*.

Nestas condições, as equações de Maxwell<sup>1</sup> resumem-se a

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{D} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Através das relações constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.2)$$

podemos eliminar os vetores  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  em (1.1) obtendo

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Tomando o rotacional da primeira destas equações resulta

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{rot} \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}. \quad (1.4)$$

O termo da esquerda em (1.4) é frequentemente escrito de uma outra forma, pela definição da operação

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \text{rot rot } \mathbf{E},$$

que em coordenadas cartesianas se reduz a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{u}_x \nabla^2 E_x + \mathbf{u}_y \nabla^2 E_y + \mathbf{u}_z \nabla^2 E_z,$$

onde  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$  são os vetores unitários do sistema de coordenadas,  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  são as componentes do vetor  $\mathbf{E}$  e  $\nabla^2$  é o operador laplaciano.

---

<sup>1</sup> As Equações de Maxwell são supostamente conhecidas do leitor. Nelas:

$\mathbf{E}$  representa o *vetor (intensidade de) campo elétrico* expresso em V/m;

$\mathbf{H}$  representa o *vetor (intensidade de) campo magnético* expresso em A/m;

$\mathbf{D}$  representa o *vetor densidade de fluxo elétrico* expresso em C/m<sup>2</sup>;

$\mathbf{B}$  representa o *vetor densidade de fluxo magnético* expresso em Wb/m<sup>2</sup>;

$\varepsilon$  representa a *permitividade do meio* (no vácuo  $\varepsilon$  assume o valor  $\varepsilon_0 = 8,854 \text{ pF/m}$ );

$\mu$  representa a *permeabilidade do meio* (no vácuo  $\mu$  assume o valor  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ).



Substituindo, então, o termo da esquerda de (1.4) pela expressão acima resulta

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}.$$

Substituindo aí as expressões de  $\text{rot } \mathbf{H}$  e  $\text{div } \mathbf{E}$ , dadas por (1.3), obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5)$$

que é a forma geral da equação de onda para o meio considerado.

Da mesma forma, partindo de  $\text{rot rot } \mathbf{H}$ , obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.6)$$

### 1.3 ONDAS PLANAS NUM DIELÉTRICO PERFEITO

A fim de ilustrar o comportamento ondulatório dos campos eletromagnéticos, vamos compor uma solução simples. Lembrando que em coordenadas cartesianas o laplaciano de um vetor pode ser separado na soma vetorial do laplaciano de suas componentes, temos de (1.5)

$$\nabla^2 E_x - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

e expressões semelhantes para as componentes  $y$  e  $z$ .

No caso que as variações se deem somente na direção  $z$ , (1.7) reduz-se a

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (1.8)$$

Deste caso especial, muito simples, de variações no espaço em somente uma direção, podem ser deduzidas muitas características das ondas eletromagnéticas que servirão de ajuda no estudo de casos mais complexos.

Como pode ser verificado facilmente, por substituição, (1.8) é satisfeita por uma solução geral da forma

$$E_x = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right). \quad (1.9)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ,  $f_1$  denota uma função de  $(t - z/v)$  e  $f_2$  denota uma função de  $(t + z/v)$ .

Para a interpretação física desta solução, consideremos inicialmente a parcela

$$E_{x+} = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (1.10)$$

É evidente que em todos os pontos do espaço para os quais

$$(t - z/v) = \text{constante}, \quad (1.11)$$

ocorre o mesmo valor de  $E_{x+}$ , qualquer que seja a função  $f_1$ .

Assim, derivando (1.11) em relação ao tempo resulta

$$dz/dt = v.$$

Isto corresponde a dizer que a informação de  $E_{x+}$  se *propaga* no sentido positivo de  $z$  com velocidade  $v$ , *i.e.*, se nos deslocarmos no sentido positivo de  $z$  com velocidade  $v$  estaremos acompanhando o mesmo valor ou fase de  $(t - z/v)$  e, portanto, estaremos observando o mesmo valor de  $E_{x+}$ , qualquer que seja a função  $f_1$ . Por isso  $v$  é chamada de *velocidade de propagação de fase*.

De forma semelhante, se considerarmos

$$E_{x-} = f_2\left(t + \frac{z}{v}\right). \quad (1.12)$$

podemos mostrar que a informação de  $E_{x-}$  se *propaga* no sentido negativo de  $z$  com velocidade  $v$ .

Soluções do mesmo tipo que (1.9) aplicam-se também a  $H_x$ ,  $H_y$  e  $E_y$ . Porém, mesmo sem explicitar condições de contorno, as soluções para  $H_x$ ,  $H_y$ , *etc.* não são completamente arbitrárias. Em primeiro lugar, é evidente que os argumentos das funções solução deverão ser  $(t - z/v)$  e  $(t + z/v)$ , mas não é só isso; fazendo uso das equações de Maxwell na forma de (1.3) e omitindo as variações em relação a  $x$  e  $y$  obtemos, após desenvolver os rotacionais e identificar as componentes vetoriais correspondentes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ 0 &= \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} & 0 &= \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Na equação

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

podemos usar a solução formal de  $E_x$ , dada por (1.9), e daí obter

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_2\left(t + \frac{z}{v}\right) \quad (1.14)$$

donde resulta

$$H_{y+} = \frac{E_{x+}}{\eta} \quad \text{e} \quad H_{y-} = -\frac{E_{x-}}{\eta} \quad (1.15)$$

onde

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (1.16)$$

é chamada de *impedância intrínseca do meio* expressa em ohms (símbolo  $\Omega$ ).

No vácuo,  $\eta$  assume o valor  $\eta_0 = 120\pi \cong 377 \Omega$ .

Como já chamamos a atenção anteriormente, a solução para  $E_y$  será formalmente idêntica a (1.9); as funções, em princípio, podem ser diferentes mas os argumentos serão os mesmos. Desta forma usando a equação

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

contida no conjunto das equações (1.13) podemos, por raciocínio análogo ao acima, relacionar  $E_{y+}$  com  $H_{x+}$  e  $E_{y-}$  com  $H_{x-}$  na forma

$$H_{x+} = -\frac{E_{y+}}{\eta} \quad \text{e} \quad H_{x-} = \frac{E_{y-}}{\eta} . \quad (1.17)$$

Agrupando (1.15) e (1.17) resultam

$$\frac{E_{x+}}{H_{y+}} = -\frac{E_{y+}}{H_{x+}} = \eta \quad (1.18)$$

e

$$\frac{E_{x-}}{H_{y-}} = -\frac{E_{y-}}{H_{x-}} = -\eta \quad (1.19)$$

resultando, assim, relações entre as componentes  $E_x$  e  $H_y$  e entre  $E_y$  e  $H_x$ , tanto para propagação no sentido positivo como no negativo de  $z$ .

Falta, por fim, a determinação de  $E_z$  e  $H_z$ .

Para tanto, devemos notar em (1.13) que  $\partial E_z / \partial t = 0$ . Como, por hipótese, temos, também,

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

e estamos supondo que só existam variações no espaço em relação a  $z$  (i.e.,  $\partial E_x / \partial x = 0$  e  $\partial E_y / \partial y = 0$ ), concluímos que  $\partial E_z / \partial z = 0$ .

Com todas as derivadas nulas,  $E_z$  é constante no tempo e no espaço. Faremos, então,  $E_z = 0$ , já que o problema de propagação diz respeito à parte variável dos campos. Por raciocínio análogo, concluímos que  $H_z = 0$ .

Uma onda com as propriedades acima é chamada de *onda plana* porque a *fase* (ou *argumento*) de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  é constante sobre um conjunto de planos (definidos por  $z = \text{constante}$ ) chamados de *superfícies equifases*. É dita, também, uma onda plana *uniforme* porque as amplitudes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são constantes sobre planos equifases [cf. equações (1.9) e (1.14)].

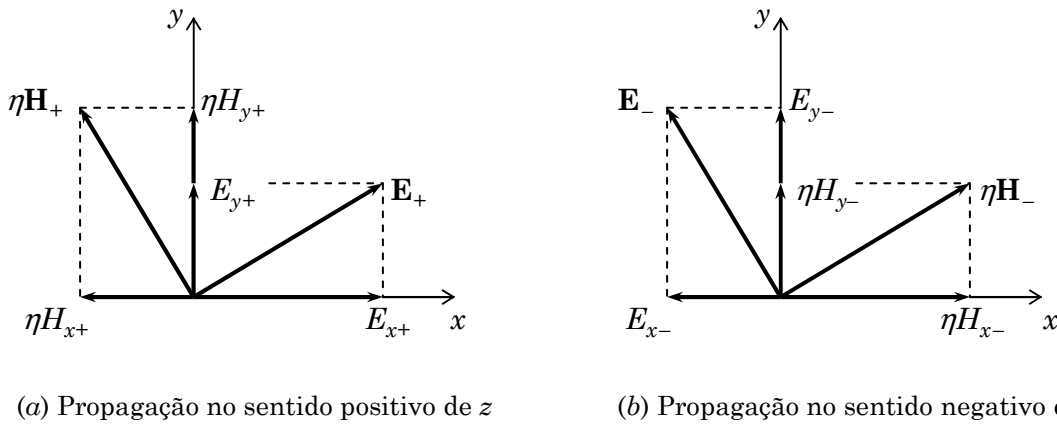
Resumindo, até agora vimos que num meio homogêneo, isotrópico e linear, com condutividade nula, partindo das equações de Maxwell chegamos à equação de onda dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Supusemos variação no espaço somente na direção  $z$  e, assim, constatamos a possibilidade de propagação da informação com velocidade  $v$  tanto no sentido positivo como no negativo de  $z$ . Além disso, obtivemos relações entre as componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  e, em particular, demonstramos que neste caso

não há componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  na direção de propagação, *i.e.*, os vetores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  situam-se num plano normal à direção de propagação. Por esta razão a onda é plana e *transverso-eletromagnética (TEM)*, pois os campos elétrico e magnético são transversais à direção de propagação.

Continuando nosso desenvolvimento, se compusermos num gráfico cartesiano, mostrado na Figura 1.1a, as relações das componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  da solução que se propaga no sentido positivo de  $z$ , dadas por (1.18), e fizermos o mesmo na Figura 1.1b para as componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  da solução que se propaga no sentido negativo de  $z$ , dadas por (1.19), podemos notar que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são ortogonais. Assim, se formarmos o produto vetorial<sup>2</sup>  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  este aponta, em qualquer dos casos, o *sentido* de propagação, *i.e.*, o *vetor de Poynting*

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.20)$$

tem a direção e sentido da propagação da informação.



**Figura 1.1** Componentes dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  em onda plana e uniforme

De um modo geral, se  $\mathbf{u}_\zeta$  for o vetor unitário no sentido de propagação, temos

$$\eta \mathbf{H} = \mathbf{u}_\zeta \times \mathbf{E} \quad (1.21)$$

e

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{u}_\zeta. \quad (1.22)$$

Em termos das componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , o vetor de Poynting para a onda propagante no sentido positivo de  $z$  é

$$N_{z+} = E_{x+} H_{y+} - E_{y+} H_{x+}$$

ou usando as relações (1.18) resulta

$$N_{z+} = \frac{1}{\eta} (E_{x+}^2 + E_{y+}^2) \quad (1.23)$$

e notamos que este valor é sempre não negativo. Do mesmo modo podemos demonstrar que o vetor de Poynting para a onda propagando no sentido negativo de  $z$  tem somente a componente  $z$  dada por

<sup>2</sup> Neste texto será usada a seguinte notação:  $\times$  para o produto vetorial e  $\cdot$  para o produto escalar.

$$N_{z-} = -\frac{1}{\eta} (E_{x-}^2 + E_{y-}^2) \quad (1.24)$$

Finalmente, veremos as relações de energia, que são bastante interessantes.

A energia armazenada no campo elétrico por unidade de volume para a onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  é

$$w_E = \frac{\epsilon E_+^2}{2} = \frac{\epsilon}{2} (E_{x+}^2 + E_{y+}^2) \quad (1.25)$$

e no campo magnético

$$w_M = \frac{\mu H_+^2}{2} = \frac{\mu}{2} (H_{x+}^2 + H_{y+}^2) \quad (1.26)$$

e pode ser verificado sem dificuldade pelas relações (1.18) que  $w_E$  e  $w_M$  são iguais, de forma que a densidade de energia em cada ponto e em cada instante é repartida igualmente entre os campos elétrico e magnético.

O mesmo raciocínio é válido para as ondas que se propagam no sentido negativo de  $z$ .

Um resumo das propriedades de uma única *onda plana uniforme* é apresentado no Quadro 1.1

Quadro 1.1

Onda Plana e Uniforme
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Velocidade de propagação dada por <math>v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}</math>.</li> <li>2. Campos elétrico e magnético nulos na direção de propagação.</li> <li>3. Campos elétrico e magnético ortogonais entre si.</li> <li>4. Valor do campo elétrico <math>\eta</math> vezes o valor do campo magnético, a cada instante.</li> <li>5. Sentido de propagação dado pelo sentido de <math>\mathbf{E} \times \mathbf{H}</math>.</li> <li>6. Em qualquer instante e em qualquer ponto, a energia armazenada no campo elétrico por unidade de volume é igual à energia armazenada no campo magnético por unidade de volume.</li> <li>7. Valor instantâneo do vetor de Poynting dado por <math>E^2/\eta = \eta H^2</math>, onde <math>E</math> e <math>H</math> são as amplitudes dos valores instantâneos dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente.</li> </ol>

### Exemplo 1.1

Uma onda plana uniforme função degrau é gerada criando-se repentinamente um campo elétrico constante  $E_x = E$  em  $z = 0$  no instante  $t = 0$  e mantendo-o em

seguida. Um plano perfeitamente condutor é colocado normalmente ao eixo  $z$  em  $z = 30$  m. Esboce os campos  $E_x$  e  $H_y$  em função de  $z$  para  $t = 0,05 \mu\text{s}$  e  $t = 0,15 \mu\text{s}$ .

*Solução:*

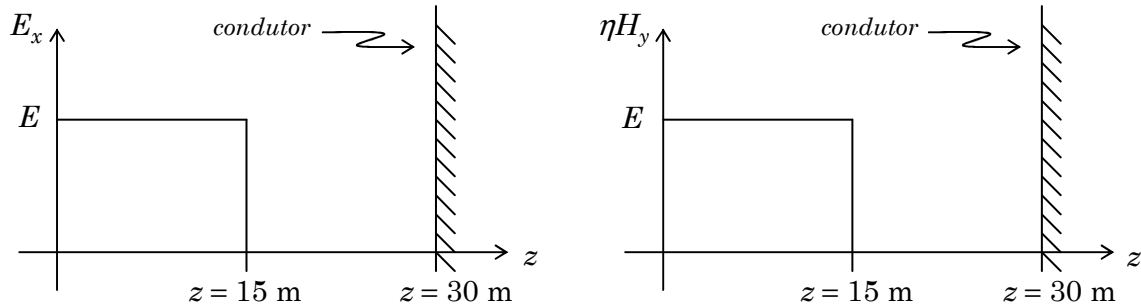
Inicialmente, vamos raciocinar somente com a onda que se propaga no sentido positivo de  $z$ , *i.e.*, a onda que gerada em  $z = 0$  se propaga dirigindo-se ao plano condutor colocado em  $z = 30$  m.

Após um instante de tempo, relativamente pequeno, o campo criado em  $t = 0$ ,  $z = 0$  deslocou-se com velocidade  $v$  (que adotaremos como sendo a velocidade da luz no vácuo  $c = 3 \times 10^8$  m/s) no sentido positivo de  $z$  até um plano particular  $z = z_1$ . Todos os planos intermediários entre  $z = 0$  e  $z = z_1$  terão valores de campo correspondentes aos criados em  $z = 0$ , depois de  $t = 0$ , que se deslocaram com velocidade  $v$ . Como o campo em  $z = 0$  é mantido constante depois de criado, esses planos intermediários terão o valor do campo constante  $E_x = E$ . No mesmo instante de tempo, os planos  $z > z_1$  terão campo nulo, pois a propagação não atingiu esses planos.

Para  $t = 0,05 \mu\text{s}$  temos

$$\begin{aligned} z &= vt \\ &= 3 \times 10^8 \times 0,05 \times 10^{-6} = 15 \text{ m.} \end{aligned}$$

Esse instante de tempo satisfaz ao raciocínio acima e daí resulta o campo  $E_x$ , representado em função de  $z$  na Figura 1.2a.



(a) Campo elétrico em  $t = 0,05 \mu\text{s}$

(b) Campo magnético em  $t = 0,05 \mu\text{s}$

**Figura 1.2** Exemplo 1.1

Através das relações (1.18) temos  $\eta H_y = E$ , conforme esboço mostrado na Figura 1.2b.

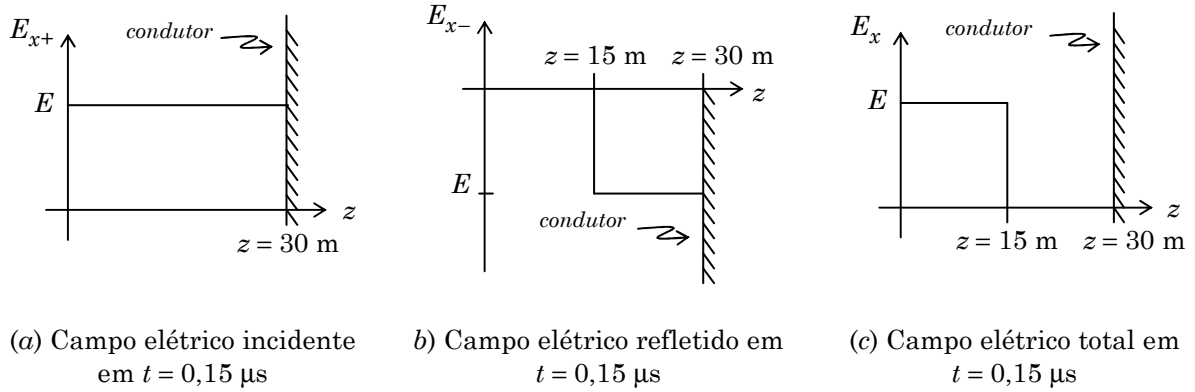
Para  $t = 0,15 \mu\text{s}$ , temos um espaço de tempo suficiente para a onda propagar-se 45 m, ou seja, para a onda atingir já o plano condutor e de alguma forma ser perturbada por ele. É fácil compreender que o caso crítico de análise é aquele que se desenvolve por volta de  $t = 0,1 \mu\text{s}$ , *i.e.*, o instante em que a onda originada em  $t = 0$ ,  $z = 0$  atinge o plano condutor.

Se o condutor for perfeito, como é o caso, o campo elétrico interno a ele é nulo e, portanto, a componente tangencial do campo elétrico externo ao condutor é nula. Como, no nosso caso,  $E_x$  é tangencial ao plano condutor,  $E_x$  total deve ser nulo e isto só pode acontecer se houver uma onda refletida de modo que a composição da onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  com aquela que se propaga no sentido negativo de  $z$  se anule em  $z = 30$  m. Algebricamente,

$$E_{x-}(z = 30 \text{ m}) = -E_{x+}(z = 30 \text{ m})$$

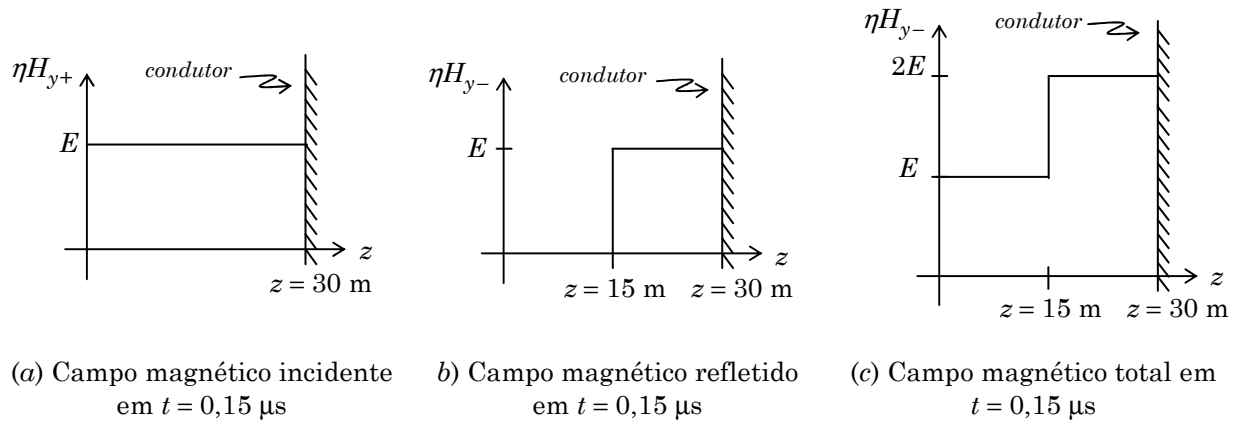
Sendo  $E_{x+}(z = 30 \text{ m})$  constante para  $t > 0,1 \mu\text{s}$  (pois continuamente chega em  $z = 30$  m a excitação constante gerada em  $z = 0$  e que se propaga no sentido positivo de  $z$ ), resulta que  $E_{x-}(z = 30 \text{ m})$  será também constante e igual a  $-E$  para  $t > 0,1 \mu\text{s}$ .

Aplicamos para  $E_{x-}$  o mesmo raciocínio usado para no tocante à propagação, de forma que podemos compor, como nas Figuras 1.3a, 1.3b e 1.3c, os valores do campo elétrico para  $t = 0,15 \mu\text{s}$ .



**Figura 1.3** Exemplo 1.1 (continuação)

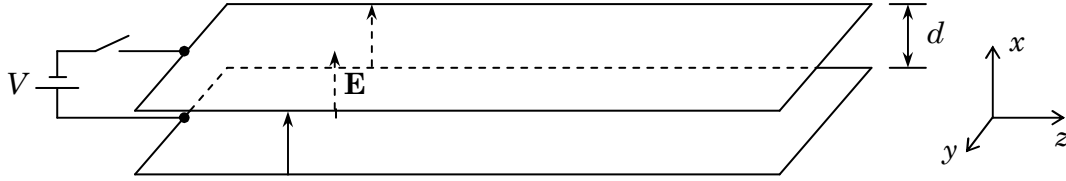
Através das relações (1.18), temos os valores correspondentes de  $\eta H_{y+}$  e  $\eta H_{y-}$ , cuja composição nos dá  $\eta H_y$  e cujos valores são mostrados nas Figuras 1.4a, 1.4b e 1.4c, respectivamente.



**Figura 1.4** Exemplo 1.1 (continuação)

*Observação:*

- O campo referido no exemplo poderia ser gerado entre duas placas condutoras muito extensas, relativamente largas e espaçadas uniformemente no vácuo da distância  $d$ , sendo aplicado entre elas, no instante  $t = 0$ , a tensão  $V = Ed$ , como mostra a Figura 1.5.



**Figura 1.5** Realização de uma onda plana uniforme função degrau

Outro modo de obtenção de um campo como este seria através de uma fonte pontual situada em  $z \ll 0$  cuja frente de onda, já aproximadamente plana, passasse por  $z = 0$  em  $t = 0$ .

## 1.4 POLARIZAÇÃO DE ONDAS PLANAS

Dada a linearidade das equações de onda em meios isotrópicos, homogêneos e lineares, qualquer onda que se propague em tais meios pode ser considerada como uma combinação de ondas planas simples com diferentes amplitudes, fases e direções de propagação.

Essa generalidade de conceituação nem sempre encontra praticidade de aplicação. Para certos tipos de onda, entretanto, o fato de poder considerá-los como uma superposição de ondas planas é muito útil. É o que acontece no caso conhecido como *polarização de ondas*.

Uma *onda polarizada* constitui-se numa superposição de ondas planas senoidais de mesma frequência que se propagam na mesma direção e sentido, com configurações características de amplitudes e fases, dando como resultado orientações especiais dos vetores de campo.

A apresentação desse conceito pode ser feita considerando, inicialmente, uma onda senoidal propagando-se no sentido positivo de  $z$  com componentes

$$E_x = E_{xm} \cos[\omega(t - z/v) + \phi] \quad (1.27)$$

e

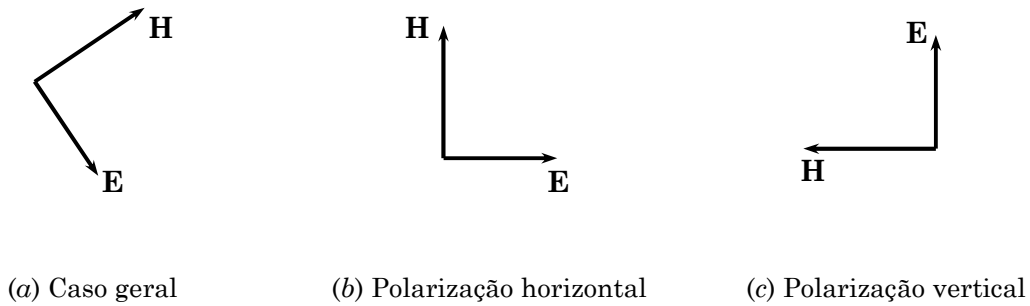
$$E_y = E_{ym} \cos[\omega(t - z/v) + \phi]. \quad (1.28)$$

Vemos que o argumento é o mesmo em ambas as componentes e o vetor campo elétrico aponta sempre na mesma direção ao se propagar apoiando-se num plano que contém o eixo  $z$ , dito *plano de polarização*. A polarização, neste caso, é dita *linear*.



Em ondas de radiofrequência é costume referir-se a polarização ao vetor campo elétrico. Assim, se houver somente componente  $E_x$  a polarização é dita na direção  $x$  e se houver somente componente  $E_y$  a polarização é na direção  $y$  ou, então, se  $\mathbf{E}$  estiver contido num plano horizontal a polarização é dita horizontal e se  $\mathbf{E}$  estiver contido num plano vertical a polarização é dita vertical e assim por diante. [Não confundir com a convenção da óptica em que, ao contrário, a polarização é referida ao vetor campo magnético].

A Figura 1.6a ilustra uma onda linearmente polarizada genérica propagando-se perpendicularmente para fora do papel, a Figura 1.6b ilustra na mesma situação a polarização horizontal e a Figura 1.6c ilustra a polarização vertical.



**Figura 1.6** Polarização linear (sentido de propagação para *fora* do papel)

Considerando, agora, uma combinação de duas ondas planas uniformes senoidais de mesma frequência, propagando-se no mesmo sentido mas com diferentes fases, amplitudes e orientações dos vetores de campo, temos como resultado para a componente  $x$  do campo resultante

$$E_x = E_{xm1} \cos[\omega(t - z/v) + \phi_1] + E_{xm2} \cos[\omega(t - z/v) + \phi_2]$$

onde o índice 1 refere-se a uma das ondas e o índice 2 à outra.

Essa expressão pode ser escrita na forma

$$E_x = E_{xm} \cos[\omega(t - z/v) + \phi_x] \quad (1.29)$$

onde

$$E_{xm} = \sqrt{(E_{xm1} \cos \phi_1 + E_{xm2} \cos \phi_2)^2 + (E_{xm1} \sin \phi_1 + E_{xm2} \sin \phi_2)^2} \quad (1.30)$$

e

$$\phi_x = \tan^{-1} \frac{(E_{xm1} \sin \phi_1 + E_{xm2} \sin \phi_2)}{(E_{xm1} \cos \phi_1 + E_{xm2} \cos \phi_2)}. \quad (1.31)$$

Expressões análogas são deduzidas da mesma forma para as componentes  $y$ .

Seja, então, a componente  $x$  do campo elétrico da combinação de duas ondas e dada por

$$E_x = E_{xm} \cos[\omega(t - z/v)] \quad (1.32)$$

com sua fase tomada como referência, ou seja, fazendo  $\phi_x = 0$ .

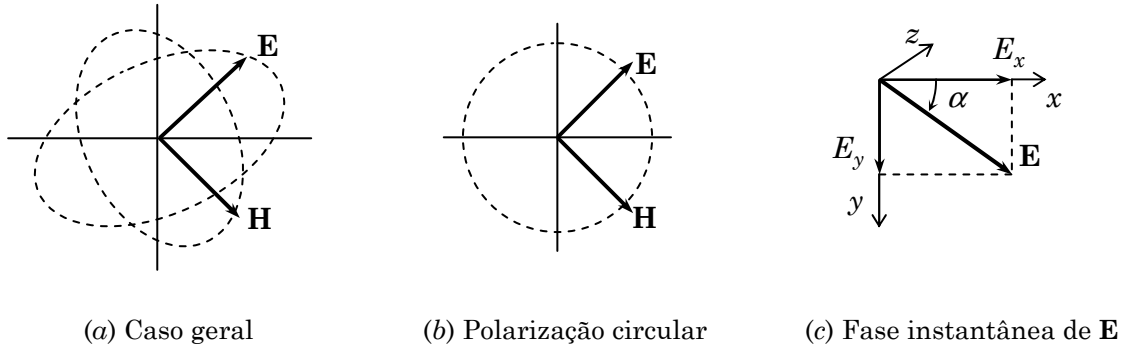
Do mesmo modo, as componentes  $y$  dessas duas ondas se somam e produzem uma outra onda com amplitude e fase diferentes, *i.e.*,

$$E_y = E_{ym} \cos[\omega(t - z/v) + \psi]. \quad (1.33)$$

Num plano dado qualquer, digamos  $z = 0$ , as expressões (1.32) e (1.33) se reduzem a

$$E_x = E_{xm} \cos \omega t \quad \text{e} \quad E_y = E_{ym} \cos(\omega t + \psi). \quad (1.34)$$

Estas são as equações paramétricas de uma elipse. Variando  $t$ , o extremo do vetor campo elétrico descreve uma elipse num plano normal à direção de propagação. Daí o nome de *polarização elíptica*. A Figura 1.7a ilustra este caso.



**Figura 1.7** Polarização elíptica (sentido de propagação para *dentro* do papel)

Um caso particular é aquele em que as componentes  $x$  e  $y$  têm amplitudes iguais e estão defasadas de  $\pi/2$  no tempo, referido como *polarização circular*.

Expressando este caso analiticamente, vem

$$E_{xm} = E_{ym} \quad \text{e} \quad \psi = \pm\pi/2 \quad (1.35)$$

e que resulta

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{xm}^2$$

que é a equação de uma circunferência. A Figura 1.7b ilustra este caso.

Finalmente, cumpre observar que o ângulo formado pelo vetor campo elétrico com o eixo  $x$ , dado por

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} \left[ \mp \frac{E_{xm} \sin \omega t}{E_{xm} \cos \omega t} \right] = \mp \omega t, \quad (1.36)$$

varia uniformemente com o tempo e, assim, os extremos dos vetores de campo da onda circularmente polarizada descrevem, na propagação, trajetórias helicoidais no espaço. Um observador que olha no sentido da propagação vê um movimento horário se  $\psi$  for  $-\pi/2$  e vê um movimento anti-horário se  $\psi$  for  $\pi/2$ , o que justifica os nomes de propagação horária e anti-horária encontrados na literatura, respectivamente. A Figura 1.7c ilustra este fato.

### 1.5 USO DA NOTAÇÃO COMPLEXA PARA EXCITAÇÃO SENOIDAL

A resolução direta de equação lineares com excitação senoidal não é difícil mas é em geral trabalhosa. Entretanto, o desenvolvimento completo pode ser simplificado, como veremos, mediante o uso da notação complexa, como é feito na Teoria de Circuitos.

Um caso simples que se presta bem como exemplo, é o de um circuito  $RL$  série excitado com uma tensão

$$v(t) = V_m \cos \omega t \quad (1.37)$$

no qual se deseja conhecer a corrente.

A equação diferencial a ser resolvida é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t). \quad (1.38)$$

Sabendo que

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (1.39)$$

e admitindo que a corrente tenha uma solução do tipo

$$i(t) = Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t} \quad (1.40)$$

substituímos (1.37), (1.39) e (1.40) e, (1.38) e obtemos

$$j\omega L(Ae^{j\omega t} - Be^{-j\omega t}) + R(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}) = \frac{V_m}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}). \quad (1.41)$$

Identificando os coeficientes de  $e^{j\omega t}$  e  $e^{-j\omega t}$ , obtemos

$$A(R + j\omega L) = V_m/2$$

e

$$B(R - j\omega L) = V_m/2. \quad (1.42)$$

A grandeza complexa que multiplica  $A$  pode ser escrita na forma

$$Z = R + j\omega L = |Z| e^{j\psi} \quad (1.43)$$

onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (1.44)$$

e

$$\psi = \tan^{-1} \omega L / R.$$

Do mesmo modo,

$$R - j\omega L = |Z| e^{-j\psi}$$

Então

$$A = \frac{V_m}{2|Z|} e^{-j\psi}$$

e

$$B = \frac{V_m}{2|Z|} e^{j\psi}. \quad (1.45)$$

Substituindo estes valores em (1.40) obtemos

$$i(t) = \frac{V_m}{|Z|} \left[ \frac{e^{j(\omega t - \psi)} + e^{-j(\omega t - \psi)}}{2} \right] \quad (1.46)$$

ou

$$i(t) = \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t - \psi). \quad (1.47)$$

O processo desenvolvido é relativamente extenso mas pode ser simplificado com as seguintes observações:

1.  $A$  e  $B$  são grandezas complexas conjugadas pois a resposta deve ser real; basta, portanto conhecer um deles para se ter o outro;
2. nas derivadas das expressões do tipo  $Ce^{j\omega t}$  temos a substituição do operador  $\partial/\partial t$  pelo multiplicador  $j\omega$ , i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t} Ce^{j\omega t} = j\omega Ce^{j\omega t};$$

3. nessas equações lineares, as exponenciais aparecem em todos os termos; podem, portanto, ser omitidas e subentendidas nos passos intermediários.

Com estas observações vamos operar somente com  $V_m e^{j\omega t}$ . A excitação verdadeira será

$$v(t) = \text{Re}(V_m e^{j\omega t})$$

onde  $\text{Re}(\bullet)$  significa "a parte real de". Escrevendo  $V_m$  em (1.38) no lugar de  $v(t)$ , trocando  $\partial/\partial t$  por  $j\omega$  e omitindo  $e^{j\omega t}$ , obtemos

$$I_m(R + j\omega L) = V_m$$

de onde

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} e^{-j\psi} \quad (1.48)$$

com  $Z$  e  $\psi$  definidos em (1.44).

Repomos, em seguida, o fator  $e^{j\omega t}$  e tiramos a parte real da operação tendo, finalmente, o valor da corrente, i.e.,

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{V_m}{|Z|} e^{-j\psi} e^{j\omega t} \right] \\
 &= \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t - \psi).
 \end{aligned}
 \tag{1.49}$$

A grandeza representativa de  $I_m$  em (1.48) é a *amplitude complexa* da corrente, pois traz simultaneamente informação de amplitude e de fase.

É praxe distinguir os símbolos das amplitudes complexas colocando um ponto (ou um circunflexo) em cima do mesmo, a fim de explicitar esse caráter. Com esta convenção escrevemos (1.48) como

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{V}_m}{|Z|} e^{-j\psi} \tag{1.50}$$

e escrevemos (1.49) como

$$i(t) = \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] \tag{1.51}$$

Muitos autores, entretanto, dispensam símbolos especiais; consideram que, somente o fato de termos multiplicadores  $j\omega$  em vez de derivações é suficiente para percebermos implicitamente esse caráter.

Um modo de representação muito comum, que adotaremos a seguir, é aquele que utiliza os valores eficazes das grandezas, que relacionam-se às amplitudes pelo fator  $\sqrt{2}$ , ou seja,

$$i(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] \tag{1.52}$$

e

$$v(t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \dot{V} e^{j\omega t}] \tag{1.53}$$

onde  $\dot{I} = \dot{I}_m/\sqrt{2}$  e  $\dot{V} = \dot{V}_m/\sqrt{2}$  são chamados de **fasores** das respectivas grandezas e  $|\dot{I}|$  e  $|\dot{V}|$  são seus valores eficazes.

## 1.6 O USO DA NOTAÇÃO COMPLEXA NO CÁLCULO DE POTÊNCIA

Vimos na secção anterior a vantagem do uso da notação complexa nas equações lineares sob excitação permanente senoidal. Em relações não lineares, como no cálculo de potência, cuidados adicionais devem ser levados em conta.

Recorrendo novamente a um exemplo de circuitos, sejam a tensão e a corrente num determinado bipolo linear dadas por

$$v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \phi_v) \tag{1.54}$$

e

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i).$$

A potência instantânea recebida pelo bipolo é dada pelo produto da tensão e da corrente instantâneas, *i.e.*,

$$p(t) = v(t)i(t) = 2 VI \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i). \quad (1.55)$$

Através da identidade trigonométrica

$$2 \cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$$

a expressão (1.55) pode ser reescrita como

$$p(t) = VI \cos(\phi_v - \phi_i) + VI \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \quad (1.56)$$

de onde obtemos a potência média sobre um ciclo

$$P_{méd} = VI \cos(\phi_v - \phi_i). \quad (1.57)$$

A potência instantânea dada por (1.55) é exatamente a mesma que

$$p(t) = \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} V e^{j(\omega t + \phi_v)}] \right\} \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} I e^{j(\omega t + \phi_i)}] \right\} \quad (1.58)$$

ou explicitando os fasores

$$p(t) = \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} \dot{V} e^{j\omega t}] \right\} \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] \right\}. \quad (1.59)$$

onde

$$\dot{V} = V e^{j\phi_v} \quad (1.60)$$

e

$$\dot{I} = I e^{j\phi_i}.$$

Para manipularmos (1.59) lembremos que dado um número complexo  $A$ , temos

$$\text{Re } A = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad (1.61)$$

onde o asterisco denota o conjugado do número. Assim,

$$\begin{aligned} (\text{Re } A)(\text{Re } B) &= \frac{1}{4}(A + A^*)(B + B^*) \\ &= \frac{1}{4}(AB^* + AB) + \frac{1}{4}(A^*B + A^*B^*) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(AB^* + AB) + \frac{1}{2}(AB^* + AB)^* \right] \end{aligned}$$

Daí, fazendo novamente uso de (1.61), resulta

$$(\text{Re } A)(\text{Re } B) = \frac{1}{2} \text{Re}(AB^* + AB) \quad (1.62)$$

A identificação de (1.59) com (1.62) nos dá

$$p(t) = \text{Re} [\dot{V} \dot{I}^* + \dot{V} \dot{I} e^{j2\omega t}] \quad (1.63)$$

de onde o valor médio

$$P_{méd} = \text{Re} [\dot{V} \dot{I}^*]. \quad (1.64)$$

## 1.7 VETORES COMPLEXOS

Como sabemos, um vetor no espaço pode ser decomposto em três componentes. Sejam elas cartesianas, por exemplo. Assim,

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z \quad (1.65)$$

onde  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$  são os vetores unitários nos sentidos dos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Se o vetor for função senoidal do tempo suas componentes também o serão e o conceito dos fasores pode ser aplicado a cada uma das componentes, ou seja,

$$E_x = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{E}_x e^{j\omega t}] \quad (1.66)$$

e de forma semelhante para  $E_y$  e  $E_z$ , onde

$$\dot{E}_x = E_{x0} e^{j\psi_x} \quad (1.67)$$

e assim por diante.

Devido à linearidade de (1.65), temos, combinando (1.65), (1.66) e (1.67)

$$\mathbf{E} = \text{Re} [\sqrt{2} (\dot{E}_x \mathbf{u}_x + \dot{E}_y \mathbf{u}_y + \dot{E}_z \mathbf{u}_z) e^{j\omega t}] \quad (1.68)$$

ou ainda

$$\mathbf{E} = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \quad (1.69)$$

onde

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{u}_x + \dot{E}_y \mathbf{u}_y + \dot{E}_z \mathbf{u}_z \quad (1.70)$$

é definido como um **vetor complexo**.

Dada a linearidade, todas as propriedades de cálculo para os fasores são também válidas para os vetores complexos.

O leitor pode verificar, sem dificuldade, que dados dois vetores complexos  $\dot{\mathbf{A}}$  e  $\dot{\mathbf{B}}$  e um número real  $\alpha$  valem as relações

$$\text{Re}(\dot{\mathbf{A}}) + \text{Re}(\dot{\mathbf{B}}) = \text{Re}(\dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}}) \quad (1.71)$$

$$\text{Re}(\alpha \dot{\mathbf{A}}) = \alpha \text{Re}(\dot{\mathbf{A}}) \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(\dot{\mathbf{A}}) = \text{Re} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{A}}}{\partial x} \right) \quad (1.73)$$

$$\int \text{Re}(\dot{\mathbf{A}}) dx = \text{Re} \left( \int \dot{\mathbf{A}} dx \right) \quad (1.74)$$

Além das relações acima, podemos demonstrar o seguinte *teorema*:

"Se  $\dot{\mathbf{A}}$  e  $\dot{\mathbf{B}}$  forem vetores complexos e  $\text{Re}(\dot{\mathbf{A}} e^{j\omega t}) = \text{Re}(\dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t})$  para qualquer  $t$ , então  $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{B}}$ ".

Demostramos facilmente fazendo primeiro  $t = 0$  e obtendo  $\text{Re}(\dot{\mathbf{A}}) = \text{Re}(\dot{\mathbf{B}})$ ; em seguida fazemos  $\omega t = -\pi/2$  resultando a igualdade das duas "partes imaginárias" i.e.,  $\text{Im}(\dot{\mathbf{A}}) = \text{Im}(\dot{\mathbf{B}})$ . Em consequência,  $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{B}}$  pois são dois vetores complexos, cujas partes reais são iguais e cujas partes imaginárias também são iguais.

### Exemplo 1.2

(a) Calcule o vetor complexo correspondente ao campo magnético expresso por

$$\mathbf{H}(t, z) = 2H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{u}_y.$$

(b) Dado o vetor complexo de frequência  $\omega$

$$\dot{\mathbf{E}} = (8\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_y) e^{-j(3x+4z)}$$

expresse o campo elétrico em função do tempo.

*Solução:*

(a) Sendo

$$\cos \alpha = \text{Re}(e^{j\alpha})$$

podemos escrever  $\mathbf{H}(t, z)$  na forma

$$H(t, z) = 2H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \text{Re} \left[ e^{j\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}} \right] \mathbf{u}_y$$

ou ainda, levando em conta que  $H_0$  e  $\delta$  são reais,

$$\mathbf{H}(t, z) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} \left[ \sqrt{2} H_0 e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} \mathbf{u}_y \right] e^{j\omega t} \right\}.$$

Por analogia com (1.69) e (1.70), identificamos o vetor complexo

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = \sqrt{2} H_0 e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} \mathbf{u}_y$$

ou ainda

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = H_0 (1-j) e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} \mathbf{u}_y$$

que é o vetor procurado.

Note que, neste exemplo, o vetor complexo é só função do espaço (no caso, da coordenada  $z$ ) e não do tempo. Algumas vezes, quando não há perigo de confusão, as variáveis espaciais são tornadas implícitas. Assim, por exemplo, escreveríamos

$$\dot{\mathbf{H}} = H_0 (1-j) e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} \mathbf{u}_y$$

sem explicitar a coordenada  $z$  no símbolo do vetor complexo.

(b) Este é um problema inverso ao anterior.



Aqui, usando (1.69) e (1.70), temos imediatamente

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \text{Re}[\sqrt{2}(8\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_z)e^{-j(3x+4z)}e^{j\omega t}]$$

ou ainda

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \text{Re}[\sqrt{2}(8\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_z)e^{j(\omega t - 3x - 4z)}]$$

e, finalmente, isolando a parte real da exponencial obtemos

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \sqrt{2}(8\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_z) \cos(\omega t - 3x - 4z)$$

que é a forma procurada.

## 1.8 EQUAÇÕES DE MAXWELL EM FORMA COMPLEXA

A primeira equação de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

pode ser expressa em termos dos vetores complexos do seguinte modo

$$\text{rot} \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] \right\} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Re} [\sqrt{2} \dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}] \right\}$$

Tendo em conta a linearidade da equação, podemos permutar os operadores de derivada com o operador Re, omitir  $\sqrt{2}$  e obter

$$\text{Re} [\text{rot } \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] = \text{Re} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} [-j\omega \dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}].$$

De acordo com o teorema da secção anterior, escrevemos

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}. \quad (1.75)$$

De maneira análoga, nas outras equações de Maxwell<sup>3</sup>, chegamos a

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega \dot{\mathbf{D}} \quad (1.76)$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.77)$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} \quad (1.78)$$

com relações constitutivas

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}} &= \epsilon \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{B}} &= \mu \dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\dot{\mathbf{J}} = \sigma \dot{\mathbf{E}}.$$

## 1.9 EQUAÇÕES DE ONDA COM EXCITAÇÃO SENOIDAL

Aplicando o mesmo desenvolvimento e as mesmas considerações que na Sec. 1.2 chegamos a duas equações, envolvendo os vetores complexos  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{H}}$ , semelhantes a (1.5) e (1.6), com a substituição do operador  $\partial/\partial t$  pelo multiplicador

<sup>3</sup>Aqui a segunda equação de Maxwell é escrita na forma completa, *i.e.*,  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t$  onde o termo a mais  $\mathbf{J}$  representa o *vetor densidade de corrente* expresso em A/m<sup>2</sup>. Vale recordar que em meios lineares  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  sendo  $\sigma$  a *condutividade do meio* expressa em siemens por metro (S/m).

Também, a quarta equação de Maxwell é escrita na forma completa, *i.e.*,  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  onde  $\rho$  representa a *densidade volumétrica de carga* expressa em C/m<sup>3</sup>.

$j\omega$ . Mesmo sem uma dedução formal, isto é facilmente compreensível fazendo uso das propriedades dos vetores complexos. Assim

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (1.80)$$

e

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = -\omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{H}} \quad (1.81)$$

ou ainda

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.82)$$

e

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.83)$$

onde

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (1.84)$$

é chamado de *número de onda*.

As equações (1.82) e (1.83) são equações vetoriais que se desdobram cada uma em três outras escalares da forma

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1.85)$$

conhecida como *equação de Helmholtz*.

As soluções dessas equações, no caso de haver somente variações na direção  $z$ , são do tipo

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_{x0+} e^{-jkz} + \dot{E}_{x0-} e^{jkz} \\ \dot{E}_y &= \dot{E}_{y0+} e^{-jkz} + \dot{E}_{y0-} e^{jkz} \\ \dot{E}_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.86)$$

para as componentes de  $\dot{\mathbf{E}}$  e

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_{x0+} e^{-jkz} + \dot{H}_{x0-} e^{jkz} \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{y0+} e^{-jkz} + \dot{H}_{y0-} e^{jkz} \\ \dot{H}_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.87)$$

para as componentes de  $\dot{\mathbf{H}}$ .

Por serem gerais, as relações (1.18) e (1.19) são válidas, também, para os fasores das componentes e obtemos

$$\frac{\dot{E}_{x+}}{\dot{H}_{y+}} = -\frac{\dot{E}_{y+}}{\dot{H}_{x+}} = \eta \quad (1.88)$$

e

$$\frac{\dot{E}_{x-}}{\dot{H}_{y-}} = -\frac{\dot{E}_{y-}}{\dot{H}_{x-}} = -\eta \quad (1.89)$$

onde  $\eta$  é dado por (1.16).

Em casos mais gerais, que serão definidos adiante, o número de onda  $k$  é complexo, ou seja, expresso na forma

$$jk = \alpha + j\beta. \quad (1.90)$$

Assim, se examinarmos o comportamento de uma das componentes dadas por (1.86) e (1.87), por exemplo

$$\dot{E}_{x+} = \dot{E}_{x0+} e^{jkz},$$

obtemos, pela substituição de  $k$  dado por (1.90), a seguinte expressão no domínio do tempo

$$E_{x+}(t, z) = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{E}_{x0+} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}]$$

e daí

$$E_{x+}(t, z) = \sqrt{2} E_{x0+} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (1.91)$$

onde tomamos a fase de  $E_{x0+}$  como referência para simplificar.

Vemos, então, que o fato de  $k$  não ser real implica na existência de um  $\alpha$  dito *constante de atenuação* que provoca a atenuação da onda que se propaga. Fisicamente isto corresponde a termos meios dissipativos que absorvem parte da energia propagante.

Por outro lado, para observarmos sempre a mesma fase de  $E_{x+}$ , ou seja o mesmo valor de  $(\omega t - \beta z)$ , devemos caminhar no eixo  $z$  com velocidade

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta},$$

dita *velocidade de fase*, de onde vem

$$\beta = \frac{\omega}{v} \quad (1.92)$$

que tem o nome de *constante de defasagem*.

Observamos, em seguida, que se tomarmos dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  sobre o eixo  $z$ , tais que

$$(\omega t - \beta z_1) = (\omega t - \beta z_2) + 2\pi \quad (1.93)$$

temos, através de (1.91)

$$E_{x+}(t, z_1) = E_{x+}(t, z_2)$$

ou seja, a onda percorre um ciclo completo entre  $z_1$  e  $z_2$ . Por esta razão, a diferença  $(z_1 - z_2)$  é chamada de *comprimento de onda* e é normalmente representada por  $\lambda$ .

Através de (1.93), temos facilmente

$$\begin{aligned}\lambda &= (z_1 - z_2) = \frac{2\pi}{\beta} \\ &= \frac{2\pi}{\omega} v\end{aligned}\tag{1.94}$$

ou ainda

$$\lambda = \frac{v}{f}\tag{1.95}$$

onde

$$f = \frac{\omega}{2\pi}\tag{1.96}$$

é a *frequência* da onda em hertz (Hz).

### 1.10 O VETOR DE POYNTING EXPRESSO POR VETORES DE CAMPO COMPLEXOS

Vimos, na Sec. 1.6, que quando temos produtos de grandezas periódicas senoidais a expressão complexa correspondente não é simplesmente o produto das amplitudes complexas das grandezas, mas algo mais complicado, na forma de (1.63).

Do mesmo modo, quando temos o produto de dois vetores, como no caso do vetor de Poynting, uma expressão semelhante a (1.63) se aplica a cada uma das componentes do vetor-produto e podemos verificar sem dificuldade que

$$\mathbf{N} = \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{j2\omega t}]\tag{1.97}$$

sendo que o valor médio sobre um ciclo é

$$\mathbf{N}_{\text{méd}} = \text{Re} [\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*]\tag{1.98}$$

### 1.11 ONDAS EM DIELETRICOS REAIS E CONDUTORES

Supomos que o leitor já deva ter estudado em cursos anteriores de *Eletromagnetismo* os vários fenômenos que dão origem à polarização dos meios materiais quando submetidos à ação de um campo estático externo.

Quando os campos variam com o tempo esses mecanismos podem ser modificados tanto na contribuição da permissividade como em processos de perdas. Esses processos de perdas podem ser bastante complicados de modo que vamos considerar somente modelos simples para dar idéia *qualitativa* de fenômeno. Além disso, as propriedades magnéticas, quando significativas, são anisotrópicas de forma que nos restringiremos ao estudo da permissividade.

Os vários tipos de polarização, como as polarizações eletrônica, iônica ou molecular, podem ser interpretados genericamente como cargas negativas e cargas positivas deslocadas de suas posições de equilíbrio mas atadas entre si. Como estas cargas têm massa e estão submetidas a forças (as do campo externo e as de atração entre elas), este conjunto forma um sistema oscilatório clássico. Isto é mais ou menos intuitivo e quer dizer que, ao submetermos um material

dielétrico à ação de um campo externo partindo de uma condição de repouso, essas cargas tendem a oscilar em torno de suas posições finais até ser atingido o equilíbrio, o mesmo acontecendo quando retiramos o campo externo.

O equilíbrio é atingido devido ao amortecimento do sistema oscilante, proveniente de atritos e colisões entre as cargas oscilantes. Isto corresponde a uma dissipação de energia ou a perdas no dielétrico. Um fenômeno análogo a este, na *Teoria do Circuitos*, seria um circuito *RLC* com sua frequência natural e sua resistência de perdas.

Infelizmente, o fenômeno real não é assim tão simples: os vários tipos de polarização já seriam suficientes para complicar a descrição; além disto, nas vizinhanças das ressonâncias, as excursões das cargas são maiores, sendo maior a probabilidade de colisões e, portanto maiores as perdas.

Apesar de toda a complexidade do fenômeno, podemos, em regime permanente senoidal, representar a permitividade por uma *parte real* e uma *parte imaginária*

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (1.99)$$

sendo a parte real responsável pelos fenômenos de polarização e a parte imaginária responsável pelas perdas.

Isto é melhor compreendido ao examinarmos a segunda equação de Maxwell em forma complexa

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\dot{\mathbf{D}}.$$

Substituindo aí  $\dot{\mathbf{J}} = \sigma\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon\dot{\mathbf{E}}$  com  $\varepsilon$  dado por (1.99), obtemos

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = (\sigma + \omega\varepsilon'')\dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon'\dot{\mathbf{E}} \quad (1.100)$$

sendo evidente, por esta expressão, que  $\omega\varepsilon''$  tem dimensão de condutividade e se comporta como tal.

Convém insistir que  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon''$  não são constantes mas funções de frequência, o que deve estar claro pelo que já foi dito. No entanto, o formalismo de (1.99) é muito útil na dedução de certas propriedades, como veremos mais adiante.

Muitos autores não costumam fazer diferença entre  $\sigma$  e  $\omega\varepsilon''$ . De fato, macroscopicamente, podemos considerar em  $\sigma$  a parcela de  $\omega\varepsilon''$ , ou vice-versa, mas microscopicamente os fenômenos são bem diversos.

Aproveitamos esta consideração para, no que se segue, escrevermos somente a parcela correspondente a  $\varepsilon''$ . Na realidade, esta é a parcela quase que exclusiva nos bons dielétricos. Posteriormente, aproveitando o formalismo idêntico, podemos deduzir as soluções das equações de onda em bons condutores, substituindo, nas equações que terão já sido deduzidas,  $\omega\varepsilon''$  por  $\sigma$  e procedendo depois às simplificações convenientes.

Voltando, então, à equação (1.100), na qual omitimos  $\sigma$  (ou se quiserem, agrupamos seu efeito em  $\varepsilon''$ ) e combinando com a primeira equação de Maxwell, na forma de (1.75), obtemos, como em (1.82) e (1.83)

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = -k^2 \dot{\mathbf{E}}$$

e

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = -k^2 \dot{\mathbf{H}}$$

onde agora

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \\ &= \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} \end{aligned} \quad (1.101)$$

Separando  $k$  nas suas partes real e imaginária, como em (1.90), temos

$$jk = \alpha + j\beta$$

onde

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right]} \quad (1.102)$$

e

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right]} \quad (1.103)$$

assim como a impedância intrínseca do meio para uma onda plana uniforme é

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon' [1 - j(\varepsilon''/\varepsilon')]}} \quad (1.104)$$

sendo  $\alpha$  é expresso em nepers<sup>4</sup> por metro (símbolo Np/m) e  $\beta$  expresso em radianos por metro (símbolo rad/m).

Um parâmetro importante que aparece nestas últimas fórmulas é a relação  $\varepsilon''/\varepsilon'$ , chamada de *fator de dissipação* ou, muitas vezes, de *tangente do ângulo de perdas*. Em materiais com perdas baixas o fator de dissipação é muito menor que a unidade. Nessas condições, (1.102), (1.103) e (1.104) podem ser aproximadas, respectivamente a

$$\alpha \cong \frac{k' \varepsilon''}{2\varepsilon'} \quad (1.105)$$

$$\beta = k' \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \quad (1.106)$$

e

$$\eta \cong \eta' \left\{ \left[ 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right] + j \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right\} \quad (1.107)$$

onde

$$k' = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} \quad \text{e} \quad \eta' = \sqrt{\mu / \varepsilon'}.$$

Se agora estivermos estudando o comportamento das ondas num *condutor*,  $\sigma$  será muito mais importante que  $\omega \varepsilon''$  e, pelo que já observamos, basta substituir formalmente um pelo outro em (1.101), (1.102), (1.103) e (1.104).

---

<sup>4</sup>O plural de unidades segue convenções internacionais e foram adotadas no Brasil através do Dec. nº 81.621 de 03.05.78.

Se, além disso, o material for *bom condutor*, temos que a corrente de condução é muito maior que aquela de deslocamento, *i.e.*,

$$\sigma/(\omega\epsilon') \gg 1$$

e daí

$$jk = j\omega \sqrt{\frac{\mu\sigma}{j\omega}} = (1+j)\sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1+j}{\delta} \quad (1.108)$$

sendo  $f$  a frequência dada por (1.96) e onde  $\delta = 1/\sqrt{\pi\sigma f \mu}$  é chamada de *profundidade de penetração* e corresponde à distância (medida na direção  $z$ ) em que os campos (em particular o *vetor densidade de corrente*  $\mathbf{J}$ ) sofrem a redução de um fator  $1/e$ .

Daí temos a velocidade de fase dada por

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega\delta = c \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad (1.109)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no espaço livre e  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no espaço livre. Uma vez que  $\delta\lambda_0$  é em geral pequeno, esta velocidade de fase é muito menor que a velocidade da luz no espaço livre.

Temos, também,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \quad (1.110)$$

o que mostra que os vetores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão defasados *em tempo* de  $\pi/4$  num bom condutor.

Convém observar que os resultados acima estão em perfeita concordância com aqueles que costumam ser deduzidos nos cursos de Eletromagnetismo em capítulos referentes à *indução de correntes em meios contínuos*. Apesar da abordagem diferente, as aproximações feitas são, em essência, as mesmas. Lá são desprezadas as correntes de deslocamento face às correntes de condução; aqui, consideramos ambas de início para fazer as aproximações depois.

A fim de praticarmos com a notação complexa e, ao mesmo tempo, verificarmos fisicamente os resultados obtidos de forma analítica, vejamos um exemplo.

### Exemplo 1.3

Expresse no domínio do tempo, os vetores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  num bom condutor e esboce a intensidade desses vetores em função da distância num dado instante de tempo.

*Solução:*

Tomando  $z$  como a direção normal aos campos e a fase de  $E_{x0+}$  como referência, temos para a polarização na direção  $x$

$$\dot{E}_x = E_{x0+} e^{-jkz} \quad (1.111)$$

e, daí, fazendo uso da (1.108), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, z) &= \text{Re} \left[ \sqrt{2} E_{x0+} e^{-\frac{(1+j)z}{\delta}} e^{j\omega t} \right] \mathbf{u}_x \\ &= \sqrt{2} E_{x0+} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \mathbf{u}_x\end{aligned}\quad (1.112)$$

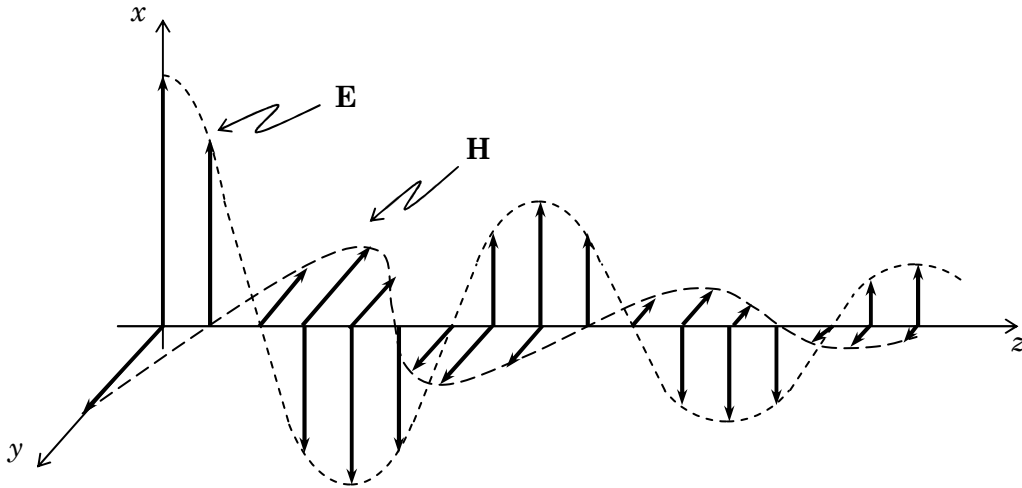
Daí, usando as relações (1.88), (1.110) e (1.111), resulta

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_x}{\eta} = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi f \mu}} \frac{1}{(1+j)} E_{x0+} e^{-j\left(\frac{1+j}{\delta}\right)z}$$

e então

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t, z) &= \text{Re} [\sqrt{2} \dot{H}_y e^{j\omega t}] \mathbf{u}_y \\ &= E_{x0+} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi f \mu}} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta - \pi/4) \mathbf{u}_y\end{aligned}\quad (1.113)$$

Num instante particular, por exemplo  $t = 0$ , temos a distribuição de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  dada pela Figura 1.8.



**Figura 1.8** Exemplo 1.3

*Observação:*

- É bom deixar claro, mais uma vez, que no condutor só existe corrente de condução e esta é dada por  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .

## FONTES DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Cap. 6.



PLONSEY, Robert; COLLIN, Robert E. **Principles and Applications of Electromagnetic Fields**. New York: McGraw-Hill, 1961. Cap. 10

SILVESTER, P.. **Campos eletromagnéticos modernos**. [*Modern Electromagnetic Fields*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1968]. Trad. Paulo Antonio Mariotto. São Paulo: Polígono, 1971. Cap. 8.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**P1.1** Mostre que qualquer onda polarizada elipticamente, genérica, com campo elétrico expresso pelas componentes

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xm} \cos[\omega(t - z/v) + \phi_x] \\ e \quad E_y &= E_{ym} \cos[\omega(t - z/v) + \phi_y] \end{aligned}$$

pode ser separada na soma de duas ondas polarizadas circularmente com rotações opostas, *i.e.*

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos[\omega(t - z/v) + \phi_1] + E_2 \cos[\omega(t - z/v) + \phi_2] \\ e \quad E_y &= E_1 \cos[\omega(t - z/v) + \phi_1 + \pi/2] + E_2 \cos[\omega(t - z/v) + \phi_2 - \pi/2]. \end{aligned}$$

**P1.2** (a) Escreva as expressões correspondentes a (1.32) e (1.33) em notação complexa.

(b) Mostre que a representação geral para uma onda polarizada elipticamente, em notação complexa, pode ser escrita

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{E}_a + j\mathbf{E}_b) e^{-jkz}$$

onde  $\mathbf{E}_a$  e  $\mathbf{E}_b$  são dois vetores reais, em geral não perpendiculares entre si, e relacione  $\mathbf{E}_a$  e  $\mathbf{E}_b$  com  $E_{xm}$ ,  $E_{ym}$  e  $\psi$ .

**P1.3** Mostre que o fluxo médio de potência de uma onda plana uniforme é igual ao produto da densidade média de energia pela velocidade  $v$  da onda.

**P1.4** Uma onda plana uniforme tem o campo elétrico em  $z=0$  dado por  $E_x(t,0) = E [\cos \omega t + (1/2) \cos 3\omega t]$ .

(a) Faça um gráfico de  $E_x$  em função da distância para alguns períodos num dielétrico ideal sem dispersão.

(b) Repita o problema para um dielétrico no qual a velocidade de fase na frequência  $3\omega$  seja  $1/3$  daquela na frequência  $\omega$ .

**P1.5** Uma onda plana senoidal no espaço livre tem um campo elétrico eficaz  $E = 1$  V/m. Ache a densidade máxima de energia nesta onda e indique quanto desta energia está armazenada no campo magnético. Supondo que a frequência desta onda seja 10 GHz, determine o valor eficaz do campo magnético e a energia contida num metro cúbico do espaço.

## 2. REFLEXÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS PLANAS

Neste capítulo são introduzidos conceitos e aplicações relativos à incidência de ondas planas sobre interfaces planas. São consideradas incidências normais e oblíquas sobre condutores perfeitos e entre dielétricos perfeitos.

### 2.1 INTRODUÇÃO

Qualquer obstáculo colocado no percurso de uma onda propagante impõe condições de contorno que modificam o andamento da onda. O efeito disto é o surgimento de ondas secundárias refletidas e refratadas que serão o objeto de estudo deste capítulo.

Restringiremos nosso estudo a obstáculos plano. Não obstante, as várias situações apresentadas, com incidências normal e oblíqua sobre condutores e dielétricos perfeitos, já servem para dar ao leitor uma visão qualitativa do fenômeno.

### 2.2 REFLEXÃO DE ONDAS PLANAS COM INCIDÊNCIA NORMAL SOBRE CONDUTORES PERFEITOS

Inicialmente, consideramos o caso de uma onda plana senoidal que, propagando-se no espaço-livre segundo o sentido positivo do eixo  $z$ , incide normalmente sobre um condutor perfeito situado em  $z = 0$ . Nesta condição, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  da onda propagam-se mantendo orientação paralela à superfície do condutor e chegam tangencialmente a essa superfície.

Visto que dentro do condutor perfeito ( $z > 0$ ) o campo elétrico é nulo, decorre de propriedade do Eletromagnetismo que o campo elétrico tangencial junto à face externa do condutor ( $z = 0_-$ ) também deve ser nulo. Como o campo elétrico incidente, na situação considerada, já é tangencial à superfície do condutor, então o campo elétrico total deve ser nulo nas vizinhanças da interface.

Dado que, como já visto no Capítulo 1, a solução completa de uma equação de onda, com seus campos variando somente na direção  $z$ , é composta de duas parcelas propagando-se em sentidos opostos, devemos ter, no caso, o surgimento de uma onda secundária, propagante no sentido inverso de  $z$  (dita *onda refletida*), que composta com a original (incidente no condutor em  $z = 0$ ) proveja campo elétrico nulo no plano de incidência, em qualquer instante de tempo.

Outra maneira de justificarmos a existência de uma onda refletida é raciocinarmos com o vetor de Poynting. Dado que o mesmo é nulo dentro do

condutor perfeito (pois  $\mathbf{E} = 0$ ), o fluxo de potência carregado pela onda incidente deve retornar através de uma onda refletida.

Se escolhermos a orientação dos eixos tal que o campo elétrico total permaneça na direção  $x$  e inclua as componentes das ondas progredindo nos sentidos positivo e negativo de  $z$ , temos que

$$\dot{E}_x = \dot{E}_+ e^{-j\beta z} + \dot{E}_- e^{j\beta z} \quad (2.1)$$

Se  $E_x = 0$  em  $z = 0$ , independentemente do tempo, temos

$$\dot{E}_+ = -\dot{E}_-$$

e, então,

$$\dot{E}_x = \dot{E}_+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})$$

ou

$$\dot{E}_x = -j2E_+ \sin \beta z. \quad (2.2)$$

Fazendo uso de (1.88) e (1.89), do capítulo anterior, obtemos o fasor de  $\dot{H}_y$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \dot{H}_y &= \left( \frac{\dot{E}_+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{\dot{E}_-}{\eta} e^{j\beta z} \right) \\ &= \frac{\dot{E}_+}{\eta} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\dot{H}_y = 2 \frac{E_+}{\eta} \cos \beta z. \quad (2.3)$$

As expressões (2.2) e (2.3) mostram que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são mutuamente perpendiculares no espaço: as amplitudes desses campos estão relacionadas pela impedância intrínseca do meio  $\eta$  e estão em quadratura no tempo.

Explicitando a solução no domínio do tempo temos, tomando a fase de  $\dot{E}_+$  como referência,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, z) &= \text{Re} [\sqrt{2} \dot{E}_x e^{j\omega t}] \mathbf{u}_x \\ &= 2\sqrt{2} E_+ \sin \beta z \sin \omega t \mathbf{u}_x \end{aligned} \quad (2.4)$$

e, do mesmo modo,

$$\mathbf{H}(t, z) = 2\sqrt{2} \frac{E_+}{\eta} \cos \beta z \cos \omega t \mathbf{u}_y. \quad (2.5)$$

As expressões (2.2) ou (2.4) mostram que  $\mathbf{E}$  é sempre nulo nos planos  $z = 0$  (superfície do condutor) e, também, nos planos onde  $\beta z = -n\pi$  ou

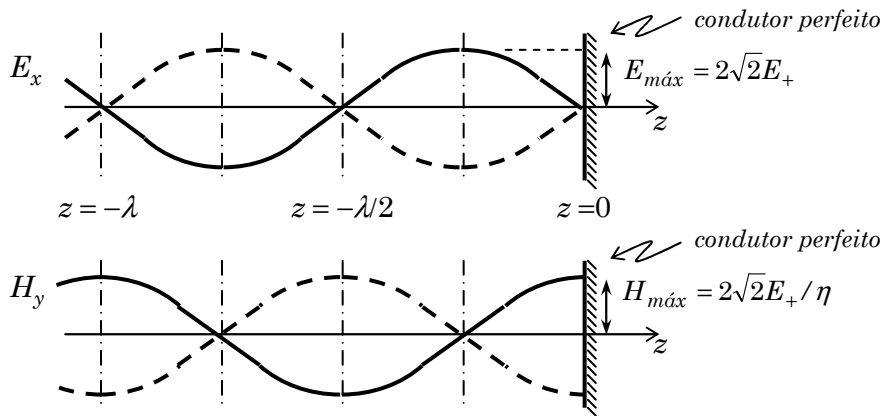
$$z = -\frac{n\pi}{\beta} = -n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

O campo magnético tem amplitude máxima em  $z = 0$  e, também, nos planos onde  $\beta z = -n\pi$ .

Nos planos  $z = -(2n + 1)\lambda/4$ , o campo elétrico é máximo e o magnético é nulo.

As expressões (2.4) e (2.5) descrevem uma onda estacionária. Em um certo instante, toda a energia está armazenada no campo elétrico; a um quarto de período adiante a energia está inteiramente armazenada no campo magnético. O valor médio do vetor de Poynting é nulo em qualquer plano paralelo ao condutor.

A Figura 2.1 ilustra as amplitudes (ou seja, o valor máximo de oscilação) de  $E_x$  e  $H_y$  ao longo de  $z$ .



**Figura 2.1** Amplitudes de  $E_x$  e  $H_y$  ao longo de  $z$  numa onda estacionária

Vale a pena ainda observar que sendo nulos os campos dentro do condutor e sendo o campo  $\mathbf{H}$  tangencial não-nulo, existe uma densidade superficial de corrente, colinear com  $\mathbf{E}$  na superfície e de valor  $2\sqrt{2}(E_+/\eta)\cos\omega t$  A/m; no caso de o condutor não ser perfeito, a densidade de corrente deixa de ser superficial e difunde-se exponencialmente para dentro do condutor como mostramos na Sec. 1.11.

## 2.3 INCIDÊNCIA NORMAL SOBRE UM DIELÉTRICO PERFEITO

Se uma onda plana, senoidal e uniforme, propagando-se em um meio de impedância intrínseca  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ , incide normalmente sobre um dielétrico plano de impedância intrínseca  $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ , uma parte se reflete e volta ao primeiro meio; outra parte se propaga no segundo meio, dando origem a uma onda transmitida.

A razão disto torna-se evidente quando, escolhendo o eixo  $x$  na direção de  $\mathbf{E}$ , procuramos conciliar as relações (1.88) e (1.89) nos dois meios, *i.e.*,

$$\frac{\dot{E}_{x1+}}{\dot{H}_{y1+}} = \eta_1, \quad \frac{\dot{E}_{x1-}}{\dot{H}_{y1-}} = -\eta_1$$

e

$$\frac{\dot{E}_{x2+}}{\dot{H}_{y2+}} = \eta_2 \quad (2.6)$$

com as condições de contorno imposta às componentes tangenciais

$$\dot{E}_{t1} - \dot{E}_{t2} = (\dot{E}_{x1+} + \dot{E}_{x1-}) - \dot{E}_{x2+} = 0 \quad (2.7)$$

e

$$\dot{H}_{t1} - \dot{H}_{t2} = (\dot{H}_{y1+} + \dot{H}_{y1-}) - \dot{H}_{y2+} = 0 \quad (2.8)$$

porque os dielétricos não comportam correntes superficiais.

Combinando (2.6), (2.7) e (2.8), obtemos

$$\dot{E}_{x1-} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \dot{E}_{x1+}$$

ou definindo

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.9)$$

temos

$$\dot{E}_{x1-} = \rho \dot{E}_{x1+}. \quad (2.10)$$

Do mesmo modo

$$\dot{E}_{x2+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dot{E}_{x1+}$$

ou definindo

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.11)$$

temos

$$\dot{E}_{x2+} = \tau \dot{E}_{x1+}. \quad (2.12)$$

Torna-se, então, evidente, como já observamos, que na interface de dois meios dielétricos diferentes as amplitudes dos campos elétricos (e portanto os fluxos de potência) se distribuem desigualmente entre os dois meios.

O coeficiente  $\rho$ , por relacionar os campos refletido e incidente no primeiro meio, é chamado de *coeficiente de reflexão*.

O coeficiente  $\tau$ , por relacionar o campo transmitido no segundo meio com o campo incidente no primeiro meio, é chamado de *coeficiente de transmissão*.

Temos imediatamente, a partir de (2.9) e (2.11)

$$\tau = 1 + \rho. \quad (2.13)$$

Com estes conceitos, o campo elétrico total no primeiro meio, num plano  $z$  genérico, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{E}_x(z) &= \dot{E}_{x1+} e^{-jk_1 z} + \dot{E}_{x1-} e^{jk_1 z} \\ &= \dot{E}_{x1+} (e^{-jk_1 z} + \rho e^{jk_1 z}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde evidentemente  $\dot{E}_{x1+}$  e  $\dot{E}_{x1-}$  correspondem aos valores dos campos elétricos incidente e refletido no primeiro meio em  $z = 0$ .

Do mesmo modo para o campo magnético

$$\begin{aligned} \dot{H}_y(z) &= \frac{\dot{E}_{x1+}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} - \frac{\dot{E}_{x1-}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \\ &= \frac{\dot{E}_{x1+}}{\eta_1} (e^{-jk_1 z} - \rho e^{jk_1 z}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

As expressões (2.14) e (2.15) correspondem a equações de ondas estacionárias e, além disso, nos possibilitam o cálculo da *impedância da onda* (ou seja, a relação entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  totais) num plano  $z < 0$ .

Seja

$$Z(z) = \frac{\dot{E}_x(z)}{\dot{H}_y(z)} = \eta_1 \frac{(e^{-jk_1 z} + \rho e^{jk_1 z})}{(e^{-jk_1 z} - \rho e^{jk_1 z})}.$$

Substituindo aí o valor de  $\rho$  dado por (2.9) e manipulando algebricamente esta equação, obtemos

$$Z(z) = \eta_1 \left[ \frac{\eta_2 (e^{jk_1 z} + e^{-jk_1 z}) - \eta_1 (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z})}{\eta_1 (e^{jk_1 z} + e^{-jk_1 z}) - \eta_2 (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z})} \right]$$

ou ainda

$$Z(z) = \eta_1 \left[ \frac{\eta_2 - j\eta_1 \tan k_1 z}{\eta_1 - j\eta_2 \tan k_1 z} \right]. \quad (2.16)$$

Este resultado pode ser generalizado.

Suponha que num dado problema fosse conhecida, em  $z = 0$ , a impedância da onda, *i.e.*, o quociente entre os campos elétrico e magnético totais

$$Z_L = Z(0) = \frac{\dot{E}_x(0)}{\dot{H}_y(0)}.$$

Ora, no caso que acabamos de examinar, os campos elétrico e magnético totais em  $z = 0$  são

$$\dot{E}_x(0) = \dot{E}_{x2+} \quad \text{e} \quad \dot{H}_y(0) = \dot{H}_{y2+}$$

pois são satisfeitas (2.7) e (2.8). Desta forma

$$Z_L = \frac{\dot{E}_{x2+}}{\dot{H}_{y2+}} = \eta_2.$$

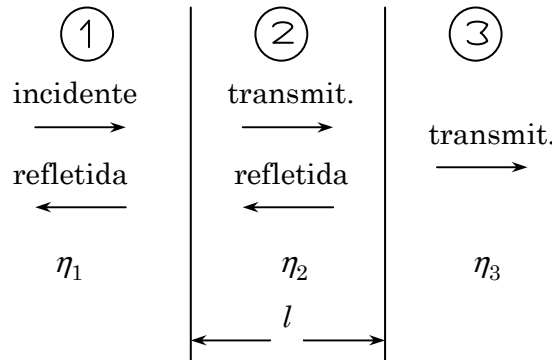
Um raciocínio semelhante ao já feito pode ser seguido mas, formalmente, basta substituírmos  $\eta_2$  por  $Z_L$  em (2.16) para termos

$$Z(z) = \eta_1 \left[ \frac{Z_L - j\eta_1 \tan k_1 z}{\eta_1 - jZ_L \tan k_1 z} \right]. \quad (2.17)$$

que nos dá a impedância da onda num determinado plano  $z$  conhecida a impedância da onda  $Z_L$  no plano  $z = 0$ , com a ressalva evidente que ambos os planos pertençam ao mesmo meio.

## 2.4 REFLEXÕES EM VÁRIOS DIELÉTRICOS

Seja uma fatia de dielétrico 2, com impedância intrínseca  $\eta_2$  e faces paralelas distantes de  $l$ , separando dois meios 1 e 3, com impedâncias intrínsecas  $\eta_1$  e  $\eta_3$ , respectivamente, como ilustra a Figura 2.2.



**Figura 2.2** Ondas em reflexões em vários dielétricos

Uma onda plana, proveniente do meio 1, incide normalmente sobre a interface com o meio 2. Aí, uma parte da energia é transmitida ao meio 2 onde se propaga, através do comprimento  $l$ , incidindo normalmente sobre a interface com o meio 3. Aí, por sua vez, uma parte da energia é transmitida ao meio 3 onde se propaga pelo meio indefinido.

Dependendo das condições de contorno, ou seja, da impedância da onda nas interfaces de 1 e 2 e de 2 e 3, haverá nos meios 1 e 2, respectivamente, ondas refletidas.

Sendo o meio 3 indefinido, não haverá nesse meio onda refletida e, portanto, a relação entre os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , em qualquer ponto, será sempre  $\eta_3$ , inclusive na interface entre os meios 2 e 3.

Tomando  $z = 0$  nesta interface, podemos adaptar (2.17) ao meio 2 e daí calcular a impedância da onda na interface entre 1 e 2, ou seja, em  $z = -l$ .

Lembrando que, no caso, temos  $Z_L = \eta_3$ , resulta

$$Z(-l) = \eta_2 \left[ \frac{\eta_3 - j\eta_2 \tan k_2(-l)}{\eta_2 - j\eta_3 \tan k_2(-l)} \right]. \quad (2.18)$$

Esta é a relação entre os campos **E** e **H** na interface entre 1 e 2, já levada em conta a reflexão na interface entre 2 e 3.

Deslocando  $z = 0$  para a interface entre 1 e 2, aplicamos novamente (2.17) e temos a impedância da onda em qualquer ponto do meio 1.

Como aplicação desta ideia estudemos dois casos particulares de reflexões envolvendo mais de um dielétrico.

### Caso a

Seja  $l = n\lambda_2/2$  ( $n$  inteiro e  $\lambda_2$  referido ao meio 2) e  $\eta_1 = \eta_3$ .

Neste caso

$$k_2(-l) = -k_2 n \lambda_2 / 2 = -n\pi$$

e, então,

$$\tan k_2(-l) = 0.$$

Este valor em (2.18) nos dá

$$Z(-l) = \eta_3.$$

Ora, se  $\eta_3 = \eta_1$ , então na interface de 1 e 2 a relação entre **E** e **H** é  $\eta_1$  e não haverá onda refletida no meio 1, pois a onda incidente encontra no plano da interface uma impedância igual à impedância intrínseca do meio em que se propaga. Assim, o coeficiente de reflexão nesse plano é

$$\rho(-l) = 0.$$

### Caso b

Seja  $l = (2n + 1)\lambda_2/4$  ( $n$  inteiro e  $\lambda_2$  referido ao meio 2) e  $\eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3}$ .

Sendo

$$k_2(-l) = -k_2(2n + 1)\lambda_2/4 = -(2n + 1)\pi/2$$

a expressão (2.18) nos dá, neste caso,

$$Z(-l) = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} = \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_3} = \eta_1.$$

Novamente,  $\rho(-l) = 0$  e não haverá onda refletida no meio 1.





Então, o plano equifase  $\zeta$ , expresso em função de  $x$  e  $z$ , é, como pode ser visto na figura,

$$\zeta = x \sin \theta + z \cos \theta. \quad (2.21)$$

O vetor unitário no sentido de  $\xi$ , em termos dos vetores unitários das coordenadas  $x$  e  $z$ , é

$$\mathbf{u}_\xi = \mathbf{u}_x \cos \theta - \mathbf{u}_z \sin \theta \quad (2.22)$$

ao mesmo tempo que o vetor unitário no sentido de  $\zeta$  é

$$\mathbf{u}_\zeta = \mathbf{u}_x \sin \theta + \mathbf{u}_z \cos \theta. \quad (2.23)$$

Assim, as soluções vistas na Sec. 1.9 podem ser prontamente convertidas ao novo sistema de coordenadas pela substituição da variável correspondente ao sentido de propagação (no caso  $\zeta$ ) pelas novas coordenadas dadas por (2.21) e compor adequadamente as componentes de campo conforme (2.22) e (2.23).

No caso apresentado, o eixo  $y$  foi mantido invariante; esta restrição poderia, também, ser levantada, generalizando ainda mais a transformação. Entretanto, ela já é suficiente para o estudo da incidência oblíqua, que veremos em seguida, e deixamos o caso mais geral por conta do leitor interessado.

## 2.7 INCIDÊNCIA OBLÍQUA SOBRE UM CONDUTOR PERFEITO

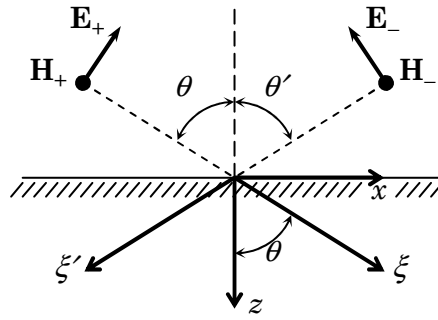
Um problema de reflexão de interesse considerável é aquele em que uma onda incide sobre um plano condutor perfeito, fazendo um ângulo com a normal ao condutor. Definimos, neste caso, o *plano de incidência* por uma normal à superfície sobre a qual a onda incide e pela direção de propagação da onda incidente; isto, para efeito de representação gráfica corresponderá ao plano do papel.

Nosso estudo será dividido em dois casos: polarização com o campo elétrico no plano de incidência e polarização com o campo elétrico normal ao plano de incidência. Os outros casos de incidência oblíqua podem ser considerados como a superposição dos dois anteriores.

Também, só faremos menção explícita aos meios sem perdas. Os casos em que um ou ambos os meios têm perdas podem ser tratados introduzindo os valores complexos apropriados da impedância intrínseca e da constante de propagação mas, nesses casos, a interpretação dos resultados se torna mais complicada.

### Campo elétrico no plano de incidência

A Figura 2.4 ilustra o caso de uma onda incidente obliquamente a um condutor perfeito com o campo elétrico no plano de incidência sendo que a direção de propagação da onda incidente faz um ângulo  $\theta$  com a normal ao condutor.



**Figura 2.4** Incidência oblíqua sobre condutor com campo elétrico no plano de incidência

Uma vez que o fluxo de potência não avança para dentro do condutor ( $\mathbf{E} = 0$  dentro do condutor perfeito), tem origem na superfície uma onda refletida cujo sentido de propagação emerge do plano condutor fazendo um ângulo  $\theta'$  com a normal.

Se admitirmos que o campo elétrico da onda incidente está contido no plano de incidência decorre, das condições de contorno do Eletromagnetismo, que o campo elétrico da onda emergente só pode ter uma componente tangencial ao condutor, a qual deve estar no plano de incidência. Como as componentes normais estão, por definição, no plano de incidência, resulta que tanto os campos elétricos como os raios incidentes e refletidos estarão, então, contidos no plano de incidência.

Sendo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e o sentido de propagação relacionados por um produto vetorial [dado por (1.21) e (1.22)], o campo magnético será, antes e depois da reflexão, normal ao plano de incidência e paralelo à interface condutora. Nos sistemas de coordenadas da Figura 2.4,  $\mathbf{H}$  só tem componente  $y$ .

Em qualquer ponto para  $z < 0$ , o campo total é composto de duas parcelas: uma proporcional a  $e^{-jk\zeta}$  e correspondente à onda incidente, ou seja, aquela que se propaga no sentido positivo de  $\zeta$ ; outra proporcional a  $e^{jk\zeta'}$  e correspondente à onda refletida, ou seja, aquela que se propaga no sentido negativo de  $\zeta'$ .

Assim, parafraseando as expressões (1.86), escrevemos para o campo elétrico

$$\dot{\mathbf{E}}(\zeta, \zeta') = \dot{\mathbf{E}}_+ e^{-jk\zeta} + \dot{\mathbf{E}}_- e^{jk\zeta'} \quad (2.24)$$

válida para  $z < 0$ , onde  $\dot{\mathbf{E}}_+$  e  $\dot{\mathbf{E}}_-$  são vetores de referência estimados na origem.

Aplicamos, agora, (2.21) e (2.22) à expressão acima. A substituição de  $\zeta$  é feita diretamente mas na substituição de  $\zeta'$  devemos observar, comparando as Figuras 2.3 e 2.4, que a rotação de  $\theta'$  é negativa e o sinal deve ser levado em conta no seno do ângulo.

Assim, o campo  $\dot{\mathbf{E}}$  é decomposto nas componentes  $x$  e  $z$ , resultando

$$\begin{aligned}\dot{E}_x(x, z) &= \dot{E}_+ \cos \theta e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} - \dot{E}_- \cos \theta' e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \\ \dot{E}_z(x, z) &= -\dot{E}_+ \sin \theta e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} - \dot{E}_- \sin \theta' e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')}\end{aligned}\quad (2.25)$$

O campo  $\dot{\mathbf{H}}$  só tem componente  $y$  e é dado por

$$\dot{H}_y(x, z) = \frac{\dot{E}_+}{\eta} e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \frac{\dot{E}_-}{\eta} e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \quad (2.26)$$

Como condição de contorno, o condutor perfeito impõe que, para  $z = 0$ ,  $\dot{E}_x$  seja zero para qualquer  $x$ . De (2.25) tem-se, então,

$$\dot{E}_+ \cos \theta e^{-jkx \sin \theta} - \dot{E}_- \cos \theta' e^{-jkx \sin \theta'} = 0$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{\dot{E}_+ \cos \theta}{\dot{E}_- \cos \theta'} = e^{-jkx(\sin \theta' - \sin \theta)}$$

Como o termo da esquerda é constante e o termo da direita é uma função de  $x$ , a identidade para qualquer  $x$  só é possível se o expoente for nulo, ou seja, se os argumentos das ondas incidente e refletida forem iguais. Então,

$$\theta = \theta', \quad (2.27)$$

isto é, o ângulo de reflexão deve ser igual ao ângulo de incidência. Em consequência, também as intensidades das componentes do campo elétrico são iguais,  $\dot{E}_+ = \dot{E}_-$ , ou ainda em decorrência de (1.15)

$$\dot{E}_+ = \dot{E}_- = \eta \dot{H}_{y0+} \quad (2.28)$$

A adoção de  $\eta \dot{H}_{y0+}$ , ou seja da intensidade na origem do campo magnético incidência, como referência, é atraente pelo fato de  $\dot{E}_+$  e  $\dot{E}_-$  não serem componentes cartesianas do campo no sistema  $x, y, z$ , ao passo que a componente  $\dot{H}_y$  é invariante com a rotação de eixos.

Em vista de (2.27) e (2.28), podemos simplificar (2.25) e (2.26) que resultam, para qualquer  $z < 0$ ,

$$\dot{E}_x(x, z) = -j2\eta \dot{H}_{y0+} \cos \theta \sin(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta} \quad (2.29)$$

$$\dot{E}_z(x, z) = -2\eta \dot{H}_{y0+} \sin \theta \cos(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta} \quad (2.30)$$

e

$$\dot{H}_y(x, z) = 2\dot{H}_{y0+} \cos(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta}. \quad (2.31)$$

Observamos, então, que esses campos têm o caráter de onda progressiva na direção  $x$  e de onda estacionária na direção  $z$ , isto é,  $\dot{E}_x$  é zero em qualquer tempo sobre o plano condutor e em planos paralelos ao condutor afastados a distâncias múltiplas de  $d$ , onde

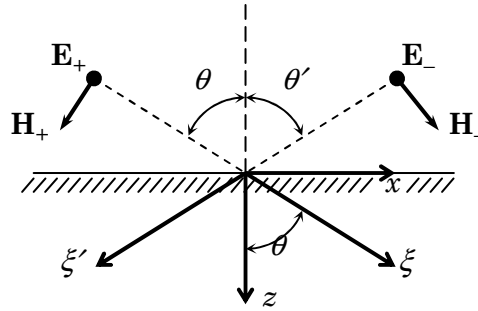
$$d = \frac{\lambda}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2f \sqrt{\mu \epsilon} \cos \theta} \quad (2.32)$$

e, por outro lado, a amplitude de  $\dot{E}_x$  é máxima em planos distantes do condutor de múltiplos ímpares de  $d/2$ ;  $\dot{H}_y$  e  $\dot{E}_z$  são máximos quando  $\dot{E}_x$  é zero e são nulos quando  $\dot{E}_x$  é máximo e, em qualquer ponto, estão defasados de  $90^\circ$  no tempo, em relação a  $E_x$ .

Um fato digno de nota, mostrado com detalhe na Sec. 2.8, é que a distância entre os máximos e mínimos sucessivos aumenta à medida que a incidência se torna mais oblíqua.

### Campo elétrico normal ao plano de incidência

Este problema é dual ao do item anterior e representado na Figura 2.5.



**Figura 2.5** Incidência sobre condutor com campo elétrico normal ao plano de incidência

Com esta polarização, o campo  $\mathbf{E}$  permanece sempre normal ao plano de incidência (plano do papel) e o campo  $\mathbf{H}$ , situado no plano de incidência, assume as direções  $\mathbf{H}_+$  e  $\mathbf{H}_-$ , respectivamente, antes e depois da reflexão. Procedendo de modo análogo ao item anterior, as componentes das duas ondas, no sistema de coordenadas  $x, y, z$ , podem ser escritas

$$\dot{E}_y(x, z) = \dot{E}_+ e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \dot{E}_- e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \quad (2.33)$$

para a componente de  $\mathbf{E}$  e

$$\begin{aligned} \eta \dot{H}_x(x, z) &= -\dot{E}_+ \cos \theta e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \dot{E}_- \cos \theta' e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \\ \eta \dot{H}_z(x, z) &= \dot{E}_+ \sin \theta e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} + \dot{E}_- \sin \theta' e^{jk(-x \sin \theta' + z \cos \theta')} \end{aligned} \quad (2.34)$$

para as componentes de  $\mathbf{H}$ .

A condição de contorno no plano condutor impõe que  $\dot{E}_y$  seja zero em  $z = 0$  para qualquer  $x$  e um raciocínio análogo ao do item anterior nos leva à conclusão

que  $\theta = \theta'$  e  $\dot{E}_+ = \dot{E}_- = \dot{E}_{y0+}$ . Assim, (2.33) e (2.34) se tornam, para qualquer  $z < 0$ ,

$$\dot{E}_y(x, z) = -j2\dot{E}_{y0+} \sin(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta} \quad (2.35)$$

$$\eta \dot{H}_x(x, z) = -2\dot{E}_{y0+} \cos \theta \cos(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta} \quad (2.36)$$

e

$$\eta \dot{H}_z(x, z) = -j2\dot{E}_{y0+} \sin \theta \sin(kz \cos \theta) e^{-jkx \sin \theta}. \quad (2.37)$$

Este conjunto também apresenta o comportamento de uma onda progressiva na direção  $x$  e uma configuração de onda estacionária na direção  $z$ , com os zeros de  $\dot{E}_y$  e  $\dot{H}_z$  e os máximos de  $\dot{H}_x$  situados no plano condutor e em planos à distância  $nd$  do mesmo, sendo  $d$  dado por (2.32) e  $n$  número inteiro.

## 2.8 VELOCIDADE DE FASE PARA A INCIDÊNCIA OBLÍQUA

Como já vimos na Sec. 2.6 e utilizamos na secção anterior, uma onda plana que se propaga com velocidade  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , no sentido positivo de  $z$  (situado no plano  $x, z$  e fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ ), pode ser escrita

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_+ e^{-jk\zeta} = \dot{\mathbf{E}}_+ e^{-jk(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (2.38)$$

Em muitos casos é desejável separar as variações na direção  $x$  e na direção  $z$ . Desta forma definimos duas constantes de fase

$$\beta_x = k \sin \theta \quad (2.39)$$

e

$$\beta_z = k \cos \theta \quad (2.40)$$

para as direções  $x$  e  $z$ , respectivamente.

Em função do tempo, o campo  $\mathbf{E}$  dado por (1.69) seria, então,

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \text{Re}[\sqrt{2} \dot{\mathbf{E}}_+ e^{j(\omega t - \beta_x x - \beta_z z)}]. \quad (2.41)$$

Para que um observador veja uma fase constante, à medida que ele se desloca ao longo do eixo  $x$ , é necessário que  $(\omega t - \beta_x x)$  se mantenha constante (o movimento na direção  $x$  não afeta  $\beta_z z$ ). A velocidade necessária para acompanhar a mesma fase ao longo de  $x$  é chamada *velocidade de fase na direção  $x$*  e definida por

$$v_{fx} = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(\omega t - \beta_x x) = \text{const.}} = \frac{\omega}{\beta_x}$$

ou

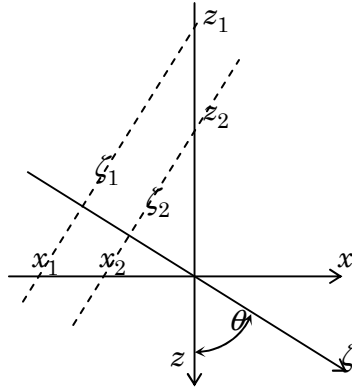
$$v_{fx} = \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \sin \theta} = \frac{v}{\sin \theta} \quad (2.42)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  é a velocidade normal à frente de onda.

Do mesmo modo na direção  $z$

$$v_{fz} = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{v}{\cos \theta}. \quad (2.43)$$

A interpretação destas velocidades pode ser visualizada na Figura 2.6.



**Figura 2.6** Interpretação das velocidades de fase

Tomemos uma onda plana propagando-se ao longo de  $\zeta$ . Num instante  $t_1$ , todos os pontos sobre o plano  $\zeta = \zeta_1$  se apresentam com a mesma fase; isto inclui os pontos  $z = z_1$  sobre o eixo  $z$  e  $x = x_1$  sobre o eixo  $x$ . No instante  $t_2$ , posterior, a onda propagou-se e a referida fase se apresenta em todos os pontos sobre o plano  $\zeta = \zeta_2$ ; isto inclui os pontos  $z = z_2$  sobre o eixo  $z$  e  $x = x_2$  sobre o eixo  $x$ .

A velocidade de fase da onda  $v$  no sentido de propagação é, daí,

$$v = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{t_2 - t_1},$$

a velocidade de fase  $v_{fx}$  na direção de  $x$  é

$$v_{fx} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{\sin \theta}$$

e a velocidade de fase  $v_{fz}$  na direção de  $z$  é

$$v_{fz} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{\cos \theta}.$$

Seja através de (2.42) e (2.43) ou através da Figura 2.5, verificamos que tanto na direção  $x$  como na direção  $z$ , a velocidade de fase é *maior* que aquela medida na direção de propagação. Não há, contudo, violação dos princípios relativísticos pois não há movimento material, uma vez que os pontos  $x_2$  e  $z_2$  *não* correspondem ao deslocamento, com a propagação, dos respectivos pontos  $x_1$  e  $z_1$  mas

simplesmente tratam-se de pontos que têm a mesma fase que os anteriores *sobre os eixos de referência*.

## 2.9 IMPEDÂNCIA DA ONDA PARA A INCIDÊNCIA OBLÍQUA

Um conceito muito útil, no tratamento matemático de incidência oblíqua sobre uma superfície plana de separação entre dois meios diferentes, é aquele de *impedância de onda na direção normal à superfície*, definida como o quociente da componente do campo elétrico pela do campo magnético, tangenciais à superfície.

O motivo desta definição está na existência da continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético nos dois lados da interface. Em consequência, o valor dessa impedância conserva-se nas duas faces da superfície de separação. Assim, se, de algum modo, for conhecido esse quociente como a impedância de entrada (junto à superfície de separação) de um meio para onde se destina a energia propagante, ele será o mesmo como a impedância de carga (junto à superfície de separação) do meio de onde se origina a energia propagante. Trata-se, então, de uma generalização dos exemplos de incidência normal.

Também, para as ondas incidentes e refletidas fazendo ângulo  $\theta$  com a normal, como na Sec. 2.7, podemos definir uma *impedância característica* da onda, referida à direção  $z$ , pelo quociente das parcelas incidentes ou refletidas das componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  em planos transversos a essa direção. Para as ondas polarizadas com o campo elétrico no plano de incidência, obtemos de (2.25) e (2.26)

$$Z_z = \frac{\dot{E}_{x+}}{\dot{H}_{y+}} = -\frac{\dot{E}_{x-}}{\dot{H}_{y-}} = \eta \cos \theta \quad (2.44)$$

onde os índices  $+$  e  $-$  referem-se, respectivamente, à onda incidente e à onda refletida; o sinal do quociente é escolhido, para cada uma das ondas, de modo que o resultado seja positivo. Para as ondas polarizadas com o campo elétrico normal ao plano de incidência, obtemos de (2.33) e (2.34)

$$Z_z = -\frac{\dot{E}_{y+}}{\dot{H}_{x+}} = \frac{\dot{E}_{y-}}{\dot{H}_{x-}} = \eta \sec \theta. \quad (2.45)$$

Observamos, então, que para o primeiro tipo de polarização a impedância característica da onda é sempre menor que  $\eta$ , uma vez que somente uma componente do campo  $\mathbf{E}$  está no plano  $x,y$ . No segundo tipo é a vez de  $\mathbf{H}$  participar com uma sua componente no denominador e  $Z_z$  se torna maior que  $\eta$ .

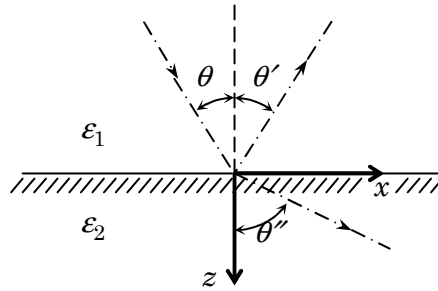
Se aplicarmos o conceito de impedância de onda ao caso estudado na Sec. 2.7, constatamos que o plano condutor impõe um zero à impedância do campo na direção  $z$ , junto a ele, e fica estabelecida uma configuração de onda estacionária na direção  $z$ , cujos zeros estão distanciados de meio comprimento de onda, sendo esse comprimento de onda computado através de (1.94) considerando a velocidade de fase na direção  $z$ .



## 2.10 INCIDÊNCIA OBLÍQUA SOBRE DIELETRICOS

### Lei da reflexão

Seja uma onda plana uniforme que incide sobre o plano de separação de dois dielétricos, de permitividades  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , fazendo um ângulo  $\theta$  com a normal. Haverá, em princípio, uma onda refletida no meio da incidência, fazendo um ângulo  $\theta'$  com a normal, e uma onda transmitida ou refratada, no segundo meio, fazendo um ângulo  $\theta''$  com a normal, como indicado na Figura 2.7.



**Figura 2.7** Incidência oblíqua na interface de dois dielétricos

Com qualquer tipo de polarização, as condições de continuidade aplicadas às componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético, na superfície de separação em  $z = 0$ , devem ser satisfeitas para todos os valores de  $x$ .

Raciocinando do mesmo modo que no caso da incidência da onda sobre um condutor perfeito, isso somente é possível se as ondas incidente, refletida e refratada tiverem, ao mesmo tempo, a mesma fase em relação à direção  $x$  ou, em outros termos, tiverem as mesmas componentes de velocidade na direção  $x$ . A expressão (2.42) nos dá, então,

$$\frac{v_1}{\sin \theta} = \frac{v_1}{\sin \theta'} = \frac{v_2}{\sin \theta''} \quad (2.46)$$

onde  $v_1$  representa a velocidade de fase da onda no meio de permitividade  $\epsilon_1$  e  $v_2$  representa a velocidade de fase da onda no meio de permitividade  $\epsilon_2$ .

O primeiro par das relações (2.46) nos dá

$$\theta = \theta' \quad (2.47)$$

ou seja, que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

### Lei de Snell para a refração

Referindo o primeiro ao último membro (2.46), obtemos a relação entre o ângulo de refração  $\theta''$  e o ângulo de incidência  $\theta'$ , *i.e.*,

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (2.48)$$

conhecida como *lei de Snell para a refração*.

A direção de propagação da onda transmitida é, portanto, diferente daquela da onda incidente, a menos que  $\mu_1 \epsilon_1 = \mu_2 \epsilon_2$ . Praticamente todos os dielétricos de baixas perdas são não-magnéticos e têm permeabilidade igual à do espaço-livre; assim,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Também, se o meio 2 for o espaço-livre, com permissividade  $\epsilon_0$ , e o meio de permissividade  $\epsilon_1$  for um dielétrico não-magnético, o termo da direita em (2.48) torna-se

$$\sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_{r1}} = n_1 \quad (2.49)$$

que é chamado de *índice de refração* do dielétrico.

Em consequência, para dielétricos não-magnéticos a lei de Snell pode ser escrita

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}}. \quad (2.50)$$

O índice de refração é comumente usado para caracterizar as propriedades dos dielétricos nas faixas de frequências infravermelho e visível. Já em micro-ondas e frequências mais baixas é comum expressar as velocidades em termos das permissividades e permeabilidades.

### Reflexão e transmissão com o campo elétrico no plano de incidência

O conceito de impedância de onda, estendido à incidência oblíqua, pode ser usado para calcular as parcelas de onda incidente e refletida.

De fato, escrevendo as condições de continuidade na interface para as componentes totais  $\dot{E}_x$  e  $\dot{H}_y$  dos campos, temos

$$\dot{E}_{x1+} + \dot{E}_{x1-} = \dot{E}_{x2} \quad (2.51)$$

$$\dot{H}_{y1+} + \dot{H}_{y1-} = \dot{H}_{y2} \quad (2.52)$$

onde os índices 1+ e 1- referem-se, respectivamente, às parcelas incidente e refletida da onda no meio 1 e o índice 2 refere-se à onda refratada no meio 2.

Usando o conceito de impedância de onda da Sec. 2.9, aplicado às componentes tangenciais, temos para o meio de permissividade  $\epsilon_1$

$$Z_{z1} = \frac{\dot{E}_{x1+}}{\dot{H}_{y1+}} = -\frac{\dot{E}_{x1-}}{\dot{H}_{y1-}} \quad (2.53)$$

e para o meio de permissividade  $\epsilon_2$

$$Z_L = \frac{\dot{E}_{x2}}{\dot{H}_{y2}}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) em (2.52) obtemos

$$\frac{\dot{E}_{x1+}}{Z_{z1}} - \frac{\dot{E}_{x1-}}{Z_{z1}} = \frac{\dot{E}_{x2}}{Z_L}. \quad (2.55)$$

As equações (2.51) e (2.55) formam, então, um sistema no qual a eliminação de  $\dot{E}_{x2}$  conduz a

$$\rho = \frac{\dot{E}_{x1-}}{\dot{E}_{x1+}} = \frac{Z_L - Z_{z1}}{Z_L + Z_{z1}} \quad (2.56)$$

dito *coeficiente de reflexão*. Já, a eliminação de  $\dot{E}_{x1}$  conduz a

$$\tau = \frac{\dot{E}_{x2}}{\dot{E}_{x1+}} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{z1}} \quad (2.57)$$

dito *coeficiente de transmissão*.

Se não houver onda retornante no meio 2, suposto, por exemplo, o meio indefinido, a impedância de carga  $Z_L$  é exatamente a impedância característica da onda refratada, referida à direção  $z$ , dada por (2.44), *i.e.*,

$$Z_L = \eta_2 \cos \theta'' = \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.58)$$

A impedância característica da onda no meio 1, referida à direção  $z$ , é dada por (2.44), *i.e.*,

$$Z_{z1} = \eta_1 \cos \theta. \quad (2.59)$$

Fazendo uso das propriedades básicas das ondas planas, podemos formalizar os campos totais na região 1 como a soma das ondas incidente e refletida e expressando esta última em função da primeira através de (2.56).

Usando  $\dot{H}_{y1+}$ , ou seja, a intensidade na origem do campo magnético incidente, como referência, obtemos

$$\dot{H}_y(x, z) = \dot{H}_{y1+} e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} - \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.60)$$

$$\dot{E}_x(x, z) = \eta_1 \dot{H}_{y1+} \cos \theta e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.61)$$

$$\dot{E}_z(x, z) = -\eta_1 \dot{H}_{y1+} \sin \theta e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} - \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.62)$$

onde  $\beta_x$  e  $\beta_z$  são dados, respectivamente, por (2.39) e (2.40).

Mais uma vez temos um campo que se comporta como uma onda progressiva na direção  $x$  e como uma onda estacionária na direção  $z$  mas, neste caso, os mínimos não correspondem, em geral, a zero.

Neste caso, o conceito de taxa de onda estacionária (*TOE*), expresso por (2.20), pode ser usado.

A onda refratada, no segundo meio, tem os campos expressos por

$$\dot{H}_y(x, z) = \dot{H}_{y2} e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.63)$$

$$\dot{E}_x(x, z) = \eta_2 \dot{H}_{y2} \cos \theta'' e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.64)$$

$$\dot{E}_z(x, z) = -\eta_2 \dot{H}_{y2} \sin \theta'' e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.65)$$

onde

$$\beta_x'' = k_2 \sin \theta'' \quad \text{e} \quad \beta_z'' = k_2 \cos \theta'' \quad (2.66)$$

e

$$\dot{H}_{y2} = \tau \frac{Z_{z1}}{Z_L} \dot{H}_{y1+}. \quad (2.67)$$

### Reflexão e transmissão com o campo elétrico normal ao plano de incidência

Pode ser demonstrado que o raciocínio que conduziu a (2.56) e (2.57) também se aplica a este tipo de polarização. *Mutatis mutandis*, obtemos

$$\rho = \frac{\dot{E}_{y1-}}{\dot{E}_{y1+}} = \frac{Z_L - Z_{z1}}{Z_L + Z_{z1}} \quad (2.68)$$

e

$$\tau = \frac{\dot{E}_{y2}}{\dot{E}_{y1+}} = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{z1}} \quad (2.68)$$

onde

$$Z_L = \eta_2 \sec \theta'' = \frac{\eta_2}{\sqrt{1 - (v_2/v_1)^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.69)$$

A impedância característica da onda no meio 1, referida à direção  $z$ , é dada por (2.44), i.e.,

$$Z_{z1} = \eta_1 \sec \theta. \quad (2.70)$$

Usando  $\dot{E}_{y1+}$ , ou seja, a intensidade na origem do campo elétrico incidente, como referência, obtemos as seguintes componentes do campo total

$$\dot{E}_y(x, z) = \dot{E}_{y1+} e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.72)$$

$$\eta_1 \dot{H}_x(x, z) = -\dot{E}_{y1+} \cos \theta e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} - \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.73)$$

$$\eta_1 \dot{H}_z(x, z) = \dot{E}_{y1+} \sin \theta e^{-j\beta_x x} [e^{-j\beta_z z} + \rho e^{j\beta_z z}] \quad (2.74)$$

onde  $\beta_x$  e  $\beta_z$  são dados por (2.39) e (2.40), respectivamente.

Já para a onda refratada, no segundo meio, temos os campos expressos por

$$\dot{E}_y(x, z) = \dot{E}_{y2} e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.75)$$

$$\eta_2 \dot{H}_x(x, z) = -\dot{E}_{y2} \cos \theta'' e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.76)$$

$$\eta_2 \dot{H}_z(x, z) = \dot{E}_{y2} \sin \theta'' e^{-j(\beta_x''x + \beta_z''z)} \quad (2.77)$$

onde  $\beta_x''$  e  $\beta_z''$  são dados por (2.66) e  $\dot{E}_{y2}$  é dado por (2.69).

### Exemplo 2.1

Uma onda plana uniforme propagando-se no vácuo, com o campo elétrico dado por

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \sqrt{2} (6\mathbf{u}_x + 9,6\mathbf{u}_y - 8\mathbf{u}_z) \cos(45 \times 10^8 t - 12x - 9z),$$

emerge da superfície de um dielétrico não-magnético, com permissividade relativa  $\epsilon_{r1} = 16/9$ , situada no plano  $z = 0$ . Determine o campo total dentro do dielétrico.

*Solução:*

Verificamos, sem dificuldade, que o campo elétrico pode ser escrito

$$\mathbf{E}(t, x, z) = \text{Re} \left[ \sqrt{2} (6\mathbf{u}_x + 9,6\mathbf{u}_y - 8\mathbf{u}_z) e^{j(45 \times 10^8 t - 12x - 9z)} \right]$$

e, em consequência de (2.41), identificamos o vetor complexo

$$\dot{\mathbf{E}}(x, z) = (6\mathbf{u}_x + 9,6\mathbf{u}_y - 8\mathbf{u}_z) e^{-j(12x + 9z)}$$

de onde extraímos

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x2} &= 6, & \dot{E}_{y2} &= 9,6, & \dot{E}_{z2} &= -8, \\ \omega &= 45 \times 10^8, & \beta_x'' &= 12, & \beta_z'' &= 9. \end{aligned}$$

Trata-se, portanto, de uma onda refratada pela interface cuja frente é normal ao plano de incidência (Figura 2.7) mas cujo campo elétrico tem componentes normal a e contidas no plano de incidência.

Do quociente das duas definições apresentadas em (2.66), respectivamente  $\beta_x'' = k_2 \sin \theta''$  e  $\beta_z'' = k_2 \cos \theta''$ , obtemos

$$\tan \theta'' = \beta_x'' / \beta_z''$$

que, com os dados do problema, dá

$$\tan \theta'' = 12/9 \quad \text{donde} \quad \theta'' = 53,13^\circ$$

que é o ângulo sob o qual a onda emerge da superfície do dielétrico. Daí obtemos

$$\sin \theta'' = 0,8 \quad \text{e} \quad \cos \theta'' = 0,6.$$

A lei de Snell aplicada no caso do dielétrico não-magnético [expressão (2.50)],

onde  $v_2 = c$ , velocidade da luz no vácuo, e  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ , dá

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{c}{v_1} = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$$

donde obtemos

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta''}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{0,8}{\sqrt{16/9}} = 0,6$$

e

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{16/9}} = \frac{9}{4} \times 10^8 \text{ m/s}$$

Em consequência, a onda incide, dentro do dielétrico, na superfície de separação e faz com a normal o ângulo

$$\theta = \sin^{-1} 0,6 = 36,87^\circ$$

e, daí,

$$\cos \theta = 0,8.$$

As constantes de fase no dielétrico podem ser calculadas através de (2.42) e (2.43), i.e.,

$$\beta_x = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta = \frac{45 \times 10^8}{(9/4) \times 10^8} \times 0,6 = 12$$

e

$$\beta_z = \frac{\omega}{v_1} \cos \theta = \frac{45 \times 10^8}{(9/4) \times 10^8} \times 0,8 = 16.$$

A impedância intrínseca do dielétrico também pode ser calculada através de (1.16) que dá

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \eta_0 = \frac{3}{4} \times 120\pi$$

donde

$$\eta_1 = 90\pi.$$

Subdividimos, agora, o problema em duas partes: uma na qual consideramos as componentes do campo elétrico no plano de incidência e outra na qual consideramos a componente do campo elétrico normal ao plano de incidência.

Para **E** no plano de incidência temos os coeficientes de reflexão e de transmissão dados, respectivamente, por (2.56) e (2.57), i.e.,

$$\rho = \frac{Z_L - Z_{z1}}{Z_L + Z_{z1}} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{z1}}$$

onde

$$Z_L = \eta_2 \cos \theta'' = 120\pi \times 0,6 = 72\pi$$

e

$$Z_{z1} = \eta_1 \cos \theta = 90\pi \times 0,8 = 72\pi.$$

Daí,

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \tau = 1.$$

Neste caso, toda a onda polarizada no plano de incidência é transmitida ao outro meio. [O ângulo de incidência, neste caso, é chamado de *ângulo de Brewster* e será estudado em detalhes na Sec. 2.11.]

Os campos parciais são, então, dados através de (2.60), (2.61) e (2.62). onde a referência  $\dot{H}_{y1+}$  pode ser obtida da amplitude  $\dot{E}_{x1+}$  através de (2.53) e (2.59) e fazendo uso de (2.57), i.e.,

$$\dot{H}_{y1+} = \frac{\dot{E}_{x1+}}{\eta_1 \cos \theta} = \frac{\dot{E}_{x2}}{\tau \eta_1 \cos \theta}$$

o que dá

$$\dot{H}_{y1+} = \frac{6}{90 \times 0,8} = \frac{7,5}{90}$$

Assim,

$$\dot{H}_{y1}(x, z) = \frac{7,5}{90} e^{-j(12x+16z)}$$

$$\dot{E}_{x1}(x, z) = 6 e^{-j(12x+16z)}$$

$$\dot{E}_{z1}(x, z) = -4,5 e^{-j(12x+16z)}$$

Para **E normal ao plano de incidência** temos os coeficientes de reflexão e de transmissão dados, respectivamente, por (2.68) e (2.69), i.e.,

$$\rho = \frac{Z_L - Z_{z1}}{Z_L + Z_{z1}} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_{z1}}$$

onde, agora,

$$Z_L = \frac{\eta_2}{\cos \theta''} = \frac{120\pi}{0,6} = 200\pi$$

e

$$Z_{z1} = \frac{\eta_1}{\cos \theta} = \frac{90\pi}{0,8} = 112,5\pi.$$

Daí,

$$\rho = \frac{200\pi - 112,5\pi}{200\pi + 112,5\pi} = 0,28$$

e

$$\tau = \frac{2 \times 200\pi}{200\pi + 112,5\pi} = 1,28.$$

Os campos parciais são, então, dados através de (2.72), (2.73) e (2.74), onde a referência  $\dot{E}_{y1+}$  é dada por (2.69), i.e.,

$$\dot{E}_{y1+} = \frac{\dot{E}_{y2}}{\tau} = \frac{9,6}{1,28} = 7,5.$$

Assim,

$$E_{y1}(x, z) = 7,5 e^{-j12x} [e^{-j16x} + 0,28 e^{j16z}]$$

$$\dot{H}_{x1}(x, z) = -\frac{6}{90} e^{-j12x} [e^{-j16x} - 0,28 e^{j16z}]$$

Combinando os campos parciais para os dois tipos de polarização, obtemos os campos totais dentro do dielétrico

$$\dot{\mathbf{E}}_1(x, z) = (6\mathbf{u}_x + 7,5\mathbf{u}_y - 4,5\mathbf{u}_z) e^{-j(12x+16z)} + 2,1\mathbf{u}_y e^{-j(12x-16z)}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_1(x, z) = \frac{1}{90\pi} \left[ (-6\mathbf{u}_x + 7,5\mathbf{u}_y + 4,5\mathbf{u}_z) e^{-j(12x+16z)} + (1,68\mathbf{u}_x + 1,26\mathbf{u}_z) e^{-j(12x-16z)} \right]$$

e no domínio do tempo temos, finalmente,

$$\mathbf{E}_1(t, x, z) = \sqrt{2} (6\mathbf{u}_x + 7,5\mathbf{u}_y - 4,5\mathbf{u}_z) \cos(45 \times 10^8 t - 12x - 16z) +$$

$$+ \sqrt{2} 2,1\mathbf{u}_y \cos(45 \times 10^8 t - 12x + 16z)$$

e

$$\mathbf{H}_1(t, x, z) = \frac{\sqrt{2}}{90\pi} (-6\mathbf{u}_x + 7,5\mathbf{u}_y + 4,5\mathbf{u}_z) \cos(45 \times 10^8 t - 12x - 16z) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{90\pi} (1,68\mathbf{u}_x + 1,26\mathbf{u}_z) \cos(45 \times 10^8 t - 12x + 16z)$$

## 2.11 ÂNGULO DE POLARIZAÇÃO OU DE BREWSTER

O Exemplo 2.1, mostrado na secção anterior, mostrou, entre outras coisas, que para uma das polarizações não houve onda refletida, transmitindo-se toda a energia ao outro meio. Poder-se-ia perguntar quais as condições que devem ser observadas, quando uma onda plana uniforme incide obliquamente sobre a interface de dielétricos, para que tal fenômeno ocorra. A resposta está, obviamente, contida na combinação das impedâncias entre os dois meios, *i.e.*,  $Z_L = Z_{z1}$ .

Para uma onda com o campo elétrico no plano de incidência,  $Z_L$  e  $Z_{z1}$  são dados, respectivamente, por (2.58) e (2.59). Assim, num ângulo  $\theta = \theta_p$  que ocorre a igualdade de ambos, escrevemos

$$\eta_2 \sqrt{1 - (v_2/v_1)^2 \sin^2 \theta_p} = \eta_1 \cos \theta_p.$$

Substituindo  $\eta$  em  $v$  em função de  $\mu$  e  $\epsilon$  e rearranjando vem

$$\theta_p = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2/\epsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\epsilon_2/\epsilon_1 - \epsilon_1/\epsilon_2}}. \quad (2.78)$$

Não é para quaisquer combinações de  $\mu$ 's e  $\epsilon$ 's que esta expressão tem solução. Basta ver, por exemplo, que para  $\mu_2 \neq \mu_1$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  o radical tende a infinito e,



evidentemente, não há ângulo cujo seno seja infinito. Por outro lado se os dielétricos forem não-magnéticos, *i.e.*,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , resulta

$$\theta_p = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (2.79)$$

Do mesmo modo, podemos raciocinar com uma onda cujo campo elétrico seja normal ao plano de incidência. Neste caso, o ângulo em que ocorre a transmissão total é dado por

$$\theta_p = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2/\epsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \mu_2/\mu_1}}. \quad (2.80)$$

Verificamos, então, que se os dielétricos forem não-magnéticos, este caso não tem solução.

O ângulo em que ocorre a transmissão total é chamado de *ângulo de Brewster* ou *ângulo de polarização*. Este fenômeno é utilizado, por exemplo, nos lasers a gás, onde uma janela de dielétrico disposta a um ângulo de Brewster permite oscilação em somente um tipo de polarização, já que no outro a transmissão, através da janela, é atenuada.

## 2.12 REFLEXÃO TOTAL

Outro caso particular de incidência oblíqua é aquele em que ocorre a reflexão total. Isto se dá quando o módulo do coeficiente de reflexão é unitário ( $|\rho| = 1$ ), ou seja, quando a impedância de carga  $Z_L$  for imaginário puro (zero e infinito incluídos), isto é  $Z_L = jX_L$ , pois

$$|\rho| = \left| \frac{jX_L - Z_{z1}}{jX_L + Z_{z1}} \right| = \frac{\sqrt{X_L^2 + |Z_{z1}|^2}}{\sqrt{X_L^2 + |Z_{z1}|^2}} = 1$$

Sendo  $Z_L$  dado por (2.58) e (2.69), conforme esteja  $\mathbf{E}$  no plano de incidência ou seja normal a ele, respectivamente, podemos sintetizar as duas expressões na forma

$$Z_L = \eta_2 \left[ 1 - (v_2/v_1)^2 \sin^2 \theta \right]^{\pm 1/2}.$$

Se o meio for sem perdas, *i.e.*, se  $\eta_2$  for real, decorre que  $Z_L$  será imaginário se o argumento da potência for negativo, *i.e.*, se

$$\sin \theta > v_1/v_2.$$

O ângulo crítico  $\theta = \theta_c$  ocorre na transição, ou seja,

$$\sin \theta_c = v_1/v_2. \quad (2.81)$$

Para os dielétricos não-magnéticos essa expressão se reduz a

$$\sin \theta_c = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}. \quad (2.82)$$

Observa-se, então, que só existe solução para o ângulo, neste caso, se  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , ou seja. quando uma onda propagando-se num meio opticamente denso incide obliquamente na interface com um meio opticamente menos denso. Pela lei de Snell, (2.50), verificamos que o ângulo de refração é  $\pi/2$  para  $\theta = \theta_c$  e é imaginário para ângulos de incidência maiores que  $\theta_c$ .

No caso que o ângulo de incidência for maior que  $\theta_c$  não existe transferência de energia ao segundo meio. No entanto, os campos na segunda região assumem valores finitos pois as condições de contorno precisam ser satisfeitas; eles, contudo, decrescem exponencialmente com a distância à interface, pois  $\beta_z$ , tornando-se imaginário, transforma o expoente em número real.

O fenômeno da reflexão total é muito importante nas frequências ópticas, pois permite a reflexão com menos perdas que com espelhos condutores.

## FONTES DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Cap. 6.

HARRINGTON, R F.. **Time-harmonic Electromagnetic Fields**. New York: McGraw-Hill, 1961. Cap. 2.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**P2.1** Uma onda eletromagnética senoidal plana, com densidade de potência  $1 \text{ W/m}^2$ , incide normalmente sobre a superfície de um dielétrico que tem permeabilidade relativa unitária e permitividade quatro vezes a do espaço-livre. Ache o módulo do vetor  $\mathbf{H}$  no dielétrico.

**P2.2** Considere dois meios 1 e 2 contíguos em  $z = 0$  tais que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , e  $\sigma_2 = 2\sigma_1$ . Imagine, então, uma onda plana que se propaga ao longo do eixo  $z$ , incidindo normalmente à interface plana de ambos os meios, conforme ilustra a Figura 2.8, com  $\sigma_1/\omega\varepsilon_1 = \sqrt{3}$  sendo  $\omega = 3 \times 10^8 \text{ rad/s}$ . Sabendo que o campo elétrico (complexo) da onda incidente em  $z = 0$  é  $100 \angle 0^\circ \text{ } \mu\text{V/m}$ , determine o campo  $\vec{E}$ , tanto amplitude como em fase em: (a)  $z = -1 \text{ m}$ ; (b)  $z = 1 \text{ m}$ .

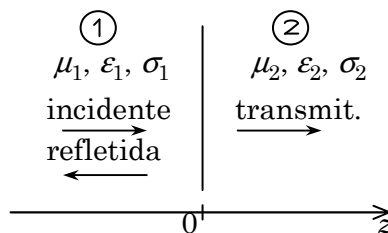


Figura 2.8 Problema P2.2

- P2.3** Uma fatia de dielétrico de espessura  $l$  e constantes  $\epsilon'$  e  $\epsilon''$  está encostada num plano condutor perfeito em  $z = l$ .
- (a) Determine a expressão da impedância do campo na face da frente ( $z = 0$ ).
  - (b) Calcule este valor para  $\epsilon' = 4\epsilon_0$ ,  $\epsilon'' = 0,01\epsilon_0$ ,  $f = 3 \times 10^9$  Hz e  $l = 1,25$  cm.
- P2.4** Uma onda eletromagnética senoidal plana, movendo-se no sentido positivo do eixo  $z$ , é refletida por um plano condutor perfeito que se move no sentido negativo de  $z$  com velocidade  $v$ .
- (a) Ache a diferença de frequência entre a onda refletida e a incidente.
  - (b) Calcule numericamente para a frequência 10 GHz e a velocidade  $v = 100$  km/h.
- P2.5** Para uma onda plana estacionária:
- (a) prove que o vetor de Poynting alterna de sentido;
  - (b) determine a densidade de energia armazenada.
- P2.6** Para uma incidência oblíqua de uma onda senoidal sobre a interface plana de dois dielétricos, com o campo elétrico no plano de incidência:
- (a) calcule o vetor de Poynting médio nas duas regiões;
  - (b) mostre o balanço de potência.
- P2.7** Calcule os dois ângulos de polarização (interno e externo) e o ângulo crítico para uma interface plana entre o ar e
- (a) a água com  $\epsilon_r = 81$ ;
  - (b) um vidro de alta densidade com  $\epsilon_r = 9$ ;
  - (c) o poliestireno com  $\epsilon_r = 2,56$ .
- P2.8** Para materiais com  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  mas  $\mu_1 \neq \mu_2$ , deduza as condições para que a incidência oblíqua de uma onda plana na interface plana dos dois materiais não tenha reflexão.

### 3. NOÇÕES SOBRE GUIAS DE ONDAS

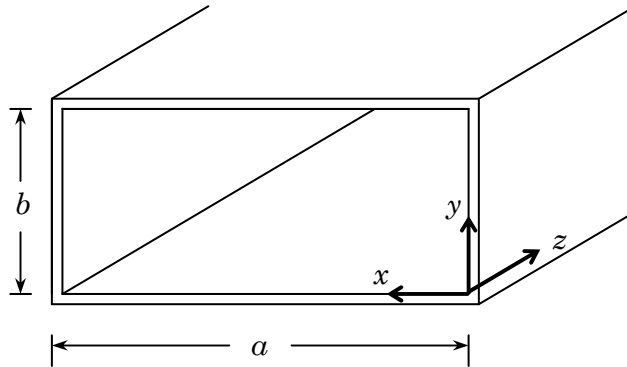
Neste capítulo são introduzidos conceitos e aplicações relativos a guias de ondas retangulares. São investigados vários modos de propagação e em particular o modo  $TE_{10}$  do qual são apresentadas várias considerações e aplicações.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Veremos que, com a colocação de limites apropriados a uma dada região do espaço, é possível confinarmos os campos a esta região e *guiarmos* o percurso de uma onda propagante dentro dessa região. O contorno dentro do qual estão confinados os campos que se propagam é chamado de **guia de ondas** que é o objeto de estudo deste capítulo.

Restringiremos nosso estudo a guias de ondas ocas de *forma retangular*, como aquele ilustrado na Figura 3.1. Supomos que as paredes do guia sejam perfeitamente condutoras e que o fluxo de potência se dê na direção  $z$ .

Existem outras formas de guias muito utilizadas, como as de seção circular, mas a análise das mesmas está além do escopo deste texto.



**Figura 3.1** Guia de ondas retangular

Assim como fizemos no Capítulo 1, vamos trabalhar com os vetores complexos, ou seja, representar um vetor  $\mathbf{E}$ , que varia com a frequência angular  $\omega$ , na forma de (1.69), *i.e.*,

$$\mathbf{E} = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}]$$

onde

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{u}_x + \dot{E}_y \mathbf{u}_y + \dot{E}_z \mathbf{u}_z$$

sendo  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$  e  $\dot{E}_z$  fasores e  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$  vetores unitários no sentido dos eixos coordenados.

De nossa experiência com ondas sabemos que  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$  e  $\dot{E}_z$  sofrem atenuação e variação de fase no sentido de propagação.

Assim, por exemplo, a componente  $\dot{E}_x$  de uma onda propagante no sentido positivo de  $z$  é representada na forma

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0+} e^{-\gamma z}, \quad (3.1)$$

sendo

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.2)$$

a *constante de propagação*. Daí, sendo  $\alpha$  positivo, a exponencial em  $-\alpha z$  denota a atenuação (em nepers) e a exponencial em  $-j\beta z$  denota a variação de fase (em radianos) no percurso.

Já, para a onda propagante no sentido negativo de  $z$ , trocamos  $-\gamma$  por  $\gamma$  na exponencial e representamos a componente  $\dot{E}_x$  por

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0-} e^{\gamma z}, \quad (3.3)$$

com a exponencial em  $\alpha z$  denotando a atenuação e a exponencial em  $j\beta z$  denotando a variação de fase.

A inclusão da propagação nos dois sentidos de  $z$  leva à forma geral do campo

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0+} e^{-\gamma z} + \dot{E}_{x0-} e^{\gamma z}$$

e o mesmo tipo de raciocínio se aplica a todas as outras componentes.

### 3.2 EQUAÇÕES BÁSICAS

Consideremos, inicialmente, as equações de Maxwell para os vetores complexos, aplicadas às ondas que se propagam no sentido positivo de  $z$ .

Seja a equação

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$

obtida substituindo a relação constitutiva  $\dot{\mathbf{B}} = \mu\dot{\mathbf{H}}$ , dada por (1.79), na equação (1.75).

Neste caso, com os campos na forma de (3.1), as derivadas em relação a  $z$  são substituídas pelo fator  $-\gamma$ . Como a exponencial  $e^{-\gamma z}$  aparece em todos os termos, podemos omiti-la nas equações intermediárias (assim como já é feito com  $e^{-j\omega t}$ ) e restaurá-la no fim. Com isso o formalismo fica mais simples.

Assim, resultam as equações escalares

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \gamma \dot{E}_y = -j\omega\mu \dot{H}_x \quad (3.4)$$

$$-\gamma \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu \dot{H}_y \quad (3.5)$$

e

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu \dot{H}_z. \quad (3.6)$$

Do mesmo modo, da equação

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\mu \dot{\mathbf{E}}$$

obtida substituindo a relação constitutiva  $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon \dot{\mathbf{E}}$ , dada por (1.79), na equação (1.76), num meio de condutividade nula, resultam as equações escalares

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \gamma \dot{H}_y = j\omega\epsilon \dot{E}_x \quad (3.7)$$

$$-\gamma \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega\epsilon \dot{E}_y \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\epsilon \dot{E}_z \quad (3.9)$$

Das seis últimas equações é possível expressarmos, através de equações diferenciais, qualquer componente de campo em função das componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  numa direção específica.

O caso mais simples e de maior interesse é aquele em que expressamos  $\dot{E}_x$ ,  $\dot{E}_y$ ,  $\dot{H}_x$  ou  $\dot{H}_y$  em termos de  $\dot{E}_z$  e  $\dot{H}_z$ . Por exemplo, achamos  $\dot{H}_x$  eliminando  $\dot{E}_y$  em (3.4) e (3.8) e procedemos de modo semelhante para as outras componentes, resultando

$$\dot{H}_x = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right] \quad (3.10)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right] \quad (3.11)$$

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left[ \gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right] \quad (3.12)$$

e

$$\dot{E}_y = \frac{1}{\gamma^2 + k^2} \left[ -\gamma \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right] \quad (3.13)$$

onde  $k$  é o *número de onda* dado por (1.84), i.e.,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon.$$

Conforme ressaltado no início da seção, as equações de (3.10) a (3.13) representam as componentes dos campos de uma onda que se propaga no sentido positivo de  $z$ .

Para o estudo da propagação no sentido negativo de  $z$ , os campos são do tipo de (3.3). Isto equivale a trocar a exponencial  $e^{-\gamma z}$  por  $e^{\gamma z}$  nas equações de Maxwell e, procedendo do mesmo modo que o acima, chegamos a equações semelhantes às equações de (3.10) a (3.13), com a única diferença de ser  $\gamma$  substituído por  $-\gamma$ .

A importante conclusão que chegamos aqui é que *basta calcularmos  $\dot{E}_z$  e  $\dot{H}_z$  para obtermos a solução para toda a onda.*

O passo seguinte, então, é procurarmos as equações que regem  $\dot{E}_z$  e  $\dot{H}_z$  e resolvê-las com as condições de contorno apropriadas.

Como já vimos no Capítulo 1, nas regiões livres de fontes, os campos devem satisfazer a equações de onda do tipo

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.14)$$

onde a operação laplaciana  $\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}$  pode ser escrita

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} \quad (3.15)$$

e da mesma forma para o campo  $\dot{\mathbf{H}}$ .

Observamos que, aqui também, a derivada em relação a  $z$  pode ser substituída por  $-\gamma$  para a onda no sentido positivo e por  $\gamma$  para a onda no sentido negativo de  $z$ . Qualquer que seja o sentido, porém, o operador da derivada-segunda em relação a  $z$  é substituída por  $\gamma^2$ , i.e.,

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = \gamma^2 \dot{\mathbf{E}}.$$

As derivadas em relação a  $x$  e  $y$  podem ser representadas pelo operador laplaciano nesse plano, também chamado de *plano transversal*. Daí, representamos (3.15) nas formas

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \nabla_{xy}^2 \dot{\mathbf{E}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} = \nabla_t^2 \dot{\mathbf{E}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} \quad (3.16)$$

sendo as notações  $\nabla_{xy}^2$  e  $\nabla_t^2$  equivalentes no caso.

Em consequência, as equações de onda (3.14) serão escritas

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\mathbf{E}} = -(\gamma^2 + k^2) \dot{\mathbf{E}} \quad (3.17)$$

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\mathbf{H}} = -(\gamma^2 + k^2) \dot{\mathbf{H}} \quad (3.18)$$

ou

$$\nabla_t^2 \dot{\mathbf{E}} = -(\gamma^2 + k^2) \dot{\mathbf{E}} \quad (3.17a)$$

$$\nabla_t^2 \dot{\mathbf{H}} = -(\gamma^2 + k^2) \dot{\mathbf{H}}. \quad (3.18a)$$

As equações vetoriais (3.17) e (3.18) se desdobram, cada uma, em três outras equações escalares, das quais só nos é importante, essencialmente, as equações em  $\dot{E}_z$  e  $\dot{H}_z$ , i.e.,

$$\nabla_t^2 \dot{E}_z = -k_c^2 \dot{E}_z \quad (3.19)$$

$$\nabla_t^2 \dot{H}_z = -k_c^2 \dot{H}_z, \quad (3.20)$$

onde

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon, \quad (3.21)$$

pois, uma vez obtidos  $\dot{E}_z$  e  $\dot{H}_z$ , calculamos, através de (3.10) a (3.13) as outras componentes.

### 3.3 TIPOS DE ONDA; CONDIÇÕES DE CONTORNO

As equações (3.17) e (3.18) podem ser resolvidas com condições de contorno apropriadas resultando em:

- 1 - ondas *transverso-eletromagnéticas* (*TEM*) nas quais não existem componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  na direção de propagação;
- 2 - ondas *transverso-elétricas* (*TE*) ou ondas *H* nas quais, na direção de propagação, só existem componentes de  $\mathbf{H}$ ;
- 3 - ondas *transverso-magnéticas* (*TM*) ou ondas *E* nas quais, na direção de propagação, só existem componentes de  $\mathbf{E}$ .

#### Ondas *TEM*

As equações (3.10) a (3.13) mostram que se a onda for *TEM*, i.e.  $\dot{E}_z = 0$  e  $\dot{H}_z = 0$ , então devemos ter também,

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 = 0, \quad (3.22)$$

para que as componentes transversas de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  possam existir.

As equações (3.17) e (3.18) se transformam, então, em

$$\nabla_{xy}^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{xy}^2 \dot{\mathbf{H}} = 0$$

que são exatamente da mesma forma que a equação de Laplace bi-dimensional para campos estáticos.

Este problema já foi estudado com detalhes no Capítulo 1 e corresponde ao caso das ondas planas. Estas ondas podem propagar-se ao longo de um sistema com dois ou mais condutores, ou por fora de um condutor, mas não podem propagar-se dentro de um guia oco, pois uma configuração estática de campos só pode ser nula dentro de um condutor fechado.



Em vista disto, vamos concentrar nossa atenção nos problemas das ondas *TE* e *TM*.

### Ondas *TM*

Ao considerarmos as ondas sem componentes do campo magnético na direção de propagação, temos como ponto essencial a resolução de (3.19) em relação a  $\dot{E}_z$ , pois juntamente com a premissa que  $\dot{H}_z = 0$ , podemos calcular todas as outras componentes através de (3.10) a (3.13).

Precisamos, então, especificar condições de contorno para  $\dot{E}_z$ , o que é feito do seguinte modo. O primeiro passo num problema prático de guia de ondas é supor que todos os contornos do guia sejam condutores perfeitos.

Então, como condição de contorno para ondas *TM*, devemos ter  $\dot{E}_z$  igual a zero no contorno do guia (pois  $\dot{E}_z$  é tangencial aos condutores do guia), *i.e.*,

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{no contorno.} \quad (3.23)$$

Esta condição é necessária e também suficiente pois engloba o fato das componentes transversas (no plano  $x,y$ ) do campo elétrico serem normais ao condutor.

De fato, podemos ver isto fazendo  $\dot{H}_z = 0$  em (3.12) e (3.13). Com  $k_c$ , definido por (3.21), escrevemos

$$\dot{E}_x = \mp \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dot{E}_y = \mp \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \quad (3.24)$$

onde o sinal  $(-)$  refere-se à onda propagante no sentido positivo e o sinal  $(+)$  àquela propagante no sentido negativo de  $z$ . Estas duas relações podem ser resumidas em forma vetorial

$$\dot{\mathbf{E}}_t = \mp \frac{\gamma}{\gamma^2 + k^2} \nabla_t \dot{E}_z \quad (3.25)$$

onde  $\dot{\mathbf{E}}_t$  é a parte transversa do vetor no campo elétrico e  $\nabla_t$  representa a parte transversa do gradiente.

Pela natureza do gradiente, o vetor elétrico transversal  $\dot{\mathbf{E}}_t$  é normal a qualquer linha de  $\dot{E}_z$  constante. Como o contorno tem  $\dot{E}_z$  constante igual a zero,  $\dot{\mathbf{E}}_t$  é normal ao condutor no contorno nas ondas *TM*.

### Ondas *TE*

Ao considerarmos as ondas sem componentes do campo elétrico na direção de propagação, temos como ponto essencial a resolução de (3.20) em relação a  $\dot{H}_z$ ,

pois juntamente com a premissa que  $\dot{E}_z = 0$  podemos calcular todas as outras componentes através de (3.10) a (3.13).

As condições de contorno para  $\dot{H}_z$  são especificadas pelo seguinte raciocínio. As equações (3.10) e (3.11), reescritas com  $\dot{E}_z = 0$  e com  $k_c$  definido por (3.21), assumem a forma

$$\dot{H}_x = \mp \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dot{H}_y = \mp \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \quad (3.26)$$

Estas duas relações podem ser resumidas em forma vetorial dando

$$\dot{\mathbf{H}}_t = \mp \frac{\gamma}{\gamma^2 + k^2} \nabla_t \dot{H}_z \quad (3.27)$$

onde o índice  $t$  representa a componente do vetor no plano transversal (plano  $x,y$ ).

Como o vetor do campo elétrico não pode ser normal às paredes condutoras perfeitas do guia, porque dentro do condutor perfeito os campos são nulos e eventuais correntes superficiais no condutor somente podem compensar diferenças nas componentes tangenciais de  $\mathbf{H}$ , então  $\dot{\mathbf{H}}_t$  é tangencial ao condutor.

Então, de acordo com (3.27), o gradiente de  $\dot{H}_z$  no plano transversal é tangencial ao condutor. Isto significa que a maior variação de  $\dot{H}_z$  se dá na direção tangencial do condutor e, portanto, não há variação normal, *i.e.*,

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n} = 0 \quad \text{no contorno.} \quad (3.28)$$

### 3.4 SOLUÇÕES GERAIS EM COORDENADAS RETANGULARES

As soluções gerais para ondas guiadas entre planos paralelos, guias de ondas de seção retangular e outras formas com simetrias paralelas são especialmente obtidas em coordenadas cartesianas.

Assim, para ondas transversal-magnéticas, a equação (3.19) é, em coordenadas cartesianas,

$$\nabla_t^2 \dot{E}_z = \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} = -k_c^2 \dot{E}_z \quad (3.29)$$

que é uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis.

Neste método supomos que a solução possa ser escrita como um produto de dois termos, ou seja,

$$\dot{E}_z = XY$$

onde  $X$  é uma função só de  $x$  e  $Y$  é uma função só de  $y$ .

Substituindo esta forma em (3.29) obtemos

$$X''Y + XY'' = -k_c^2 XY$$

ou

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k_c^2 \quad (3.30)$$

onde as linhas (") indicam a derivada segunda.

A discussão-chave para chegarmos à solução através deste método é a seguinte. A equação (3.30) deve valer para todos os valores das variáveis  $x$  e  $y$ . Uma vez que o segundo termo da esquerda não contém  $x$ , e portanto não pode variar com  $x$ , o primeiro termo também não pode variar com  $x$ , pois a soma dos dois termos da esquerda é igual a uma constante. Em conclusão,  $X''/X$  somente pode ser constante e, pelo mesmo raciocínio, também  $Y''/Y$  deve ser constante.

Existem várias formas para as soluções, dependendo destas duas relações serem ambas constantes negativas, ambas positivas ou uma negativa e outra positiva. Como simbologia adotamos

$$X''/X = -k_x^2 \quad (3.31)$$

se a constante for negativa e

$$X''/X = K_x^2 \quad (3.32)$$

se a constante for positiva.

A solução para (3.31) é do tipo

$$X = A \cos k_x x + B \sin k_x x \quad (3.33)$$

e a solução para (3.32) é do tipo

$$X = A \cosh K_x x + B \sinh K_x x. \quad (3.34)$$

Da mesma forma, definimos  $k_y^2$  e  $K_y^2$  e obtemos as soluções formais para  $Y$ .

Em qualquer circunstância, porém, a soma algébrica de  $k_x^2$  (ou  $-K_x^2$ ) e  $k_y^2$  (ou  $-K_y^2$ ) deve ser igual a  $k_c^2$ .

### 3.5 ONDAS EM DUCTOS LIMITADOS

As soluções para guias retos retangulares podem ser da forma de (3.33) mas não da forma de (3.34). Isto porque as funções trigonométricas circulares repetem zeros ou derivadas zero periodicamente no espaço e, portanto, podem satisfazer às condições de contorno (3.23) ou (3.28) em faces paralelas do guia retangular em duas direções ortogonais (no caso da Figura 3.1, nas direções  $x$  e  $y$ ). Já as funções hiperbólicas são apropriadas a meios semi-infinitos, *i.e.*, meios nas quais a função é zero ou tem derivada zero sobre um plano e o meio é ilimitado na direção ortogonal a este plano.

Resumindo, num guia de ondas oco de seção retangular com direção de propagação segundo o eixo  $z$ , as componentes de  $\dot{E}_z$ , para as ondas  $TM$ , e  $\dot{H}_z$ , para as ondas  $TE$ , têm a forma geral dada pelo produto de duas funções  $X$  e  $Y$ , *i.e.*,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{E}_z \text{ para ondas } TM \\ \dot{H}_z \text{ para ondas } TE \end{array} \right\} = XY \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= A \cos k_x x + B \sin k_x x \\ Y &= C \cos k_y y + D \sin k_y y \end{aligned} \quad (3.36)$$

e

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2. \quad (3.37)$$

Note que em consequência do fato de, neste caso de guia oco,  $k_x^2$  e  $k_y^2$  serem reais e positivos decorre que  $k_c^2$  é, também, real e positivo.

Reportando, então, a (3.21), com  $k_c^2$  e  $k^2$  reais e positivos, a constante de propagação pode ser escrita

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}. \quad (3.38)$$

### Frequência de corte

A constante de propagação, dada por (3.38), sempre exhibe propriedades de corte. De fato, para um modo particular ( $TE$  ou  $TM$ ) num dielétrico perfeito,  $\gamma$  é real para a faixa de frequências tal que  $k < k_c$ ;  $\gamma$  é zero para  $k = k_c$  e  $\gamma$  é imaginário para  $k > k_c$ .

A frequência de corte de um dado modo é, então, dada por

$$2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_c} = k_c \quad (3.39)$$

e (3.38) pode ser escrita em termos da frequência de operação  $f$  e da frequência de corte  $f_c$ , *i.e.*,

$$\gamma = \alpha = k_c \sqrt{1 - (f/f_c)^2} \quad \text{para } f < f_c \quad (3.40)$$

$$\gamma = j\beta = jk \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad \text{para } f > f_c. \quad (3.41)$$

Vemos claramente, então, que (se as faces do guia forem condutores perfeitos) para  $f < f_c$  só há atenuação sem propagação e para  $f > f_c$  só há propagação sem atenuação.

Na faixa de propagação,  $f > f_c$ , a velocidade de fase é dada por

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad (3.42)$$

e a *velocidade de grupo* definida pela derivada da frequência em relação à constante de fase é

$$v_f = \frac{d\omega}{d\beta} = v\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (3.43)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , como sempre.

### Soluções para os modos *TE* e *TM*

As relações gerais (3.35) podem ser particularizadas e simplificadas por certos vínculos de contorno como, por exemplo, aqueles do guia da Figura 3.1.

Suponhamos, inicialmente, somente dois planos condutores situados em  $x = 0$  e  $y = 0$  e ondas propagando-se na direção de  $z$  na região  $x > 0$  e  $y > 0$ . Neste caso, para as ondas *TM*, as condições de contorno exigem  $\dot{E}_z = 0$  em  $x = 0$  e  $y = 0$  e portanto só sobram os termos em seno para  $\dot{E}_z$ ; para as ondas *TE*, as condições de contorno exigem  $\partial\dot{H}_z/\partial n = 0$  em  $x = 0$  e  $y = 0$  e portanto só sobram os termos em co-seno para  $\dot{H}_z$ .

Lembrando que as outras componentes podem ser obtidas de (3.10) a (3.13) podemos sintetizar os Quadros 3.1 e 3.2.

Quadro 1.1

Ondas Transverso-magnéticas
$\dot{E}_z = A \sin k_x x \sin k_y y$ $\dot{H}_x = j \frac{k_y f}{k_c \eta f_c} A \sin k_x x \cos k_y y$ $\dot{H}_y = -j \frac{k_x f}{k_c \eta f_c} A \cos k_x x \sin k_y y$ $\dot{E}_x = Z_{TM} \dot{H}_y$ $\dot{E}_y = -Z_{TM} \dot{H}_x$

onde  $Z_{TM}$  é a impedância da onda no modo *TM* na direção de propagação dada por

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \eta\sqrt{1-(f_c/f)^2} \quad (3.44)$$

e

Quadro 3.2

Ondas Transverso-elétricas
$\dot{H}_z = B \cos k_x x \cos k_y y$ $\dot{E}_x = j \frac{\eta k_y f}{k_c f_c} B \cos k_x x \sin k_y y$ $\dot{E}_y = -j \frac{\eta k_x f}{k_c f_c} B \sin k_x x \cos k_y y$ $\dot{H}_x = -\dot{E}_y / Z_{TE}$ $\dot{H}_y = \dot{E}_x / Z_{TE}$

onde  $Z_{TE}$  é a impedância da onda no modo  $TE$  na direção de propagação dada por

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad (3.45)$$

Para o perfil completo da Figura 3.1, além das condições de contorno já utilizadas, devemos considerar, também, aquelas em  $x = a$  e  $y = b$ . Para as ondas  $TM$ ,  $\dot{E}_z$  deve ser zero, aqui também, exigindo que  $k_x a$  e  $k_y b$  sejam múltiplos de  $\pi$ , i.e.,

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{e} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (3.46)$$

A exigência de  $\partial \dot{H}_z / \partial x = 0$  em  $x = a$  e  $\partial \dot{H}_z / \partial y = 0$  em  $y = b$  conduz aos mesmos valores de  $k_x$  e  $k_y$  para as ondas  $TE$ .

Então, de (3.37) obtemos, tanto para as ondas  $TM$  como  $TE$

$$(k_c)_{m,n} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (3.47)$$

Daí, o comprimento de onda e a frequência de corte podem ser escritos

$$(\lambda_c)_{m,n} = \frac{2\pi}{(k_c)_{m,n}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} \quad (3.48)$$

e

$$(f_c)_{m,n} = \frac{(k_c)_{m,n}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (3.49)$$

Há, então, um número duplamente infinito de ondas possíveis de cada tipo, correspondentes a todas as combinações dos números inteiros  $m$  e  $n$ .

Uma onda transverso-magnética ou onda  $E$  com  $m$  variações de meio seno na direção  $x$  e  $n$  variações de meio seno na direção  $y$  é representada como uma onda  $TM_{mn}$  ou onda  $E_{mn}$ . Do mesmo modo, uma onda transverso-magnética ou onda  $H$  com  $m$  variações de meio seno na direção  $x$  e  $n$  variações de meio seno na direção

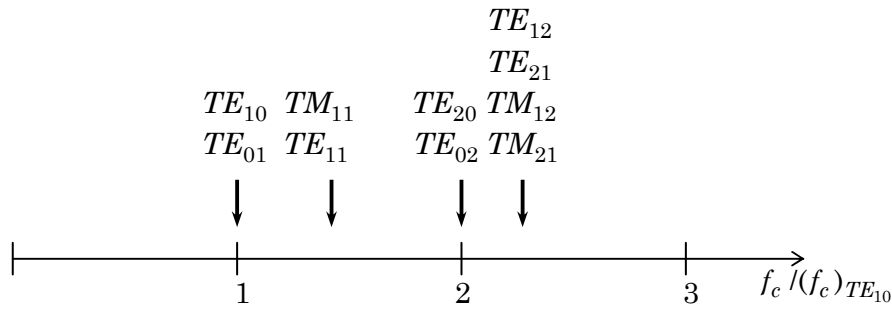
$y$  é representada como uma onda  $TE_{mn}$  ou onda  $H_{mn}$ . Note, através dos Quadros 3.1 e 3.2, que podem existir ondas  $TE$  com  $m$  ou  $n$  iguais a zero (mas não ambos), ao passo que numa onda  $TM$  nem  $m$  nem  $n$  podem ser iguais a zero ou toda a onda desaparece.

A onda  $TE$  de ordem mais baixa,  $TE_{10}$  (sendo  $a$  a maior dimensão), merece um estudo especial dado seu interesse que será detalhado na seção seguinte. Desde já observamos, porém, que como vemos em (3.48) o comprimento de onda de corte para uma tal onda é

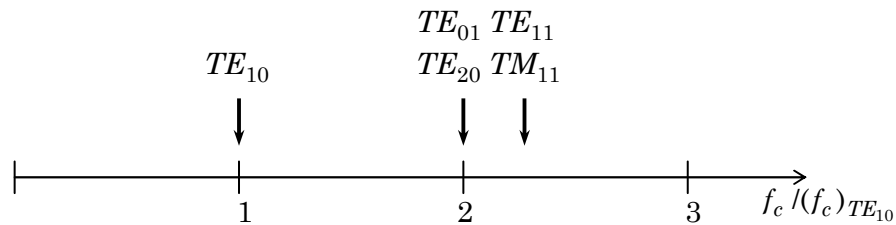
$$(\lambda_c)_{10} = 2a$$

ou seja, a frequência de corte é aquela para a qual a largura do guia é  $1/2$  comprimento de onda. Ela não depende absolutamente das outras dimensões. Este modo  $TE_{10}$  é chamado frequentemente de *modo dominante* de um guia retangular.

A Figura 3.2 mostra um diagrama indicando as frequências de corte de vários dos modos de ordem mais baixa para um guia quadrado  $a = b$ , referidas à frequência de corte do modo dominante  $TE_{10}$ , e para um guia de relação  $b/a = 1/2$ .



(a) Com dimensões  $a = b$



(b) Com relação de dimensões  $b/a = 1/2$

**Figura 3.2** Frequências de corte referidas ao modo  $TE_{10}$

### 3.6 A ONDA $TE_{10}$ NUM GUIA RETANGULAR

O tipo de onda mais simples que pode existir dentro de guias ocios é a *onda dominante*  $TE_{10}$  num guia retangular. Este tipo de onda é de grande importância na engenharia, pelas seguintes razões:

- 1 - A frequência de corte é independente de uma das dimensões da seção transversal. Daí, para uma dada frequência de operação, esta dimensão pode ser tornada suficientemente pequena de modo que a onda  $TE_{10}$  seja a única em condições de propagar-se deixando de haver preocupações com ondas de ordens mais altas que possam ser excitadas por efeitos de terminações ou de descontinuidades.
- 2 - A polarização do campo é fixa (com o campo elétrico tendo só componente  $y$  no esquema da Figura 3.1), o que pode ser vantajoso em certas aplicações.
- 3 - Para uma dada frequência de operação, a atenuação devida a perdas no cobre (para guias reais) não é excessiva, comparada com outros tipos de ondas em guias de tamanhos comparáveis.

Vamos reescrever as expressões da seção anterior para as ondas  $TE$  gerais em guias retangulares, da forma da Figura 3.1, fazendo  $m = 1$  e  $n = 0$  e com a substituição dos correspondentes valores de corte.

$$\dot{E}_y = \dot{E}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.50)$$

$$\dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_0}{Z_{TE}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.51)$$

$$\dot{H}_z = j \frac{\dot{E}_0}{\eta} \left( \frac{\lambda}{2a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \quad (3.52)$$

$$\dot{H}_y = 0 \quad (3.53)$$

$$\dot{E}_x = 0 \quad (3.54)$$

$$Z_{TE} = \eta / \sqrt{1 - [\lambda / (2a)]^2} \quad (3.55)$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - [\lambda / (2a)]^2}} \quad (3.56)$$

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - [\lambda / (2a)]^2} \quad (3.57)$$

$$\lambda_c = 2a \quad (3.58)$$

$$f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.59)$$

onde  $a$  é a maior dimensão do guia.

Podemos calcular as distribuições de campo no domínio do tempo a partir de (3.50) a (3.52), reintroduzindo aí as exponenciais  $e^{j\omega t}$  e  $e^{-j\beta z}$  (que é uma forma



particular de  $e^{-\gamma z}$  quando  $f > f_c$  e desprezamos as perdas), tirando a parte real e multiplicando por  $\sqrt{2}$ .

Assim, tomando a fase de  $\dot{E}_0$  como referência e sendo  $E_0$  o valor eficaz do campo, escrevemos

$$E_y(t, x, z) = \sqrt{2} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.60)$$

$$H_x(t, x, z) = -\sqrt{2} \frac{E_0}{Z_{TE}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.61)$$

$$H_z(t, x, z) = -\sqrt{2} \frac{E_0}{\eta} \left( \frac{\lambda}{2a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) \quad (3.62)$$

onde  $\beta = \omega/v_f$ , como sempre.

Para um instante particular, por exemplo  $t = 0$ , vêm as distribuições especiais

$$E_y(x, z) = \sqrt{2} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \beta z \quad (3.63)$$

$$H_x(x, z) = -\sqrt{2} \frac{E_0}{Z_{TE}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \beta z \quad (3.64)$$

$$H_z(x, z) = \sqrt{2} \frac{E_0}{\eta} \left( \frac{\lambda}{2a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \beta z. \quad (3.65)$$

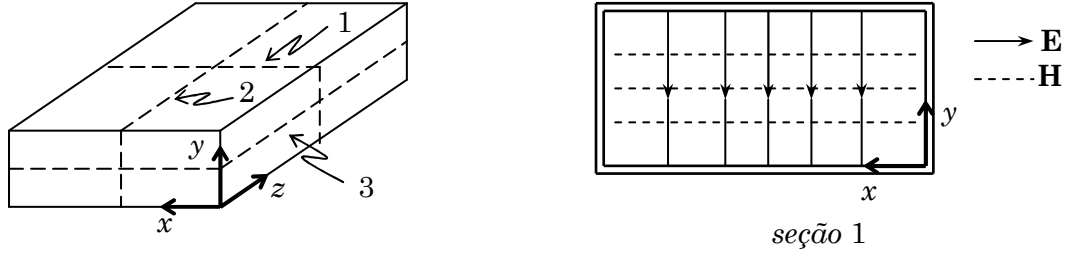
Observamos, então, que nenhuma componente do campo varia na direção vertical ou  $y$ . A única componente do campo elétrico é aquela vertical  $E_y$  que vem da face de cima para a de baixo do guia. Ela tem um máximo no centro e é zero nas faces condutoras, variando como uma curva de meio seno.

A inclinação das linhas de campo magnético no plano  $x, z$  é

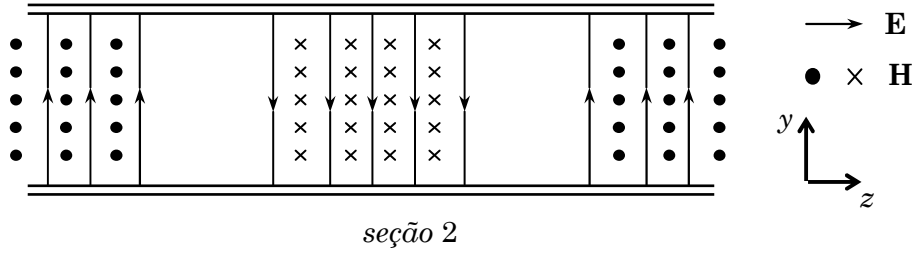
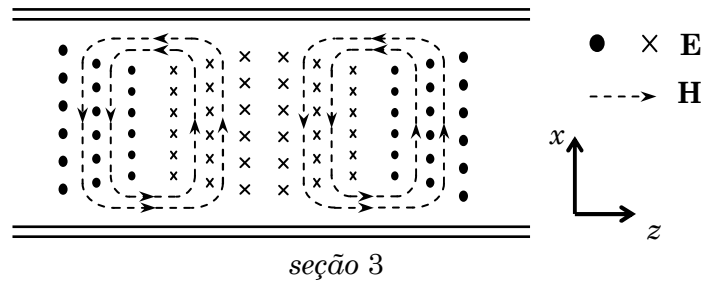
$$\frac{dx}{dz} = \frac{H_x}{H_z} = -\frac{\eta}{Z_{TE}} \left( \frac{2a}{\lambda} \right) \tan \frac{\pi x}{a} \cot \beta z.$$

Então, o campo magnético forma percursos fechados que contornam as correntes de deslocamento verticais que surgem de  $E_y$ . A componente  $H_x$  é zero nas duas paredes laterais e máxima no centro, seguindo a distribuição de  $E_y$ . A componente  $H_z$  é máxima nas duas paredes laterais e mínima no centro.

A Figura 3.3 ilustra estes campos nos planos  $x, z$ ,  $z, y$  e  $x, y$ .



(a) Cortes no guia de ondas

(b) Linhas de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  no plano  $x,z$ (c) Linhas de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  no plano  $y,z$ (d) Linhas de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  no plano  $x,z$ **Figura 3.3** Linhas de campos no modo  $TE_{10}$ 

Existem vários pontos de vista para interpretar fisicamente a propagação no modo  $TE_{10}$ . Por brevidade, no entanto, vamos nos limitar ao seguinte.

Recordemos o problema da reflexão de uma onda plana uniforme incidindo sobre um condutor perfeito com ângulo  $\theta$  em relação à normal ao plano. Vimos no Capítulo 2 que, neste caso, a componente tangencial do campo elétrico é zero no condutor e também em planos paralelos ao condutor à distância  $d = n\lambda/2$  do mesmo [expressão (2.32)]. Daí, um segundo plano condutor perfeito pode ser colocado em quaisquer das posições caracterizadas por um dado valor de  $n$  sem perturbar os campos.

No caso particular do modo  $TE_{10}$ ,  $n = 1$ ,  $d = a$  e vem

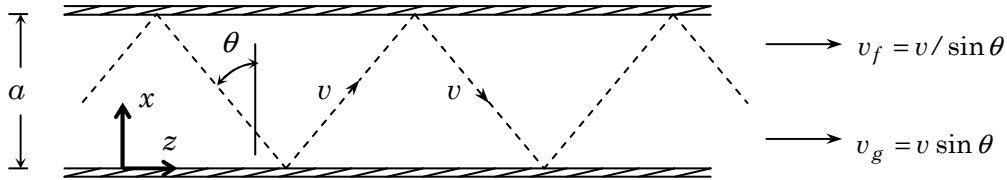
$$\frac{\lambda}{2\cos\theta} = a$$

ou

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{2a}. \quad (3.66)$$

Neste caso, pode ser verificado que as expressões (2.35) e (2.37) do Capítulo 2 conduzem às expressões (3.50) a (3.52) ou de (3.60) a (3.62), com a ressalva que, no sistema de coordenadas da Figura 3.1, a propagação se dá na direção  $z$ , ao passo que no Capítulo 2 a direção  $z$  é reservada para indicar a incidência sobre o plano condutor. Por isso, em (2.35) a (2.37) devemos ter o cuidado de trocarmos  $x$  por  $z$  e  $z$  por  $-x$  para obtermos (3.50) a (3.52).

Desta forma, a onda  $TE_{10}$  num guia retangular pode ser imaginada como surgindo da interferência entre ondas planas incidentes e refletidas, polarizadas de modo que o vetor elétrico esteja na direção  $y$  (na vertical, na Figura 3.1), ricocheteando entre dois planos condutores limítrofes do guia num ângulo tal, em relação à normal e esses planos, que o campo elétrico seja mantido zero nos dois condutores. A Figura 3.4 ilustra esta interpretação.



**Figura 3.4** Onda ricocheteando entre dois planos condutores

Como resultado de (3.66), quando  $a$  for menor que  $\lambda/2$  não é possível satisfazer simultaneamente às condições de contorno nos dois condutores limítrofes e não há propagação. Quando  $a$  for igual a  $\lambda/2$  a onda fica oscilando entre os planos limítrofes sem nenhuma componente na direção de propagação. Quando  $a$  for ligeiramente maior que  $\lambda/2$  há um pequeno ângulo  $\theta$ , tal que  $a = \lambda/(2\cos\theta)$ , e uma pequena propagação na direção axial, há uma velocidade de grupo  $v \sin\theta$ , bastante pequena na direção axial, e uma velocidade de fase  $v/\sin\theta$ . Em frequência muito mais altas,  $\theta$  tende a  $90^\circ$  de modo que a onda percorre o guia praticamente como uma onda plana, propagando-se na direção axial.

Por estas explicações, vemos que a dimensão  $b$  não participa na determinação da frequência de corte. Uma vez que o campo elétrico é sempre normal aos planos condutores em  $y = 0$  e  $y = b$ , a distância entre os mesmos não afeta as condições de contorno. Contudo, a dimensão  $b$  pode ser importante sobre outros pontos de vista:

- 1 - quanto menor  $b$ , maior é o campo elétrico para uma dada transferência de potência, de modo que aumenta o perigo de uma ruptura dielétrica;
- 2 - quanto menor  $b$ , maior é a atenuação devida a perdas no condutor.

**Exemplo 3.1**

Suponha que queiramos operar um guia com dimensões  $2,5 \times 1,25$  cm na frequência  $f = 5$  GHz apenas no modo  $TE_{10}$ , estando o mesmo preenchido com material dielétrico sem perdas com permissividade relativa  $\epsilon_r$ . Determine as características do modo de propagação.

*Solução:*

Dadas as dimensões do guia, *i.e.*  $a = 2,5$  cm e  $b = 1,25$  cm, temos de acordo com (3.49) as frequências de corte

$$(f_c)_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

de modo que para o modo  $TE_{10}$  temos

$$(f_c)_{10} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon}} \frac{1}{a} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}a} = \frac{6 \times 10^9}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Verificamos, ainda, que os modos com frequências imediatamente seguintes ocorrem para  $m = 0$  e  $n = 1$  e para  $m = 2$  e  $n = 0$ , ou seja,

$$(f_c)_{01} = (f_c)_{20} = \frac{1,2 \times 10^{10}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2(f_c)_{10}.$$

Evidentemente, a frequência de operação  $f = 5 \times 10^9$  Hz deve estar compreendida no intervalo

$$(f_c)_{10} < f < (f_c)_{01} = (f_c)_{20},$$

isto é,

$$\frac{6 \times 10^9}{\sqrt{\epsilon_r}} < 5 \times 10^9 < \frac{1,2 \times 10^{10}}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Daí resulta uma faixa de valores possíveis para a permissividade, *i.e.*,

$$1,2 < \sqrt{\epsilon_r} < 2,4$$

e, então,

$$1,44 < \epsilon_r < 5,76.$$

[Na prática, este intervalo é um pouco menor, pois as perdas nos condutores (mesmo pequenas) fazem com que a atenuação não passe abruptamente a zero logo acima da frequência de corte mas, ao contrário, vá diminuindo gradualmente até atingir o valor mínimo (que pode ser muito pequeno mas não nulo), já nas vizinhanças da frequência  $1,25f_c$ .]

Suponhamos, agora, que o dielétrico seja teflon ( $\epsilon_r = 2,25$ ), decorrendo a frequência de corte

$$(f_c)_{10} = \frac{6 \times 10^9}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{6 \times 10^9}{\sqrt{2,25}} = 4 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

Podemos, agora, calcular o comprimento da onda guiada (*i.e.*, a distância entre planos sucessivos de mesma fase *ao longo* do guia), ou seja,

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{f^2-f_c^2}}.$$

Numericamente, resulta

$$\lambda_g = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2,25}\sqrt{5^2-4^2} \times 10^9} = 6,67 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Calculamos ainda a velocidade de fase

$$v_f = f\lambda_g = 5 \times 10^9 \times 6,67 \times 10^{-2} = 3,33 \times 10^8 \text{ m/s}$$

e, também, a velocidade de grupo

$$v_g = \frac{v^2}{v_f} = \frac{c^2}{\epsilon_r v_f} = \frac{(3 \times 10^8)^2}{2,25 \times 3,33 \times 10^8} = 1,2 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Finalmente, a impedância de onda na direção de propagação é

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{120\pi\sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \cong 419 \text{ } \Omega.$$

## FONTES DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Caps. 7 e 8.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**P3.1** Mostre que o circuito da Figura 3.5 pode ser usado para representar as características de propagação de uma onda transverso-magnética, se a impedância característica e a constante de propagação forem escritas em termos de uma impedância  $Z$  e uma admitância  $Y$  por unidade de comprimento, ou seja,

$$Z_{TM} = \sqrt{Z/Y} \quad \text{e} \quad \gamma = \sqrt{ZY}.$$

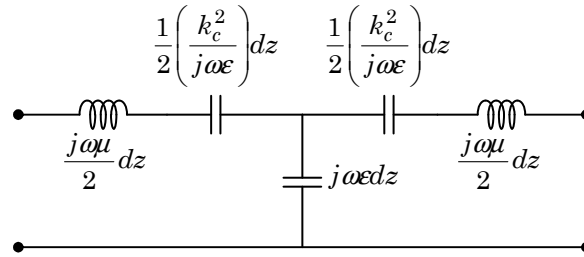


Figura 3.5 Problema P3.1

- P3.2** Um grande galpão é construído com duas paredes laterais, o piso e um teto todos planos metálicos. Supondo que o metal seja um condutor perfeito, que o espaçamento entre as paredes seja 10 m e a altura do teto 3 m, e que o galpão esteja aberto na frente e no fundo, o espaço interno pode ser tratado como um guia de ondas.
- (a) Supondo que incida uma onda de rádio de 12 MHz com polarização vertical na abertura da frente do galpão, qual a distância para dentro de galpão que o sinal será atenuado de 86,86 dB (ou 10 nepers)?
- (b) Repita a parte (a) supondo que a onda tenha polarização horizontal.
- P3.3** Demonstre que as expressões (2.35) a (2.37) do capítulo anterior conduzem às expressões (3.50) a (3.52) ou às expressões (3.60) a (3.62), com a ressalva que no sistema de coordenadas da Figura 3.1 a propagação se dá na direção  $z$ , ao passo que no Cap. 2 a direção  $z$  é usada para indicar a normal ao plano condutor.

## 4. RADIAÇÃO

Neste capítulo é mostrado como um elemento de corrente senoidal pode dar origem ao fenômeno da radiação eletromagnética. Através do conceito de potencial vetorial são calculados os campos resultantes.

### 4.1 INTRODUÇÃO

A compreensão do fenômeno da radiação de energia eletromagnética é importante não só nos casos que desejamos transferir ao espaço a energia eletromagnética de um transmissor de alta frequência através de um sistema de antenas, como também nos casos que estudamos a dispersão causada por blindagens imperfeitas em dispositivos eletromagnéticos.

Não é nosso propósito estudar profundamente o fenômeno da radiação. Entretanto, como até agora somente estudamos propriedades das ondas eletromagnéticas sem nos preocuparmos com sua origem, achamos conveniente apresentar algumas noções de como elas podem ser produzidas.

### 4.2 RADIAÇÃO DE UM ELEMENTO DE CORRENTE

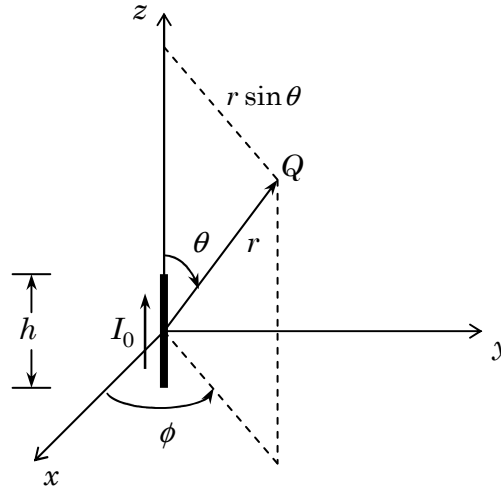
Vamos calcular o campo eletromagnético produzido por um elemento linear, percorrido por uma corrente senoidal

$$i(t) = \text{Re}[\sqrt{2} I_0 e^{j\omega t}], \quad (4.1)$$

admitindo que este elemento seja muito pequeno em relação ao comprimento de onda, de modo que a corrente possa ser considerada uniforme em todo o seu comprimento.

Este caso, escolhido por sua simplicidade, tem grande interesse por duas razões: em primeiro lugar, verificamos que tal elemento radia energia através de ondas eletromagnéticas; em segundo lugar, ao estudarmos as antenas podemos decompor-las em elementos de corrente, obtendo o campo por integração.

Seja, então, o elemento linear de comprimento  $h$ , desprezível em relação ao comprimento de onda, localizado na origem de um sistema de coordenadas e orientado segundo o eixo  $z$ , como mostra a Figura 4.1.



**Figura 4.1** Sistema de coordenadas associado a um elemento de corrente

Devido à equação da continuidade, existem nas extremidades  $\pm h/2$  cargas iguais, de sinais opostos e variáveis com o tempo, de modo que o elemento de corrente é também chamado de *dipolo elementar* ou *dipolo hertziano*.

Vamos calcular os campos recorrendo ao potencial vetorial  $\mathbf{A}$ . Devemos aplicar aqui o conceito de potenciais retardados pois, nesse sentido, não fazemos limitações no espaço ou no tempo.

Como sabemos dos cursos de Eletromagnetismo, o potencial vetorial num ponto  $Q$  genérico do espaço, num dado instante de tempo  $t$ , depende do vetor densidade de corrente em todos os pontos  $P$  do espaço no instante de tempo  $(t - r/v)$ , onde  $r$  é a distância dos pontos  $P$  ao ponto  $Q$  e  $v$  é a velocidade de propagação no meio, ou seja,

$$\mathbf{A}(t, Q) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(t - r/v, P)}{r} d\tau.$$

No nosso problema, em vez de considerarmos uma distribuição volumétrica de correntes e integrarmos no volume que elas existem, estamos considerando uma distribuição linear de correntes. Deste modo, trocando  $\mathbf{J}d\tau$  por  $idz\mathbf{u}_z$  na expressão geral do potencial vetorial retardado, obtemos

$$\mathbf{A}(t, Q) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{i(t - r/v)}{r} dz \mathbf{u}_z, \quad (4.2)$$

Substituindo em (4.2) a corrente dada por (4.1) e permutando os operadores "integral" e "parte real" resulta

$$\mathbf{A}(t, Q) = \text{Re} \left[ \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sqrt{2}I_0 e^{j\omega(t-r/v)}}{r} dz \right] \mathbf{u}_z, \quad (4.3)$$

Fazendo uso da noção de vetor complexo introduzida no Capítulo 1, podemos escrever



$$\mathbf{A}(t, Q) = \text{Re}[\sqrt{2} \dot{\mathbf{A}}(Q) e^{j\omega t}], \quad (4.4)$$

de modo que fazendo uso do teorema da Sec. 1.7, obtemos

$$\dot{\mathbf{A}}(Q) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{I_0 e^{-j\omega r/v}}{r} dz \mathbf{u}_z. \quad (4.5)$$

Assim, efetuando a integral (na qual supomos  $I_0$  constante) resulta para a componente  $z$  do potencial vetorial

$$\dot{A}_z = \frac{\mu h}{4\pi r} I_0 e^{-j\beta r} \quad (4.6)$$

na qual tornamos implícita a função no ponto  $Q$ , para simplificar, sendo  $\beta$  dado por (1.92).

Em coordenadas esféricas, a expressão (4.6) desdobra-se em

$$\begin{aligned} \dot{A}_r &= \dot{A}_z \cos \theta = \frac{\mu h}{4\pi r} I_0 e^{-j\beta r} \cos \theta \\ \dot{A}_\theta &= -\dot{A}_z \sin \theta = -\frac{\mu h}{4\pi r} I_0 e^{-j\beta r} \sin \theta \\ \dot{A}_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Não há componente  $\dot{A}_\phi$ , nem variações com  $\phi$ , porque há simetria da estrutura em relação aos eixos. Em vista disto, o rotacional de  $\dot{\mathbf{A}}$ , em coordenadas esféricas, é simplesmente

$$\text{rot } \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\dot{A}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi \quad (4.8)$$

na qual substituindo os valores de (4.7) e efetuando as operações resulta

$$\text{rot } \dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu h I_0}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \mathbf{u}_\phi. \quad (4.9)$$

Então, dado que

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \dot{\mathbf{A}},$$

obtemos, imediatamente

$$\dot{H}_\phi = \frac{I_0 h}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta. \quad (4.10)$$

Combinando (1.76) e (1.79), num meio onde não há corrente de condução, temos

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.11)$$

O rotacional de  $\dot{\mathbf{H}}$ , em coordenadas esféricas, também é simplificado, pois só existe  $\dot{H}_\phi$  e não há variações com  $\phi$  devido à simetria. Assim,

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{u}_r}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial(r \sin \theta \dot{H}_\phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{\mathbf{u}_\theta}{r \sin \theta} \left[ -\frac{\partial(r \sin \theta \dot{H}_\phi)}{\partial r} \right] \quad (4.12)$$

de modo que substituindo aí o valor de  $\dot{H}_\phi$ , efetuando as operações e comparando em (4.11), resulta

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \frac{I_0 h}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[ \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon r^3} \right] \cos \theta \\ \dot{E}_\theta &= \frac{I_0 h}{4\pi} e^{-j\beta r} \left[ \frac{j\omega\mu}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (4.13)$$

com  $\eta$  dado por (1.16).

As equações (4.10) e (4.13) representam os campos eletromagnéticos causados pelo elemento de corrente nos pontos  $Q$ , desde muito próximos até muito afastados do elemento.

Nosso estudo poderia continuar na forma geral e ser adaptado depois à aplicação conveniente. Entretanto, por questão de simplicidade, optamos por separá-lo agora a duas regiões bem caracterizadas: a região próxima e a região afastada do elemento de corrente.

### Região próxima ao dipolo

Para os pontos muito próximos do elemento de corrente predominam as parcelas dos campos em que a potência de  $1/r$  é a maior de todas que figuram nas expressões, pontos para os quais  $\beta r \cong 0$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \dot{H}_\phi &= \frac{I_0 h}{4\pi r^2} \sin \theta \\ \dot{E}_\theta &= \frac{I_0 h}{4\pi\epsilon} \frac{\sin \theta}{j\omega r^3} \\ \dot{E}_r &= \frac{I_0 h}{4\pi\epsilon} \frac{2\cos \theta}{j\omega r^3} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Um exame detalhado em (4.14) nos mostra que, na região próxima ao elemento de corrente, o campo magnético está em fase com a corrente e o valor de  $\dot{H}_\phi$  é o mesmo que calculamos através da lei de Ampère em regime quase estacionário.

No domínio do tempo, o campo magnético, na região próxima ao dipolo, é calculada através de

$$\mathbf{H}(t, Q) = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{H}_\phi e^{j\omega t}] \mathbf{u}_\phi$$

que conduz a

$$\mathbf{H}(t, Q) = \frac{\sqrt{2}I_0 h \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \theta \mathbf{u}_\phi. \quad (4.15)$$

Do mesmo modo, o campo elétrico na região próxima, é obtido através de

$$\mathbf{E}(t, Q) = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{E}_\theta e^{j\omega t} \mathbf{u}_\phi + \sqrt{2} \dot{E}_r e^{j\omega t} \mathbf{u}_r]$$

o que nós dá

$$\mathbf{E}(t, Q) = \frac{\sqrt{2}I_0 h \sin \omega t}{4\pi \epsilon \omega r^3} [\sin \theta \mathbf{u}_\phi + 2 \cos \theta \mathbf{u}_r]. \quad (4.16)$$

Se observarmos que, pela equação da continuidade, a carga elétrica na extremidade superior do elemento de corrente é

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = \int_0^t \sqrt{2}I_0 \cos \omega t dt = \frac{\sqrt{2}I_0 \sin \omega t}{\omega}$$

(e na extremidade inferior a mesma com sinal oposto), o campo  $\mathbf{E}$  dado por (4.16) é idêntico ao do dipolo elétrico em regime quase estacionário, conforme estudado nos cursos de Eletromagnetismo.

Tendo em vista que as componentes do campo vizinho à fonte coincidem com aquelas calculadas em regime estacionário, ele é chamado de *campo de indução*.

Convém, ainda, notar que as componentes importantes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  nessa região estão defasadas de  $\pi/2$  no tempo e o fluxo médio de potência devido a essas componentes é nulo, de acordo com o teorema de Poynting.

### Região afastada ao dipolo

Para os pontos muito afastados do elemento de corrente predominam em (4.10) e (4.13) as parcelas dos campos que contêm o fator  $1/r$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{H}_\phi &= j \frac{\beta I_0 h}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta \\ \dot{E}_\theta &= j \frac{\omega \mu I_0 h}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como pode ser verificado, as componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão em fase no tempo e em quadratura no espaço, ou seja,  $E_\theta$  e  $H_\phi$  são soluções de uma equação de onda num meio de impedância intrínseca  $\eta$ .

De acordo com (1.98), o vetor de Poynting tem a direção radial e sua média temporal

$$\mathbf{N}_{méd} = \text{Re} (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)$$

é, então,

$$\mathbf{N}_{méd} = \frac{\eta \beta^2 I_0^2 h^2}{16\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \mathbf{u}_r \quad \text{W/m}^2 \quad (4.18)$$

ou, ainda,

$$\mathbf{N}_{\text{méd}} = \frac{\eta I_0^2}{4r^2} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \mathbf{u}_r \quad \text{W/m}^2 \quad (4.19)$$

com  $\lambda$  dado por (1.94).

Existe, então, um fluxo médio de potência radial e temos nesta região um *campo de radiação*.

Esta onda, evidentemente, não é plana mas, considerando um ângulo sólido muito pequeno de forma que  $\sin \theta$  seja aproximadamente constante e supondo pequenas variações relativas em  $r$ , temos uma boa aproximação de onda plana. A distâncias muito grandes da fonte esta aproximação pode estender-se a uma região bastante grande.

O fluxo total de potência radiada pode ser obtido pela integral do vetor de Poynting sobre uma superfície que envolva o elemento de corrente. Por simplicidade, consideremos uma superfície esférica de raio  $r$ .

Referindo à Figura 4.1, com  $\mathbf{N}_{\text{méd}}$  dado por (4.19), temos

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{N}_{\text{méd}} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^\pi N_{\text{méd}} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\eta \pi I_0^2}{2} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

de onde

$$P_{\text{méd}} = \frac{2\eta \pi I_0^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \text{ W}. \quad (4.20)$$

Se o meio em que se dá a radiação for o vácuo, no qual

$$\eta_0 = 120\pi \Omega$$

resulta

$$P_{\text{méd}} = 80\pi^2 I_0^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \text{ W}. \quad (4.21)$$

Finalmente, definindo *resistência de radiação*  $R_r$  como sendo o valor de uma resistência que dissipe essa potência quando percorrida por uma corrente de valor eficaz  $I_0$ , temos para o elemento de corrente

$$R_r = \frac{P_{\text{méd}}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \Omega. \quad (4.22)$$

## FONTE DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Cap. 12.

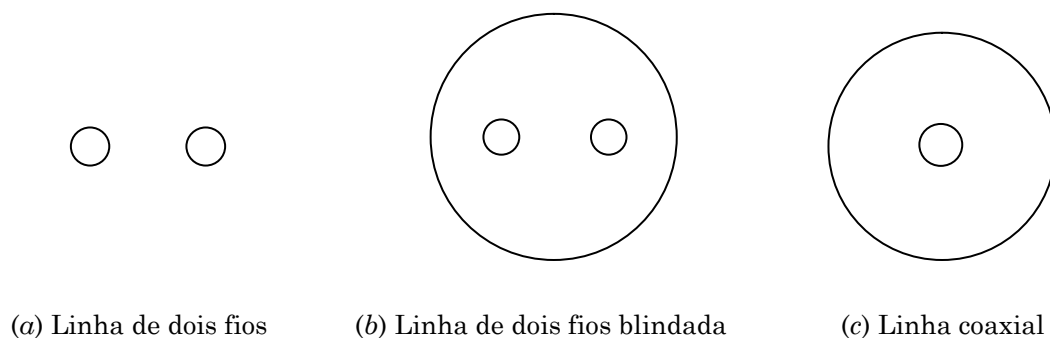


## 5. CONCEITOS SOBRE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Neste capítulo são introduzidas as linhas de transmissão e é mostrado como elas suportam ondas *TEM*. São, também, mostradas as equações de ondas para as mesmas e apresentados equivalentes de circuitos de linhas de transmissão.

### 5.1 INTRODUÇÃO

Uma *linha de transmissão* é constituída de dois ou mais condutores uniformes e paralelos. Ela é usada para transmitir energia eletromagnética de uma dada fonte (gerador) até uma dada carga. Secções transversais típicas de várias linhas de transmissão são ilustradas na Figura 5.1.



**Figura 5.1** Tipos de linhas de transmissão

Sendo uma linha de transmissão um dispositivo geometricamente bem caracterizado, é de grande interesse conhecermos as relações de tensões e correntes na linha (mais acessíveis na prática que as relações de campos) e este será nosso primeiro objetivo.

O caso mais simples de linhas de transmissão (mas que também é muito importante em comunicações) consiste em dois condutores cilíndricos paralelos (Figuras 5.1a e 5.1c) nos quais circulam correntes de sentidos opostos.

Além de limitarmos nosso estudo a este caso, vamos começar considerando que os condutores e o dielétrico (meio no qual estão os condutores) sejam perfeitos (condutividade infinita no condutor e nula no dielétrico). A uma linha deste tipo denominamos *linha sem perdas*.

### 5.2 LINHA INFINITA SEM PERDAS

Demonstra-se em Eletromagnetismo que correntes circulando em condutores paralelos infinitos têm associado a elas um campo magnético que lhes é

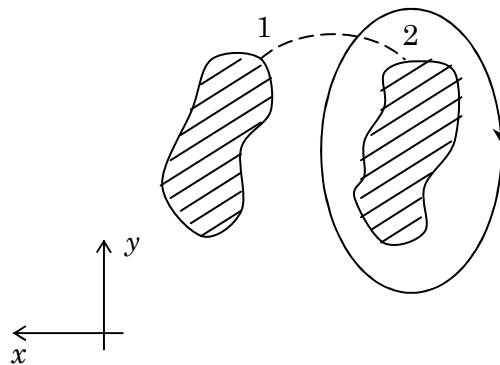
ortogonal. Por outro lado, também, devido aos condutores serem supostamente perfeitos não existe campo elétrico na direção das correntes e, portanto, se algum campo elétrico existir (e veremos que existe) deve ser também ortogonal às correntes.

Então, se partimos da suposição que a linha de transmissão transporta energia eletromagnética, deve existir um vetor de Poynting não nulo em pelo menos alguma região de um plano que corte dos dois condutores e, portanto, deve existir tanto o campo  $\mathbf{E}$  como o campo  $\mathbf{H}$ , sendo ambos ortogonais às correntes. Em consequência, o vetor de Poynting deve ter a direção dos condutores e isto significa que a energia eletromagnética flui *somente* ao longo da linha de transmissão. Neste caso, então, a linha suporta uma onda *TEM* (transverso-eletromagnética).

Poderíamos especular um pouco mais sobre as outras relações entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  (como, por exemplo, a ortogonalidade de ambos) mas, para a meta que almejamos (deduzir as tensões e correntes na linha), as considerações feitas acima são já suficientes.

Vamos, então, calcular a tensão  $v$  entre os dois condutores da linha num plano qualquer normal à direção dos condutores. A fim de tornar o problema mais explícito, consideremos um sistema de coordenadas cartesianas tal que o eixo  $z$  seja paralelo aos condutores.

Consideremos uma secção normal dos condutores num plano  $z$  genérico, conforme ilustra a Figura 5.2.



**Figura 5.2** Secção normal de condutores paralelos

Seja nessa secção um ponto 1 localizado num condutor e um ponto 2 localizado no outro.

A tensão  $v(t,z)$  entre os dois condutores no instante de tempo  $t$  neste plano particular  $z$  será, então,

$$v(t,z) = -\int_1^2 \mathbf{E}(t,x,y,z) \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 [E_x(t,x,y,z)dx + E_y(t,x,y,z)dy]$$

Derivando esta equação em relação a  $z$ , obtemos

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial z} = - \int_1^2 \left( \frac{\partial E_x(t,x,y,z)}{\partial z} dx + \frac{\partial E_y(t,x,y,z)}{\partial z} dy \right). \quad (5.1)$$

Mas a equação de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

nos mostra que se  $E_z$  for zero temos

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}.$$

Em consequência, obtemos de (5.1)

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 (-B_y dx + B_x dy). \quad (5.2)$$

O termo dentro da integral em (5.2) é interpretado fisicamente da seguinte maneira. Consideremos uma trajetória qualquer de 1 a 2 e translademos o plano da Figura 5.2 de um comprimento  $\Delta z$  na direção  $z$ . Temos, então, gerada uma superfície apoiada nos dois condutores que se estende por um comprimento  $\Delta z$ . O fluxo magnético que atravessa essa superfície dividido por  $\Delta z$  quando  $\Delta z \rightarrow 0$  é a quantidade dada pela integral acima.

De acordo com a definição de indutância, a integral toda em (5.2) pode ser escrita como o produto de uma indutância  $L$ , por unidade de comprimento, e da corrente  $i(t,z)$  na linha.

Assim, temos

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} [Li(t,z)] = -L \frac{\partial i(t,z)}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Esta é uma das equações básicas da linha de transmissão sem perdas.

Uma outra equação pode ser desenvolvida considerando a circuitação de  $\mathbf{H}$  no instante de tempo  $t$  em torno de um condutor no plano  $z$  da Figura 5.2, i.e.,

$$i(t,z) = \oint \mathbf{H}(t,x,y,z) \cdot d\mathbf{l} = \oint [H_x(t,x,y,z)dx + H_y(t,x,y,z)dy].$$

Derivando esta equação em relação a  $z$ , obtemos

$$\frac{\partial i(t,z)}{\partial z} = \oint \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} dx + \frac{\partial H_y}{\partial z} dy \right). \quad (5.4)$$

Mas a equação de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

nos mostra que se  $H_z$  for zero temos

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = - \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t}.$$



e, desta forma, obtemos de (5.4)

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint (D_x dy - D_y dx). \quad (5.5)$$

Como no caso anterior, translademos o plano da Figura 5.2 de um comprimento  $\Delta z$  na direção  $z$ . Temos, então, gerada uma superfície cilíndrica que pode ser completada com duas "tampas" normais aos condutores de forma a obtermos uma superfície fechada. (O fechamento da superfície com "tampas" é possível porque  $\mathbf{D}$  é paralelo a elas e, em consequência, o fluxo elétrico é nulo através delas.)

Então, o fluxo elétrico que atravessa essa superfície dividido por  $\Delta z$ , quando  $\Delta z \rightarrow 0$  é a quantidade dada pela integral acima.

De acordo com a definição de capacitância, a integral toda em (5.5) pode ser escrita como o produto de uma capacitância  $C$ , por unidade de comprimento, e da tensão  $v(t, z)$  na linha.

Assim, temos

$$\frac{\partial i(t, z)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} [Cv(t, z)] = -C \frac{\partial v(t, z)}{\partial t}. \quad (5.6)$$

Esta segunda equação completa o conjunto das relações de tensão e corrente numa linha de transmissão sem perdas.

Um ponto importante desta dedução é que as indutâncias obtidas são aquelas de condições estáticas, apesar de o problema ser certamente não estático. Isto, de certa forma, pode surpreender e poderíamos discutir a validade dessas equações em pelo menos dois aspectos:

- 1 - Calculamos a diferença de tensão devida à corrente circulando na indutância distribuída da linha sem nos preocuparmos com os efeitos das indutâncias mútuas. Da mesma forma, não foram considerados os efeitos mútuos das cargas;
- 2 - As indutâncias e capacitâncias usadas são aquelas obtidas em regime lentamente variável e poderia parecer que estas constantes não seriam válidas em frequências muito altas.

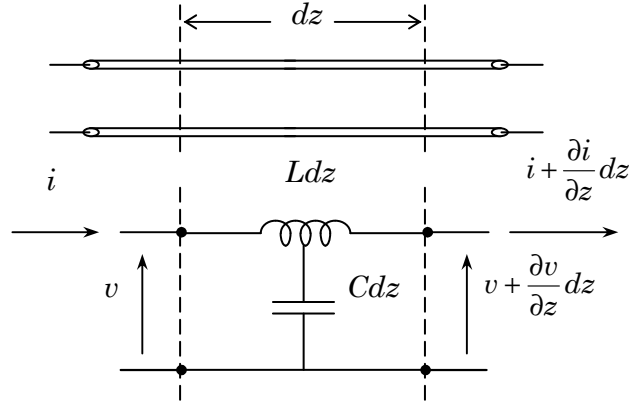
A primeira objeção é derrubada uma vez que não existem componentes axiais dos campos e, em consequência, não existem efeitos mútuos ao longo da linha. A segunda objeção é, também, derrubada uma vez que percebemos que a distribuição de campo num plano transversal corresponde, independentemente da frequência, à distribuição dos campos estáticos.

Algumas destas conclusões deixam de ser válidas quando são levantadas certas restrições impostas de início, como é o caso das linhas com perdas.

### 5.3 MODELO DISTRIBUÍDO

Como vimos na Sec. 5.2, as tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão sem perdas estão relacionadas pela indutância distribuída  $L$ , por unidade de comprimento e pela capacitância distribuída  $C$ , por unidade de comprimento.

Mostraremos agora que as mesmas relações (5.3) e (5.6) podem ser obtidas no modelo representado na Figura 5.3, no qual consideramos um comprimento diferencial de linha  $dz$ . O comprimento  $dz$  tem uma indutância  $Ldz$  e uma capacitância  $Cdz$ .



**Figura 5.3** Linha de transmissão e seu modelo distribuído

A queda de tensão (ou o *negativo* da variação da tensão) através desse comprimento é, então, igual ao produto da indutância nesse comprimento pela taxa de variação da corrente no tempo. Por outro lado, para esse comprimento diferencial, a variação de tensão ao longo dele, em qualquer instante, pode ser escrita como o comprimento multiplicado pela taxa de variação de tensão em relação ao comprimento.

Então,

$$\text{variação de tensão} = \frac{\partial v}{\partial z} dz = -(Ldz) \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Do mesmo modo, o decréscimo na corrente através do elemento de comprimento  $dz$  é simplesmente a corrente que é desviada pela capacitância do elemento, ou seja, dada pelo produto dessa capacitância pela taxa de variação da tensão no tempo. Por outro lado, para esse comprimento diferencial, a variação da corrente ao longo dele, em qualquer instante, pode ser escrita como o comprimento multiplicado pela taxa de diminuição da corrente com a distância.

Então,

$$\text{variação de corrente} = \frac{\partial i}{\partial z} dz = -(Cdz) \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (5.8)$$

O elemento  $dz$  pode ser cancelado em (5.7) e (5.8), resultando

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

como nas expressões (5.3) e (5.6) já deduzidas.

### 5.4 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DAS LINHAS SEM PERDAS

As equações (5.3) e (5.6) podem ser manipuladas de forma a fornecerem equações somente em tensão e somente em corrente, do seguinte modo.

Derivando (5.3) em relação à distância e (5.6) em relação ao tempo, obtemos, respectivamente

$$\frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z \partial t} \quad (5.9)$$

e

$$\frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2}. \quad (5.10)$$

Substituindo (5.10) em (5.9) resulta

$$\frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2}. \quad (5.11)$$

Esta equação é formalmente idêntica à (1.8) estudada no Capítulo 1.

Aqui também, como pode ser verificado facilmente por substituição, vemos que (5.11) é satisfeita por soluções da forma

$$v_+(t, z) = f_1\left(t - \frac{z}{v_p}\right) \quad \text{e} \quad v_-(t, z) = f_2\left(t + \frac{z}{v_p}\right). \quad (5.12)$$

onde  $v_p = 1/\sqrt{LC}$ ,  $f_1$  denota uma função de  $(t - z/v_p)$  e  $f_2$  denota uma função de  $(t + z/v_p)$ .

Para obtermos a interpretação física desta solução procedemos da mesma forma que no Capítulo 1. A parcela  $v_+(t, z) = f_1(t - z/v_p)$  corresponde a uma onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  com velocidade  $v_p$ , *i.e.*, se nos deslocarmos no sentido positivo de  $z$  com velocidade  $v_p$  estaremos acompanhando o mesmo valor ou fase de  $(t - z/v)$  e, portanto, estaremos observando o mesmo valor de  $v_+$ . De modo semelhante, concluímos que  $v_-(t, z) = f_2(t + z/v_p)$  corresponde a uma onda que se propaga no sentido negativo de  $z$  com velocidade  $v_p$ .

Dada a linearidade das equações, a solução geral engloba as duas possibilidades na forma

$$v(t, z) = v_+(t, z) + v_-(t, z). \quad (5.13)$$

A corrente  $i(t, z)$  associada à tensão  $v(t, z)$  também pode ser determinada por partes.

A corrente  $i_+(t, z)$  associada à parcela da tensão  $v_+(t, z)$  pode ser obtida através de (5.3). De fato, derivando  $v_+(t, z) = f_1(t - z/v_p)$  em relação a  $z$ , multiplicando, em seguida, por  $-L$  e integrando o resultado em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned}
i_+(t, z) &= \frac{1}{Lv_p} f_1(t - z/v_p) = \sqrt{C/L} f_1(t - z/v_p) \\
&= (1/Z_0) v_+(t, z)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  é a chamada **impedância característica** da linha.

Isto significa que a relação entre as componentes da tensão e da corrente, *i.e.*, da impedância  $Z_+(t, z)$ , da onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  numa linha sem perdas é constante, em qualquer ponto da linha e em qualquer instante de tempo, e igual a  $Z_0$ .

Do mesmo modo, a corrente  $i_-(t, z)$  associada à parcela da tensão  $v_-(t, z)$  pode ser obtida derivando  $v_-(t, z) = f_2(t + z/v_p)$  em relação a  $z$ , multiplicando, em seguida, por  $-L$  e integrando o resultado em relação ao tempo, resultando

$$\begin{aligned}
i_-(t, z) &= -\frac{1}{Lv_p} f_2(t + z/v_p) = -\sqrt{C/L} f_2(t + z/v_p) \\
&= -(1/Z_0) v_-(t, z).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Isto significa que a relação entre as componentes da tensão e da corrente, *i.e.*, da impedância  $Z_-(t, z)$ , da onda que se propaga no sentido negativo de  $z$  numa linha sem perdas é constante, em qualquer ponto da linha e em qualquer instante de tempo, e igual a  $-Z_0$ .

Assim, dada a linearidade das equações, a solução completa da corrente na linha associada à forma de tensão dada por (5.13) é

$$\begin{aligned}
i(t, z) &= i_+(t, z) + i_-(t, z) \\
&= \frac{1}{Z_0} [v_+(t, z) - v_-(t, z)].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Inversamente, a solução completa da tensão na linha associada à forma de corrente dada por (5.16) é

$$v(t, z) = Z_0 [i_+(t, z) - i_-(t, z)]. \tag{5.17}$$

## 5.5 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO EM DESCONTINUIDADE

Uma grande parte dos problemas relativos a linhas de transmissão dizem respeito a terminações de linhas em impedâncias genéricas (incluindo circuito aberto e curto circuito), a conexões entre linhas de características diferentes e a bifurcações de linhas.

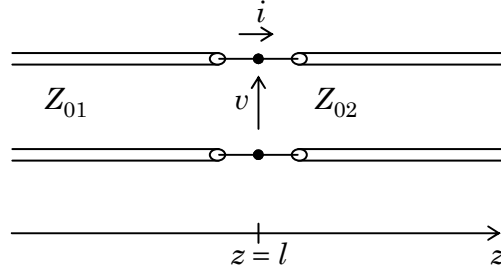
Todos estes problemas causam descontinuidades nas linhas, onde as componentes de tensão e de corrente aí incidentes, refletidas e transmitidas devem satisfazer às leis de Kirchhoff.

De modo semelhante àquele visto no estudo de ondas planas, aqui, também, é interessante fazermos uso dos coeficientes de reflexão e de transmissão.

Problemas desta natureza podem ser apresentados em diversos graus de complexidade. Por questões didáticas, no entanto, vamos começar estudando casos simples.

### Linhas sem perdas associadas em série

Consideremos, inicialmente, o caso de duas linhas de transmissão sem perdas associadas em série em  $z = l$ , conforme ilustra a Figura 5.4.



**Figura 5.4** Associação série de duas linhas de impedâncias características diferentes

Suponhamos a existência de um gerador que, situado em  $z < l$ , alimenta a linha sem perdas de impedância característica  $Z_{01}$ . A tensão  $v_i(t, z)$  proveniente desse gerador incide em  $z = l$  e aí encontra uma descontinuidade devida à ligação da outra linha sem perdas de impedância característica  $Z_{02}$  e comprimento infinito.

Para que as leis de Kirchhoff sejam satisfeitas em  $z = l$ , devemos ter aí a origem de uma onda de tensão refletida  $v_r(t, z)$  que retorna ao gerador na linha de impedância  $Z_{01}$  e uma onda de tensão transmitida  $v_t(t, z)$  que se propaga na linha de impedância  $Z_{02}$ , acontecendo coisa semelhante com as ondas de corrente.

Formalmente, em  $z = l$ , temos

$$v(t, l) = v_i(t, l) + v_r(t, l) = v_t(t, l) \quad (5.18)$$

e

$$i(t, l) = i_i(t, l) + i_r(t, l) = i_t(t, l) \quad (5.19)$$

ou ainda, fazendo uso de (5.16), escrevemos (5.19) como

$$\frac{v(t, l)}{Z_{02}} = \frac{1}{Z_{01}} [v_i(t, l) - v_r(t, l)]. \quad (5.20)$$

Definindo o *coeficiente de reflexão*  $\rho_l$  em  $z = l$ , como o quociente da componente da tensão aí refletida pela componente da tensão aí incidente, *i.e.*,

$$\rho_l = \frac{v_r(t, l)}{v_i(t, l)} \quad (5.21)$$

escrevemos (5.18) e (5.20) respectivamente como

$$v(t, l) = v_i(t, l) [1 + \rho_l] \quad (5.22)$$

e

$$\frac{v(t, l)}{Z_{02}} = \frac{v_i(t, l)}{Z_{01}} [1 - \rho_l] \quad (5.23)$$

Da combinação de (5.22) e (5.23) resulta

$$Z_{02} (1 - \rho_l) = Z_{01} (1 + \rho_l) \quad (5.24)$$

e daí

$$\rho_l = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (5.25)$$

Por outro lado, definindo o *coeficiente de transmissão*  $\tau_l$  em  $z = l$ , como o quociente da componente da tensão aí transmitida pela componente da tensão aí incidente, *i.e.*,

$$\tau_l = \frac{v_t(t, l)}{v_i(t, l)} \quad (5.26)$$

obtemos em face de (5.18) e (5.22)

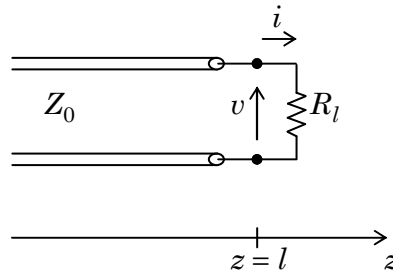
$$\tau_l = 1 + \rho_l. \quad (5.27)$$

Finalmente, da combinação de (5.25) e (5.27) resulta

$$\tau_l = \frac{2 Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (5.28)$$

### Linha sem perdas terminada numa resistência

Consideremos, agora, o caso de uma linhas de transmissão sem perdas de impedância característica  $Z_0$  terminada, em  $z = l$ , numa resistência  $R_l$ , conforme ilustra a Figura 5.5. O sistema é suposto estar alimentado por um gerador situado em  $z < l$ .



**Figura 5.5** Linha sem perdas terminada numa resistência

Este caso pode ser tratado como um caso particular do item anterior.

De fato, as equações de Kirchhoff em  $z = l$  são semelhantes a (5.18) e (5.19) com a única diferença que, neste caso, não há onda transmitida, i.e.,

$$v(t, l) = v_i(t, l) + v_r(t, l)$$

e

$$i(t, l) = i_i(t, l) + i_r(t, l).$$

Fazendo uso de (5.16) e da lei de Ohm

$$v(t, l) = R_l i(t, l)$$

escrevemos a equação das correntes como

$$\frac{v(t, l)}{R_l} = \frac{1}{Z_0} [v_i(t, l) - v_r(t, l)]$$

que é semelhante a (5.20) com as únicas diferenças de  $R_l$  substituir  $Z_{02}$  e  $Z_0$  substituir  $Z_{01}$ .

Então, procedendo de maneira semelhante ao item anterior, o coeficiente de reflexão  $\rho_l$ , definido em (5.21), é obtido de forma análoga a (5.25) como

$$\rho_l = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} \quad (5.29)$$

sendo  $\rho_l$  representado por um número real pois, aqui  $R_l$  e  $Z_0$  são números reais.

Como valores notáveis de  $\rho_l$  temos:

$$\begin{aligned} \text{para } R_l = 0 & \quad \rho_l = -1, \\ \text{para } R_l = Z_0 & \quad \rho_l = 0 \quad \text{e} \\ \text{para } R_l = \infty & \quad \rho_l = 1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

No primeiro e no último casos há reflexão total, com a possibilidade de inversão de polaridade da componente de tensão refletida. No caso de  $R_l = Z_0$  não há componente de tensão refletida.

Em conclusão, *o coeficiente de reflexão numa linha de transmissão sem perdas terminada numa carga resistiva é representado por um número real compreendido entre  $-1$  e  $+1$ .*

Inversamente, dado o coeficiente de reflexão na terminação da linha, a resistência ali conectada é

$$R_l = Z_0 \frac{[1 + \rho_l]}{[1 - \rho_l]}. \quad (5.31)$$

*Observação:*

- Em casos genéricos em que a impedância de terminação é um operador temporal, o coeficiente de reflexão  $\rho_l$  representa um operador que fornece a

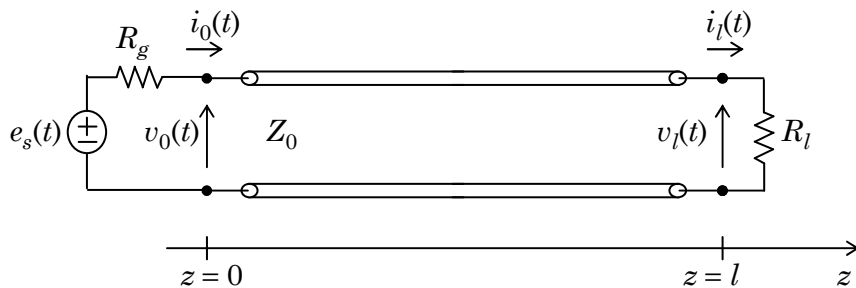
parcela de tensão refletida  $v_r(t, l)$  em função parcela da tensão incidente  $v_i(t, l)$ .

## 5.6 TRANSITÓRIOS EM LINHAS SEM PERDAS

A fim de ilustrar o fenômeno de propagação em linhas de transmissão consideramos nesta secção alguns exemplos simples de transitórios.

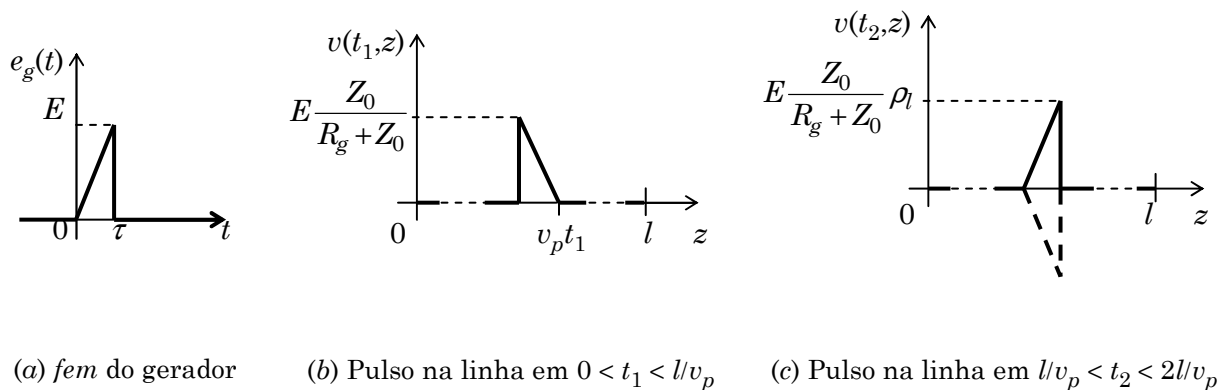
### Linha excitada por um pulso triangular de tensão

Consideremos uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica  $Z_0$ , velocidade de propagação  $v_p$ , comprimento  $l$ , alimentada em  $z = 0$  por um gerador de tensão de *fem*  $e_s(t)$ , resistência interna  $R_g$  e terminada em  $z = l$  por uma carga de resistência  $R_l$ , como mostrado na Figura 5.6.



**Figura 5.6** Linha sem perdas alimentada por gerador e terminada numa resistência

Seja a *fem* do gerador um pulso triangular de amplitude  $E$  e duração  $\tau$  muito pequena em relação ao tempo de propagação do pulso de ponta a ponta na linha, i.e.,  $\tau \ll l/v_p$ , conforme ilustra a Figura 5.7a.



**Figura 5.7** Pulso de pequena duração em linha sem perdas

Nestas condições, o pulso impresso no início da linha propaga-se ao longo da mesma, reflete-se mais tarde no fim a mesma e retorna depois ao seu início levando para isso tudo o tempo  $2l/v_p$ . Então, no intervalo  $0 < t < 2l/v_p$  só existem



no início da linha componentes de tensão e de corrente que se propagam no sentido positivo de  $z$ .

Assim, das leis de Kirchhoff, escrevemos para o começo da linha

$$v_+(t,0) = e_g(t) - R_g i_+(t,0) .$$

Daí, tendo em vista (5.14), eliminamos  $i_+(t,0)$  e obtemos

$$v_+(t,0) = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} e_g(t) . \quad (5.32)$$

Dado que  $Z_0$  e  $R_g$  são reais, a tensão na entrada da linha tem forma idêntica a  $e_g(t)$ , mostrado na Figura 5.7a, mas com amplitude reduzida.

A partir do instante  $t = 0$ , a onda de tensão  $v_+$  propaga-se ao longo da linha como ilustra a Figura 5.7b. (A tensão gerada em  $t = 0$  progrediu mais na linha do que aquela gerada em  $t = \tau$ )

Passado o tempo  $t = l/v_p$  a frente de onda de tensão atinge o fim da linha, onde está a resistência  $R_l$ , e, segundo (5.21) e (5.29), é gerada aí, se  $R_l \neq Z_0$ , uma onda refletida de tensão  $v_-(t,l)$ , que passa a propagar-se no sentido negativo de  $z$ , *i.e.*,

$$v_-(t,l) = \rho_l v_+(t,l) = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} v_+(t,l) . \quad (5.33)$$

Depois que todo o pulso atingiu a resistência  $R_l$ , só existe  $v_-(t,z)$  na linha, ilustrada na Figura 5.7c. [Lembramos que  $\rho_l$  pode ser negativo e, neste caso, o pulso que se propaga terá polaridade invertida.]

Passado o tempo  $t = 2l/v_p$  a frente de onda de tensão atinge o início da linha, onde encontra o gerador com resistência  $R_g$  e *fem*  $e_g(t) = 0$ . Tem-se, então, gerada aí, se  $R_g \neq Z_0$ , uma onda refletida de tensão  $v_+(t,l)$ , que passa a propagar-se no sentido positivo de  $z$ , *i.e.*,

$$v_+(t,0) = \rho_0 v_-(t,0) = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} v_-(t,0) \quad (5.34)$$

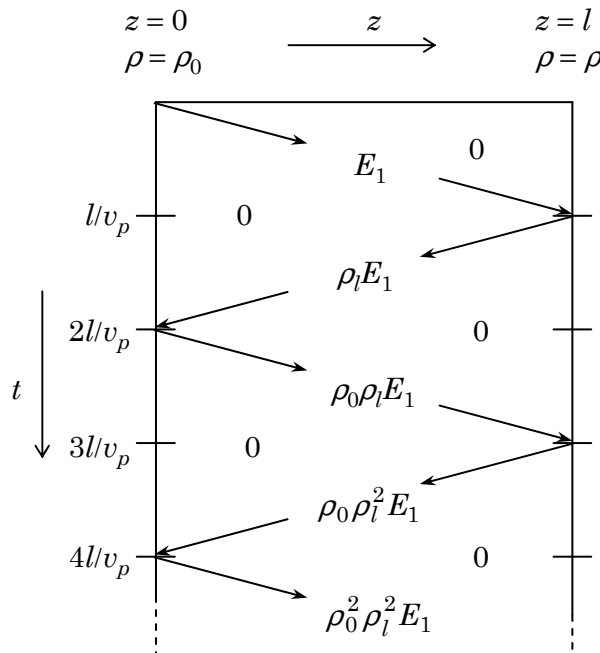
e o processo assim continua. Cada vez que o pulso atinge o extremo da linha em  $z = l$ , dá origem a um outro pulso que retorna ao gerador com amplitude do anterior multiplicada por  $\rho_l$  (com sinal) e cada vez que o pulso atinge o extremo da linha em  $z = 0$ , dá origem a um outro pulso que retorna à carga com amplitude do anterior multiplicada por  $\rho_0$  (com sinal).

A Figura 5.8 ilustra as tensões na linha. Em abscissa está representado o comprimento da linha e em ordenada (para baixo) está representado o tempo.

Os traços em zigzague, onde fazemos

$$E_1 = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} E ,$$

representam a amplitude do pulso propagante (no espaço e no tempo). Nas outras regiões do diagrama a tensão é nula.

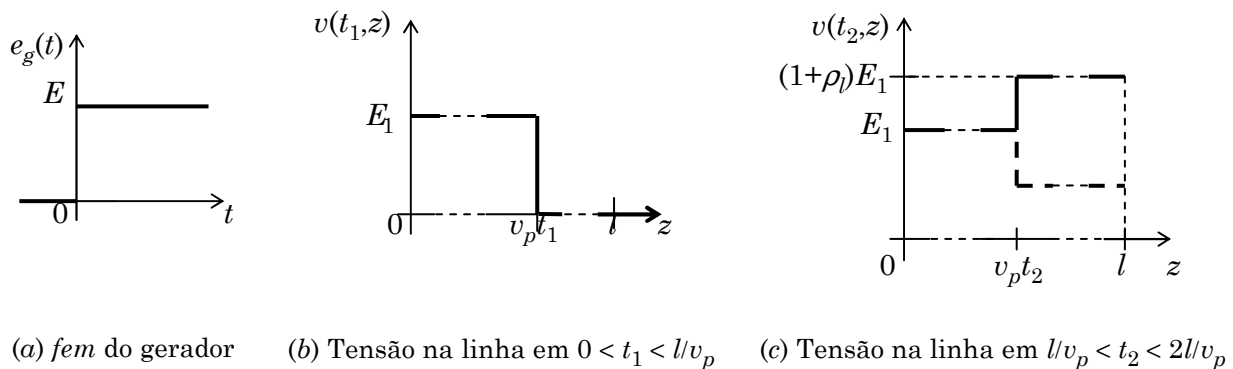


**Figura 5.8** Diagrama de propagação de pulso de tensão

### Linha excitada por um degrau de tensão

Consideremos, tal como no item anterior, uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica  $Z_0$ , velocidade de propagação  $v_p$ , comprimento  $l$ , alimentada em  $z=0$  por um gerador de tensão de *fem*  $e_g(t)$ , resistência interna  $R_g$  e terminada em  $z=l$  por uma carga de resistência  $R_l$ , como mostrado na Figura 5.6.

A diferença, agora, é que adotaremos para a *fem* uma *função degrau* de amplitude  $E$ , como mostra a Figura 5.9a.



**Figura 5.9** Função degrau em linha sem perdas

Tal qual no caso do pulso, a *fem* imprime no início da linha uma tensão

$$v(t,0) = v_+(t,0) = \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} E = E_1. \quad (5.35)$$

A partir do instante  $t = 0$ , a onda de tensão  $v_+$  propaga-se ao longo da linha como ilustra a Figura 5.9b. Observamos que, neste caso, todos os pontos da linha atrás da frente de onda mantêm a tensão  $E_1$ , dada por (5.35).

Passado o tempo  $t = l/v_p$  a frente de onda de tensão atinge o fim da linha, onde está a resistência  $R_l$ , sendo gerada aí, se  $R_l \neq Z_0$ , uma onda refletida de tensão  $v_-(t,l)$ , que passa a propagar-se no sentido negativo de  $z$ , *i.e.*,

$$v_-(t,l) = \rho_l v_+(t,l) = \rho_l E_1 = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} E_1. \quad (5.36)$$

No intervalo de tempo  $l/v_p < t < 2l/v_p$ , a frente de onda de tensão  $v_-$  passa a propagar-se no sentido negativo de  $z$  sobrepondo-se, então, à tensão  $v_+$  que continua impressa na linha, *i.e.*,

$$v(t,z) = v_+(t,z) + v_-(t,l) = (1 + \rho_l) E_1. \quad (5.37)$$

Tal situação está ilustrada na figura 5.9c. [Lembramos, mais uma vez, que  $\rho_l$  pode ser negativo e, neste caso, a frente de onda que se propaga terá polaridade invertida.]

Passado o tempo  $t = 2l/v_p$  a frente de onda de tensão atinge o início da linha, onde encontra o gerador com resistência  $R_g$  e *fem*  $e_g(t) = E$ . A frente de onda  $v_-$  encontra a resistência do gerador e gera aí, se  $R_g \neq Z_0$ , uma onda refletida de tensão  $v_+(t,l)$ , que passa a propagar-se no sentido positivo de  $z$ , *i.e.*,

$$v_+(t,l) = \rho_0 v_-(t,l) = \rho_0 \rho_l E_1. \quad (5.38)$$

onde

$$\rho_0 = \frac{R_0 - Z_0}{R_0 + Z_0}. \quad (5.39)$$

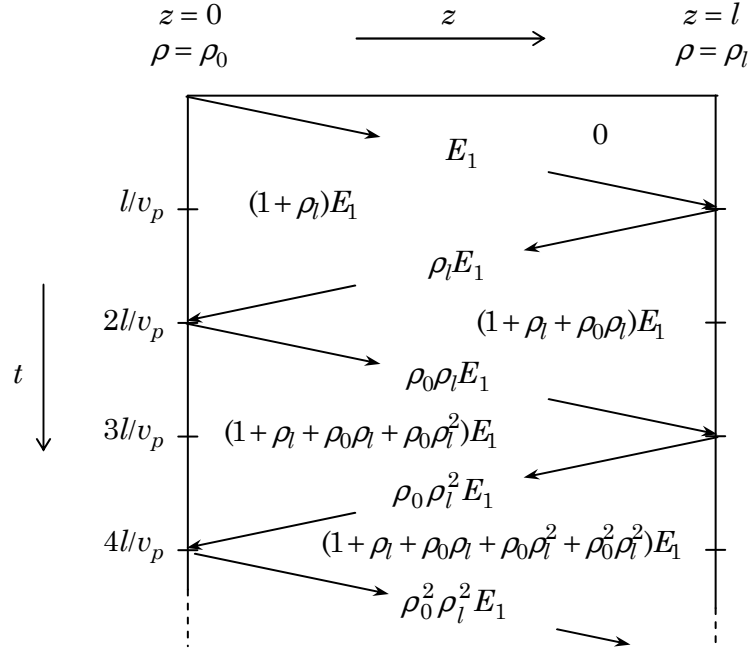
Temos, então, na linha, no intervalo de tempo  $2l/v_p < t < 3l/v_p$ , por superposição: a tensão  $E_1$ , que continua a ser impressa pelo gerador, a tensão  $\rho_l E_1$ , devida à tensão  $v_+$  refletida pela carga  $R_l$ , a tensão  $\rho_0 \rho_l E_1$ , devida à tensão  $v_-$  refletida pela resistência do gerador  $R_g$ , *i.e.*,

$$v(t,z) = [1 + \rho_l + \rho_0 \rho_l] E_1 \quad (5.40)$$

e o processo assim continua. Cada vez que a frente de onda de tensão atinge o extremo da linha em  $z = l$ , dá origem a uma outra frente de onda que retorna ao gerador com amplitude da frente anterior multiplicada por  $\rho_l$  (com sinal) superpondo-se às tensões já existentes na linha e cada vez que a frente de onda atinge o extremo da linha em  $z = 0$ , dá origem a uma outra frente de onda que retorna à carga com amplitude do anterior multiplicada por  $\rho_0$  (com sinal) superpondo-se às tensões já existentes na linha.

A Figura 5.10 ilustra as tensões na linha. Em abscissa está representado o comprimento da linha e em ordenada (para baixo) está representado o tempo.

Os traços em ziguezague, representam a amplitude da frente de onda propagante (no espaço e no tempo). A expressão mostrada dentro de cada triângulo corresponde à soma de todas as ondas que já se estabeleceram (e permanecem) nos dois sentidos de propagação e representa a tensão global  $v(t,z)$  naquela região do diagrama.



**Figura 5.10** Diagrama de propagação de degrau de tensão

### Método para medida de resistência de carga em linhas excitadas por degrau de tensão

O item anterior nos sugere um método para a medida de resistência de carga em uma linha sem perdas, por meio de um degrau de tensão fornecido por um gerador de resistência interna  $R_g$  igual à impedância característica da linha  $Z_0$ .

O método compara duas medidas de tensão no início da linha: uma  $v(t_1, 0)$  realizada num tempo  $t_1 < 2l/v_p$ ; outra  $v(t_2, 0)$  realizada num tempo  $t_2 > 2l/v_p$ .

A primeira medida corresponde à tensão dada por (5.35) no início da linha, *i.e.*,

$$v(t_1, 0) = E_1 = E/2 \quad \text{para} \quad 0 < t_1 < 2l/v_p. \quad (5.41)$$

A segunda, resultante de (5.37), se mantém para  $t_2 > 2l/v_p$  pois, sendo  $R_g = Z_0$ , resulta  $\rho_0 = 0$  e não há reflexões adicionais no início da linha.

Assim,

$$v(t_2, 0) = (1 + \rho_l)E/2 \quad \text{para} \quad t_2 > 2l/v_p. \quad (5.42)$$

Do quociente de (5.42) por (5.41), obtemos

$$\frac{v(t_2,0)}{v(t_1,0)} = 1 + \rho_l.$$

Porém,

$$\rho_l = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0}.$$

Daí,

$$R_l = \frac{Z_0}{2 \frac{v(t_1,0)}{v(t_2,0)} - 1}. \quad (5.43)$$

Assim, uma vez conhecida a relação  $v(t_1,0)/v(t_2,0)$ , medida com o auxílio de um osciloscópio, podemos calcular  $R_l$  por meio de (5.43).

Podemos verificar (5.43) para alguns valores notáveis da relação  $v(t_1,0)/v(t_2,0)$ .

Se  $v(t_2,0) = 2v(t_1,0)$ , então  $R_l \rightarrow \infty$ . Se  $v(t_2,0) = v(t_1,0)$ , então  $R_l = Z_0$ . Finalmente,  $v(t_2,0) = 0$ , então  $R_l = 0$ .

De um modo geral, qualquer relação  $v(t_2,0)/v(t_1,0)$  tal que

$$0 \leq \frac{v(t_2,0)}{v(t_1,0)} \leq 2$$

corresponderá a uma resistência de carga dada por (5.43).

## FONTES DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Caps. 7 e 1.

ADLER, Richard; CHU, Lan Jen; FANO, Robert M.. **Electromagnetic Energy Transmission and Radiation**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960. Cap. 4.

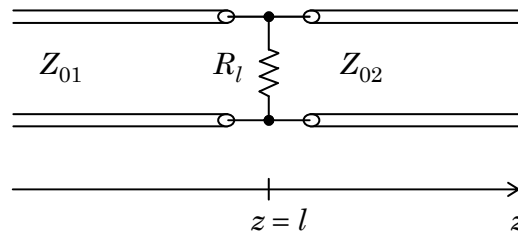
## PROBLEMAS PROPOSTOS

**P5.1** Duas linhas de transmissão sem perdas de impedâncias características  $Z_{01}$  e  $Z_{02}$  são associadas em série tendo conectada em paralelo, nos terminais da associação em  $z = l$ , uma resistência  $R_l$ , como mostra a Figura 5.11. Suponha a existência de uma onda que, proveniente de  $z < l$ , incida na conexão das linhas e da resistência e que a linha de impedância característica  $Z_{02}$  tenha comprimento infinito.

(a) Ache o coeficiente de reflexão  $\rho_l$  no ponto de conexão  $z = l$ .

(b) Ache o coeficiente de transmissão  $\tau_l$  no ponto de conexão  $z = l$ .

[Lembrete: Em  $z = l$ , a soma das correntes incidente e refletida na linha da esquerda deve ser igual à soma das correntes no resistor  $R_l$  e a transmitida na linha da direita.]



**Figura 5.11** Problema P5.1

**P5.2** Uma linha de transmissão sem perdas, inicialmente descarregada, de impedância característica  $Z_0$  e comprimento  $l$  é alimentada por um gerador de tensão ideal ( $R_g = 0$ ) com *fem* função-degrau de amplitude  $E$  e terminada em circuito aberto. Esboce a corrente fornecida pelo gerador à linha em função do tempo.

**P5.3** Uma linha de transmissão sem perdas, inicialmente descarregada, de impedância característica  $Z_0$ , comprimento  $l$  e velocidade de propagação  $v_p$  é alimentada por um gerador de tensão com *fem* função-degrau e resistência interna  $R_g = Z_0$  e está terminada numa resistência  $R_l$  de valor desconhecido. A tensão na entrada da linha é monitorada através de um osciloscópio e sofre um acréscimo de 50% no seu valor inicial após o tempo  $t = 2l/v_p$ . Determine o valor da resistência de carga.

## 6. AS LINHAS E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace mostra-se uma ferramenta muito útil para a análise de transitórios em linhas de transmissão. Em particular, presta-se à análise de linhas com perdas. Além disso, permite que os conceitos de impedância e coeficiente de reflexão sejam generalizados e interpretados como funções de rede.

### 6.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior introduzimos as linhas de transmissão e estudamos as soluções para as equações de onda para linhas sem perdas.

Neste capítulo, este estudo é ampliado de modo a incluir também as perdas das linhas e apresentamos um instrumento que permite a análise de transitórios nas mesmas, qual seja a **transformada de Laplace**.

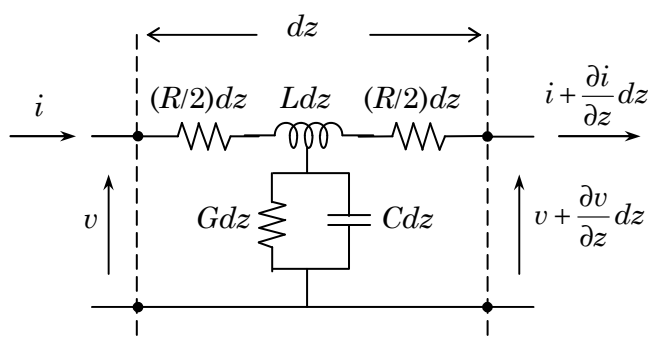
Relações entre funções temporais como, por exemplo, entre tensões e correntes ou entre componentes de tensões (como no caso do coeficiente de reflexão) passam a ser relações de funções no domínio de frequência usufruindo as vantagens das *funções de rede* (ou *funções de sistema*) vistas nos cursos de Circuitos Elétricos (ou de Teoria de Sistemas).

### 6.2 LINHAS DE TRANSMISSÃO COM PERDAS

Inicialmente, generalizemos o modelo de linha de transmissão deduzido no capítulo anterior.

Se a linha de transmissão não for ideal, mas seus condutores tiverem uma certa resistência distribuída  $R$  por unidade de comprimento e o dielétrico tiver uma certa condutância distribuída  $G$  por unidade de comprimento, devemos acrescentar estes parâmetros ao modelo apresentado na Sec. 5.3.

Isto é esquematizado no modelo ilustrado na Figura 6.1.



**Figura 6.1** Modelo distribuído de linha de transmissão com perdas

Por dedução análoga à da Sec. 5.3, verificamos que a taxa de variação da tensão ao longo da linha é da forma

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial z} = - \left[ L \frac{\partial i(t,z)}{\partial t} + Ri(t,z) \right]. \quad (6.1)$$

Do mesmo modo, a taxa de variação de corrente é

$$\frac{\partial i(t,z)}{\partial z} = - \left[ C \frac{\partial v(t,z)}{\partial t} + Gv(t,z) \right]. \quad (6.2)$$

Os novos  $L$ ,  $R$ ,  $G$  e  $C$ , além de dependerem da geometria em geral, dependem também da frequência. À indutância em corrente contínua devemos somar a indutância interna dos condutores (que é função da frequência); a resistência é função da condutividade do condutor e também da frequência (efeito pelicular); a condutância  $G$  depende das perdas dielétricas em função da frequência e  $C$  tem o mesmo valor da linha ideal.

Alguns autores deduzem os valores dos novos parâmetros para certas geometrias particulares, mas as fórmulas são, em geral, complicadas mesmo para configurações simples e, na maioria dos casos, de interesse secundário. Além disso, é necessário o conhecimento experimental da permitividade com a frequência.

O que procuramos obter na prática, então, são linhas com perdas muito pequenas (já que a perda é um efeito indesejado). Desta maneira, adotamos para a indutância o mesmo valor calculado em corrente contínua e, uma vez construída a linha (com materiais que sabidamente tenham perdas pequenas), medimos experimentalmente as perdas.

No caso de as perdas serem baixas dizemos que a linha suporta uma *onda quase TEM*.

### 6.3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LINHA COM PERDAS

#### Equações de linhas com perdas no domínio do tempo

Vamos retomar o problema de procurar soluções para as equações de linha, como fizemos no capítulo anterior, somente que agora considerando as perdas [eqs. (6.1) e (6.2)].

Derivando (6.1) em relação à distância e (6.2) em relação ao tempo, obtemos, respectivamente

$$\frac{\partial^2 v(t,z)}{\partial z^2} = - \left[ L \frac{\partial^2 i(t,z)}{\partial z \partial t} + R \frac{\partial i(t,z)}{\partial z} \right] \quad (6.3)$$

e

$$\frac{\partial^2 i(t,z)}{\partial z \partial t} = - \left[ C \frac{\partial^2 v(t,z)}{\partial t^2} + G \frac{\partial v(t,z)}{\partial t} \right]. \quad (6.4)$$



Substituindo (6.2) e (6.4) em (6.3) resulta

$$\frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} + RGv(t, z). \quad (6.5)$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i(t, z)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i(t, z)}{\partial t} + RGi(t, z). \quad (6.6)$$

Por simples inspeção, verificamos, antes de mais nada, que as soluções das equações (6.5) e (6.6) são do mesmo tipo. Desta forma, o tipo de solução que vale para uma vale, também, para a outra, o que nos simplifica o problema.

Elas são equações diferenciais em duas variáveis de dimensões diferentes. A técnica de solução direta no domínio do tempo, adotada no capítulo anterior, não se presta, em geral, a este tipo de equação. Por isto, para resolvê-las, vamos aplicar a técnica da *transformada de Laplace* às funções do tempo e obter, no domínio transformado, uma equações diferencial ordinária na variável  $z$ . Obtida a solução no domínio transformado, antitransformamo-la e obtemos a solução desejada no domínio do tempo.

### Equação das linhas com perdas no domínio de frequências

Seja, então,  $V(s, z)$  a transformada de  $v(t, z)$  e sejam conhecidas a tensão ao longo da linha e sua derivada no instante  $t = 0_-$ , respectivamente  $v(0_-, z)$  e  $v'(0_-, z)$ .

A transformada de (6.5) é, então,

$$\frac{d^2 V(s, z)}{dz^2} - (sL + R)(sC + G)V(s, z) = LC \left\{ s + \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \right\} v(0_-, z) + v'(0_-, z). \quad (6.7)$$

Como sabemos, a solução geral da equação (6.7) é composta das soluções da equação homogênea e de uma solução particular da equação completa.

As soluções da equação homogênea são aquelas obtidas com condições iniciais quiescentes, isto é, com a linha inicialmente em repouso, através de um formalismo bem definido; a solução particular da equação completa, além de depender das condições iniciais, não possui procedimento geral de cálculo. Por isso vamos explorar essencialmente as soluções da equação homogênea, deixando o estudo de condições iniciais não quiescentes a alguns casos simples apresentados, no fim do capítulo, sob o ponto de vista de superposição de efeitos.

A equação homogênea de (6.7), *i.e.*,

$$\frac{d^2 V(s, z)}{dz^2} - (sL + R)(sC + G)V(s, z) = 0, \quad (6.8)$$

tem as soluções do tipo

$$V_+(s, z) = V_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z} \quad \text{e} \quad V_-(s, z) = V_-(s, 0) e^{\gamma(s)z} \quad (6.9)$$

onde

$$\gamma(s) = \sqrt{(sL + R)(sC + G)} . \quad (6.10)$$

Então, a solução geral será

$$V(s, z) = V_+(s, z) + V_-(s, z) \quad (6.11)$$

ou seja

$$V(s, z) = V_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z} + V_-(s, 0) e^{\gamma(s)z} . \quad (6.12)$$

De nossa experiência anterior com a propagação de ondas, sabemos que a parcela  $V_+(s, z)$  diz respeito a uma onda que se propaga no sentido positivo de  $z$  e  $V_-(s, z)$  tem sentido oposto.

Da mesma forma, (6.6) tem como solução

$$I(s, z) = I_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z} + I_-(s, 0) e^{\gamma(s)z} . \quad (6.13)$$

onde  $V_+(s, 0)$ ,  $V_-(s, 0)$ ,  $I_+(s, 0)$  e  $I_-(s, 0)$  são funções de  $s$  determinadas pelas condições de contorno e, de certa forma, relacionadas entre si, como veremos a seguir.

A transformada de Laplace da equação (6.1) é

$$\frac{\partial V(s, z)}{\partial z} = -(sL + R) I(s, z) . \quad (6.14)$$

e, daí,

$$I(s, z) = -\frac{1}{(sL + R)} \frac{\partial V(s, z)}{\partial z}$$

Inserindo aí o valor de (6.12), obtemos

$$I(s, z) = \frac{V_+(s, 0) \gamma(s) e^{-\gamma(s)z}}{(sL + R)} - \frac{V_-(s, 0) \gamma(s) e^{\gamma(s)z}}{(sL + R)} . \quad (6.15)$$

Substituindo o valor de  $\gamma(s)$ , dado por (6.10), em (6.15) e depois identificando os coeficientes de (6.13) e (6.15) resultam

$$I_+(s, 0) = V_+(s, 0) \sqrt{\frac{sC + G}{sL + R}} \quad (6.16)$$

e

$$I_-(s, 0) = -V_-(s, 0) \sqrt{\frac{sC + G}{sL + R}} . \quad (6.17)$$

A relação

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{sL + R}{sC + G}} \quad (6.18)$$

é, neste caso, a *impedância característica da linha* expressa em ohms.

Podemos, então, escrever (6.13) como

$$\begin{aligned}
I(s, z) &= \frac{V_+(s, 0)}{Z_0(s)} e^{-\gamma(s)z} - \frac{V_-(s, 0)}{Z_0(s)} e^{\gamma(s)z} \\
&= \frac{1}{Z_0(s)} [V_+(s, z) - V_-(s, z)]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

da mesma forma que, por desenvolvimento análogo, poderíamos escrever

$$\begin{aligned}
V(s, z) &= Z_0(s) I_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z} - Z_0(s) I_-(s, 0) e^{\gamma(s)z} \\
&= Z_0(s) [I_+(s, z) - I_-(s, z)].
\end{aligned} \tag{6.20}$$

## 6.4 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A antitransformada das soluções das equações das soluções de (6.12) e (6.13) é, em geral, impossível por métodos analíticos uma vez que o expoente de  $e$  não é racional. Alguns casos, entretanto, têm solução explícita. É o que mostraremos a seguir.

Antes de tudo, vamos escrever  $\gamma(s)$  na forma

$$\gamma(s) = \sqrt{LC} \sqrt{\left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s + \frac{G}{C}\right)}. \tag{6.21}$$

O caso particular mais notável é aquele em que  $R/L = G/C$  do qual resulta

$$\gamma(s) = \sqrt{LC} s + R\sqrt{C/L}. \tag{6.22}$$

Neste caso, a antitransformada é extremamente simples. Por exemplo, para a transformada da tensão

$$V_+(s, z) = V_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z}$$

obtemos

$$v_+(t, z) = e^{-R\sqrt{C/L} z} v_+[(t - \sqrt{LC} z), 0]. \tag{6.23}$$

Não é difícil verificar que  $1/\sqrt{LC}$  corresponde à velocidade de fase da onda que se propaga na linha, pois qualquer informação que, no instante  $t = t_0$ , atinge o ponto  $z_0$  vai, no instante  $t = t_1$ , atingir o ponto  $z_1 = z_0 + (t_1 - t_0)/\sqrt{LC}$ . Além disso, a informação é atenuada à medida que progride, sem alterar sua forma. Por esta razão, as linhas em que  $R/L = G/C$  são chamadas de *linhas sem distorção*.

Outro caso digno de análise é aquele no qual as perdas estão essencialmente no condutor ou essencialmente no dielétrico.

Seja, por exemplo,  $G = 0$  (o significado deste limite veremos logo mais). Neste caso, escrevemos (6.21) como

$$\gamma(s) = \sqrt{LC} \sqrt{s(s + R/L)} \tag{6.24}$$

e escrevemos (6.18) como

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{s + R/L}{s}}. \quad (6.25)$$

Considerando a transformada da corrente que se propaga no sentido positivo de  $z$  dado por (6.19), *i.e.*,

$$I_+(s, z) = \frac{V_+(s, 0)}{Z_0(s)} e^{-\gamma(s)z}$$

substituímos nela os valores de  $\gamma(s)$  e  $Z_0(s)$ , dados respectivamente por (6.24) e (6.25), e obtemos

$$I_+(s, z) = V_+(s, 0) \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{\frac{s}{s + R/L}} \exp \left[ -z \sqrt{LC} \sqrt{s(s + R/L)} \right].$$

Se, no ponto  $z = 0$ , for impressa uma tensão degrau de amplitude  $E$ , ou seja,

$$V_+(s, z) = E/s$$

resulta

$$I_+(s, z) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\exp[-z \sqrt{LC} \sqrt{s(s + R/L)}]}{\sqrt{s(s + R/L)}}$$

que é uma transformada conhecida. Sua antitransformada é

$$i_+(t, z) = E \sqrt{C/L} e^{-\frac{R}{2L}t} I_0 \left( \frac{R}{2L} \sqrt{t^2 - z^2 LC} \right) u(t - z \sqrt{LC}). \quad (6.26)$$

onde  $u(\bullet)$  é a *função degrau unitário* e  $I_0(\bullet)$  é a *função de Bessel modificada de argumento imaginário e ordem zero*. Essencialmente,

$$I_0(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} I_0(v) = \frac{e^v}{\sqrt{2\pi v}}$$

representam o comportamento da função para argumentos muito pequenos ou muito grandes, respectivamente.

Não é difícil verificar que, quando a constante de tempo  $L/R$  for muito grande em relação aos tempos decorridos, o comportamento de (6.25) tende a

$$i_+(t, z) \cong E \sqrt{C/L} u(t - z \sqrt{LC})$$

que é um degrau de corrente que se propaga com velocidade  $v_p = 1/\sqrt{LC}$ . Se, ao contrário, continuar a ser observado por um tempo relativamente grande, o degrau vai se deformando à medida que se propaga.

Foi admitindo *a priori* essa generalização de constante de tempo infinita que fizemos  $G = 0$  no início de nossa dedução.

Está claro, também, que dentro dessa generalização podemos ter linhas de transmissão nas quais fazemos simultaneamente  $G = 0$  e  $R = 0$  seja uma aproximação razoável. São as linhas sem perdas, vistas no capítulo anterior, nas quais  $\gamma(s)$  é dado por

$$\gamma(s) = s\sqrt{LC} \quad (6.27)$$

e a impedância característica  $Z_0(s)$  é real dada por

$$Z_0(s) = \sqrt{L/C}. \quad (6.28)$$

Este é o caso de uma linha sem distorção e sem perdas. e não é difícil verificar que nela

$$v_+(t, z) = v_+[(t - \sqrt{LC} z), 0] \quad (6.29)$$

sendo  $v_p = 1/\sqrt{LC}$  a velocidade de propagação de fase.

No caso que  $R/L$  e  $G/C$  são comparáveis mas não são iguais, o problema fica mais complicado. Se, porém, nos restringirmos aos casos em que as perdas são pequenas (dentro do tempo observado) podemos desenvolver  $\gamma(s)$  em série, obtendo

$$\gamma(s) = s\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{sL} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{R}{sL} \right)^2 + \dots \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{G}{sC} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{G}{sC} \right)^2 + \dots \right]$$

Efetuando os produtos e depois de agrupar os termos obtemos  $\gamma(s)$  na forma

$$\gamma(s) = A(s) + sB(s) \quad (6.30)$$

onde  $A(s)$  e  $B(s)$  são funções pares de  $s$  dadas aproximadamente por

$$A(s) = \frac{1}{2} \left[ G\sqrt{\frac{L}{C}} + R\sqrt{\frac{C}{L}} \right] \quad (6.31)$$

e

$$B(s) = \sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{1}{8s^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 + \dots \right] \quad (6.32)$$

ou

$$B \cong \sqrt{LC} = 1/v_p$$

pois supusemos  $R/L$  e  $G/C$  comparáveis. Temos aproximadamente, neste caso, uma linha sem distorção.

Estes casos simples mostrados já evidenciam a complexidade do problema. Se levarmos em conta que tanto  $R$  como  $G$  são funções de frequência, a complexidade aumenta:  $R$  aumenta, devido ao efeito pelicular, com a raiz quadrada da frequência e  $G$  varia de forma muito irregular com a mesma.

## 6.5 IMPEDÂNCIA E COEFICIENTE DE REFLEXÃO NUM PONTO DA LINHA

Relações entre tensões e correntes ou entre componentes de tensões (como no caso do coeficiente de reflexão) limitadas no capítulo anterior a grandezas reais

podem ser generalizadas como *funções de rede* no domínio de frequência, *i.e.*, como o quociente entre transformadas de Laplace de funções temporais.

Assim, definimos a *impedância*  $Z(s,z)$ , no domínio  $s$  num ponto  $z$  da linha, como o quociente da transformada de Laplace da tensão  $V(s,z)$  pela transformada da corrente  $I(s,z)$ , *i.e.*,

$$Z(s,z) = \frac{V(s,z)}{I(s,z)}. \quad (6.33)$$

Uma expressão alternativa para a mesma é obtida usando (6.12) e (6.19), ou seja,

$$Z(s,z) = Z_0(s) \frac{V_+(s,z) + V_-(s,z)}{V_+(s,z) - V_-(s,z)}. \quad (6.34)$$

Também, como uma generalização dos conceitos apresentados na Sec. 5.5 do capítulo anterior, definimos o coeficiente de reflexão  $\rho(s,z)$  como o quociente da transformada de Laplace da componente de tensão da onda que se propaga no sentido negativo de  $z$  pela transformada da componente de tensão da onda que se propaga no sentido positivo de  $z$ , *i.e.*,

$$\rho(s,z) = \frac{V_-(s,z)}{V_+(s,z)}. \quad (6.35)$$

Daí, fazendo uso de (6.9) resulta

$$\rho(s,z) = \frac{V_-(s,0)}{V_+(s,0)} e^{2\gamma(s)z}. \quad (6.36)$$

Por outro lado, substituindo (6.35) em (6.34), obtemos

$$Z(s,z) = Z_0(s) \frac{1 + \rho(s,z)}{1 - \rho(s,z)}. \quad (6.37)$$

que resolvida em  $\rho(s,z)$  nos dá

$$\rho(s,z) = \frac{Z(s,z) - Z_0(s)}{Z(s,z) + Z_0(s)}. \quad (6.38)$$

### Módulo do coeficiente de reflexão

É oportuno, neste ponto, tecer algumas considerações sobre o módulo de  $\rho(s,z)$ .

Em primeiro lugar, devemos lembrar que  $\rho(s,z)$  é uma *função de rede*, ou seja, é o quociente da transformada de Laplace da resposta [no caso  $V_-(s,z)$ ] pela transformada de Laplace da excitação [no caso  $V_+(s,z)$ ], assim como, também, é uma função de rede a impedância num ponto qualquer da linha [quociente de  $V(s,z)$  por  $I(s,z)$ ].

Em segundo lugar, devemos lembrar que na transformada de Laplace a parte real de  $s$  deve ser positiva para que a integral de definição convirja. Assim sendo,

as propriedades das funções de rede devem ser deduzidas com a premissa que  $\text{Re}(s) > 0$ .

Em terceiro lugar, completando as duas primeiras proposições, a teoria das redes elétricas demonstra que a impedância  $Z(s)$  de um bipolo passivo é uma *função real-positiva*, i.e., satisfaz às propriedades:

1.  $Z(s)$  é real para  $s$  real;
2. A parte real de  $Z(s)$  é maior que zero quando a parte real de  $s$  for maior que zero, i.e.,

$$\text{Re}[Z(s)] > 0 \quad \text{para} \quad \text{Re}(s) > 0.$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar que *nas linhas sem distorção o módulo de coeficientes de reflexão  $\rho(s,z)$  é menor ou igual a 1 para  $\text{Re}(s) > 0$* .

Para essas linhas temos

$$Z_0 = \sqrt{L/C}, \quad (6.39)$$

como pode ser verificado em (6.18). Nas linhas práticas, em geral, (6.39) é uma aproximação bastante aceitável.

Assim, escrevemos

$$\rho(s,z) = \frac{j \text{Im}[Z(s,z)] - \{Z_0 - \text{Re}[Z(s,z)]\}}{j \text{Im}[Z(s,z)] + \{Z_0 + \text{Re}[Z(s,z)]\}}. \quad (6.40)$$

de onde, multiplicando pela expressão conjugada, obtemos

$$|\rho(s,z)|^2 = \frac{\text{Im}^2[Z(s,z)] + \{Z_0 - \text{Re}[Z(s,z)]\}^2}{\text{Im}^2[Z(s,z)] + \{Z_0 + \text{Re}[Z(s,z)]\}^2}. \quad (6.41)$$

Desenvolvendo os quadrados e agrupando os termos, resulta

$$|\rho(s,z)|^2 = \frac{|Z(s,z)|^2 + Z_0^2 - 2Z_0 \text{Re}[Z(s,z)]}{|Z(s,z)|^2 + Z_0^2 + 2Z_0 \text{Re}[Z(s,z)]}. \quad (6.42)$$

Sendo  $Z(s,z)$  uma função real-positiva, ou seja,

$$\text{Re}[Z(s,z)] > 0 \quad \text{para} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (6.43)$$

e lembrando que tanto o numerador como o denominador são módulos ao quadrado e portanto não negativos, concluímos facilmente, tendo em vista o termo negativo em numerador, que (6.42) é sempre menor ou igual a 1 para  $\text{Re}(s) > 0$ , ou seja,

$$|\rho(s,z)| \leq 1 \quad \text{para} \quad \text{Re}(s) > 0 \quad (6.44)$$

como queríamos demonstrar.

### Impedância num ponto genérico

Vamos retomar a expressão (6.36), aplicando-a a um ponto particular  $z = z_1$  da linha. Para simplicidade de notação, tornamos a variável  $s$  implícita, escrevendo

$$\rho(z_1) = \frac{V_-(0)}{V_+(0)} e^{2\gamma z_1}. \quad (6.45)$$

Em consequência de (6.36) e (6.45) obtemos

$$\rho(z) = \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)}. \quad (6.46)$$

Daí, entrando com este valor em (6.37) resulta

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)}}{1 - \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)}}. \quad (6.47)$$

Por outro lado, a expressão (6.38) aplicada ao ponto  $z = z_1$  nos dá

$$\rho(z_1) = \frac{Z(z_1) - Z_0}{Z(z_1) + Z_0} \quad (6.48)$$

de tal forma que da substituição desta expressão em (6.47) obtemos

$$Z(z) = Z_0 \left\{ \frac{Z(z_1) + Z_0 + [Z(z_1) - Z_0] e^{2\gamma(z-z_1)}}{Z(z_1) + Z_0 - [Z(z_1) - Z_0] e^{2\gamma(z-z_1)}} \right\}. \quad (6.49)$$

Então, multiplicando o numerador e o denominador desta equação por  $e^{-\gamma(z-z_1)}$  e agrupando convenientemente os termos, obtemos

$$Z(z) = Z_0 \left\{ \frac{Z(z_1)[e^{\gamma(z-z_1)} + e^{-\gamma(z-z_1)}] - Z_0[e^{\gamma(z-z_1)} - e^{-\gamma(z-z_1)}]}{-Z(z_1)[e^{\gamma(z-z_1)} - e^{-\gamma(z-z_1)}] + Z_0[e^{\gamma(z-z_1)} + e^{-\gamma(z-z_1)}]} \right\}$$

ou

$$Z(z) = Z_0 \left[ \frac{Z(z_1) - Z_0 \tanh \gamma(z - z_1)}{Z_0 - Z(z_1) \tanh \gamma(z - z_1)} \right]. \quad (6.50)$$

Esta fórmula é extremamente importante porque relaciona a impedância num ponto genérico da linha com a impedância num ponto conhecido em função da distância entre ambos e dos parâmetros da linha.

## 6.6 ONDE ESTAMOS?

Neste capítulo, generalizamos o modelo de linha, do capítulo anterior, para incluir perdas e introduzimos a técnica da transformada de Laplace para a abordagem das mesmas. Daí, especulamos as várias soluções possíveis numa linha infinita e fomos mais além, chegando até a relacionar a impedância num ponto genérico em função da impedância num ponto dado. Esse desenvolvimento foi obtido considerando as linhas infinitas e o resultado que seguiu-se à dedução das equações de onda, agora incluindo perdas, foi apenas consequência de especulações matemáticas (com algumas aproximações ditadas pelo bom senso). Assim, por exemplo, não fizemos considerações com respeito à origem de  $V_+(s, z)$  e de  $V_-(s, z)$  [ou, com  $s$  implícito,  $V_+(z)$  e  $V_-(z)$ ]; apenas as consideramos como soluções possíveis às equações de ondas deduzidas.



O passo seguinte, agora, será aplicarmos as ferramentas de trabalho que reunimos a uma linha que tenha um comprimento finito e seja alimentada por um gerador de impedância conhecida e terminada numa carga conhecida. Esta tarefa será, basicamente, uma interpretação física do tratamento matemático feito acima. É o que veremos a seguir.

## 6.7 LINHAS FINITAS

Vamos particularizar aos poucos nossas relações gerais, considerando inicialmente uma linha semi-infinita, *i.e.*, uma linha alimentada por um gerador de impedância interna  $Z_g(s)$  e força eletromotriz com transformada  $E_g(s)$ , colocada em  $z = 0$  com a linha estendendo-se até  $z \rightarrow \infty$ .

Neste caso, evidentemente, as soluções das equações de onda se reduzem a

$$V(s, z) = V_+(s, z) = V_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z}. \quad (6.51)$$

e

$$I(s, z) = I_+(s, z) = I_+(s, 0) e^{-\gamma(s)z}. \quad (6.52)$$

isto porque a linha é excitada somente em  $z = 0$  e esta excitação se propaga indefinidamente, sem encontrar obstáculos, no sentido positivo de  $z$ , não havendo nenhum motivo para que a energia se propague no sentido negativo de  $z$ .

Das expressões (6.16), (6.18), (6.51) e (6.52) concluímos que a impedância em qualquer ponto da linha é

$$Z(s, z) = \frac{V(s, z)}{I(s, z)} = \frac{V_+(s, z)}{I_+(s, z)} = Z_0(s). \quad (6.53)$$

*i.e.*, a impedância em qualquer ponto de uma linha semi-infinita é igual à sua impedância característica.

Vejamos, agora, o que acontece quando truncamos a linha acima em  $z = l$  e colocamos neste ponto uma carga genérica  $Z(s)$  (que pode, inclusive, ser um circuito aberto ou um curto-circuito). Nesta carga temos uma tensão  $V_l(s)$  e uma corrente  $I_l(s)$ . [Vamos afetar de índices as variáveis externas, por exemplo  $Z_l(s)$ , para distingui-las das funções de ponto na linha, por exemplo  $Z(s, l)$ .]

Evidentemente, as funções na linha devem satisfazer às condições de contorno. Assim,  $Z(s, l) = Z_l(s)$ ,  $V(s, l) = V_l(s)$  e  $I(s, l) = I_l(s)$ .

De (6.48) temos, então,

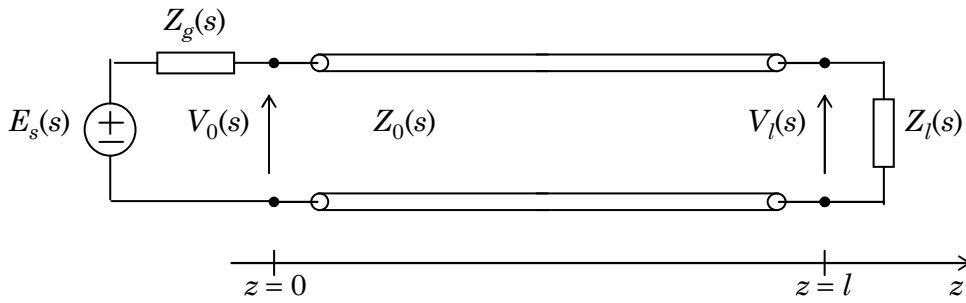
$$\rho_l(s) = \frac{Z_l(s) - Z_0(s)}{Z_l(s) + Z_0(s)} = \frac{Z(s, l) - Z_0(s)}{Z(s, l) + Z_0(s)} = \rho(s, l). \quad (6.54)$$

Observamos, então, que quando  $Z_l(s) = Z_0(s)$  temos  $\rho_l(s) = 0$ , e isto significa que não há onda refletida. Em consequência, a linha se comporta como se fosse semi-infinita e a impedância em qualquer ponto da linha é igual a  $Z_0$ .

Quando tal não acontece, uma parte da energia incidente é refletida e volta ao gerador; temos eventualmente uma nova reflexão em  $z = 0$  [quando  $Z_g(s) \neq Z_0(s)$ ] e uma nova componente propagando no sentido positivo de  $z$ ; e, assim, o processo continua indefinidamente.

## 6.8 LINHA EXCITADA COM UM GERADOR DE TENSÃO

Consideremos um gerador de força eletromotriz  $e_s(t)$ , cuja transformada de Laplace seja  $E_s(s)$ , e com impedância interna  $Z_g(s)$  alimentando uma linha de transmissão de impedância característica  $Z_0(s)$  e comprimento  $l$ , terminada por uma carga  $Z_l(s)$ , como mostrado na Figura 6.2.



**Figura 6.2** Linha com gerador e carga em seus extremos

Mais uma vez, por simplicidade de notação, vamos deixar a variável  $s$  implícita escrevendo  $E_s$  em vez de  $E_s(s)$ ,  $Z_l$  em vez de  $Z_l(s)$ ,  $Z(z)$  em vez de  $Z(s, z)$  e assim por diante.

### Tensão na entrada da linha

Expressamos, inicialmente, a impedância  $Z(0)$  na entrada da linha aplicando (6.47) para  $z = 0$ , em função do coeficiente de reflexão  $\rho_l$  na carga  $Z_l$  (ou seja, para  $z_1 = l$ ), i.e.,

$$Z(0) = Z_0 \frac{1 + \rho_l e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_l e^{-2\gamma l}}. \quad (6.55)$$

A tensão transformada na entrada da linha  $V_0$  é dada, então, pelo divisor de tensão formado por  $Z_g$  e  $Z(0)$ . Assim,

$$V_0 = \frac{E_s Z(0)}{Z_g + Z(0)}. \quad (6.56)$$

Substituindo em (6.56) o valor de  $Z(0)$  dado por (6.55), temos

$$V_0 = \frac{E_s Z_0 [1 + \rho_l e^{-2\gamma l}]}{Z_g [1 - \rho_l e^{-2\gamma l}] + Z_0 [1 + \rho_l e^{-2\gamma l}]}$$

ou reagrupando os termos

$$V_0 = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} \frac{[1 + \rho_l e^{-2\gamma l}]}{\left[1 - \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \rho_l e^{-2\gamma l}\right]}. \quad (6.57)$$

Se reconhecermos que o termo

$$\rho_0 = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (6.58)$$

é, de acordo com (6.48), o coeficiente de reflexão da onda  $V_-(z)$  que atingindo o gerador se reflete e volta a dar uma componente no sentido positivo de  $z$ , temos de (6.57),

$$V_0 = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} \frac{[1 + \rho_l e^{-2\gamma l}]}{[1 - \rho_0 \rho_l e^{-2\gamma l}]}. \quad (6.59)$$

Quando, de acordo com (6.44), o módulo do coeficiente de reflexão for menor ou igual à unidade, podemos desenvolver o denominador de (6.59) em série, obtendo

$$V_0 = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} [1 + \rho_l e^{-2\gamma l}] [1 + (\rho_0 \rho_l) e^{-2\gamma l} + (\rho_0 \rho_l)^2 e^{-4\gamma l} + \dots]$$

ou efetuando os produtos

$$V_0 = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} [1 + \rho_l (1 + \rho_0) e^{-2\gamma l} + \rho_l^2 \rho_0 (1 + \rho_0) e^{-4\gamma l} + \dots] \quad (6.60)$$

$$\dots + \rho_l^i \rho_0^{(i-1)} (1 + \rho_0) e^{-2i\gamma l} + \dots]$$

A interpretação física desta expressão é feita facilmente quando a linha não tem perdas ou tem perdas pequenas (e, em consequência,  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ ) e as impedâncias de terminação são resistivas. Neste caso,  $Z_0$ ,  $Z_g$ ,  $Z_l$ ,  $\rho_0$  e  $\rho_l$  são grandezas reais e a anti-transformada de (6.60) nos dá

$$v_0(t) = \frac{Z_0}{(Z_g + Z_0)} [e_s(t) + \rho_l (1 + \rho_0) e^{-2At} e_s(t - 2Bl) + \dots] \quad (6.61)$$

$$\dots + \rho_l^i \rho_0^{(i-1)} (1 + \rho_0) e^{-2iAt} e_s(t - 2iBl) + \dots]$$

onde  $A$  e  $B$  são dados pelas expressões (6.31) e (6.32), respectivamente.

Verificamos, então, que  $v_0(t)$  consiste em uma tensão  $[Z_0/(Z_g + Z_0)]e_s(t)$  até o instante  $t = 2Bl$ ; em seguida, é somada a tensão  $[Z_0/(Z_g + Z_0)]e^{-2At}e_s(t - 2Bl)$  até o instante  $t = 4Bl$ ; e assim sucessivamente.

O problema fica mais difícil quando  $Z_0$ ,  $Z_g$ ,  $Z_l$ ,  $\rho_0$  e  $\rho_l$  são, em geral, funções de  $s$ . Se bem que neste caso o efeito seja *basicamente o mesmo*, o atraso da informação se dá na anti-transformada dos produtos

$$\mathfrak{E}^{-1} \left[ \frac{Z_0}{(Z_g + Z_0)} \rho_l^i \rho_0^{(i-1)} (1 + \rho_0) E_s e^{-2i\gamma l} \right]$$

o que torna a manipulação dos dados essencialmente mais complicada.

### Tensão no fim da linha

Vamos agora deduzir a expressão da tensão na carga,  $V_l$ , que é a tensão no fim da linha  $V(l)$ .

Para isso recorreremos à expressão (6.12), com  $s$  implícito, que, escrita de forma a pôr o termo  $V_+(0) e^{-\gamma z}$  em evidência, nos dá

$$V(z) = V_+(0) e^{-\gamma z} \left[ 1 + \frac{V_-(0)}{V_+(0)} e^{2\gamma z} \right] \quad (6.62)$$

ou de acordo com (6.36), também com  $s$  implícito,

$$V(z) = V_+(0) e^{-\gamma z} [1 + \rho(z)] \quad (6.63)$$

que aplicada num ponto  $z = z_1$  nos dá

$$V(z_1) = V_+(0) e^{-\gamma z_1} [1 + \rho(z_1)]. \quad (6.64)$$

Substituindo em (6.64) o valor de (6.46) obtemos

$$V(z) = V_+(0) e^{-\gamma z} [1 + \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)}]. \quad (6.65)$$

Assim, o quociente de (6.64) por (6.65) nos dá

$$\frac{V(z_1)}{V(z)} = e^{-\gamma(z_1-z)} \frac{[1 + \rho(z_1)]}{[1 + \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)}]} \quad (6.66)$$

que, para  $z = 0$  nos  $z_1 = l$ , resulta

$$V_l = V_0 e^{-\gamma l} \frac{(1 + \rho_l)}{(1 + \rho_l e^{-2\gamma l})} \quad (6.67)$$

onde  $V_l = V(l)$ ,  $V_0 = V(0)$  e  $\rho_l = \rho(l)$ , como de costume.

Entrando com o valor de (6.59) em (6.67), obtemos

$$V_l = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} e^{-\gamma l} \frac{(1 + \rho_l)}{(1 - \rho_0 \rho_l e^{-2\gamma l})}. \quad (6.68)$$

Da mesma forma que fizemos com (6.59), podemos desenvolver o denominador em série e depois agrupar os termos obtendo

$$V_l = \frac{E_s Z_0}{(Z_g + Z_0)} [(1 + \rho_l) e^{-\gamma l} + (1 + \rho_l) \rho_0 \rho_l e^{-3\gamma l} + \dots] \quad (6.69)$$

$$\dots + (1 + \rho_l) (\rho_0 \rho_l)^i e^{-(2i+1)\gamma l} + \dots]$$

A interpretação e antitransformação de (6.69) é feita da mesma forma que para (6.60). Vale destacar, porém, que a excitação inicial só atinge a carga depois de decorrido um tempo  $t = Bl = l/v_p$ .

Esta composição de tensões através da linha e ao longo do tempo pode ser representada num gráfico na variáveis  $z$  e  $t$ , onde podemos acompanhar a adição das parcelas nos pontos de descontinuidade da linha ao longo do tempo de modo semelhante àquele feito nas Figuras 5.9 e 5.10 do capítulo anterior, para as excitações pulso e degrau (dito *método de ziguezague*).

Observamos, porém, que o método de ziguezague, que mostra-se bastante prático em casos simples, como aqueles citados acima, requer uma aplicação muito mais elaborada em linhas com perdas (pois a frente de onda sofre atenuação à medida que progride) e com excitações funções do tempo (pois as contribuições à onda total, em cada região do diagrama, não se mantêm constantes).

Gráficos similares também podem ser traçados para correntes, lembrando porém, que o coeficiente de reflexão para as correntes é o negativo do correspondente coeficiente de reflexão para as tensões.

### Exemplo 6.1

Considere uma linha sem perdas de comprimento  $l$ , alimentada por um gerador de tensão função-degrau de *fem*  $e_s(t) = Eu(t)$  com resistência interna  $R_g$  igual à impedância característica a linha  $Z_0$ . Determine a tensão  $v_0(t)$  na entrada da linha quando a terminação da mesma for:

- (a)  $Z_l = Z_0$ ;
- (b)  $Z_l = 0$ ;
- (c)  $Z_l \rightarrow \infty$ .

*Solução:*

Neste exemplo, vamos aplicar as fórmulas deduzidas acima, das quais obtemos  $\gamma = sB = s\sqrt{LC}$  e  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ . Além disso, sendo a impedância do gerador  $R_g$  igual a  $Z_0$ , do que decorre  $\rho_0 = 0$ .

Com essas hipóteses, obtemos de (6.60)

$$V_0 = \frac{E_s}{2}(1 + \rho_l e^{-2sBl}).$$

Vemos que não há múltipla reflexão. Há, apenas, uma contribuição extra a  $v_0(t)$  que ocorre no instante  $t = 2Bl$ . Então, para os valores de  $Z_l$  indicados temos:

- (a) Para  $Z_l = Z_0$  resulta  $\rho_l = 0$  e obtemos

$$v_0(t) = \frac{1}{2}e_s(t).$$

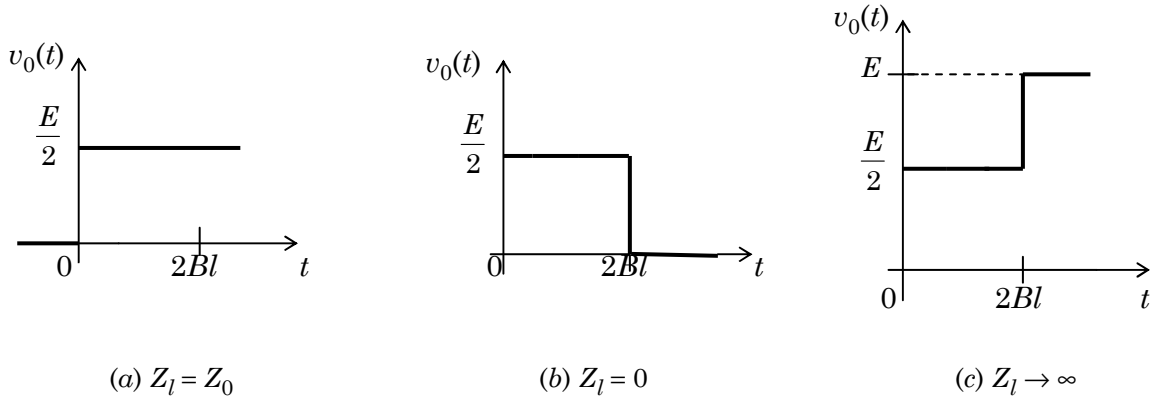
- (b) Para  $Z_l = 0$  resulta  $\rho_l = -1$  e obtemos

$$v_0(t) = \frac{1}{2}[e_s(t) - e_s(t - 2Bl)].$$

(c) Para  $Z_l \rightarrow \infty$  resulta  $\rho_l = 1$  e obtemos

$$v_0(t) = \frac{1}{2}[e_s(t) + e_s(t - 2Bl)].$$

As Figuras 6.3a, 6.3b e 6.3c representam, respectivamente, para os casos a, b e c a tensão  $v_0(t)$  quando a linha é excitada por um degrau de tensão, ou seja,  $v_0(t) = Eu(t)$ .



**Figura 6.3** Exemplo 6.1 (tensão na entrada de linha sem perdas)

*Observação:*

- O problema básico apresentado neste exemplo é o mesmo estudado na Sec. 5.6 do capítulo anterior. Note, contudo, que aqui foram obtidas formas de onda de tensão, ilustradas nas várias partes da Figura 6.3, referem-se a um ponto da linha (sua entrada) *ao longo do tempo* enquanto que lá as formas de onda de tensão, ilustradas nas Figuras 5.9b e 5.9c, são referidas *ao longo da linha* em instantes diferentes.

### Exemplo 6.2

Considere uma linha de transmissão sem perdas de comprimento  $l$ , alimentada por um gerador de tensão de *fem*  $e_s(t) = Eu(t)$  com resistência interna  $R_g$  igual à impedância característica da linha  $Z_0$ . Determine a tensão  $v_0(t)$  na entrada da linha quando a terminação da mesma for um capacitor de capacitância  $C$ .

*Solução:*

Este é um exemplo em que  $\rho_l$  não é real.

De fato, sendo

$$Z_l = \frac{1}{sC}$$

decorre

$$\rho_l = \frac{1 - sCZ_0}{1 + sCZ_0} = 1 - \frac{2sCZ_0}{1 + sCZ_0}.$$

Como no exemplo anterior, obtemos de (6.60)

$$V_0 = \frac{E_s}{2} (1 + \rho_l e^{-2sBl})$$

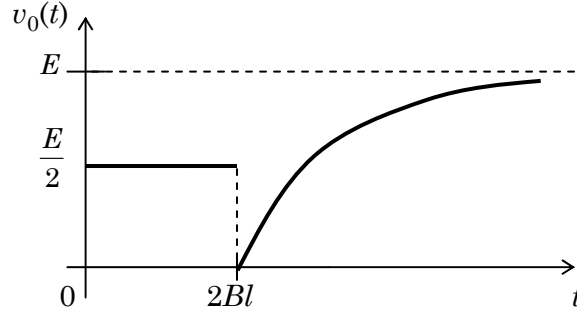
e, então,

$$V_0 = \frac{E_s}{2} + \frac{E_s}{2} \left[ 1 - \frac{2s}{s + \frac{1}{CZ_0}} \right] e^{-2sBl}$$

Sendo a *fem* do gerador uma função degrau, temos  $E_s(s) = E/s$  e a anti-transformada da expressão acima nos dá

$$v_0(t) = \frac{E}{2} \left\{ u(t) + \left[ 1 - 2e^{-\frac{t-2Bl}{CZ_0}} \right] u(t-2Bl) \right\}$$

cuja forma de onda é representada na Figura 6.4.



**Figura 6.4** Exemplo 6.2

Observamos, então, um comportamento interessante. Até o instante  $t = 2Bl$ , a entrada da linha desconhece a carga, porque a informação que saiu do gerador em  $t = 0$  demora um tempo  $t = 2Bl$  para atingir a carga e voltar.

Em seguida, a frente de onda que volta ao gerador no instante  $t = 2Bl$ , encontra o capacitor descarregado (e, portanto, se comportando como um curto-circuito) e, como podemos verificar, a tensão na entrada da linha nesse instante é a mesma como se fosse  $Z_l = 0$  (cf. Figura 6.3b).

No entanto, à medida que o capacitor se carrega, a corrente tomada por ele diminui exponencialmente e a carga tende a se comportar como um circuito aberto. Então, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $Z_l \rightarrow \infty$  e o comportamento assintótico das tensões nas Figuras 6.4 e 6.3c coincide.

### 6.9 CONDIÇÕES INICIAIS NÃO QUIESCENTES EM TRANSITÓRIOS

Na Sec. 6.3 desenvolvemos as soluções das equações de linhas para condições iniciais quiescentes. Vamos estender, agora, essas soluções para condições iniciais não quiescentes.

Isto, em princípio, pode ser feito porque, sendo a linha de transmissão um sistema linear, podemos superpor efeitos, sendo a condição inicial responsável por parte da resposta e a excitação pela outra parte da resposta. Isto é melhor explicado com um exemplo.

#### Exemplo 6.3

Seja uma linha de transmissão sem perdas, comprimento  $l$  e impedância característica  $Z_0$ , carregada inicialmente através de uma bateria de  $fem$   $E = 1$  volt e resistência interna  $2Z_0$ , conforme ilustra a Figura 6.5. No instante  $t = 0$ , a chave  $S$  é fechada, pondo em curto-circuito o fim da linha. Calcule a corrente através do curto.

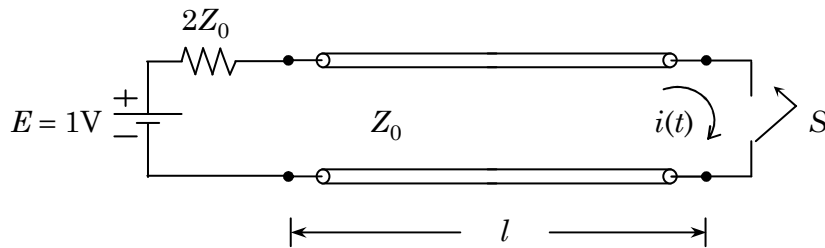


Figura 6.5 Exemplo 6.3

*Solução:*

O problema pode ser admitido como sendo composto de dois efeitos: um deles correspondendo à linha estável (Figura 6.6a) e outro correspondendo a termos um gerador de  $fem$   $-Eu(t)$  aplicado entre os terminais da chave  $S$  (Figura 6.6b). Note que tomamos  $z = 0$  junto à chave, pois é aí que tem origem o transitório.

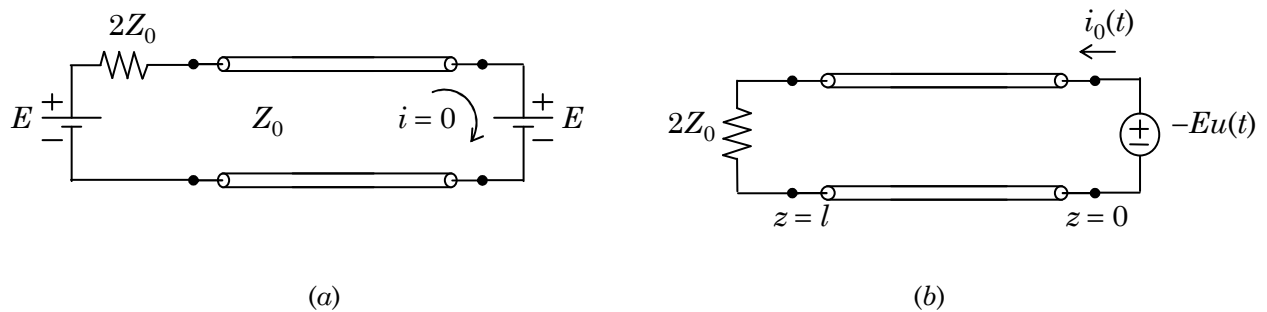


Figura 6.6 Exemplo 6.3 (continuação)



Para o circuito da Figura 6.6b, temos

$$I(0) = \frac{V(0)}{Z(0)} = -\frac{E}{s} \frac{1}{Z(0)} \quad (6.70)$$

Fazendo uso de (6.55) obtemos

$$I(0) = -\frac{E}{sZ_0} \frac{[1 - \rho_l e^{-2\gamma l}]}{[1 + \rho_l e^{-2\gamma l}]} \quad (6.71)$$

na qual, de acordo com (6.54), temos

$$\rho_l = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3}$$

Desenvolvendo o denominador de (6.71), como na Sec. 6.7, temos

$$I(0) = -\frac{E}{sZ_0} [1 - 2\rho_l e^{-2\gamma l} + 2\rho_l^2 e^{-4\gamma l} - 2\rho_l^3 e^{-6\gamma l} + \dots]$$

Substituindo aí o valor de  $\rho_l$  e anti-transformando, obtemos

$$i_0(t) = -\frac{E}{Z_0} \left[ u(t) - \frac{2}{3} u(t - 2Bl) + \frac{2}{9} u(t - 4Bl) - \frac{2}{27} u(t - 6Bl) + \dots \right]$$

na qual fizemos  $\gamma = sB$  por ser a linha sem perdas.

Note que o valor final será

$$-\frac{E}{Z_0} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right] = -\frac{E}{2Z_0}$$

A corrente  $i(t)$  será a soma algébrica das correntes junto à chave  $S$  que, de acordo com a Figura 6.6, é

$$i(t) = -i_0(t) + 0.$$

Então,

$$i(t) = \frac{E}{Z_0} \left[ u(t) - \frac{2}{3} u(t - 2Bl) + \frac{2}{9} u(t - 4Bl) - \frac{2}{27} u(t - 6Bl) + \dots \right].$$

## FONTES DE CONSULTA

- RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Caps. 7 e 1.
- ADLER, Richard; CHU, Lan Jen; FANO, Robert M.. **Electromagnetic Energy Transmission and Radiation**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960. Cap. 4.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

- P6.1** Determine o coeficiente de reflexão  $\rho_l$  numa impedância de carga  $RLC$ -paralelo..
- P6.2** Expresse a tensão, no domínio do tempo, na entrada de uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica  $Z_0$ , alimentada por um gerador de impedância interna  $Z_g = Z_0$  e de força eletromotriz função-degrau de amplitude  $E$ , terminada por uma indutância pura  $L$ .
- P6.3** Uma linha de transmissão sem perdas, de impedância característica  $Z_0 = 50 \Omega$  e velocidade de propagação  $2 \times 10^8$  m/s, se estendendo desde  $z = 0$  m até  $z = l = 250$  m, é terminada em  $z = l$  numa carga resistiva  $R_l = 30 \Omega$ . A linha está inicialmente descarregada e no instante  $t = 0$  s é conectado nos seus terminais em  $z = 0$  m um gerador de tensão com resistência interna  $R_g = 100 \Omega$  tendo por *fem* uma função degrau de amplitude  $E = 30$  V. Ache expressões analíticas para:
- (a) a tensão  $v_0(t)$  no início da linha;
  - (b) a corrente  $i_l(t)$  na carga.
- P6.4** Uma linha de transmissão sem perdas, de impedância característica  $Z_0$  e comprimento  $l$ , carregada com uma tensão contínua  $V$ , é curto-circuitada na entrada no instante  $t = 0$ . Expresse e esboce a forma de onda da corrente na entrada da linha em função do tempo.
- P6.5** Uma linha ideal de comprimento  $l$  é terminada em curto-circuito e alimentada por um gerador de corrente função-rampa da forma  $i(t) = (bt/l) u(t)$ . Expresse e esboce a tensão na entrada da linha.
- P6.6** Repita o problema P6.5 considerando a linha com perdas mas sem distorção, com  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $l = 1$  km,  $A = 10^{-4}$  Np/m,  $b = 10^6$  A.m/s e  $v_p = 2 \times 10^6$  m/s.
- P6.7** A linha e o capacitor da Figura 6.10 estão inicialmente carregados com  $V$  volts. Em  $t = 0$  a chave  $S$  é fechada. Determine e esboce a tensão no capacitor em função do tempo.

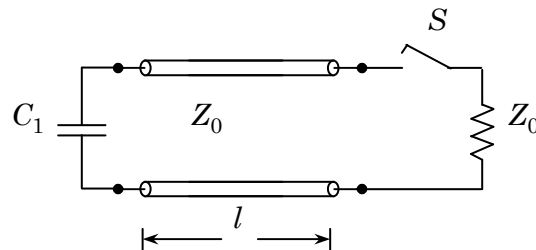


Figura 6.7 Problema P6.7



## 7. LINHAS DE TRANSMISSÃO EM REGIME PERMANENTE

Os conceitos de linhas de transmissão são aplicados a excitações em regime permanente senoidal com a introdução dos fasores. São abordados métodos numéricos e gráficos de solução dos problemas e, em particular, é introduzida a Carta de Smith como instrumento gráfico de solução dos mesmos.

### 7.1 INTRODUÇÃO

Suponha que uma linha de transmissão seja excitada por um gerador de frequência  $\omega$  e que, depois de passada a fase transitória se estabeleça na linha uma tensão

$$v(t, z) = V_m(\omega, z) \cos(\omega t + \psi). \quad (7.1)$$

A validade desta suposição só poderá ser confirmada se a expressão (7.1) satisfizer à equação de onda

$$\frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial v(t, z)}{\partial t} + RGv(t, z) \quad (7.2)$$

deduzida no capítulo anterior.

Isto pode ser feito diretamente, mas é formalmente mais fácil de ser feito se escrevermos (7.1) na forma

$$v(t, z) = \text{Re} [V_m(\omega, z) e^{j\psi} e^{j\omega t}] \quad (7.3)$$

ou

$$v(t, z) = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{V}(\omega, z) e^{j\omega t}] \quad (7.4)$$

onde  $\text{Re}(\bullet)$  significa "parte real de" e

$$\dot{V}(\omega, z) = \frac{V_m(\omega, z) e^{j\psi}}{\sqrt{2}} \quad (7.5)$$

é o *fasor* da tensão expresso em volts eficazes. Por outro lado, chamamos o produto  $V_m(\omega, z) e^{j\psi} = \sqrt{2} \dot{V}(\omega, z)$  de *amplitude complexa*.

Então, substituindo (7.4) em (7.2) resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} \frac{\partial^2 \dot{V}(\omega, z)}{\partial z^2} \right] &= \operatorname{Re} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} (-\omega^2) LC \dot{V}(\omega, z) \right] + \\ &+ \operatorname{Re} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} j\omega (RC + LG) \dot{V}(\omega, z) \right] + \operatorname{Re} \left[ \sqrt{2} e^{j\omega t} RG \dot{V}(\omega, z) \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

porque os operadores  $\operatorname{Re}$ ,  $\partial/\partial t$ ,  $\partial^2/\partial t^2$  e  $\partial^2/\partial z^2$  são lineares e podem ser permutados.

Eliminando o operador  $\operatorname{Re}$ , em face do teorema da Sec. 1.7, e depois dividindo (7.6) por  $\sqrt{2} e^{j\omega t}$  (que nunca se anula), obtemos

$$\frac{\partial^2 \dot{V}(\omega, z)}{\partial z^2} = (-\omega^2) LC \dot{V}(\omega, z) + j\omega (RC + LG) \dot{V}(\omega, z) + RG \dot{V}(\omega, z)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \dot{V}(\omega, z)}{\partial z^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \dot{V}(\omega, z) \quad (7.7)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 \dot{V}(\omega, z)}{\partial z^2} = \gamma^2(\omega) \dot{V}(\omega, z) \quad (7.8)$$

onde

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (7.9)$$

Observamos, então, que as soluções de (7.7) são as mesmas de (6.8) do capítulo anterior, com a substituição de  $s$  por  $j\omega$ , ou seja,

$$\dot{V}_+(\omega, z) = \dot{V}_+(\omega, 0) e^{-\gamma z} \quad \text{e} \quad \dot{V}_-(\omega, z) = \dot{V}_-(\omega, 0) e^{\gamma z} \quad (7.10)$$

O procedimento formal, em seguida, é análogo em regime permanente e em regime transitório, bastando substituir  $s$  por  $j\omega$  em todas as fórmulas transformadas do capítulo anterior. No entanto, é *importante* observar que os significados de  $V(s, z)$  e de  $\dot{V}(\omega, z)$  são *diferentes* nas duas soluções.

Em regime transitório,  $V(s, z)$  representa a *transformada de Laplace* da tensão  $v(t, z)$  e, portanto, a solução no domínio do tempo é dada por

$$v(t, z) = \mathcal{L}^{-1}[V(s, z)].$$

Em regime permanente,  $\dot{V}(\omega, z)$  é o fasor da tensão  $v(t, z)$  e, portanto, a solução no domínio do tempo é dada por

$$v(t, z) = \operatorname{Re} [\sqrt{2} \dot{V}(\omega, z) e^{j\omega t}].$$

*Em resumo*, concluímos que as soluções no domínio de frequência são formalmente as mesmas, tanto em regime transitório como em regime permanente, mas as soluções no domínio do tempo são obtidas das primeiras por operações diferentes em cada um dos casos.

## 7.2 SOLUÇÕES EM REGIME PERMANENTE

Tudo aquilo que concluímos para a equação da tensão (em relação a substituir  $s$  por  $j\omega$  nas expressões transformadas segundo Laplace) vale, então, também

para as correntes, impedâncias, coeficientes de reflexão, etc., como no capítulo anterior.

As fórmulas apresentadas a seguir, para o regime permanente senoidal, provêm daquelas equivalentes do capítulo anterior, com as devidas adaptações ( $s = j\omega$ ). Nestas, por concisão, tornamos a frequência  $\omega$  implícita nos fasores e nas funções de rede (como já fizemos com as transformadas de Laplace tornando, algumas vezes,  $s$  ímplicito).

Desta forma, temos as soluções completas para tensões ao longo da linha

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(z) + \dot{V}_-(z) \quad (7.11)$$

ou

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(0) e^{-\gamma z} + \dot{V}_-(0) e^{\gamma z} \quad (7.12)$$

e para as correntes

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_+(0) e^{-\gamma z} + \dot{I}_-(0) e^{\gamma z} \quad (7.13)$$

ou

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [\dot{V}_+(z) - \dot{V}_-(z)]. \quad (7.14)$$

ou ainda

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [\dot{V}_+(0) e^{-\gamma z} - \dot{V}_-(0) e^{\gamma z}], \quad (7.15)$$

com

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (7.16)$$

sendo

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (7.17)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG)} \quad (7.18)$$

e

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + \frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG)} \quad (7.19)$$

são obtidos por desenvolvimento de (7.9).

Em linhas com perdas pequenas, *i.e.*,  $R \ll \omega L$  e  $G \ll \omega C$ , podemos aproximar

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ G \sqrt{\frac{L}{C}} + R \sqrt{\frac{C}{L}} \right] \quad (7.20)$$

e

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 + \dots \right] \quad (7.21)$$

Além dessas, temos ainda

$$\rho(z) = \frac{\dot{V}_-(z)}{\dot{V}_+(z)} = \frac{\dot{V}_-(0)}{\dot{V}_+(0)} e^{2\gamma z}, \quad (7.22)$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}, \quad (7.23)$$

$$\rho(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0} \quad (7.24)$$

e outras mais que podem ser adaptadas pela simples substituição de  $s$  por  $j\omega$ .

### 7.3 VELOCIDADE DE FASE

Considerando uma onda que se propaga no sentido positivo de  $z$ , na forma de (7.10), com  $\gamma$  dado por (7.17), podemos explicitar a função de tensão no domínio do tempo ao longo da linha pelo emprego de (7.4), obtendo

$$v(t, z) = \text{Re} [\sqrt{2} \dot{V}_+(0) e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega t}]$$

ou

$$v(t, z) = \sqrt{2} \dot{V}_+(0) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (7.25)$$

É evidente que para o observador que acompanha a onda com velocidade

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.26)$$

o argumento (ou fase) do cosseno mantém-se inalterado.

Por esta razão  $v_f$  é chamada de *velocidade de fase*.

### 7.4 LINHAS SEM PERDAS; COMPRIMENTO DE ONDA

No caso de linhas sem perdas

$$\alpha = 0 \quad (7.27)$$

e

$$\beta = \omega\sqrt{LC}. \quad (7.28)$$

Assim, a substituição de (7.28) em (7.26) nos mostra que, numa linha sem perdas, a velocidade de propagação de fase da onda independe da frequência e é dada por  $v_f = 1/\sqrt{LC}$ , como já vimos na Sec. 5.4.

Nas linhas sem perdas, com  $\gamma = j\beta$ , podemos adaptar a expressão (6.50), do capítulo anterior, escrevendo

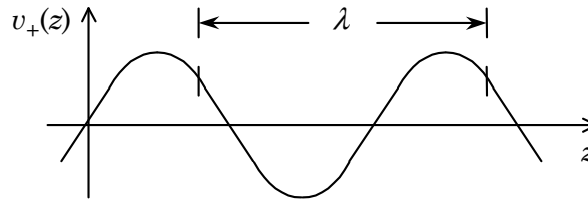
$$Z(z) = Z_0 \left[ \frac{Z(z_1) - jZ_0 \tan \beta(z - z_1)}{Z_0 - jZ(z_1) \tan \beta(z - z_1)} \right] \quad (7.29)$$

onde a tangente hiperbólica do arco imaginário foi substituída pela tangente trigonométrica do arco real multiplicada pela unidade imaginária  $j$ .

Voltando novamente à expressão (7.25), com  $\alpha = 0$ , observamos imediatamente que a substituição de  $\beta z$  por  $(\beta z \pm 2\pi)$  dá origem aos mesmos valores de  $v(t, z)$ . A grandeza  $\lambda$ , definida tal que

$$\beta\lambda = 2\pi \quad (7.30)$$

tem dimensão de comprimento e é chamada de *comprimento de onda* porque, num dado instante de tempo, dois pontos distanciados de  $\lambda$  na direção de propagação têm o mesmo valor da tensão, conforme ilustra a Figura 7.1.



**Figura 7.1** Definição de comprimento de onda

Em vista das expressões (7.27) e (7.30) temos

$$\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega} \quad (7.31)$$

ou

$$\lambda = \frac{v_f}{f} \quad (7.32)$$

onde  $f = \omega/(2\pi)$  é a frequência de excitação em hertz (símbolo Hz).

## 7.5 ANALOGIA DE LINHAS DE TRANSMISSÃO COM PROPAGAÇÃO DE ONDAS

O leitor observador deve ter chegado a notar certa analogia de formalismo entre as propriedades de uma linha de transmissão com aquelas da propagação de ondas. Na realidade a analogia entre ondas planas no espaço e ondas propagando-se ao longo de uma linha de transmissão ideal é total. É, portanto, conveniente fazermos uso deste fato e aproveitarmos os conceitos estudados para as ondas planas nas linhas de transmissão ou vice-versa; se o leitor tiver mais familiaridade na manipulação de problemas sobre linhas de transmissão, pode usar sua experiência com linhas na solução de problemas com ondas planas. Em qualquer dos casos, as soluções desenvolvidas para um dos sistemas não precisam



ser repetidas para o outro; qualquer método de solução, seja ele analítico, numérico ou gráfico, desenvolvido para um dos sistemas pode ser usado no outro; toda a técnica experimental desenvolvida num sistema sempre encontra uma correspondente no outro. A base desta analogia é apresentada a seguir.

Vamos escrever, lado a lado, as equações para as componentes de campo de uma onda plana e as correspondentes equações para uma linha de transmissão ideal.

$$\begin{aligned}\dot{E}_x(z) &= \dot{E}_+ e^{-jkz} + \dot{E}_- e^{jkz} & \dot{V}(z) &= \dot{V}_+ e^{-j\beta z} + \dot{V}_- e^{j\beta z} \\ \dot{H}_y(z) &= \frac{1}{\eta} [\dot{E}_+ e^{-jkz} - \dot{E}_- e^{jkz}] & \dot{I}(z) &= \frac{1}{Z_0} [\dot{V}_+ e^{-j\beta z} - \dot{V}_- e^{j\beta z}] \\ k &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} & \beta &= \omega \sqrt{LC} \\ \eta &= \sqrt{\mu / \varepsilon} & Z_0 &= \sqrt{L / C}\end{aligned}$$

Vemos, então, que as equações de linha à direita são obtidas das equações de campo à esquerda pela substituição de  $\dot{E}_x$  por  $\dot{V}$ , de  $\dot{H}_y$  por  $\dot{I}$ , da permeabilidade  $\mu$  pela indutância por metro de comprimento  $L$  e da permitividade  $\varepsilon$  pela capacitância por unidade comprimento  $C$ . Mas a analogia não reside só nisto; o conceito de impedância, desenvolvido nos dois sistemas, é análogo e permite o estudo de reflexões e transmissões, desde que interposta uma descontinuidade ao meio de propagação. Assim, a equação

$$Z(z) = Z_0 \left[ \frac{Z(z_1) - jZ_0 \tan \beta(z - z_1)}{Z_0 - jZ(z_1) \tan \beta(z - z_1)} \right],$$

que relaciona a impedância num ponto genérico de uma linha de transmissão em função daquela num ponto conhecido e da distância entre ambos, encontra seu análogo, em ondas planas na expressão

$$Z(z) = \eta \left[ \frac{Z(z_1) - j\eta \tan k(z - z_1)}{\eta - jZ(z_1) \tan k(z - z_1)} \right]$$

na qual

$$Z(z) = \frac{\dot{E}(z)}{\dot{H}(z)} \quad \text{e} \quad Z(z_1) = \frac{\dot{E}(z_1)}{\dot{H}(z_1)}$$

onde  $\dot{E}$  e  $\dot{H}$  representam as intensidades dos vetores (totais)  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  no respectivo ponto.

Esta e outras, como o coeficiente de reflexão, podem ser verificadas sem dificuldade pelo leitor.

## 7.6 TAXA DE ONDA ESTACIONÁRIA

Suponhamos que a solução de onda de tensão, numa linha sem perdas, seja constituída de uma parcela propagante no sentido positivo de  $z$  e outro

propagante no sentido oposto, *i.e.*, seja dada por (7.12). Façamos  $\gamma = j\beta$  para tornar explícito o caráter imaginário de  $\gamma$ , daí obtendo

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(0)e^{-j\beta z} + \dot{V}_-(0)e^{j\beta z}. \quad (7.33)$$

Observamos, então, em (7.33) que a fase da segunda parcela varia em sentido contrário à da primeira.

Em decorrência da periodicidade das fases devemos esperar que existam valores de  $z$  para os quais as duas parcelas de (7.33) tenham a mesma fase. Neste caso, suas amplitudes se somam e temos aí pontos de máxima tensão

$$V_{m\acute{a}x} = |\dot{V}_+(z)| + |\dot{V}_-(z)|. \quad (7.34)$$

Distando de um quarto de comprimento de onda dos pontos acima descritos (digamos no sentido positivo de  $z$ ), a fase da primeira parcela diminui de  $\pi/2$  e a fase da segunda aumenta de  $\pi/2$ , de maneira que a diferença de fase das parcelas é  $\pi$ . Neste caso, suas amplitudes se subtraem e temos pontos de amplitude mínima de tensão

$$V_{m\acute{i}n} = |\dot{V}_+(z)| - |\dot{V}_-(z)|. \quad (7.35)$$

(*Observação:* o módulo do coeficiente de reflexão em linhas sem perdas é menor ou igual à unidade e daí decorre  $|\dot{V}_+(z)| \geq |\dot{V}_-(z)|$ .)

Feita esta introdução, definimos agora a *taxa de onda estacionária (TOE)* como o quociente das amplitudes máximas pelas mínimas de tensão de linha.

Assim, temos

$$TOE = \frac{V_{m\acute{a}x}}{V_{m\acute{i}n}} \quad (7.36)$$

ou

$$TOE = \frac{|\dot{V}_+(z)| + |\dot{V}_-(z)|}{|\dot{V}_+(z)| - |\dot{V}_-(z)|} \quad (7.37)$$

ou, ainda, tendo em vista (7.22)

$$TOE = \frac{1 + |\rho(z)|}{1 - |\rho(z)|} \quad (7.38)$$

donde obtemos

$$|\rho(z)| = \frac{TOE - 1}{TOE + 1}. \quad (7.39)$$

Além disto, em vista do sinal (−) que aparece em (7.14), em cada ponto de máximo de tensão temos um mínimo de corrente e vice-versa, ou seja, num ponto de máximo de tensão temos

$$I_{m\acute{i}n} = \frac{|\dot{V}_+(z)| - |\dot{V}_-(z)|}{Z_0} \quad (7.40)$$

e, neste ponto, a impedância na linha é puramente resistiva e assume seu valor máximo:

$$Z_{m\acute{a}x} = Z_0 \left\{ \frac{|\dot{V}_+(z)| + |\dot{V}_-(z)|}{|\dot{V}_+(z)| - |\dot{V}_-(z)|} \right\} \quad (7.41)$$

ou, em vista de (7.37)

$$Z_{m\acute{a}x} = Z_0 \cdot (TOE). \quad (7.42)$$

O mesmo poderíamos fazer para  $Z_{m\grave{i}n}$  obtendo

$$Z_{m\grave{i}n} = Z_0 / (TOE). \quad (7.43)$$

(*Observação:* na definição de  $TOE$  não demos atenção ao fator  $\sqrt{2}$  nas amplitudes porque deveria aparecer em numerador e em denominador, cancelando-se.)

## 7.7 RECAPITULAÇÃO

Vimos que as soluções em regime permanente são formalmente idênticas às do regime transitório com a substituição de  $s$  por  $j\omega$ .

Vimos, também, que em regime permanente existe uma periodicidade no espaço das ondas de tensão e corrente de onde definimos um comprimento de onda.

Em vista das propriedades da equação de onda numa linha sem perdas, verificamos uma analogia com a propagação de ondas planas no espaço de onde concluimos que as soluções válidas para um sistema também serão válidas para o outro, feitas as convenientes correspondências.

Quando subsistem ondas progressivas nos dois sentidos de  $z$  temos a formação de ondas estacionárias, sendo que os máximos distam entre si de *meio* comprimento de onda, o mesmo se dando com os mínimos, sendo estes intercalados com os primeiros.

## 7.8 IMPEDÂNCIA NUM PONTO GENÉRICO DA LINHA; APROXIMAÇÕES

Como já tivemos a oportunidade de chamar a atenção, a expressão (7.29) – ou, mais genericamente, (6.50) do capítulo anterior – é muito importante porque permite o cálculo da impedância num ponto qualquer da linha, uma vez conhecida a impedância num ponto determinado (em geral a terminação). Entretanto, sua aplicação direta é, em geral, cansativa, principalmente se for necessária a sua aplicação com regularidade, além do que necessitamos ter ao alcance uma calculadora com funções trigonométricas.

Veremos, agora, alguns casos em que o cálculo explícito é desnecessário.

Seja, então,

$$\beta(z - z_1) = n\pi$$

onde  $n$  é um número inteiro.

Neste caso,  $\tan \beta(z - z_1) = 0$  e é fácil ver em (7.29) que

$$Z(z) = Z(z_1),$$

em outras palavras, a impedância se repete *de meio em meio* comprimento de onda.

Se, por outro lado,

$$\beta(z - z_1) = \frac{(2n+1)}{2} \pi$$

então  $\tan \beta(z - z_1) \rightarrow \infty$  e, de (7.29), temos

$$Z(z) = \frac{Z_0^2}{Z(z_1)}. \quad (7.44)$$

Esta propriedade é interessante porque, por meio de uma linha de impedância característica conveniente, podemos transformar uma impedância resistiva em outra resistiva de valor diferente.

### Linhas curtas

Outra aproximação interessante é o caso das *linhas curtas* (curtas em relação ao comprimento de onda).

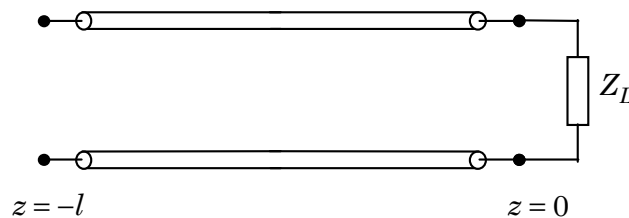
Quando o comprimento de onda é muito grande (frequência muito baixa) temos, na maioria dos casos

$$\beta(z - z_1) \ll n\pi.$$

Assim, a tangente confunde-se com o arco e podemos aproximar (7.29) para

$$Z(z) = Z_0 \left[ \frac{Z(z_1) - jZ_0\beta(z - z_1)}{Z_0 - jZ(z_1)\beta(z - z_1)} \right]. \quad (7.45)$$

Seja, então, a linha mostrada na Figura 7.2, terminada numa impedância  $Z_L$ . Somente para variar supomos a entrada da linha em  $z = -l$  e a carga em  $z = 0$ . (Note que a origem de  $z$  é arbitrária, mas o sentido positivo de  $z$  é sempre do gerador para a carga.)



**Figura 7.2** Linha curta terminada em  $Z_L$

Neste caso, (7.45) torna-se

$$Z(-l) = Z_0 \left[ \frac{Z_L + jZ_0\beta l}{Z_0 + jZ_L\beta l} \right]$$

Consideremos, em primeiro lugar, o caso particular em que a linha termine em curto-circuito, *i.e.*,  $Z_L = 0$ .

Neste caso, a impedância na entrada da linha será

$$Z(-l) = jZ_0\beta l$$

ou substituindo aí os valores de  $Z_0$  e  $\beta$  em função dos parâmetros distribuídos da linha resulta

$$Z(-l) = j\sqrt{\frac{L}{C}} \omega \sqrt{LC} l$$

ou, ainda,

$$Z(-l) = j\omega Ll \quad (7.46)$$

*i.e.*, a impedância de entrada de uma linha curta de comprimento  $l$ , terminada em curto-circuito, é igual à impedância da indutância  $Ll$ , sendo  $L$  é indutância distribuída por unidade de comprimento da linha.

Da mesma forma, uma linha curta de comprimento  $l$ , terminada em aberto, apresenta na entrada uma impedância

$$Z(-l) = \frac{1}{j\omega Cl} \quad (7.47)$$

ou seja, a linha se comporta como uma capacitância pura de capacidade  $Cl$ , sendo  $C$  é capacitância distribuída por unidade de comprimento da linha.

É, também, evidente em (7.45) que, se a impedância de carga for igual a  $Z_0$ , então, em qualquer ponto da linha  $Z(z) = Z_0$ , como no caso geral.

Nos outros casos, para o cálculo de impedâncias, devemos recorrer à expressão (7.29) ou a processos gráficos como, por exemplo, ao *diagrama de Smith*, que veremos mais além.

## 7.9 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA IMPEDÂNCIA CARACTERÍSTICA

As expressões (7.46) e (7.47) nos sugerem que o produto das impedâncias, medidas na entrada de uma linha curta sem perdas nas situações de curto-circuito e circuito aberto na carga, nos dá o quociente  $L/C$  que representa o quadrado da impedância característica.

Porém, não é somente neste caso particularíssimo que esta propriedade é válida.

Se adaptarmos, (6.47) do capítulo anterior à Figura 7.2, obtemos

$$Z(-l) = Z_0 \frac{1 + \rho(0)e^{-2\gamma l}}{1 - \rho(0)e^{-2\gamma l}}. \quad (7.48)$$

onde

$$\rho(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}.$$

Veja, então, que para  $Z_L \rightarrow \infty$  temos  $\rho(0) = 1$  e para  $Z_L = 0$  temos  $\rho(0) = -1$ .

Devido à troca de sinal no coeficiente de reflexão nas situações de terminação em curto ou aberto, o produto das impedâncias na entrada da linha medidas nas duas situações dará simplesmente  $Z_0^2$ . Sendo (7.48) válida, inclusive, para linhas com perdas, este procedimento é geral.

### 7.10 UM EXEMPLO

"Numa linha de transmissão sem perdas, de impedância característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , é medida uma taxa de onda estacionária igual a 2. Existe um máximo de corrente distante de  $0,125\lambda$  da carga e a linha tem  $9,25\lambda$  de comprimento. Calcule: (a) o coeficiente de reflexão no ponto de máxima corrente (módulo e fase); (b) a impedância de carga; (c) a impedância na entrada da linha."

#### Solução:

(a) O módulo do coeficiente de reflexão é dado através de (7.39), ou seja, num ponto genérico  $z$  da linha temos

$$|\rho(z)| = \frac{TOE - 1}{TOE + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Por outro lado, no ponto  $z = z_1$  de máxima corrente temos mínima tensão, *i.e.*, a componente de tensão da onda refletida está defasada de  $\pi$  daquela da onda incidente, ou seja,

$$\frac{V_-(z_1)}{V_+(z_1)} = -\frac{|V_-(z_1)|}{|V_+(z_1)|}$$

e, pela definição de coeficiente de reflexão,

$$\rho(z_1) = -|\rho(z_1)| = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{j\pi}.$$

(b) Uma maneira de calcularmos a impedância de carga seria calcularmos a impedância no ponto  $z = z_1$ , fazendo uso de (7.23) e, depois, através de (7.29), calcularmos as impedâncias no início e no fim da linha. Entretanto, usaremos um outro caminho que, uma vez entendido, torna o processo mais simples.

Consideremos a expressão (6.46) do capítulo anterior

$$\rho(z) = \rho(z_1)e^{2\gamma(z-z_1)}$$

que, para  $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$ , nos dá

$$\rho(z) = \rho(z_1) e^{j\frac{4\pi}{\lambda}(z-z_1)} \quad (7.49)$$

Esta expressão nos mostra claramente que, numa linha de transmissão sem perdas, o módulo do coeficiente de reflexão permanece o mesmo, mas a sua fase varia de ponto para ponto ao longo da linha de forma periódica com período igual a  $\lambda/2$ .

Assim, para o ponto  $z = l$ , tomado no fim da linha, temos a diferença algébrica

$$l - z_1 = 0,125\lambda$$

e, então, a fase do coeficiente de reflexão *aumenta* de  $\pi/2$ .

Em conclusão, o coeficiente de reflexão no fim da linha será

$$\rho(l) = \frac{1}{3} e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j\frac{1}{3}$$

e, daí, a impedância de carga

$$Z(l) = Z_0 \frac{1 + \rho(l)}{1 - \rho(l)} = 50 \frac{1 - j/3}{1 + j/3} = (40 - j30) \Omega.$$

(c) Para calcularmos a impedância de entrada da linha podemos referir o coeficiente de reflexão à entrada como mostramos ou, então, em vista do comprimento particular da linha ( $9\lambda + \lambda/4$ ), referirmos diretamente a impedância de carga à entrada.

Como observamos anteriormente, a impedância numa linha sem perdas distribui-se periodicamente com período  $\lambda/2$ . Portanto, num ponto distante de  $9\lambda$  do fim da linha (ou  $\lambda/4$  da entrada) a impedância é igual àquela da carga e só nos falta referir esta impedância ao início da linha através do comprimento  $\lambda/4$  restante. Mas este é o caso particular das linhas de  $\lambda/4$ , já estudado na Sec. 7.8, e que nós dá

$$Z(0) = \frac{Z_0^2}{Z(\lambda/4)} = \frac{Z_0^2}{Z(l)} = \frac{(50)^2}{40 - j30} = (40 + j30) \Omega$$

## 7.11 A CARTA DE SMITH

O exemplo mostrado na secção anterior ilustra bem as vantagens que podem ser obtidas na solução de problemas em termos do coeficiente de reflexão generalizado. Uma desvantagem aparente é o fato de termos que no fim calcular as impedâncias em termos dos coeficientes de reflexão. Este problema, no entanto, pode ser contornado se trabalharmos com o coeficiente de reflexão no plano complexo sendo este graduado em impedâncias. Um gráfico deste tipo é chamado de **Carta** (ou **Diagrama**) de **Smith**.

A Carta de Smith consiste no lugar geométrico das resistências e reatâncias constantes desenhadas num diagrama polar cujo raio corresponde ao módulo e

cujo ângulo corresponde ao argumento ou fase do coeficiente de reflexão referido a um ponto genérico da linha. A carta nos permite descobrir como as impedâncias são transformadas ao longo da linha, ou relacionar a impedância com o coeficiente de reflexão ou, ainda, da taxa de onda estacionária calcular os máximos e mínimos de tensão. Por combinação de operações ela nos capacita a compreender o comportamento de técnicas complexas de adaptação de impedâncias bem como nos possibilita a descobrir novas técnicas.

### Graduando o plano $\rho(z)$ em valores de $Z(z)$ normalizado

Nosso desenvolvimento tem por base a expressão (7.23), na qual, por conveniência, introduzimos as impedâncias normalizadas

$$z_n(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = r + jx \quad (7.50)$$

ao mesmo tempo que o coeficiente de reflexão generalizado, dado por (6.46) do capítulo anterior, é expresso em forma cartesiana

$$\rho(z) = \rho(z_1) e^{2\gamma(z-z_1)} = u + jv. \quad (7.51)$$

Assim, substituindo (7.50) e (7.51) em (7.23), obtemos

$$r + jx = \frac{1 + (u + jv)}{1 - (u + jv)}. \quad (7.52)$$

Separando as partes reais e imaginárias desta expressão, resulta

$$r = \frac{1 - (u^2 + v^2)}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (7.53)$$

e

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (7.54)$$

Após manipulação algébrica, as expressões (7.53) e (7.54) nos dão

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (7.55)$$

e

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \quad (7.56)$$

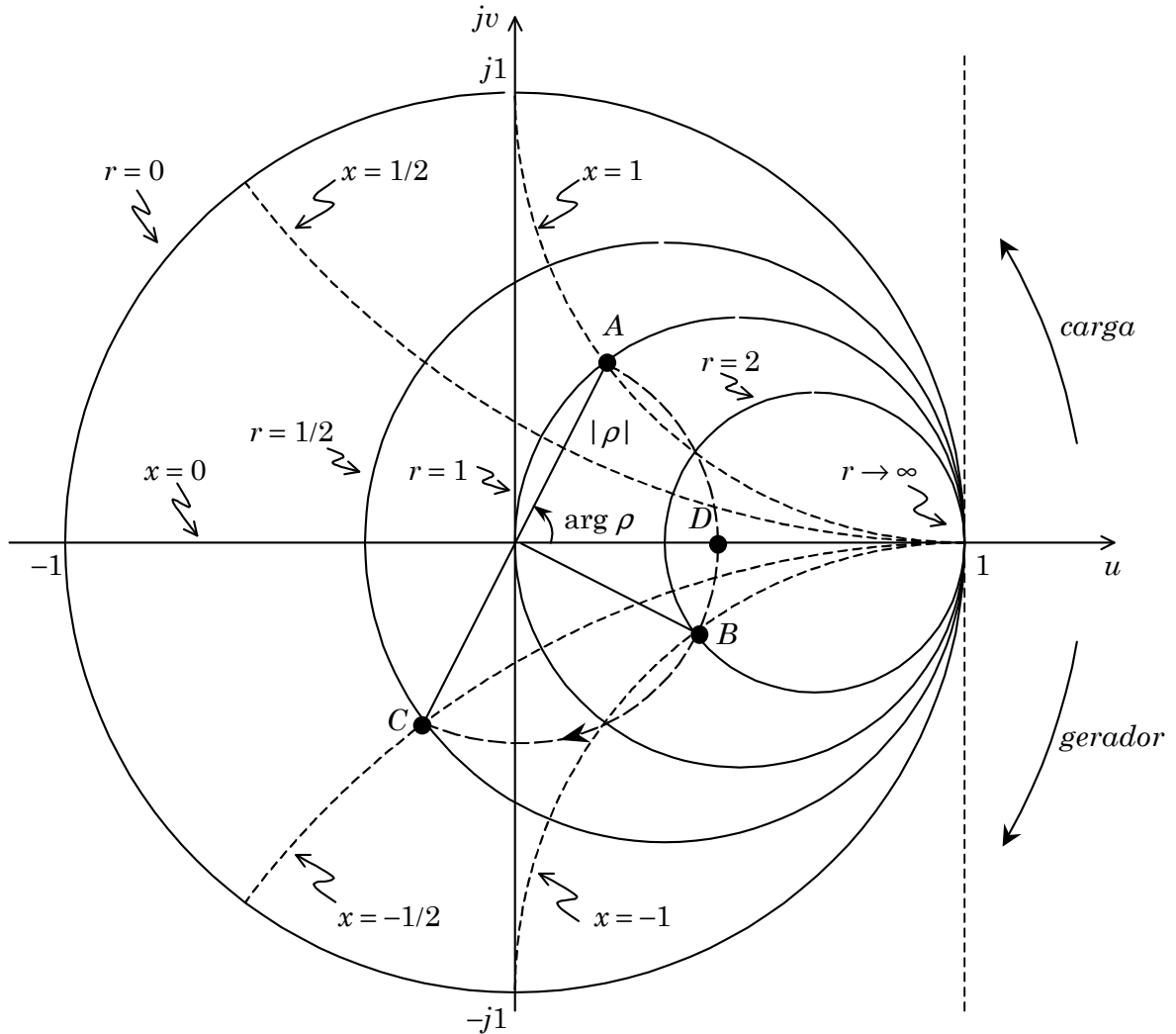
Se desejarmos determinar o lugar geométrico no plano  $\rho(z)$  (com  $u$  e  $v$  servindo de coordenadas cartesianas) dos pontos de igual parte resistiva, verificamos em (7.55) que tais lugares são circunferências com centros no eixo  $u$  em  $[r/(1+r), 0]$  e raio  $1/(1+r)$ . Na Figura 7.3 estão representadas as curvas para  $r = 0$ ,  $r = 1/2$ ,  $r = 1$  e  $r \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, a expressão (7.56) nos mostra que as curvas de  $x$  constante no plano  $\rho(z)$  são também arcos de circunferência com centro em  $(1, 1/x)$  e raio  $1/|x|$ .



Na Figura 7.3 estão indicadas as curvas para  $x = 0$ ,  $x = \pm 1/2$  e  $x = \pm 1$ .

Como podemos observar, as circunferências de  $r = \text{constante}$  e  $x = \text{constante}$  são mutuamente perpendiculares em consequência de ser a transformação de (7.52) uma *transformação conforme*.



**Figura 7.3** Lugares geométricos de  $r$  e  $x$  constantes no plano  $\rho$

Esta é, em essência, a chamada *Carta de Smith*.

### Exemplo 7.1

Seja a impedância  $Z_l = 50 + j50 \Omega$  terminando uma linha de impedância característica  $Z_0 = 50 \Omega$ . Calcule a impedância na entrada da linha supondo que a mesma tenha comprimento elétrico:  $\lambda/8$ ;  $\lambda/4$ .

*Solução:*

(a) Normalizemos, inicialmente, a impedância

$$z_{ln} = \frac{Z_l}{Z_0} = 1 + j1.$$

(b) Marquemos este ponto na carta (ponto *A*, Figura 7.3).

(c) Rodemos de  $\lambda/8$  em direção ao gerador seguindo uma circunferência centrada em  $\rho = 0$  e raio igual à distância do centro ao ponto *A*. Encontramos o ponto *B*, onde

$$z_n(\lambda/8) = 2,0 - j1,0.$$

Assim, desnormalizando,

$$Z(\lambda/8) = 50(2 - j1) = 100 - j50 \Omega$$

(d) Rodando *A* de  $\lambda/4$  em direção ao gerador, encontramos o ponto *C*, onde

$$z_n(\lambda/4) = 0,5 - j0,5,$$

donde, desnormalizando,

$$Z(\lambda/4) = 50(0,5 - j0,5) = 25 - j25 \Omega$$

No ponto *D*, onde a impedância é real e a tensão é máxima, temos

$$TOE = 2,6$$

e

$$|\rho| = \frac{TOE - 1}{TOE + 1} = 0,45.$$

Como vemos, não necessitamos do valor de  $\rho(z)$  explicitamente para o cálculo das impedâncias, apesar de estarmos trabalhando no plano  $\rho(z)$ , isto porque utilizamos a transformação

$$\rho(z) = \frac{z_n(z) - 1}{z_n(z) + 1}$$

para entrar na carta com valores de impedância e depois utilizamos a transformação inversa

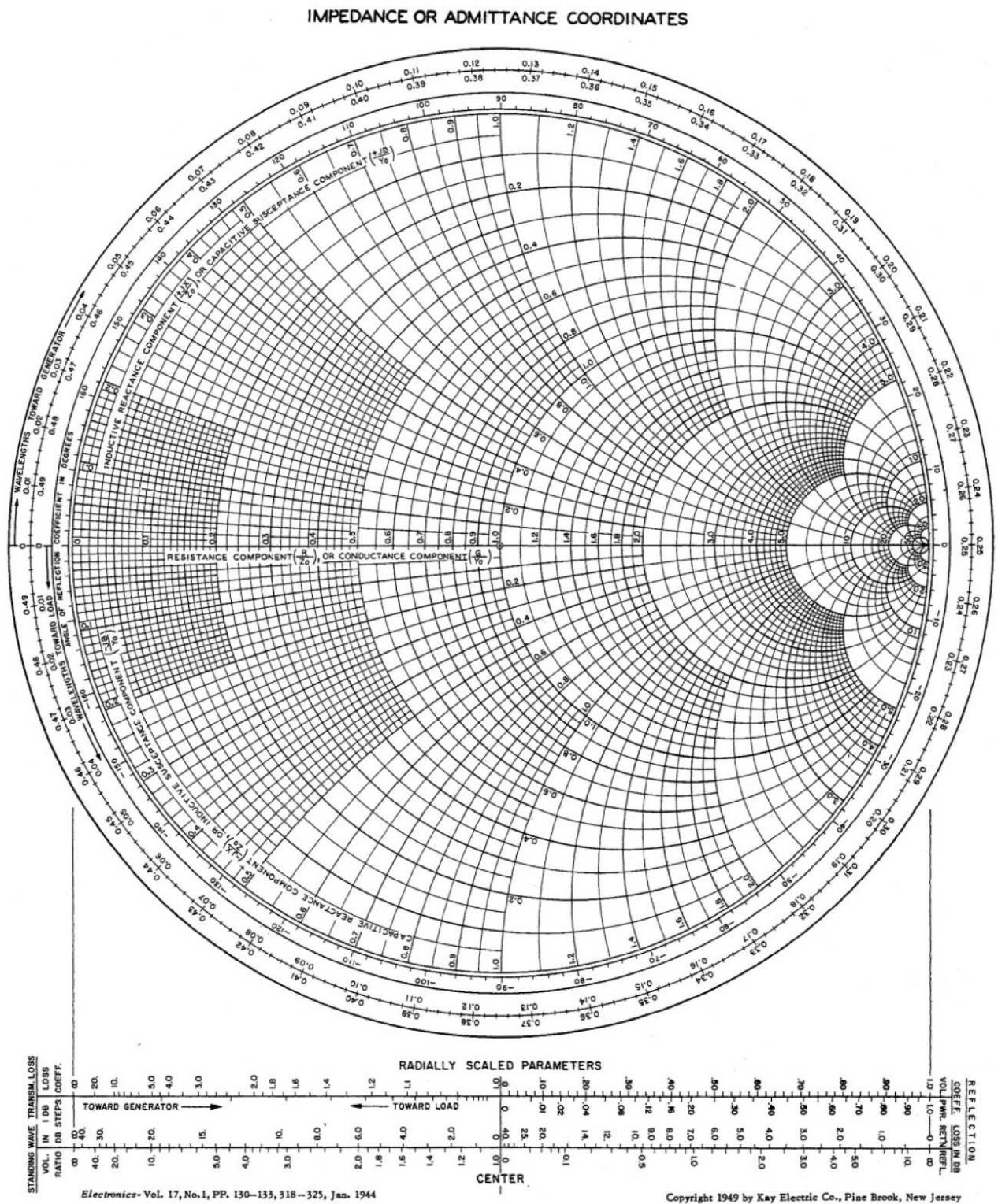
$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

para extrair valores da carta após a rotação.

Note que o ponto *C* é o inverso do ponto *A*, *i.e.*,

$$z_n(C) = \frac{1}{z_n(A)} = y_n(A).$$

Este fato permite a utilização da carta para admitâncias normalizadas, trabalhando com elas como se fossem impedâncias normalizadas. Um único cuidado deve ser tomado com a fase do coeficiente de reflexão. Neste caso a referência de fase passa a ser o eixo  $-u$  e não o eixo  $u$ , como no caso de trabalharmos com impedâncias.

*Fac-simile da Carta de Smith*Figura 7.4 *Fac-simile de Carta de Smith*

Uma vez que para resolvermos os problemas envolvendo linhas é necessário fazermos rotações de  $\rho(z)$ , a Carta vem acompanhada de duas escalas de distâncias, graduadas em frações de comprimento de onda, dispostas ao redor da circunferência de raio unitário, uma crescente na direção ao gerador outra crescente na direção da carga. Como um movimento de  $\Delta z$  na linha requer uma rotação em  $\rho(z)$  de

$$2\beta\Delta z = \frac{4\pi\Delta z}{\lambda}$$

a escala completa-se ao longo da circunferência unitária ( $2\pi$  radianos) em meio comprimento de onda.

Algumas cartas possuem, ainda, escalas de *TOE*, de  $|\rho(z)|$ , de  $|\rho(z)|^2$  e de perdas.

Um *fac-simile* de uma carta de Smith completa é mostrado na Figura 7.4.

## 7.12 TENSÕES E CORRENTES AO LONGO DA LINHA

As fórmulas básicas para o cálculo de tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão já foram apresentadas na Sec. 7.2. Entretanto, a familiaridade em trabalharmos no plano  $\rho$  (carta de Smith) faz com que uma nova visão do problema seja apresentada.

Das expressões (7.12) e (7.22), temos

$$\dot{V}(z) = \dot{V}_+(0) e^{-\gamma z} [1 + \rho(z)] \quad (7.57)$$

e das expressões (7.15) e (7.22), temos

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{V}_+(0)}{Z_0} e^{-\gamma z} [1 - \rho(z)] = \dot{I}_+(0) e^{-\gamma z} [1 - \rho(z)]. \quad (7.58)$$

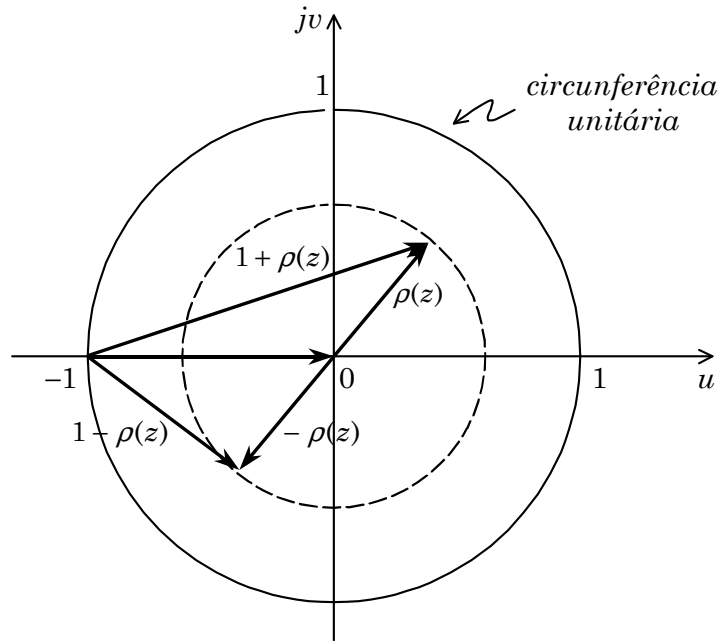
Extraindo o módulo de (7.57), temos

$$|\dot{V}(z)| = |\dot{V}_+(0)| e^{-\alpha z} |1 + \rho(z)| \quad (7.59)$$

e extraíndo o módulo de (7.58), temos

$$|\dot{I}(z)| = |\dot{I}_+(0)| e^{-\alpha z} |1 - \rho(z)|. \quad (7.60)$$

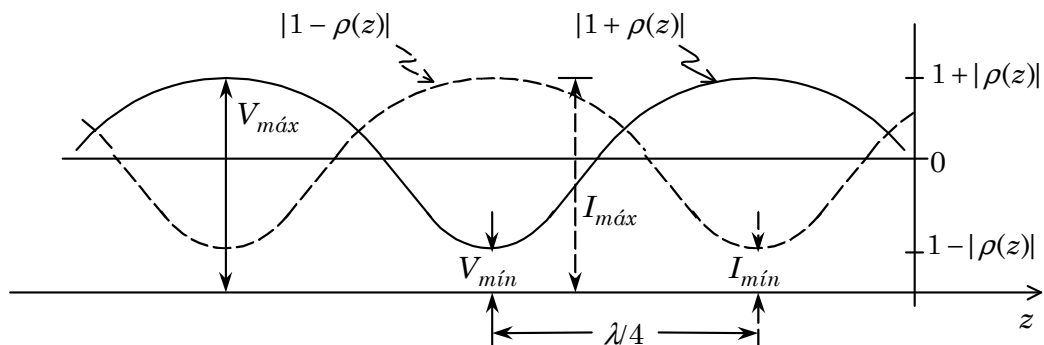
Baseada em (7.59) e (7.60) podemos fazer uma construção simples no plano  $\rho$ , para determinarmos as variações de  $|\dot{V}(z)|$  e  $|\dot{I}(z)|$ . Tal construção está indicada na Figura 7.5.



**Figura 7.5** Determinação dos módulos de  $|\dot{V}(z)|$  e  $|\dot{I}(z)|$

Ao vetor  $1+j0$ , desenhado do ponto  $(-1,0)$  ao ponto  $(0,0)$ , adicionamos os vetores  $\rho(z)$  e  $-\rho(z)$ , obtendo os vetores  $1+\rho(z)$  e  $1-\rho(z)$ , respectivamente, dos quais obtemos imediatamente módulo e fase. A amplitude da tensão é proporcional ao módulo  $|1+\rho(z)|$  e a amplitude da corrente é proporcional a  $|1-\rho(z)|$ .

A Figura 7.6 mostra as variações de  $|1+\rho(z)|$  e  $|1-\rho(z)|$ , ou seja, a variação de  $|\dot{V}(z)|e^{\alpha z}$  e  $|\dot{I}(z)|e^{\alpha z}$ , ao longo da linha.



**Figura 7.6** Distribuição de  $|\dot{V}(z)|$  e  $|\dot{I}(z)|$  ao longo da linha

Observe que os mínimos são mais agudos que os máximos e a figura não tem forma senoidal. Em consequência, as amplitudes médias das tensões e correntes ao longo da linha com  $\rho(z) \neq 0$  são maiores que aquelas com  $\rho(z) = 0$ .

Como veremos na Sec. 7.14, nas linhas com perdas isso dará origem a um excesso de perdas nas linhas com onda estacionária, comparativamente às aquelas nas linhas sem reflexão.

### 7.13 POTÊNCIA EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Como já mostramos no Capítulo 1, expressão (1.64), a potência média em regime permanente senoidal é dada por

$$P_{méd} = \text{Re} [\dot{V} \dot{I}^*].$$

Numa linha de transmissão, num ponto genérico  $z$ , temos, então

$$P_{méd}(z) = \text{Re} [\dot{V}(z) \dot{I}^*(z)]. \quad (7.61)$$

De (7.58) escrevemos seu conjugado

$$\dot{I}^*(z) = \frac{\dot{V}_+^*(0) Z_0}{|Z_0|^2} e^{-\gamma^* z} [1 - \rho^*(z)]. \quad (7.62)$$

Então, de (7.57) e (7.62) obtemos

$$\dot{V}(z) \dot{I}^*(z) = \frac{|\dot{V}_+(z)|^2 Z_0}{|Z_0|^2} e^{-2\alpha z} [1 - \rho^*(z) + \rho(z) - |\rho(z)|^2] \quad (7.63)$$

e, daí, extraindo a parte real, obtemos o fluxo de potência médio no ponto  $z$  da linha, de acordo com (7.61)

$$P_{méd}(z) = \frac{|\dot{V}_+(0)|^2}{|Z_0|^2} e^{-2\alpha z} \{ [1 - |\rho(z)|^2] \text{Re}(Z_0) - 2 \text{Im}[\rho(z)] \text{Im}(Z_0) \} \quad (7.64)$$

onde  $\text{Im}(\bullet)$  significa "a parte imaginária de".

Cabem, neste ponto, duas considerações importantes.

Primeiro, nas linhas sem distorção, *i.e.*, aquelas em que  $Z_0$  é real, (7.64) reduz-se a

$$P_{méd}(z) = \frac{|\dot{V}_+(0)|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} [1 - |\rho(z)|^2]. \quad (7.65)$$

Segundo, podemos calcular de (7.64) o máximo valor do módulo do coeficiente de reflexão.

De fato, sendo a linha passiva  $P_{méd}(z)$  é sempre não negativo, de modo que devemos ter

$$[1 - |\rho(z)|^2] \text{Re}(Z_0) - 2 \text{Im}[\rho(z)] \text{Im}(Z_0) \geq 0,$$

ou seja,

$$|\rho(z)|^2 + 2 \text{Im}[\rho(z)] \frac{\text{Im}(Z_0)}{\text{Re}(Z_0)} \leq 1. \quad (7.66)$$

Podemos, daí, calcular o máximo módulo do coeficiente de reflexão.

Designando por  $\arg \rho(z)$  a fase de  $\rho(z)$ , escrevemos

$$\operatorname{Im}[\rho(z)] = |\rho(z)| \sin[\arg \rho(z)].$$

Sendo, então, a primeira parcela de (7.66) sempre positiva, o módulo ao quadrado do coeficiente de reflexão pode ter um valor suficientemente alto, desde que a segunda parcela seja também suficientemente alta e cancele parcialmente a contribuição da primeira. Isto ocorre quando

$$\operatorname{Im}[\rho(z)] = \pm |\rho(z)|,$$

com o sinal discordante de  $\operatorname{Im}(Z_0)$ .

Ou seja, o caso limite ocorre para

$$|\rho(z)|^2 - 2|\rho(z)| \left| \frac{\operatorname{Im}(Z_0)}{\operatorname{Re}(Z_0)} \right| = 1.$$

Resolvendo a inequação, obtemos

$$|\rho(z)| \leq \left| \frac{\operatorname{Im}(Z_0)}{\operatorname{Re}(Z_0)} \right| + \sqrt{\left| \frac{\operatorname{Im}(Z_0)}{\operatorname{Re}(Z_0)} \right|^2 + 1} \quad (7.67)$$

na qual só consideramos o sinal positivo do radical porque o módulo é não negativo.

Por outro lado, podemos verificar em (7.16) que temos sempre

$$|\operatorname{Im}(Z_0)| \leq |\operatorname{Re}(Z_0)| \quad (7.68)$$

de modo que através de (7.67) e (7.68) chegamos, no caso limite, a

$$|\rho(z)| \leq 1 + \sqrt{2}. \quad (7.69)$$

**\*\*** Nas linhas sem perdas e nas linhas sem distorção

$$\operatorname{Im}(Z_0) = 0$$

e, daí verificamos em (7.67) que

$$|\rho(z)| \leq 1$$

como já havíamos mostrado nos capítulos 5 e 6.

Observamos, também, que nas linhas com perdas o fluxo de potência é mínimo junto à carga e tende a aumentar à medida que nos aproximamos do gerador, pois a linha em si é dissipativa.

## 7.14 PERDAS EM LINHAS SEM DISTORÇÃO

A perda é um efeito indesejado que sempre ocorre, em maior ou menor dose, nos sistemas elétricos. É, portanto, de máximo interesse estudarmos a atenuação, num dado sinal, devida às perdas numa linha de transmissão. Vamos limitar nosso estudo às linhas sem distorção não só porque o tratamento matemático é

mais simples como, também, porque encontramos esse problema em um grande número de casos práticos.

Retomemos, então, (7.65) que, aplicada num ponto particular  $z = z_1$ , nos dá

$$P_{\text{méd}}(z_1) = \frac{|\dot{V}_+(0)|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z_1} [1 - |\rho(z)|^2]. \quad (7.70)$$

de cujo quociente com (7.65) resulta

$$\frac{P_{\text{méd}}(z)}{P_{\text{méd}}(z_1)} = e^{-2\alpha(z-z_1)} \frac{[1 - |\rho(z)|^2]}{[1 - |\rho(z_1)|^2]} \quad (7.71)$$

ou ainda, expressando  $\rho(z)$  em função de  $\rho(z_1)$ ,

$$\frac{P_{\text{méd}}(z)}{P_{\text{méd}}(z_1)} = e^{-2\alpha(z-z_1)} \frac{[1 - |\rho(z_1)|^2 e^{4\alpha(z-z_1)}]}{[1 - |\rho(z_1)|^2]}. \quad (7.72)$$

A atenuação em nepers<sup>1</sup> no ponto  $z_1$  da linha (com  $z > z_1$ ) é, por definição,

$$A(z) = -\frac{1}{2} \ln \frac{P_{\text{méd}}(z)}{P_{\text{méd}}(z_1)}. \quad (7.73)$$

Das expressões (7.72) e (7.73) obtemos<sup>2</sup>

$$A(z) = \alpha(z - z_1) + \frac{1}{2} \ln \frac{[1 - |\rho(z_1)|^2]}{[1 - |\rho(z_1)|^2 e^{4\alpha(z-z_1)}]}. \quad (7.74)$$

Notemos em (7.74) que, se tivermos uma onda estacionária na linha [ $\rho(z) \neq 0$ ], além da atenuação normal correspondente à primeira parcela, existe um excesso de perdas, dado pela segunda parcela. Isto é aceitável com base na Figura 7.6, pois nos máximos de tensão temos um excesso de perdas no dielétrico e nos máximos de corrente temos um excesso de perdas nos condutores não compensados pelos mínimos correspondentes. Como esse excesso de perdas depende do coeficiente de reflexão no ponto de referência e do produto  $\alpha(z - z_1)$ , ou seja, da atenuação normal sem onda estacionária, podemos fazer uso de ábacos que permitem essa avaliação, como por exemplo, o da página 29-11 de van Valkenburg, Mac E., *Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computer, Communications*, Carmel, IN: Prentice-Hall, 1993.

Outra maneira de levarmos em conta esse excesso de perdas, se bem que não exato mas razoavelmente preciso, é calculando a atenuação por metro de comprimento nos dois pontos da linha (que não são iguais, pois a dependência com a distância não é linear) e adotando a média aritmética desses valores multiplicada, pela distância entre os pontos, como o valor da atenuação total.

<sup>1</sup> O plural de unidades segue convenções internacionais e foram adotadas no Brasil através do Dec. nº 81.621 de 03.05.78.

<sup>2</sup> Em decibels, a atenuação correspondente é, por definição,

$$A_{dB}(z) = -10 \log_{10} \frac{P_{\text{méd}}(z)}{P_{\text{méd}}(z_1)} \quad \text{e daí} \quad A_{dB}(z) = 8,686 \alpha(z - z_1) + 10 \log_{10} \frac{[1 - |\rho(z_1)|^2]}{[1 - |\rho(z_1)|^2 e^{4\alpha(z-z_1)}]}.$$



Evidentemente, quanto menor for a variação do coeficiente de reflexão entre os dois pontos, maior será a aproximação.

A fim de obtermos as fórmulas apropriadas, derivamos (7.74) em relação a  $z$  e obtemos

$$\frac{dA(z)}{dz} = \alpha \left[ \frac{1 + |\rho(z_1)|^2 e^{4\alpha(z-z_1)}}{1 - |\rho(z_1)|^2 e^{4\alpha(z-z_1)}} \right]$$

ou, ainda

$$\frac{dA(z)}{dz} = \alpha \left[ \frac{1 + |\rho(z)|^2}{1 - |\rho(z)|^2} \right] \quad (7.75)$$

onde o coeficiente

$$k[\rho(z)] = \frac{1 + |\rho(z)|^2}{1 - |\rho(z)|^2} \quad (7.76)$$

é chamado de *coeficiente de perda de transmissão* e é umas das escalas que acompanham a Carta de Smith (a escala superior esquerda da Figura 7.4).

Substituindo (7.76) em (7.75), escrevemos

$$\frac{dA(z)}{dz} = \alpha k[\rho(z)] \quad (7.77)$$

e a atenuação na vizinhanças do ponto  $z$  será

$$\left[ \frac{dA(z)}{dz} \right] \Delta z = \alpha \Delta z k[\rho(z)] \quad (7.78)$$

Se, entre dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  da linha ( $z_2 > z_1$ ), o módulo do coeficiente de reflexão for sensivelmente diferente, a atenuação total em nepers, entre os dois pontos, será dada aproximadamente por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[ \frac{dA(z_1)}{dz} + \frac{dA(z_2)}{dz} \right] (z_2 - z_1) \\ &= \alpha (z_2 - z_1) \frac{k[\rho(z_1)] + k[\rho(z_2)]}{2} \end{aligned} \quad (7.79)$$

A atenuação em decibels<sup>3</sup> é 8,686 vezes maior, ou seja,

$$A_{dB} = D (z_2 - z_1) \frac{k[\rho(z_1)] + k[\rho(z_2)]}{2} \quad (7.80)$$

onde o fator

$$D = 8,686\alpha \quad (7.81)$$

é a atenuação nominal da linha em decibels por metro e é comumente encontrado em tabelas, em função da frequência, para as linhas comerciais.

---

<sup>3</sup>Observe que o plural de decibel também segue o Dec. n° 81.621 de 03.05.78.

**Exemplo 7.2**

Seja dada uma linha de transmissão com 12 m de comprimento e atenuação 0,10 dB/m. Sabendo que o módulo do coeficiente de reflexão na carga é 0,5, calcule a perda total na linha.

*Solução:*

A atenuação normal da linha é

$$12 \times 0,1 \text{ dB/m} = 1,2 \text{ dB.}$$

Por outro lado, para o coeficiente de reflexão de 0,5, obtemos na carta de Smith (Figura 7.4, escala superior à esquerda) o valor de 1,68, correspondente ao coeficiente de perdas de transmissão na carga. Deslocando em direção ao gerador de 1,2 dB, na escala imediatamente abaixo, obtemos em correspondência, na escala do coeficiente de perdas de transmissão, o valor 1,32 relativo à entrada da linha.

Assim, a aplicação de (7.80) nos dá

$$A_{\text{dB}} = 1,2 \times \left[ \frac{1,68 + 1,32}{2} \right] = 1,2 \times 1,50 = 1,80 \text{ dB}$$

que corresponde à perda total na linha.

Só para fins de comparação, o uso do manual de van Valkenburg, já referido, nos dá

$$A_{\text{dB}} = 1,8 \text{ dB.}$$

**7.15 TRANSFORMADORES DE IMPEDÂNCIA**

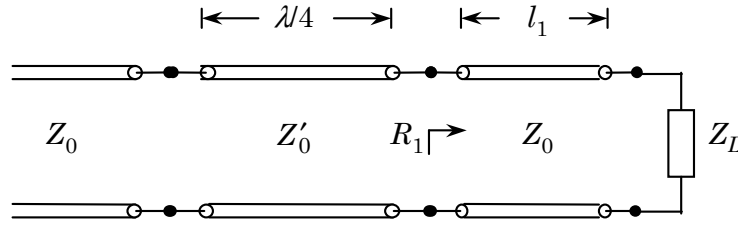
Uma impedância genérica, terminando uma linha de transmissão, causa nesta, em geral, ondas estacionárias. Nos sistemas transmissores de radiofrequência é conveniente que a linha trabalhe com taxa de onda estacionária a mais baixa possível, não só porque a impedância em qualquer ponto praticamente independe do comprimento da linha, como também, pelo fato de só haver praticamente onda incidente, a amplitude da tensão ao longo da linha se mantém aproximadamente constante e o perigo de perfuração do dielétrico, devido a sobretensões, fica minimizado. Além disso, como vimos na Sec. 7.14, uma  $TOE > 1$  dá origem a um excesso de perdas, função da  $TOE$  (ou do coeficiente de reflexão) e da perda normal da linha. Uma vez adaptada a carga à linha, podemos também adaptar a impedância de entrada da linha ao gerador, fazendo com que o o gerador forneça maior potência ao sistema.

Para essas adaptações, utilizamos os transformadores de impedância os quais, em altas frequências, são feitos com pedaços de linhas de transmissão.

**Transformadores série**

Suponhamos uma linha de impedância característica  $Z_0$ , terminada por uma impedância genérica  $Z_L \neq Z_0$ . No caso geral  $Z_L$  é complexa, mas podemos sempre encontrar um ponto ao longo da linha onde a impedância refletida seja

puramente real,  $R_1$ . Seja  $l_1$  a distância deste ponto à carga, conforme mostra a Figura 7.7.



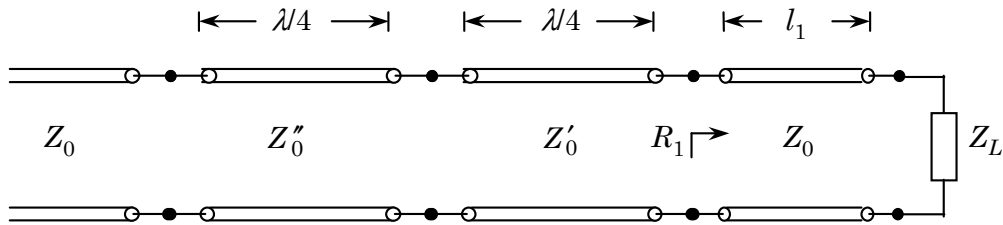
**Figura 7.7** Transformador-série com uma secção de  $\lambda/4$

Neste ponto vamos cortar a linha e aí intercalar um pedaço de uma outra linha de comprimento elétrico  $\lambda/4$  e impedância característica  $Z'_0$ . Esta nova linha deve transformar  $R_1$  em  $Z_0$ .

De acordo com (7.44), adaptada à situação presente, temos

$$Z'_0 = \sqrt{R_1 Z_0} . \quad (7.82)$$

O uso de um único transformador, entretanto, torna a adaptação perfeita apenas na frequência para a qual seu comprimento elétrico seja exatamente  $\lambda/4$ . Em frequências vizinhas, seu comprimento será maior ou menor que  $\lambda/4$ . O uso de duas ou mais secções de  $\lambda/4$ , com diferentes impedâncias características, fará com que a adaptação seja menos sensível às variações de frequência.



**Figura 7.8** Transformador-série com duas secções de  $\lambda/4$

A Figura 7.8 mostra um transformador série com duas secções, cada qual com comprimento  $\lambda/4$ , de impedâncias características  $Z'_0$  e  $Z''_0$ , calculadas de acordo com as relações

$$Z'_0 = \sqrt[4]{R_1^3 Z_0} \quad \text{e} \quad Z''_0 = \sqrt[4]{R_1 Z_0^3} . \quad (7.83)$$

### Transformadores paralelo

Uma linha sem perdas, terminada em curto-circuito ou circuito aberto, apresenta impedância de entrada puramente reativa. Este fato é aproveitado para a construção de dispositivos adaptadores de impedâncias, que são os transformadores paralelo, constituídos por pedaços de linhas de comprimento

elétrico conveniente, terminados em curto ou em aberto, colocados em paralelo com a linha principal. Tais pedaços de linha são chamados *tocos* (em inglês *stubs*).

### Transformador de 1 toco

Consideremos uma linha de impedância característica  $Z_0$  terminada por uma carga  $Z_L$ . Como vamos fazer associações em paralelo, convém pensarmos em termos de admitâncias. Seja, então,  $Y_L = 1/Z_L$  a admitância de carga que normalizada em relação à admitância característica,  $Y_0 = 1/Z_0$ , nos dá

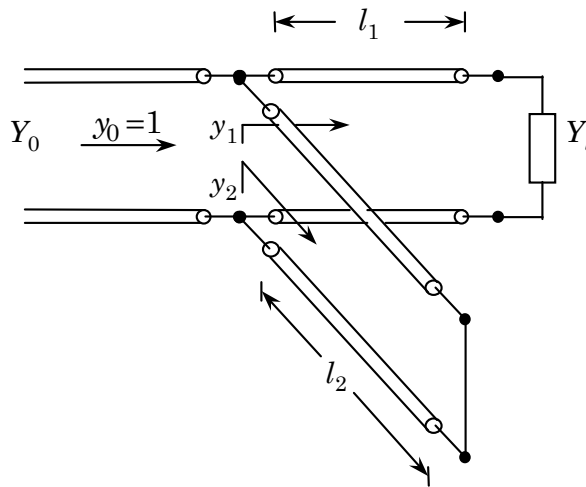
$$y_L = \frac{Y_L}{Y_0} = g_L + jb_L$$

É sempre possível encontrar, ao longo da linha um ponto onde a admitância normalizada apresente condutância unitária. Seja nesse ponto

$$y_1 = 1 + jb_1$$

Seja  $l_1$  a distância desse ponto até a carga, como indicado na Figura 7.9.

Se, nesse ponto, ligarmos em paralelo um elemento com susceptância de mesmo valor e de sinal oposto a  $jb_1$  e condutância nula, a admitância normalizada nesse ponto será igual a 1 e a linha fica, a partir daí, terminada por sua impedância característica.



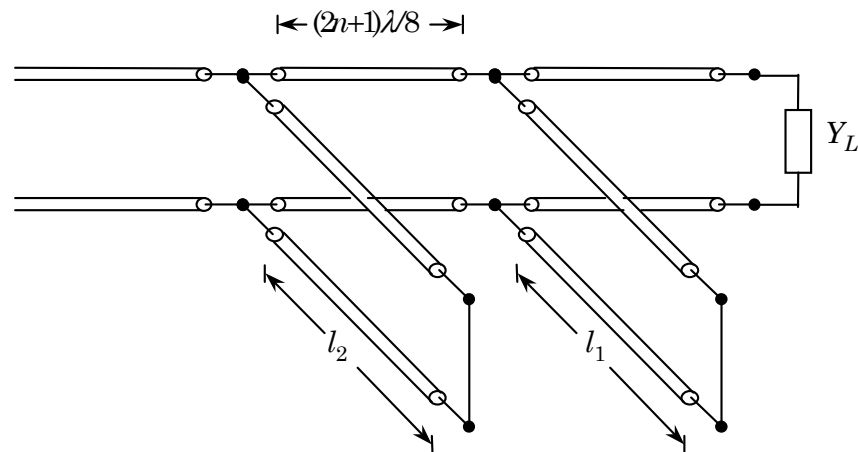
**Figura 7.9** Transformador-paralelo com 1 toco

Esse elemento em paralelo será um toco, terminado em curto ou em aberto, com comprimento  $l_2$  conveniente para que sua admitância de entrada normalizada seja

$$y_2 = -jb_1$$

### Transformador de 2 tocos

Muitas vezes existem imposições construtivas que impedem que o toco da Figura 7.9 possa ser deslocado à vontade ao longo da linha. Usamos, então, outro dispositivo, que é o transformador de 2 tocos paralelos, indicado na Figura 7.10.



**Figura 7.10** Transformador-paralelo com 2 tocos

A operação deste transformador tem como ponto comum àquela do transformador de 1 toco a função do toco mais próximo ao gerador. Neste caso, também, a função do toco é adicionar uma susceptância igual e de sinal oposto à susceptância da linha naquele ponto.

A função do toco mais próximo à carga é adicionar uma susceptância à linha tal que essa associação reflita junto ao outro toco uma admitância normalizada de condutância unitária.

O espaçamento entre os tocos é fixado, normalmente, em um múltiplo ímpar de um oitavo de comprimento de onda, por exemplo  $3\lambda/8$ .

Em termos de carta de Smith (Figura 7.11), traçamos inicialmente a circunferência unitária, deslocada da distância entre os tocos (por exemplo,  $3\lambda/8$ ) em direção à carga. A função do toco mais próximo à carga é, nestes termos, adicionar uma susceptância à linha de forma a trazer a admitância total sobre algum ponto dessa circunferência de condutância unitária deslocada. O problema reduz-se, então, ao do transformador de 1 toco.

Pode ser demonstrado que dois tocos separados por um número ímpar de  $\lambda/8$  só podem adaptar cargas à admitância característica da linha  $Y_0$  se a condutância na linha junto ao toco mais próximo da carga for menor que  $2Y_0$ . Quando o espaçamento entre os tocos aproxima-se de  $\lambda/2$ , a gama de condutâncias que podem ser adaptadas aumenta, porém limitações de ordem prática fazem com que o espaçamento com um número ímpar de  $\lambda/8$  seja uma conciliação aceitável. Devemos notar que a adição de um comprimento de linha de  $\lambda/4$ , entre o primeiro toco e a carga, permite que possamos fazer a adaptação desejada quando isto não for possível numa primeira tentativa.

### Exemplo 7.3

Determine as constantes do transformador de 2 tocos da Figura 7.11 de forma a eliminar a onda estacionária numa linha de transmissão com  $Z_0 = 100 \, \Omega$  que

esteja terminada numa impedância  $Z_L = (125 - j125) \Omega$ . O espaçamento entre os tocos é  $3\lambda/8$  e um toco está distante  $\lambda/2$  do fim da linha. Despreze a atenuação.

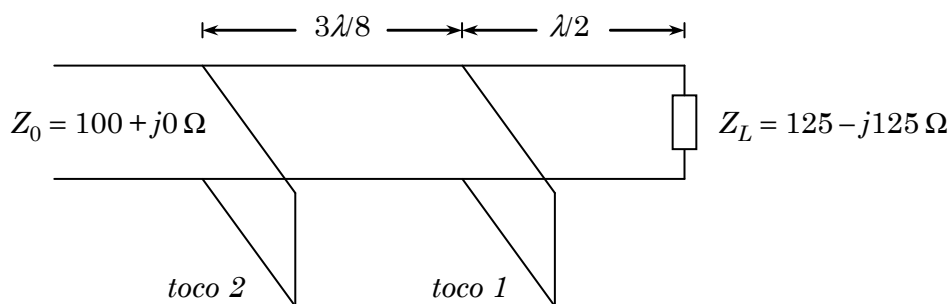
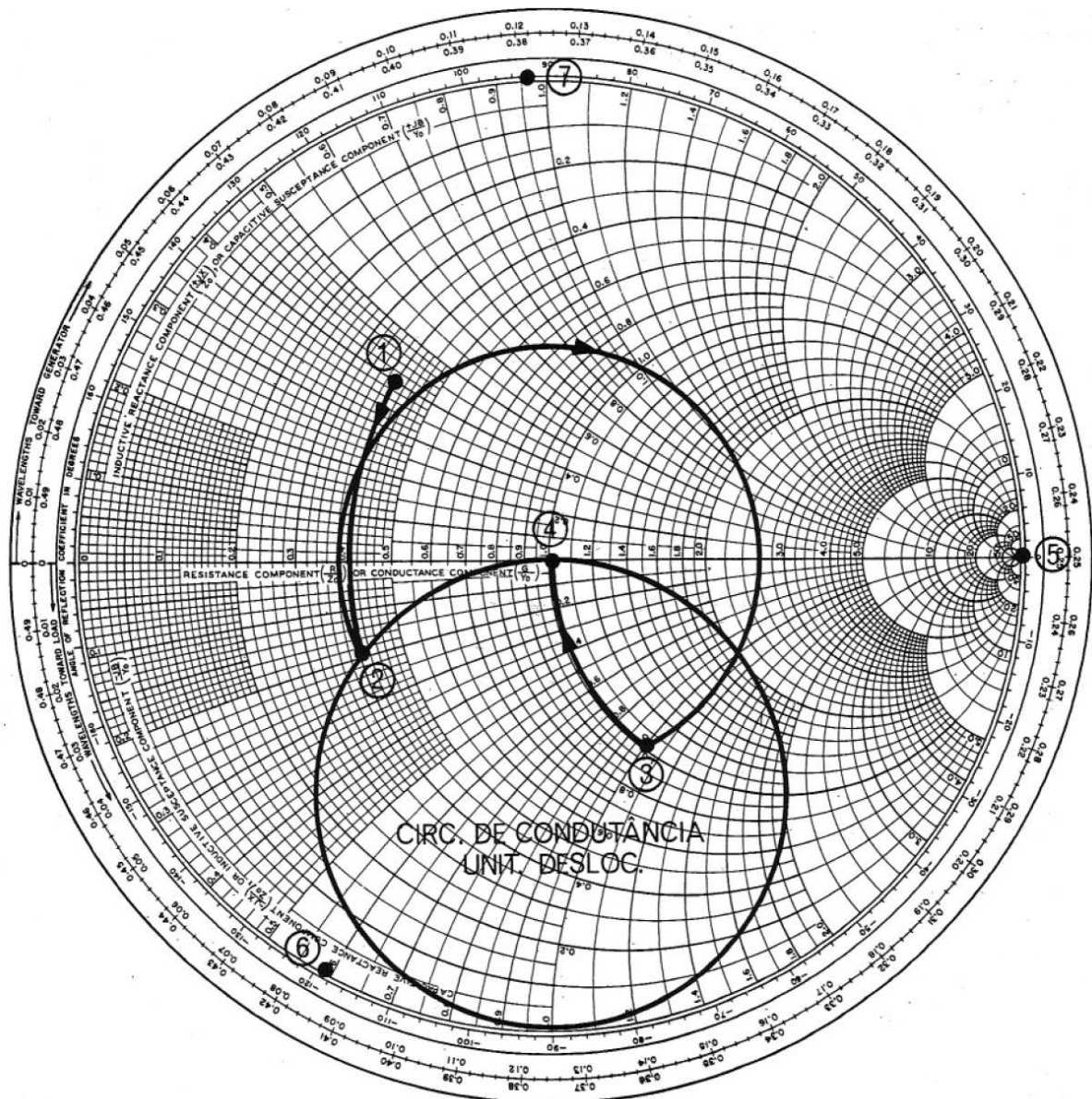


Figura 7.11 Exemplo 7.3

*Solução:*

(1) Para simplificar os cálculos troquemos os valores das impedâncias pelos valores das admitâncias normalizadas correspondentes.

A admitância característica é

$$Y_0 = 1/Z_0 = 0,01 \text{ S.}$$

A admitância de terminação fica sendo

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{125 - j125} = 0,004 + j0,004 \text{ S}$$

e a admitância de terminação normalizada será

$$y_L = \frac{Y_L}{Y_0} = 0,4 + j0,4.$$

Devido ao fato que o toco 1 está a  $\lambda/2$  da terminação, o valor de  $y_L$  referido à posição do toco 1 é também  $0,4 + j0,4$ .

(2) Para eliminarmos ondas estacionárias, a admitância normalizada na junção da linha como o toco mais distante da carga deve ser igual a  $1 + j0$ . Isto significa que a admitância neste ponto deve estar sobre a circunferência de condutância unitária da carta de Smith (Figura 7.11). A admitância na junção do toco mais próximo à carga deve ser ajustada, portanto, de modo que ela intercepte uma circunferência de diâmetro igual à circunferência de condutância unitária e deslocada de  $3\lambda/8$  em direção à carga. Isto é conseguido da seguinte maneira:

a) localize a admitância de terminação normalizada,  $0,4 + j0,4$ , na carta de Smith;

b) some uma susceptância normalizada apropriada de modo a deslocar o ponto  $0,4 + j0,4$  sobre a circunferência de condutância  $0,4$  até que ele intercepte a circunferência de condutância unitária deslocada. Para isso é necessária uma susceptância normalizada adicional de  $-j0,59$ . Esta, portanto, é a susceptância normalizada apropriada do primeiro toco;

c) gire o ponto obtido acima ( $0,4 - j0,19$ ) de  $3\lambda/8$  em direção ao gerador; o ponto obtido deve estar sobre a circunferência de condutância unitária ( $1 - j0,97$ );

d) a admitância normalizada do segundo toco deve ser, portanto,  $+j0,97$  de modo a trazer o ponto, acima obtido, ao logo da circunferência de condutância unitária até o ponto  $1 + j0$ , necessário para a adaptação perfeita.

Os comprimentos dos tocos podem ser determinados usando a carta de Smith;

i) considere os tocos terminados em curto-circuito; entre, portanto, na carta no ponto 5 (condutância infinita);

ii) gire em direção ao gerador sobre a periferia da carta até ser encontrado o valor necessário da susceptância normalizada do toco;

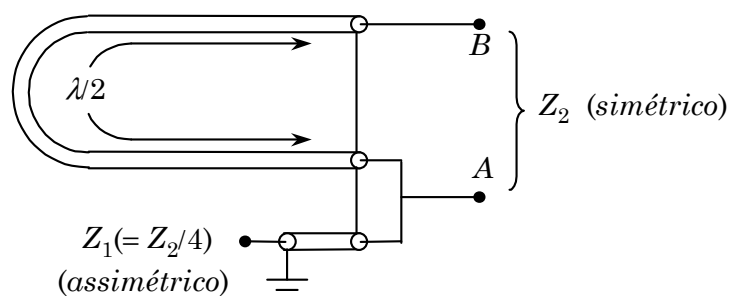
iii) o comprimento do toco, em comprimento de onda, é lido diretamente na escala externa à carta de Smith; neste exemplo, os comprimentos dos tocos são  $0,166\lambda$  para a susceptância de  $-j0,59$  (ponto 6) e  $0,372\lambda$  para a susceptância de  $j0,97$  (ponto 7).

### Transformadores "balun"

As linhas mais usadas na prática são o cabo coaxial e a linha de dois fios paralelos, tendo cada uma delas suas vantagens e desvantagens. O cabo coaxial é blindado a campos externos e por isso imune a interferências; no entanto, suas perdas são relativamente grandes por causa do dielétrico que deve situar-se entre os condutores, a fim de manter entre eles o espaçamento devido. A linha de fios paralelos tem perdas comparativamente menores, mas está sujeita às influências dos campos externos, condições de contorno, etc..

Para cada situação haverá um tipo de linha mais conveniente que o outro. Porém, a passagem de um tipo de alimentação para o outro não pode ser feita simplesmente conectando diretamente a linha paralela com a linha coaxial, sob pena de diminuirmos a eficiência do sistema. Isto porque, além do problema de adaptação de impedâncias, é preciso levar em conta a deformação dos campos nas regiões vizinhas à conexão, o que causa um aumento de irradiação nas linhas.

É possível, entretanto, passarmos de uma linha simétrica para outra assimétrica, evitando tais efeitos perturbadores, por meio de dispositivos chamados transformadores *balun* (do inglês *BALanced-to-UNbalanced*).



**Figura 7.12** Transformador balun

Um tipo de balun muito utilizado é o indicado na Figura 7.12. Ele é feito com um pedaço de coaxial de  $\lambda/2$  na frequência de operação. Um dos lados da linha simétrica é ligado diretamente ao condutor central (ponto A). Deste mesmo ponto o sinal é retirado e obrigado a percorrer o trecho de  $\lambda/2$  antes de alimentar o outro lado da linha simétrica, sofrendo, portanto, uma inversão de fase neste trajeto. A linha simétrica fica alimentada por sinais de mesma amplitude e de fases opostas e seu funcionamento será o correto.

O balun duplica a tensão mantendo a potência e, portanto, quadruplica a impedância. Quando o quociente das impedâncias características das linhas não estiver nesta relação devemos instalar transformadores-série ou -paralelo para completar a adaptação.

Outros tipos de balun são descritos, por exemplo, em *The ARRL Handbook for Radio Amateurs*, publicada anualmente por *The American Radio Relay League*, Newington, CT, USA, e no artigo de C.L. Ruthroff, *Some broad-band transformers*. Proc. IRE, vol. 47, pp. 1337-1342, August, 1959.



### 7.16 LINHAS COM DISTORÇÃO; VELOCIDADE DE GRUPO

Nas linhas de transmissão nas quais  $R/L$  é diferente de  $G/C$ , a constante de fase  $\beta$  é função não linear da frequência e, de acordo com (7.26), a velocidade de fase depende de forma complicada da frequência. Assim, se a energia, através da linha, for transmitida usando um espectro amplo de frequência, a forma de onda na saída da linha poderá ser substancialmente diferente daquela da entrada, pois as relações de fase das várias componentes se alteram ao longo do caminho dando origem ao fenômeno de dispersão.

A fim de exemplificar, consideremos duas ondas com frequências ligeiramente diferentes que se propagam através da linha. Se as frequências forem suficientemente próximas, a constante de atenuação é a mesma e além disso, por comodidade do exemplo, supomos as amplitudes iguais. Assim, em função do tempo e do espaço escrevemos

$$v(t, z) = V_m e^{-\alpha z} \{ \cos[(\omega - d\omega)t - (\beta - d\beta)z] + \cos[(\omega + d\omega)t - (\beta + d\beta)z] \}$$

que pode ser posta na forma

$$v(t, z) = 2V_m e^{-\alpha z} \cos(t.d\omega - z.d\beta) \cos(\omega t - \beta z) \quad (7.84)$$

na qual constatamos uma onda de frequência elevada que se propaga através da linha e cuja amplitude varia com uma frequência baixa.

A envoltória da onda é, explicitamente,

$$2V_m e^{-\alpha z} \cos(t.d\omega - z.d\beta)$$

que varia cossenoidalmente tanto com o tempo como com a distância e pode ser interpretada como uma onda progressiva. Percebemos imediatamente que um observador que acompanha o mesmo ponto da *envoltória* se desloca com velocidade

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (7.85)$$

chamada de **velocidade de grupo**.

Do mesmo modo, para um sinal constituído de muitas componentes senoidais, desde que confinadas a uma banda relativamente estreita, poderia ser mostrado que a velocidade de grupo, definida acima, pode ser usada como velocidade "*do sinal*". Para grandes dispersões isso pode não ser uma boa aproximação e chega até ser impossível dar um valor para a velocidade de propagação da onda, pois sua forma fica substancialmente alterada à medida que progride.

Outro fato digno de nota, nas linhas com distorção, é que, pelo fato de a impedância característica  $Z_0$  não ser real, resulta num coeficiente de reflexão que pode ser maior que 1, como mostramos em (7.69). O uso da carta de Smith convencional pode ser, então, inapropriado, e usamos nesse caso uma carta que representa o plano  $\rho$  até o módulo  $1 + \sqrt{2}$ . A essa carta aplicam-se as propriedades da carta de Smith convencional.

## FONTES DE CONSULTA

RAMO, Simon; WHINNERY, John R.; VAN DUZER, Theodore. **Campos e ondas em eletrônica das comunicações**. [*Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966]. Trad. Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. Cap. 1.

GIACOLETTO, L.J.. **Electronics Designers' Handbook**, 2nd edition. New York: McGraw-Hill, 1977. Cap. 8.

VAN VALKENBURG, Mac E.. **Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computer, Communications**, 8th edition. Carmel, IN: Prentice-Hall, 1993. Cap. 29.

The American Radio Relay League. **The ARRL Handbook for Radio Amateurs**. Newington, CT. Capítulo: Transmission Lines.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**P7.1** A TOE numa linha sem perdas é 3.

(a) Calcule o coeficiente de reflexão na carga  $R_L$  sabendo que ela é resistiva e menor que  $Z_0$ ;

(b) Em seguida, calcule  $R_L$ ;

(c) Como seria possível calcular  $R_L$  diretamente a partir da TOE?

**P7.2** Em regime permanente senoidal, o sistema mostrado na Figura 7.13 pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Calcule  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  e  $Z_{22}$  em termos de  $l$ ,  $\beta$  e  $Z_0$ .

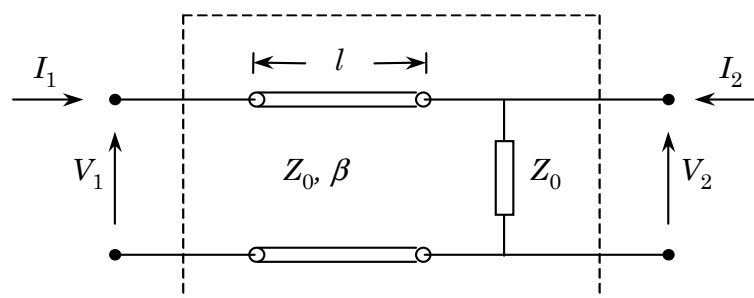


Figura 7.13 Problema P7.2

**P7.3** Duas antenas idênticas, com impedâncias  $75 \Omega$ , na frequência de operação, estão separadas de  $\lambda/2$  e são ligadas entre si por uma linha de transmissão de impedância característica  $Z_0$ , também com meio comprimento de onda. Contactos elétricos são colocados exatamente na metade de cada um dos condutores desta linha, formando, assim, um bipolo que atua como carga

de uma outra linha de  $75 \Omega$ . Calcule  $Z_0$  de forma que a carga da linha de  $75 \Omega$  seja  $75 \Omega$ .

- P7.4** Uma linha de transmissão sem perdas, de impedância característica  $Z_0 = 50 \Omega$  e comprimento  $l = 0,25\lambda$ , na frequência de operação  $\omega_0$ , tem na carga uma corrente  $i_L(t) = I \cos^3 \omega_0 t$  A e uma tensão  $v_L(t) = 0$  V. Calcule a corrente na entrada da linha. [Lembrete:  $\cos^3 a = (\cos 3a + 3 \cos a)/4$ .]
- P7.5** Para uma linha de impedância característica  $Z_0 = 100 \Omega$  terminada em  $(100 + j100) \Omega$ , determine a impedância a  $\lambda/8$  da terminação e a admitância correspondente nesse ponto.
- P7.6** Uma linha de transmissão tem uma impedância característica de  $(50 + j0) \Omega$  e uma taxa de onda estacionária de 2,0, medida perto da carga. Existe um mínimo de corrente a  $0,35\lambda$  da carga. A linha tem comprimento  $9,5\lambda$  e uma atenuação de  $0,1 \text{ dB}/\lambda$ . Calcule:
- a impedância de carga;
  - a atenuação total da linha;
  - a impedância de entrada.
- P7.7** Projetar o transformador de 2 tocos da Figura 7.14 de modo que a impedância de entrada  $Z_1$  seja igual à impedância característica  $Z_0 = 100 \Omega$ .

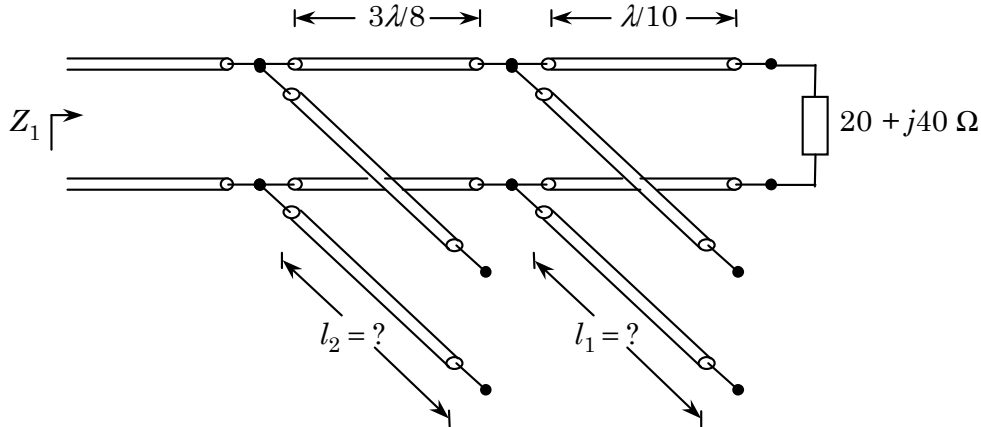


Figura 7.14 Problema P7.7

- P7.8** Mostre que a velocidade de grupo  $v_g$ , definida através de (7.85), está relacionada à velocidade fase  $v_f$ , definida por (7.26), por meio de

$$v_g = \frac{v_f}{1 - \frac{\omega}{v_f} \frac{dv_f}{d\omega}}.$$

## 8. LINHAS ARTIFICIAIS

Neste capítulo são apresentados modelos de quadripolos que simulam, dentro de certa aproximação, linhas de transmissão reais. Por fim, são estudadas linhas híbridas e a técnica de pupinização.

### 8.1 INTRODUÇÃO

Quando estudamos sistemas de transmissão com o propósito de analisar o comportamento provável de linhas e geradores ainda em projeto, é conveniente reproduzirmos o sistema em escala reduzida seja num *analisador de rede*, seja num programa de computador. Um dos problemas que devem ser resolvidos nessa modelagem está em como representar melhor a linha de transmissão por meio de parâmetros concentrados numa linha artificial.

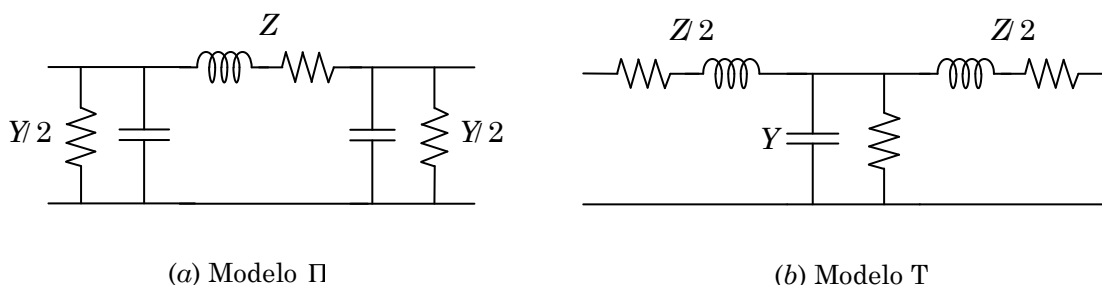
Essas linhas artificiais encontram aplicação na simulação de sistemas de potência e equipamento telefônico, bem como em circuitos de pulso e de retardo em sistemas de radar e televisão.

Os modelos mais simples que representam uma linha de transmissão, por parâmetros concentrados, são aqueles mostrados nas Figuras 8.1a e 8.1b, ditos modelos  $\Pi$  e T, respectivamente, nos quais  $Z$  representa a impedância série da linha, *i.e.*, o produto da impedância por unidade de comprimento vezes o comprimento  $l$  da linha e  $Y$  representa a admitância paralela da linha, *i.e.*, o produto da admitância por unidade de comprimento vezes o comprimento  $l$  da linha. Explicitamente

$$Z = (R + j\omega L) \cdot l \quad (8.1)$$

e

$$Y = (G + j\omega C) \cdot l. \quad (8.2)$$



**Figura 8.1** Aproximações de linha de transmissão

As representações acima são aproximações grosseiras, de um modo geral, mas tendem a simular melhor o desempenho de uma linha real quanto menor for a

mesma em relação ao comprimento de onda. Se, por outro lado, modelarmos a linha associando em série um número grande de células  $\Pi$  ou  $T$ , cada uma das quais simulando frações pequenas da linha de transmissão, parece intuitivo (e é verdade) que o comportamento geral do sistema simula melhor a linha real que um modelo com uma única célula.

Contudo, uma linha real e uma linha artificial são tão diferentes fisicamente que uma equivalência completa entre ambas é dificilmente conseguida, mesmo em linhas muito curtas. Nas seções seguintes serão expostas as bases que servirão de critérios de equivalência entre linhas reais e artificiais.

## 8.2 IMPEDÂNCIAS DE CURTO-CIRCUITO E DE CIRCUITO ABERTO

Uma linha artificial é dita equivalente a uma linha real se o comportamento nos terminais de uma for idêntico ao comportamento nos terminais da outra. Como os parâmetros  $Z_0$  e  $\gamma$  definem o comportamento de uma linha de transmissão, duas linhas com os mesmos  $Z_0$  e  $\gamma$  são equivalentes eletricamente.

Mostramos na Sec. 7.9 que a impedância característica  $Z_0$  é obtida pela extração da raiz quadrada do produto das impedâncias medidas na entrada da linha com terminação em curto-circuito  $Z_{cc}$  e com a terminação em aberto  $Z_{ca}$ , ou seja,

$$Z_0^2 = Z_{cc} \cdot Z_{ca} \quad (8.3)$$

onde

$$Z_{cc} = Z_0 \tanh \gamma l$$

e

$$Z_{ca} = Z_0 \coth \gamma l$$

Fazemos notar, agora, que a raiz quadrada do quociente de  $Z_{cc}$  por  $Z_{ca}$  nos dá a tangente hiperbólica de  $\gamma l$ , ou seja,

$$\tanh^2 \gamma l = \frac{Z_{cc}}{Z_{ca}}.$$

Formas alternativas, obtidas facilmente, são

$$\sinh^2 \gamma l = \frac{Z_{cc}}{Z_{ca} - Z_{cc}}$$

e

$$\cosh^2 \gamma l = \frac{Z_{ca}}{Z_{ca} - Z_{cc}} \quad (8.4)$$

sendo esta última, em particular, a que mais se presta a deduções posteriores, como veremos.

Decorre, então, que uma linha artificial e uma linha real são equivalentes se elas tiverem as mesmas impedâncias de circuito aberto e de curto-circuito. Tratando-se de dispositivos lineares, as linhas equivalentes se comportarão de modo idêntico com qualquer terminação.

Vamos, portanto, calcular as impedâncias de entrada  $Z_{ca}$  e  $Z_{cc}$ , de uma linha artificial, com a saída em circuito aberto e em curto-circuito, respectivamente, e então determinar os parâmetros de uma linha real que apresente as mesmas impedâncias de circuito aberto e de curto-circuito.

Referindo-nos ao circuito  $\Pi$  da Figura 8.1a obtemos, com a saída em curto

$$Z_{cc} = \frac{Z \cdot \frac{2}{Y}}{Z + \frac{2}{Y}} = \frac{2Z}{ZY + 2} \quad (8.5)$$

e com a saída em aberto

$$Z_{ca} = \frac{\left(Z + \frac{2}{Y}\right) \cdot \frac{2}{Y}}{Z + \frac{2}{Y} + \frac{2}{Y}} = \frac{2}{Y} \cdot \frac{ZY + 2}{ZY + 4}. \quad (8.6)$$

Referindo-nos ao circuito T da Figura 8.1b obtemos, com a saída em curto

$$Z_{cc} = \frac{\frac{Z}{2} \cdot \frac{1}{Y}}{\frac{Z}{2} + \frac{1}{Y}} = \frac{Z}{2} \cdot \frac{ZY + 4}{ZY + 2} \quad (8.7)$$

e com a saída em aberto

$$Z_{ca} = \frac{Z}{2} + \frac{1}{Y} = \frac{ZY + 2}{2Y}. \quad (8.8)$$

### 8.3 REDES EQUIVALENTES COM SEÇÕES- $\Pi$

De acordo com (8.3), usamos as impedâncias de curto-circuito e circuito aberto, dadas respectivamente por (8.5) e (8.6), para calcular a impedância característica de uma linha de transmissão equivalente

$$Z_0^2 = \frac{2}{Y} \cdot \frac{ZY + 2}{ZY + 4} \cdot \frac{2Z}{ZY + 2}$$

ou

$$Z_0^2 = \frac{Z}{Y} \cdot \frac{4}{4 + ZY} = \frac{1}{\frac{Y}{Z} + \frac{4}{Y^2}}. \quad (8.9)$$

A constante de propagação pode ser calculada através de (8.4), resultando

$$\cosh^2 \gamma l = \frac{1}{1 - \frac{Z_{cc}}{Z_{ca}}} = \frac{1}{1 - \frac{ZY(ZY + 4)}{(ZY + 2)^2}} = \frac{(ZY + 2)^2}{4}.$$

Logo,

$$\cosh \gamma l = 1 + \frac{1}{2}ZY \quad (8.10)$$

ou utilizando uma identidade de trigonometria hiperbólica, escrevemos

$$\sinh \frac{1}{2}\gamma l = \frac{1}{2}\sqrt{ZY}. \quad (8.11)$$

O emprego conveniente das funções inversas permite o cálculo da constante de propagação. Fazemos notar, no entanto, que  $\gamma = \alpha + j\beta$  é, em geral, complexo, o que torna o problema algo trabalhoso. No caso de linhas de linhas sem perdas,  $\gamma = j\beta$  e, neste caso, lembramos que  $\sinh j\beta l = j\sin \beta l$  e  $\cosh j\beta l = \cos \beta l$ , o que simplifica bastante o problema, pois nos atemos a funções inversas trigonométricas simples. O caso geral merece atenção especial e voltaremos a estudá-lo na Sec. 8.5.

Outro problema, igualmente importante, consiste em calcularmos a impedância e a admitância da linha artificial para que a mesma seja equivalente à linha de transmissão real.

Primeiramente, fazendo uso de (8.10), escrevemos

$$\sinh^2 \gamma l = \cosh^2 \gamma l - 1 = \frac{(ZY + 2)^2}{4} - 1 = Z^2 \left( \frac{Y^2}{4} + \frac{Y}{Z} \right)$$

e reconhecendo no termo entre parênteses o inverso do quadrado da impedância característica  $Z_0$ , dado por (8.9), resulta

$$Z = Z_0 \sinh \gamma l. \quad (8.12)$$

As conhecidas expressões gerais de  $\gamma$  e  $Z_0$ , respectivamente (7.9) e (7.16), permitem escrever esta expressão em forma alternativa

$$Z = (R + j\omega L)l \cdot \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l}. \quad (8.13)$$

Para calcularmos  $Y$  fazemos uso de (8.10), na qual substituímos  $Z$  pelo valor de (8.12). Assim,

$$\frac{1}{2}Y = \frac{\cosh \gamma l - 1}{Z} = \frac{\cosh \gamma l - 1}{Z_0 \sinh \gamma l} = \frac{1}{Z_0} \tanh \frac{\gamma l}{2}. \quad (8.14)$$

Aqui, também, fazendo uso das expressões gerais de  $\gamma$  e  $Z_0$ , chegamos facilmente à forma alternativa

$$Y = (G + j\omega C)l \cdot \frac{\tanh (\gamma l/2)}{\gamma l/2}. \quad (8.15)$$

É interessante comparar (8.13) e (8.15) com (8.1) e (8.2), respectivamente, correspondentes aos modelos grosseiros. Observamos que, em ambos os casos, existe um fator de correção que tende a 1 quando  $l$  tende a 0. Isto justifica a afirmação que simplesmente concentrarmos as impedâncias e admitâncias de uma linha real para calcularmos os elementos de uma linha artificial equivalente é satisfatório se o comprimento da linha real for muito menor que um quarto de comprimento de onda.

Outra observação notável é que, como  $\gamma$  depende da frequência, a equivalência entre linhas só vale para uma única frequência. Assim, para simularmos linhas reais cujo comprimento seja comparável com um quarto de comprimento de onda, ou maiores, devemos associar um número suficientemente grande de células  $\Pi$  uma em seguida à outra, cada uma das quais tendo fatores de correção tão próximos da unidade quanto possível. No caso limite de chegarmos a ter infinitas seções infinitesimais em série, a linha artificial será uma representação exata da linha real com qualquer comprimento.

#### 8.4 REDES EQUIVALENTES COM SEÇÕES-T

Também neste caso, usamos as impedâncias de curto-circuito e de circuito aberto, dadas respectivamente por (8.7) e (8.8), para calcularmos a impedância característica de uma linha de transmissão equivalente. Conforme (8.3), obtemos

$$Z_0^2 = \frac{ZY + 2}{2Y} \cdot \frac{Z}{2} \cdot \frac{ZY + 4}{ZY + 2}$$

ou

$$Z_0^2 = \frac{Z}{Y} \cdot \frac{4 + ZY}{4} = \frac{Z}{Y} + \frac{Z^2}{4}. \quad (8.16)$$

A constante de propagação, calculada através de (8.4) nos dá

$$\cosh^2 \gamma l = \frac{(ZY + 2)^2}{4}$$

ou

$$\cosh \gamma l = 1 + \frac{1}{2} ZY. \quad (8.17)$$

que é exatamente o mesmo valor obtido para as seções- $\Pi$ . Assim, a expressão (8.11) aplica-se, também, às seções-T, bem como os comentários referentes às funções inversas.

As expressões explícitas de  $Z$  e  $Y$  de uma seção-T, que representa uma linha real, podem ser obtidas como se segue.

A partir de (8.17) escrevemos

$$\sinh^2 \gamma l = \cosh^2 \gamma l - 1 = Y^2 \left( \frac{Z^2}{4} + \frac{Z}{Y} \right)$$



na qual introduzindo  $Z_0^2$ , dado por (8.16), obtemos

$$Y = \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l \quad (8.18)$$

a qual pode ser reescrita de forma análoga à que procedemos em (8.13), dando

$$Y = (G + j\omega C)l \cdot \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l}. \quad (8.19)$$

Por outro lado, a partir de (8.17) escrevemos

$$\frac{1}{2}Z = \frac{\cosh \gamma l - 1}{Y} = \frac{\cosh \gamma l - 1}{(1/Z_0) \sinh \gamma l} = Z_0 \tanh \frac{\gamma l}{2} \quad (8.20)$$

a qual pode ser reescrita

$$Z = (R + j\omega L)l \cdot \frac{\tanh (\gamma l/2)}{\gamma l/2}. \quad (8.21)$$

Toda a discussão que se seguiu à expressão (8.15) na Sec. 8.3 pode ser aplicada às seções-T, e não vale a pena repeti-la.

## 8.5 CÁLCULO DAS FUNÇÕES INVERSAS

As expressões (8.10) e (8.11) permitem o cálculo de  $\gamma l$  de uma linha real. No entanto, é necessária a inversão dos senos e cossenos hiperbólicos de argumento complexo, o que é em geral complicado. Certos casos particulares, entretanto, como nas linhas de perdas pequenas, permitem certas aproximações. Começamos, então, apresentado as expressões aproximadas e depois as expressões exatas.

### Expressões aproximadas

Seja

$$\cosh \gamma l = \cosh(\alpha + j\beta)l = x + jy \quad (8.22)$$

onde  $x$  e  $y$  são as partes real e imaginária de (8.10). Sendo o cosseno hiperbólico de argumento complexo dado por

$$\cosh(\alpha + j\beta)l = \cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l \quad (8.23)$$

igualamos as partes reais e igualamos as partes imaginárias de (8.22) e (8.23) e resultam

$$x = \cosh \alpha l \cos \beta l \quad (8.24)$$

e

$$y = \sinh \alpha l \sin \beta l. \quad (8.25)$$

Se  $\alpha l$  for pequeno, temos aproximadamente  $\cosh \alpha l \cong 1$  e  $\sinh \alpha l \cong \alpha l$ .

Assim, de (8.24) obtemos

$$x \cong \cos \beta l$$

e, daí,

$$\beta l \cong \cos^{-1} x. \quad (8.26)$$

Do mesmo modo, de (8.25) obtemos

$$y \cong \alpha l \sin \beta l$$

e, daí,

$$\alpha l \cong \frac{y}{\sin \beta l}. \quad (8.27)$$

O seno hiperbólico de argumento complexo também pode ser usado de forma aproximada. Seja

$$\sinh \gamma l = \sinh(\alpha + j\beta)l = x + jy \quad (8.28)$$

onde  $x$  e  $y$  são as partes real e imaginária de (8.11). Sendo o seno hiperbólico de argumento complexo dado por

$$\sinh(\alpha + j\beta)l = \sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l \quad (8.29)$$

igualamos as partes reais e igualamos as partes imaginárias de (8.28) e (8.29) e resultam

$$x = \sinh \alpha l \cos \beta l \quad (8.30)$$

e

$$y = \cosh \alpha l \sin \beta l \quad (8.31)$$

de modo que, para  $\gamma l$  for pequeno, temos aproximadamente

$$\beta l \cong \sin^{-1} y \quad (8.32)$$

e

$$\alpha l \cong \frac{x}{\cos \beta l}. \quad (8.33)$$

### Expressões gerais

No caso geral devemos recorrer às fórmulas

$$\cosh^{-1}(x + jy) = \pm \left( \cosh^{-1} \frac{p+q}{2} + j \cos^{-1} \frac{2x}{p+q} + j2k\pi \right). \quad (8.34)$$

e

$$\cosh^{-1}(x - jy) = \pm \left( \cosh^{-1} \frac{p+q}{2} - j \cos^{-1} \frac{2x}{p+q} + j2k\pi \right). \quad (8.35)$$

onde são tomados o valor positivo de  $\cosh^{-1}$  e o valor principal de  $\cos^{-1}$  (entre 0 e  $\pi$ ),  $x$  é positivo ou negativo mas  $y$  é positivo,

$$p = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \quad (8.36)$$

e

$$q = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} . \quad (8.37)$$

As fórmulas referentes ao inverso do seno hiperbólico são

$$\sinh^{-1}(\pm x + jy) = \pm(-1)^n \cosh^{-1} \frac{s+t}{2} + j(-1)^n \sin^{-1} \frac{2y}{s+t} + jn\pi \quad (8.38)$$

onde são tomados o valor positivo de  $\cosh^{-1}$  e o valor principal de  $\sin^{-1}$  (entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ ),  $n$  é inteiro ou zero,  $x$  é positivo,  $y$  é positivo ou negativo,

$$s = \sqrt{(1+y)^2 + x^2} \quad (8.39)$$

e

$$t = \sqrt{(1-y)^2 + x^2} . \quad (8.40)$$

Outras alternativas para a inversão incluem calculadoras científicas, tabelas, nomogramas e mesmo o uso de séries.

## 8.6 RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Fizemos notar que uma linha artificial representa exatamente uma linha de transmissão real em somente uma frequência. Quanto mais curta for a linha real, representada pela linha artificial, menor será a dependência com a frequência; e, se for necessária uma linha artificial que represente uma linha real em uma banda larga de frequências, ela deverá ser constituída de várias pequenas seções em série.

O estudo de transitórios em linhas artificiais deve ser interpretado com bastante cuidado, pois elas não reagem da mesma maneira que uma linha real às várias componentes de frequências. A linha artificial, na verdade, bloqueia a passagem de componentes de frequências mais altas que uma linha real transmitiria livremente; uma linha artificial age como um filtro passa-baixas. Essa atenuação de frequências altas independe de haver perdas na linha artificial, como ilustramos a seguir.

Seja uma linha artificial, sem perdas, na qual

$$Z = j\omega L_s \quad (8.41)$$

e

$$Y = j\omega C_p . \quad (8.42)$$

Para essa linha podemos obter a constante de propagação através de (8.11), *i.e.*,

$$\sinh\left(\frac{\alpha l + j\beta l}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 L_s C_p} . \quad (8.43)$$

Por outro lado, a identidade (8.29), convenientemente aplicada a (8.43), nos dá, após identificarmos as partes reais e as partes imaginárias,

$$\sinh \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\beta l}{2} = 0 \quad (8.44)$$

e

$$\cosh \frac{\alpha l}{2} \sin \frac{\beta l}{2} = \sqrt{\frac{\omega^2 L_s C_p}{4}}. \quad (8.45)$$

É evidente que para satisfazer a (8.44) devemos ter  $\sinh(\alpha l/2)$  ou  $\cos(\beta l/2)$  igual a zero. Analisemos as duas condições.

Primeiro, se  $\omega^2 L_s C_p$  for menor que 4,  $\sinh(\alpha l/2)$  deve ser zero, pois se  $\cos(\beta l/2)$  fosse zero resultaria  $\sin(\beta l/2) = 1$  e  $\cosh(\alpha l/2)$  seria menor que 1, o que é impossível. Assim, quando  $\omega^2 L_s C_p$  for menor que 4,  $\alpha$  é zero e a linha não introduz atenuação.

Segundo, quando  $\omega^2 L_s C_p$  for maior que 4, (8.45) é maior que 1 e, desde que o máximo valor do seno é a unidade, resulta que  $\cosh(\alpha l/2)$  é maior que 1, evidenciando que  $\alpha$  não é mais zero. [Para satisfazer a (8.44),  $\cos(\beta l/2) = 0$ .] Em outras palavras, existe atenuação quando  $\omega^2 L_s C_p$  for maior que 4.

A frequência para a qual  $\omega^2 L_s C_p = 4$  é chamada de frequência de corte e é dada por

$$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_s C_p}} \quad (8.46)$$

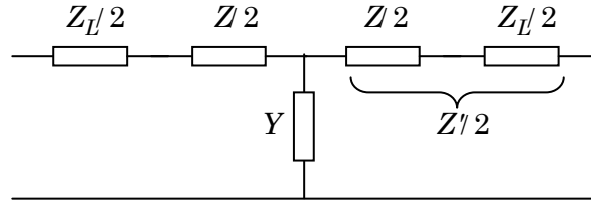
evidenciando, mais uma vez, que quanto menores forem as seções da linha artificial menor será o bloqueio às frequências altas.

## 8.7 LINHAS HÍBRIDAS; PUPINIZAÇÃO

Em qualquer linha telefônica comercial, o produto  $LG$  é muito menor que o produto  $CR$ , o que implica em distorções na propagação. A maneira de aproximarmos essa relação é aumentando  $L$ , já que o aumento de  $G$  aumenta as perdas e os outros parâmetros não podem ser diminuídos.

Isso pode ser feito inserido indutores apropriados a intervalos regulares da linha. Essa técnica, criada por Pupin em 1900, é conhecida por **pupinização**, e os indutores concentrados são chamados de *bobinas de pupinização*. O conjunto linha-bobina tem características de ambas mas, no que se refere à resposta em frequência, o comportamento é claramente de um filtro passa-baixas, como nas linhas artificiais.

De um modo geral, o comportamento do conjunto pode ser analisado calculando, através de (8.19) e (8.21), os parâmetros de uma seção-T da linha artificial equivalente à seção da linha real e juntando a essa seção de linha artificial a indutância de pupinização.



**Figura 8.2** Elemento de linha, em série com bobina de pupinização  $Z_L$

Na Figura 8.2, à seção de linha, simulada por  $Z$  e  $Y$ , é juntada a impedância da bobina de pupinização  $Z_L$ . Temos, então, uma nova seção-T na qual o ramo série é agora

$$\frac{Z'}{2} = \frac{Z_L}{2} + \frac{Z}{2} \quad (8.47)$$

ou introduzindo o valor de  $Z$  dado por (8.20), obtemos

$$\frac{Z'}{2} = \frac{Z_L}{2} + Z_0 \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l}. \quad (8.48)$$

No modelo,  $Y$  não é alterado e continua a ser dado por (8.18).

A constante de propagação da célula modificada  $\gamma'$  pode, então, ser calculada através de (8.17), ou seja,

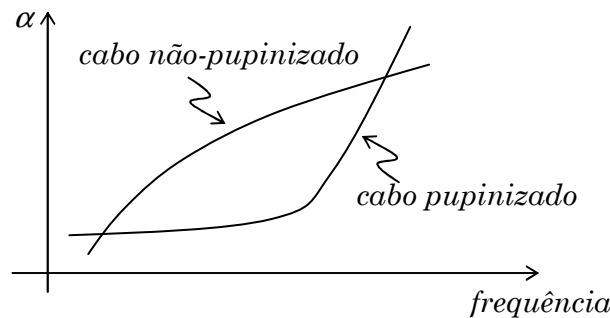
$$\cosh \gamma' l = 1 + \frac{1}{2} Z' Y = 1 + \left( \frac{Z_L}{2} + Z_0 \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \right) \frac{\sinh \gamma l}{Z_0}$$

que conduz a

$$\cosh \gamma' l = \cosh \gamma l + \frac{Z_L}{2Z_0} \sinh \gamma l. \quad (8.49)$$

conhecida como *fórmula de Campbell*.

A bobina de pupinização reduz a atenuação em frequências baixas mas, como já vimos na Sec. 8.6, acima da frequência de corte dada por (8.46) a atenuação passa a ser acentuada, como esboçado na Figura 8.3. Nessa equação  $L_r$  é a soma da indutância série do modelo da linha com a indutância de pupinização.



**Figura 8.3** Comparação entre atenuações com e sem pupinização

A frequência de corte pode ser aumentada pela diminuição da indutância da bobina ou pela diminuição do espaçamento entre as mesmas. A diminuição da indutância faz aumentar a atenuação dentro da banda. A diminuição do espaçamento aumenta o custo, que depende da instalação. Conciliando esses fatores, a experiência consagrou dois espaçamentos-padrão: 1.830 m (6.000 pés) e 915 m (3.000 pés).

As bobinas de pupinização são especificadas em termos da nomenclatura do *Bell System*. A primeira letra designa o espaçamento, a saber: *H* denota 1.830 m e *B* denota 915 m. Os números designam a indutância da bobina em mH. A última letra designa o tipo de circuito: *S* lateral, *P* fantasma, *N* não-fantasma ou físico. Assim, H-18-P designa uma bobina de 18 mH para instalação com espaçamento de 1.830 m num circuito fantasma.

## FONTES DE CONSULTA

SKILLING, H.H.. **Electric Transmission Lines**. New York: McGraw-Hill, 1951.

BREAZEALE, W.L.; QUARLES, L.R.. **Lines, Networks and Filters**. Scranton: International Textbook, 1951.

EVERITT, William L.; ANNER, G.E.. **Communication Engineering**. New York: McGraw-Hill, 1956. Cap. 8.

DWIGHT, Herbert Bristol. **Tables of Integrals and Other Mathematical Data**. New York: Macmillan, 1961. Cap. 8.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

- P8.1** Uma linha de transmissão apresenta, a 4 kHz,  $Z_0 = 650 \angle -6^\circ \Omega$ ,  $\alpha = 5 \times 10^{-8}$  nepers/m e  $\beta = 1,5 \times 10^{-7}$  rad/m. Calcule uma seção- $\Pi$  equivalente a 1 km de linha nessa frequência.
- P8.2** Calcule uma seção-T equivalente a 1 km da linha do Problema P8.1, na frequência de 4 kHz.
- P8.3** Uma linha de transmissão tem, em frequência baixa,  $R = 6,5 \Omega/\text{km}$ ,  $L = 2,3 \text{ mH/km}$  e  $C = 5,2 \times 10^{-9} \text{ F/km}$  e  $G \cong 0$ . Calcule uma seção- $\Pi$  equivalente a 2 km de linha em: a) 500 Hz; b) 4.000 Hz.
- P8.4** Calcule uma seção-T equivalente a 2 km da linha do Problema P8.3 em: a) 500 Hz; b) 4.000 Hz.
- P8.5** Uma linha artificial apresenta, num modelo- $\Pi$ ,  $Z = (104,4 + j230) \Omega$  e  $Y = j526 \times 10^{-6} \text{ S}$ , na frequência de 1 kHz. Calcule  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $Z_0$  de uma linha que seja exatamente equivalente a esse  $\Pi$ .
- P8.6** Uma linha artificial apresenta, num modelo-T,  $Z = (104,4 + j230) \Omega$  e  $Y = j526 \times 10^{-6} \text{ S}$ , na frequência de 1 kHz. Calcule  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $Z_0$  de uma linha que seja exatamente equivalente a esse T.

# APÊNDICE.

## RESPOSTAS AOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Nesse Apêndice são apresentadas respostas aos Problemas Propostos no fim de cada capítulo.

### A.1 INTRODUÇÃO

O leitor encontrará nesse apêndice as respostas aos Problemas Propostos no fim de cada capítulo.

Os resultados apresentados têm a intenção de servir de orientação ao leitor para verificar sua própria resolução.

Para os enunciados do tipo "mostre que..." a resposta é, obviamente, aquilo que está sendo pedido para demonstrar. Em alguns desses casos, para orientar o leitor, são sugeridos caminhos para a meta desejada.

### A.2 RESPOSTAS

#### Capítulo 1.

**P1.1**

$$E_1 = E_2 = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} / 2$$
$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{E_{xm} \sin \phi_x - E_{ym} \cos \phi_y}{E_{xm} \cos \phi_x + E_{ym} \sin \phi_y}$$
$$\phi_2 = \tan^{-1} \frac{E_{xm} \sin \phi_x + E_{ym} \cos \phi_y}{E_{xm} \cos \phi_x - E_{ym} \sin \phi_y}$$

**P1.2** (a)  $\dot{E}_x = \frac{E_{xm}}{\sqrt{2}} e^{-jkz}$  e  $\dot{E}_y = \frac{E_{ym}}{\sqrt{2}} e^{j\psi} e^{-jkz}$

(b)  $\mathbf{E}_a = \frac{E_{xm}}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_x + \frac{E_{ym}}{\sqrt{2}} \cos \psi \mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{E}_b = \frac{E_{ym}}{\sqrt{2}} \sin \psi \mathbf{u}_y$ .

**P1.3** Para demonstrar basta comparar (1.23) com (1.25) e (1.26), levando em conta que  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  e que a velocidade  $v$  da onda é  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ .





(b) Para os mesmos campos

$$\begin{aligned} w &= 2\varepsilon E_+^2 \sin^2 \beta z \sin^2 \omega t + 2\mu \frac{E_+^2}{\eta^2} \cos^2 \beta z \cos^2 \omega t \\ &= 2\varepsilon E_+^2 [\sin 2\beta z \sin 2\omega t + \cos^2(\omega t + \beta z)] \end{aligned}$$

**P2.6** (a)  $\mathbf{N}_{1\text{méd}} = \eta_1 H_{y1+}^2 \cos \theta [1 - \rho^2] \mathbf{u}_z - \eta_1 H_{y1+}^2 \sin \theta [1 - 2 \cos 2\beta_z z + \rho^2] \mathbf{u}_x$   
 $\mathbf{N}_{2\text{méd}} = \eta_2 H_{y2+}^2 \cos \theta'' \mathbf{u}_z - \eta_2 H_{y2+}^2 \sin \theta'' \mathbf{u}_x$

(b) Sendo  $1 - \rho^2 = \tau^2 \frac{\eta_1 \cos \theta}{\eta_2 \cos \theta''} = \frac{\dot{H}_{y2+}^2}{\dot{H}_{y1+}^2} \frac{\eta_2 \cos \theta''}{\eta_1 \cos \theta}$  resulta  $N_{z1\text{méd}} = N_{z2\text{méd}}$ .

**P2.7** (a)  $83,66^\circ$  (interno);  $6,34^\circ$  (externo);  
 (b)  $71,57^\circ$  (interno);  $18,43^\circ$  (externo);  
 (c)  $58,00^\circ$  (interno);  $32,00^\circ$  (externo).

**P2.8**  $\sin \theta_c = \sqrt{\mu_2 / \mu_1}$

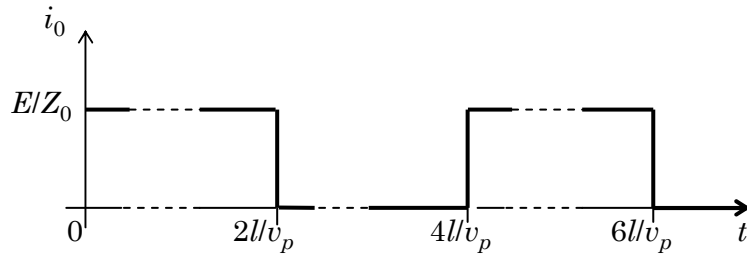
### Capítulo 3.

**P3.2** (a) 53,05 m; (b) 9,83 m.

### Capítulo 5.

**P5.1** (a)  $\rho_l = \frac{R_l Z_{02} - R_l Z_{01} - Z_{01} Z_{02}}{R_l Z_{02} + R_l Z_{01} + Z_{01} Z_{02}};$   
 (b)  $\tau_l = \frac{2R_l Z_{02}}{R_l Z_{02} + R_l Z_{01} + Z_{01} Z_{02}}.$

**P5.2**



**Figura A.3** Resposta do Problema P5.2

**P5.3**  $R_l = 3Z_0.$

**Capítulo 6.**

**P6.1** 
$$\rho = \frac{s^2 LC(R - Z_0) + sL + R}{s^2 LC(R + Z_0) + sL + R}$$

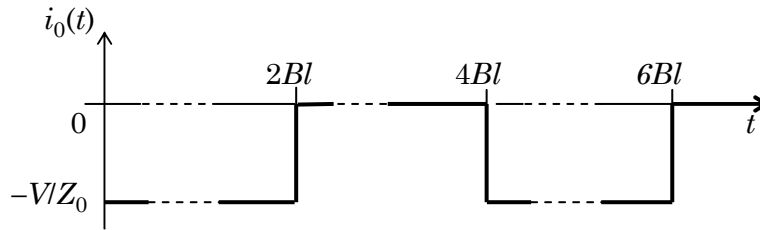
**P6.2**

$$v(t) = \frac{e}{2} \left\{ u(t) = \left[ 2e^{-(L/Z_0)(t-2Bl)} - 1 \right] u(t-2Bl) \right\} \text{ V.}$$

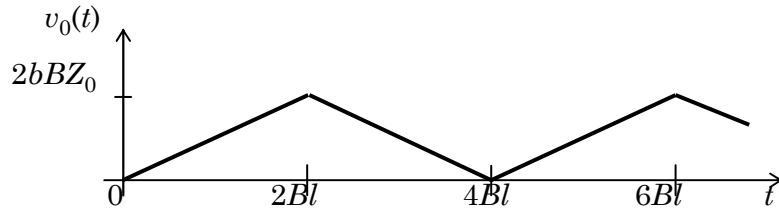
**P6.3** (a)  $v_0(t) = 10[u(t) - (1/3)u(t - 2,5 \times 10^{-6}) + (1/36)u(t - 5,0 \times 10^{-6}) - \dots] \text{ V};$

(b)  $i_l(t) = (1/30)[(3/4)u(t - 1,25 \times 10^{-6}) - (1/16)u(t - 3,75 \times 10^{-6}) + \dots] \text{ A.}$

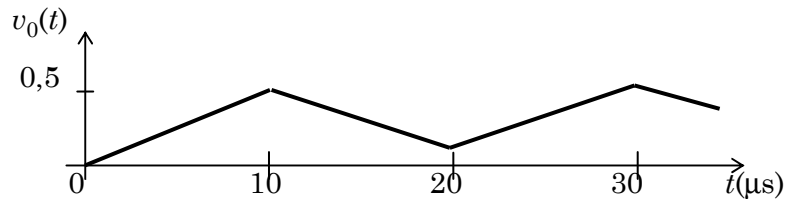
**P6.4** 
$$i_0(t) = -\frac{V}{Z_0} [u(t) - u(t - 2Bl) + u(t - 4Bl) - \dots]$$

**Figura A.4** Resposta do Problema P6.4

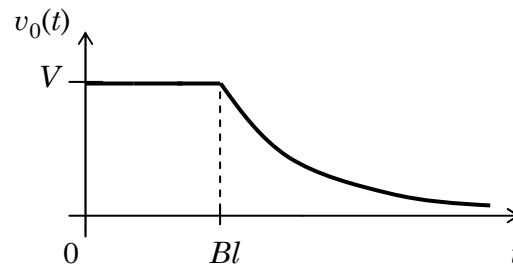
**P6.5** 
$$v_0(t) = \frac{bZ_0}{l} [tu(t) - 2(t - 2Bl)u(t - 2Bl) + 2(t - 4Bl)u(t - 4Bl) - \dots]$$

**Figura A.5** Resposta do Problema P6.5

**P6.6** 
$$v_0(t) = 5 \times 10^4 [tu(t) - 2(t - 10^{-5})e^{-0,2}u(t - 10^{-5}) + 2(t - 2 \times 10^{-5})e^{-0,4}u(t - 2 \times 10^{-5}) - \dots]$$

**Figura A.6** Resposta do Problema P6.6

**P6.7**  $v_{C1}(t) = V + V[e^{-(t-Bl)/(CZ_0)} - 1]u(t - Bl)$



**Figura A.7** Resposta do Problema P6.7

## Capítulo 7.

**P7.1** (a)  $\rho = -0,5$

(b)  $R_L = Z_0/3$

(c) Sendo a carga resistiva menor que  $Z_0$ , encontramos nela um mínimo de tensão (e máximo de corrente). Então, segundo (7.43),

$$R_L = Z_{min} = Z_0/(TOE)$$

**P7.2**  $Z_{11} = Z_0; \quad Z_{12} = Z_{21} = Z_0 e^{-j\beta l} \quad ; \quad Z_{22} = Z_0 e^{j\beta l} \sin \beta l$

**P7.3**  $Z_0 = 75\sqrt{2} = 106,1 \Omega$

**P7.4**  $i_0(t) = 0 \text{ A}$

**P7.5**  $Z_{\lambda/8} = 100 \Omega$

**P7.6** (a)  $Z_{carga} = (33,75 - j24,05) \Omega$

(b)  $\alpha l = 0,95 \text{ dB} = 0,1094 \text{ Np}$

(c)  $Z_{entrada} = (37,50 - j20,65) \Omega$

**P7.7**  $l_1 = 0,368\lambda; \quad l_2 = 0,292\lambda$

**P7.8** Use a diferencial de (7.26), i.e.,  $d\omega = d\beta v_f + \beta dv_f$ .

## Capítulo 8

**P8.1** Referindo-nos ao esquema da Figura 8.1a:

$$Y/2 = 0,122 \times 10^{-6} / 77,56^\circ = (26 + j119) \times 10^{-9} \text{ S}$$

$$Z = 0,103 / 65,56^\circ = (43 + j94) \times 10^{-3} \Omega$$

**P8.2** Referindo-nos ao esquema da Figura 8.1b:

$$Z/2 = 51,5 \times 10^{-3} / \underline{65,56^\circ} = (21 + j47) \times 10^{-3} \Omega$$

$$Y = 0,243 \times 10^{-6} / \underline{77,56^\circ} = (52 + j238) \times 10^{-9} \text{ S}$$

**P8.3** Referindo-nos ao esquema da Figura 8.1a:

(a) em 500 Hz:

$$Y/2 = 16,33 \times 10^{-6} / \underline{90^\circ} = j16,33 \times 10^{-6} \text{ S}$$

$$Z = 26,14 / \underline{48,02^\circ} = (17,5 + j19,4) \Omega$$

(b) em 4.000 Hz:

$$Y/2 = 130 \times 10^{-6} / \underline{90^\circ} = j0,130 \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$Z = 19,55 / \underline{65,80^\circ} = (8,01 + j17,8) \Omega$$

**P8.4** Referindo-nos ao esquema da Figura 8.1b:

(a) em 500 Hz:

$$Z/2 = 13,07 / \underline{48,02^\circ} = (8,74 + j9,71) \Omega$$

$$Y = 32,66 \times 10^{-6} / \underline{90^\circ} = j32,66 \times 10^{-6} \text{ S}$$

(b) em 4.000 Hz:

$$Z/2 = 9,77 / \underline{65,80^\circ} = (4,01 + j8,92) \Omega$$

$$Y = 260 \times 10^{-6} / \underline{90^\circ} = j0,260 \times 10^{-3} \text{ S}$$

**P8.5**  $Z_0 = 704 / \underline{-12,61^\circ} \Omega$ ;  $\alpha l = 0,08 \text{ Np}$ ;  $\beta l = 0,35 \text{ rad}$ .

**P8.6**  $Z_0 = 682 / \underline{-11,06^\circ} \Omega$ ;  $\alpha l = 0,08 \text{ Np}$ ;  $\beta l = 0,35 \text{ rad}$ .