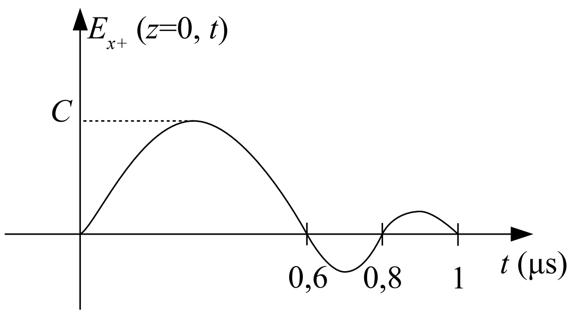
# Lista de Exercícios no. 3

**1)** Uma onda plana uniforme, função degrau, é gerada criando repentinamente um campo elétrico constante $E_x = C\,u(t)$ (degrau de amplitude $C$) em z=0. Um plano perfeitamente condutor é colocado normal ao eixo $z$ em $z$ = 600 m. Esboce os campos $E_x$ e $H_y$ em função de $z$ para $t$= 1μs e $t$=3μs.

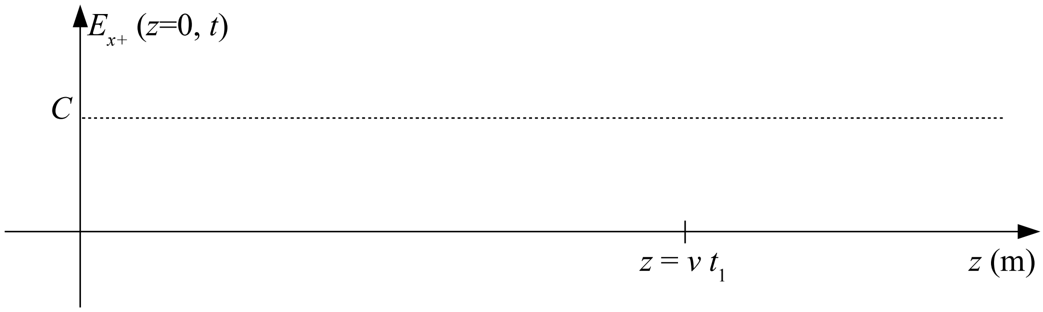
**2)** No exercício anterior, além da onda que se propaga no sentido de $z$ crescente, considere, também, a onda que se propaga no sentido negativo de $z$.
(a) A partir dos campos $\vec{H}$ dessas ondas, conclua qual a densidade de corrente superficial, $\vec{J}_S$ , que deve existir no plano $z$=0, e determine a potência fornecida pela fonte que impõe essa corrente, por metro quadrado. Interprete o fluxo de potência resultante.(R.: $P_f = \frac{2C^2}{\eta}$ )
(b) Em $t$= 1μs, interprete o fluxo de potência que entra no espaço limitado pelos planos $z$=200 m e $z$=400 m.
(c) Em $t$= 3μs, compare as densidades de energia armazenadas em $z$<300m, e z>300 m. Interprete o fluxo de potência que entra no volume limitado pelos planos $z$=200m e $z$=400 m.

**3)** As 3 componentes cartesianas de um vetor campo elétrico variam senoidalmente na frequência de 1 MHz. Os fasores são $\dot{E}_x = 4\,V/m;\ \dot{E}_y = 8\,e^{j\pi/3}\,V/m;\ \dot{E}_z = 4\sqrt{3}\,e^{j\pi/2}\,V/m$ . Mostre que $\vec{E}(t)$ mantém-se em um plano. Identifique esse plano e esboce o lugar geométrico da ponta do vetor $\vec{E}(t)$ . Mostre o vetor em $t$=0, ¼ , ½ , e ¾ μs. Avalie e mostre os valores máximo e mínimo de $\vec{E}(t)$ . (use geometria analítica…)
(R.: $z = y - x$; elipse; $E_{max}$= 10,3 V/m; $E_{min}$= 4,65 V/m)

**4)** A figura abaixo mostra o campo elétrico $E_{x+}$ de uma onda plana uniforme, propagando-se na direção de $z$ crescente, com velocidade $v$, observado no ponto $z$=0 em função do tempo.




Esboce essa componente do campo em função de $z$, no instante $t_1$ = 2 μs.



**5)** Calcule os vetores complexos correspondentes aos seguintes campos:

a) $\vec{E}(t,z)=(10\vec{u}_x)\cos(2\pi 10^8 t-2z)$ V/m

b) $\vec{E}(t,z)=(10\vec{u}_x-8\vec{u}_y)\cos(2\pi 10^9 t+30z-\pi/4)$ V/m

c) $\vec{E}(t,z)=(4\vec{u}_x-3\vec{u}_z)\cos(2\pi 10^9 t-2z+5x+\pi/8)$ V/m

d) $\vec{E}(t,z)=(-5\vec{u}_x-10\vec{u}_y)e^{(-2z)}\cos(2\pi 10^8 t-2z+\pi/8)$ V/m

e) $\vec{E}(t,z)=(3\vec{u}_x)e^{(-2z)}\cos(2\pi 10^8 t-2z+\pi/4)$ V/m

**6)** Considere uma onda plana de frequência *f* propagando-se na direção de *z* num meio condutor de condutividade $\sigma$. O valor do campo elétrico em $z$=0 (suponha propagação no sentido de $z$>0) é 1 $V_{ef}$/m com fase 0°

Determine, para cada caso:

a) o valor do campo magnético em $z = 0$;

b) a fase do campo magnético em $z = 0$;

c) o vetor de Poynting real em $z = 0$;

d) os valores dos itens a, b e c em $z = \lambda_0/2$, onde $\lambda_0$ é o comprimento de onda no vácuo.

**Caso 1**: meio: prata ($\sigma$=6,17×10$^7$ S/m; $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m); $f$ = 10 kHz.

**Caso 2**: meio: prata; $f$ = 10 MHz.

**Caso 3**: meio: estanho ($\sigma$=0,706×10$^7$ S/m; $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m); $f$ = 10 kHz.

**Caso 2**: meio: estanho; $f$ = 10 MHz.

**7)** Uma onda plana uniforme, propagando-se na direção *z*, é dita circularmente polarizada se tiver as componentes *y* e *x* do campo elétrico relacionadas por: $\dot{E}_y=\pm j\dot{E}_x$ . Seja $\dot{E}_{y0+}=j\dot{E}_{x0+}$ :

a) verifique, em $z$=0, como varia $\vec{E}(z=0,t)$ ;

b) repita para $\vec{H}(z=0,t)$ ;

c) calcule o vetor de Poynting instantâneo $\vec{N}(z=0,t)=\Re\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*+\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}\,e^{j2\omega t}\right]$;

d) repita os itens anteriores para uma onda plana uniforme polarizada linearmente na direção *x*.

**8)** Uma onda plana uniforme possui, no plano $z$=0, $\dot{\vec{E}}_+(z=0)=E_0\vec{u}_x+jE_0\vec{u}_y$ . Sabendo-se que a onda se propaga no vácuo, no sentido crescente de *z*, e que $E_0$=2 m$V_{ef}$/m, pede-se:

a) tipo de polarização da onda e sentido da rotação;

b) escreva as expressões temporais de $\vec{E}_+(z,t)$ e $\vec{H}_+(z,t)$ ;

c) vetor de Poynting médio num ponto qualquer *z*.

**9)** Considere a seguinte onda eletromagnética plana, propagando-se num meio sem perdas com $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$, e determine $\dot{\vec{H}}_+(z)$ e $\vec{E}_+(z,t)$ .

$$\dot{\vec{E}}(z)=0{,}2e^{-j\beta z}\vec{u}_x+j0{,}2e^{-j\beta z}\vec{u}_y\,\mathrm{V_{ef}/m}$$

**10)** Comparar a constante de atenuação, a velocidade de fase e a impedância intrínseca para uma onda propagando-se em poliestireno nas frequências de 1MHz, 100 MHz e 10 GHz. Dados para o poliestireno:

| ***f*** **(Hz)** | $\mathbf{10^6}$ | $\mathbf{10^8}$ | $\mathbf{10^{10}}$ |
|---|---|---|---|
| **ε'/ε$_0$** | 2,56 | 2,55 | 2,54 |
| **10$^4$ ε"/ε$_0$** | 0,7 | 1,0 | 4,3 |

**11)** Sabendo-se que a condutividade do cobre vale 5,8×10$^7$ S/m e a da água 4 S/m, e que $\varepsilon'/\varepsilon_0 = 1$ e $\varepsilon'/\varepsilon_0 = 81$, respectivamente para o cobre e a água, calcular em 1 GHz, a constante de atenuação, a velocidade de fase e a impedância intrínseca de cada meio (com unidades).

**12)** Uma onda plana uniforme, na frequência de 50 MHz, com polarização linear na direção $x$, possui $E_{x0+}$=10 mV$_{ef}$/m, e propaga-se no sentido de $z$ crescente. As características do meio são: $\varepsilon = 4\,\varepsilon_0 - j\,0{,}04\,\varepsilon_0$; $\mu = \mu_0$; $\sigma = 0$. Pede-se:

a) escrever as expressões dos campos na forma complexa, $\dot{E}_x(z)$ e $\dot{H}_y(z)$ ,e no domínio do tempo, $E_x(z,t)$ e $H_y(z,t)$ ;

b) calcular o vetor de Poynting médio $\vec{N}_{medio}(z)$

c) verificar que a diferença entre os valores médios do vetor de Poynting entre $z = z_1$ e $z = z_1+\Delta z$ é numericamente igual à potência dissipada no volume limitado por superfícies planas, de área 1 m$^2$, situadas em $z = z_1$ e $z = z_1+\Delta z$.

**13)** Uma placa de cobre ($\sigma = 5{,}8\times10^7$ S/m) preenche o espaço $z > 0$. Uma onda plana uniforme, na frequência 1 MHz, incide perpendicularmente ao plano $z$=0, resultando em um campo magnético no cobre $\dot{\vec{H}}(z=0)=H_0\vec{u}_y$ , com $H_0$ = 2 A$_{ef}$/m.

a) Calcule a profundidade pelicular do cobre nessa condições;

b) Escreva expressões para $\dot{\vec{E}}(z)$ , $\dot{\vec{J}}(z)$ e $\dot{\vec{H}}(z)$ para $z > 0$ (dentro do cobre);

c) Determine a potência dissipada, por m$^2$ de placa, de duas maneiras: i) pelo vetor de Poynting e ii) integrando $J^2/\sigma$.

**14)** Uma onda plana se propaga, no vácuo, no sentido positivo de $z$, na frequência de 1 GHz. O vetor complexo campo elétrico, em $z$ = 0, é dado por:

$\dot{\vec{E}}(z=0)=5\vec{u}_x-j5\vec{u}_y$ .

a) Escreva a expressão de $\vec{E}(z,t)$ .

b) Escreva a expressão de $\vec{H}(z,t)$ .

c) Qual a polarização da onda? (Especifique também o sentido da polarização e justifique sua resposta)

d) Calcule a potência média transmitida pela onda, por m$^2$.

**15)** Uma onda plana propaga-se, no ar, no sentido positivo de $z$, na frequência de 200 MHz. O vetor complexo campo elétrico, em $z$ = 0, é dado por:

$\dot{\vec{E}}_+(z=0)=3\vec{u}_x+j3\vec{u}_y$ V$_{ef}$/m.

a) Determine a constante de propagação e a impedância intrínseca do meio.

b) Escreva as expressões dos vetores complexos $\dot{\vec{E}}_+(z)$ e $\dot{\vec{H}}_+(z)$ .

c) Escreva a expressão de $\vec{E}_+(z,t)$ .

d) Determine a direção e o sentido do vetor $\vec{E}_+(z,t)$ nos instantes correspondentes a $\omega t = 0$ e $\omega t = \pi / 4$, e conclua qual a polarização da onda. (Especifique também o sentido da polarização)

Supondo, agora, que a onda incida, na normal, numa superfície plana condutora perfeita, situada em $z$ = 0,

e) escreva as expressões de $\dot{\vec{E}}_-(z)$ e $\dot{\vec{H}}_-(z)$ da onda refletida;

f) determine o vetor $\dot{\vec{J}}_S$ na superfície do condutor

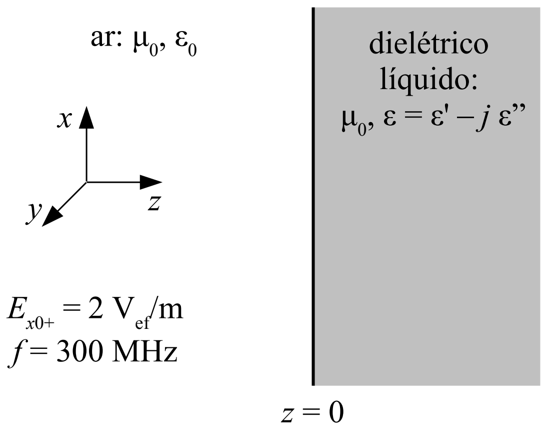
**16)** Uma onda plana uniforme possui $\vec{E}_+(z=0)=E_0\hat{u}_x + j\,E_0\hat{u}_y$ com $E_0$= 2 $mV_{ef}$/m. Esta onda propaga-se no vácuo ($\eta_0$=377 Ω e c=3×10$^8$ m/s) no sentido de $z$>0. Pedem-se:
a) constante de propagação e comprimento de onda se a frequência da oscilação for 10 GHz;
b) polarização da onda incidente;
c) supondo que esta onda incida num condutor imperfeito ($\varepsilon=\varepsilon_0$; $\sigma$=4 S/m) semi-infinito, determine a expressão fasorial da onda refletida e sua expressão temporal (campo elétrico apenas);
d) quais as polarizações da onda refletida no vácuo e da onda transmitida no condutor? Justifique;
e) determine a expressão fasorial do campo elétrico da onda estacionária resultante no vácuo;
f) esboce a amplitude da onda estacionária (campo elétrico) no vácuo e da onda transmitida no condutor, em função de $z$.

**17)** Uma onda plana uniforme, polarizada linearmente, propagando-se no vácuo, incide normalmente sobre um dielétrico semi-infinito sem perdas com constantes $\mu_0$ e $4\varepsilon_0$. Sabendo-se que a densidade de potência transmitida pela onda incidente no vácuo vale 2/377 W/m$^2$ e a frequência de oscilação é 3,0 GHz, pede-se (admitir fase da onda incidente nula na interface vácuo/dielétrico):
a) o vetor de Poynting médio em qualquer ponto do vácuo e do dielétrico;
b) os campos elétricos e magnéticos complexos em módulo e fase a uma distância de 14,0 cm de ambos os lados da interface vácuo/dielétrico;
c) a impedância de onda a 2,5 cm da interface em ambos os lados (vácuo e dielétrico).

**18)** Repetir o problema anterior se o dielétrico possuir perdas com $\varepsilon''=0{,}04\,\varepsilon_0$.

**19)** Uma onda eletromagnética plana, movendo-se no sentido positivo do eixo $z$, é refletida por um plano condutor perfeito que se desloca no sentido negativo do eixo $z$ com velocidade $v$, Calcule a diferença de frequência entre as ondas refletida e incidente (princípio do radar Doppler usado nas estradas para medir velocidade de veículos). Calcule numericamente esta diferença para uma frequência de 10 GHz da onda incidente e velocidade de 100 km/h. (despreze efeitos relativísticos).

**20)** Uma onda plana, na frequência de 300 MHz, se propaga no ar, com polarização linear na direção $x$, e intensidade de 2 $V_{ef}$/m. Essa onda incide, na direção normal, na interface com um meio dielétrico, como esquematizado na figura abaixo.




Sendo a impedância intrínseca do dielétrico, que tem perdas, tal que a onda estacionária resultante no ar apresenta um mínimo de campo elétrico a aproximadamente 50 cm da interface, tendo um COE=3, pede-se:
a) determine o coeficiente de reflexão no ar, em $z$ = 0, $\rho_{ar}(z=0)$;
b) determine a impedância intrínseca do dielétrico, $\eta_{diel}$;

Observando-se o comportamento do campo no interior do dielétrico, verifica-se que seu módulo decresce exponencialmente com $z$, sendo proporcional a $e^{-0,001\,z}$.

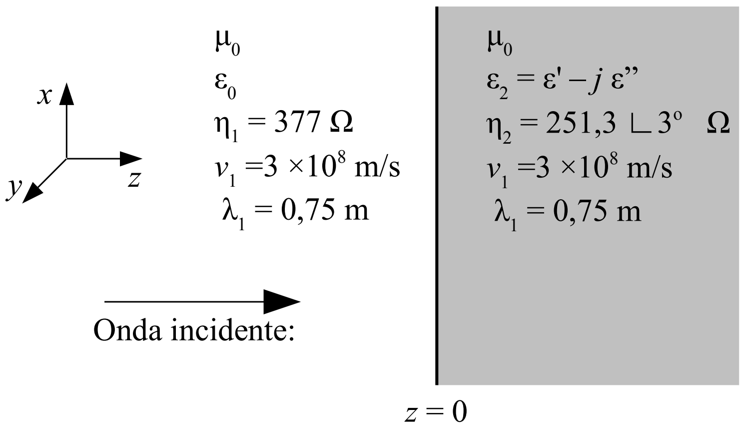
c) explique por que se conclui ser o dielétrico de pequenas perdas;

d) determine $\varepsilon = \varepsilon' - j\ \varepsilon''$ do dielétrico e a velocidade de propagação nesse meio;

e) determine os valores eficazes do campo elétrico refletido no ar e do transmitido ao dielétrico, ambos em $z = 0$;

f) determine o valor médio do vetor de Poynting em ambos os meios.

**21)** Uma onda plana, polarizada na direção $x$, de frequência 400 MHz, propaga-se no vácuo e incide, na direção normal, num dielétrico de pequenas perdas, com $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon' - j\,\varepsilon''$ tais que resultam $\alpha = 0,63$ Np/m, $\beta = 4\,\pi$ rad/m e $\eta = 251,3\,\angle\,3^{\circ}\,\Omega \approx 251,3\,\Omega$. O campo elétrico complexo da onda incidente, no ponto $z$=0, vale $\dot{E}_{x0+} = 3$ mV$_{ef}$/m.




a) Quais os valores de $\lambda$ e $v$ no dielétrico? se as perdas fossem maiores, o que ocorreria com $\eta_2$ ?

b) Calcule $\rho(z=0^-)$, $\dot{E}^{-}_{x1}(z=0)$ refletido e $\dot{E}^{+}_{x2}(z=0)$ transmitido.

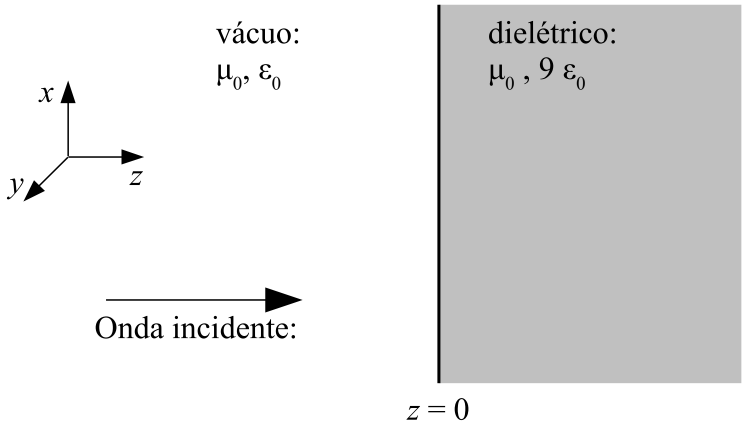
c) Escreva as expressões de $\dot{E}_x(z)$ e $\dot{H}_y(z)$ (campos totais) nos dois meios.

d) Determine $E_x(t)$ em $z = +\ 1,25$ m.

e) Faça o gráfico de $|\dot{E}_x(z)|$ nos dois meios.

f) Determine os valores médios do vetor de Poynting, $\vec{N}_{1\,\text{médio}}$ e $\vec{N}_{2\,\text{médio}}$, nos dois meios e faça um gráfico de $|\vec{N}_{\text{médio}}|$ em função de $z$. Justifique-o.

**22)** No sistema visto na figura, uma onda plana, propaga-se da esquerda para a direita, incidindo, na normal, no dielétrico mostrado.




A onda incidente, no vácuo, é caracterizada por $\dot{\vec{E}}_+(z=0)=2\,\hat{u}_x$ $V_{ef}$/m, e frequência $f$ = 100 MHz.

a) Determine o coeficiente de reflexão em $z$=0, no vácuo, $\rho(z=0^-)$.

b) Escreva as expressões dos campos totais $\dot{E}_x(z)$ e $\dot{H}_y(z)$ nos dois meios.

c) Faça um esboço da variação do módulo (valor eficaz) do campo elétrico em função de $z$, nos dois meios.

Admitindo-se, daqui em diante, que o dielétrico tenha perdas, com $\varepsilon = 9\,\varepsilon_0 - j\,0{,}06\,\varepsilon_0$:

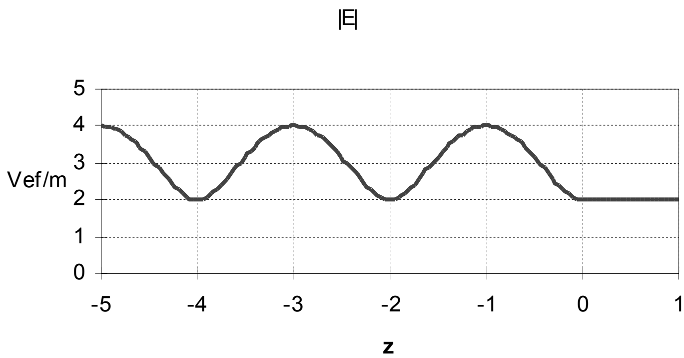
d) Determine $\alpha$, $\beta$, $\eta$ e $v$ do dielétrico.

e) Sabendo-se que o coeficiente de reflexão no vácuo, em z=0, vale, agora, $\rho \approx -½$, escreva as expressões de $\dot{E}_x(z)$ e $\dot{H}_y(z)$ no dielétrico ($z > 0$).

f) Determine o valor médio do vetor de Poynting, $\vec{N}_{\text{médio}}(z)$, no dielétrico em função de $z$.

g) Qual a potência média dissipada no dielétrico, para uma seção de área 1 m$^2$?

**23)** Numa montagem experimental, visando determinar as características de um material dielétrico ($z > 0$), obteve-se o diagrama de variação do valor eficaz do campo elétrico, no ar ($z < 0$), em função de $z$, visto na figura.



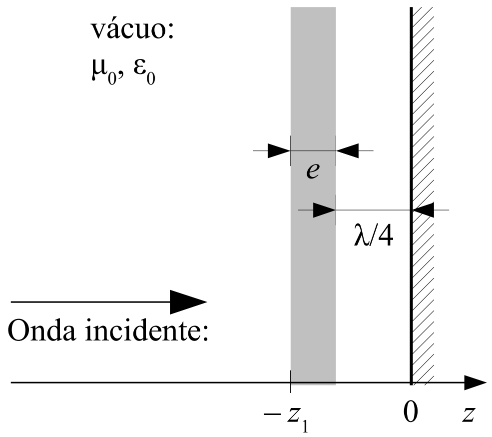

a) Qual o valor do coeficiente de reflexão, no ar, em $z$ = 0?

b) Determine o comprimento de onda no ar, e a frequência da onda.

c) Calcule a impedância intrínseca do dielétrico, e o valor correspondente de sua permissividade dielétrica, $\varepsilon$, sendo $\mu=\mu_0$.

d) Prove que uma camada de dielétrico com $\varepsilon$=2 $\varepsilon_0$, e espessura $\sqrt{2}/2$ m permite eliminar a reflexão da onda vinda do ar.

**24)** Pode-se eliminar a reflexão de ondas incidindo perpendicularmente em um plano condutor perfeito colocando-se em frente ao plano, a uma distância $\lambda_0/4$, uma película de material bom condutor, de espessura *e* tal que $1/(\sigma e)$=377 Ω. Verifique esse fato, tomando como exemplo frequência $f_0$= 1 GHz e material com σ=100 S/m e $\varepsilon=5\varepsilon_0$:

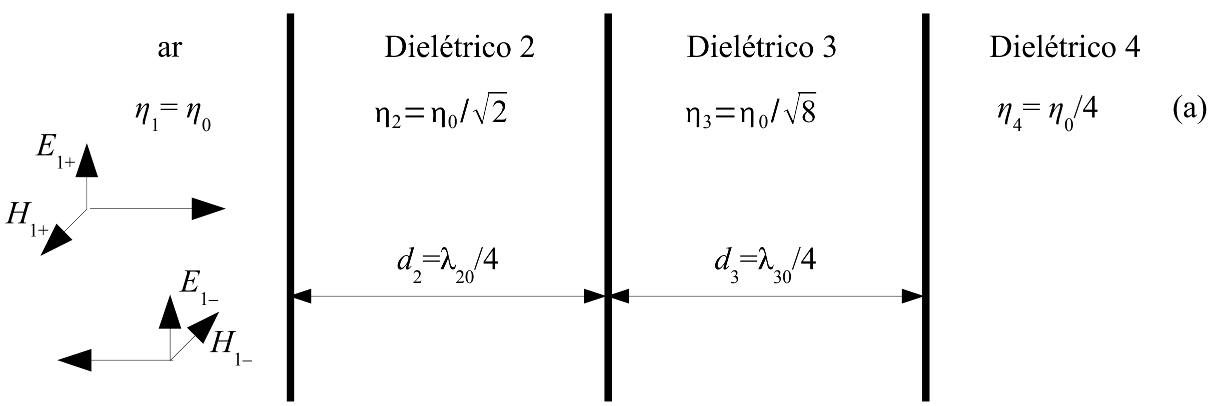


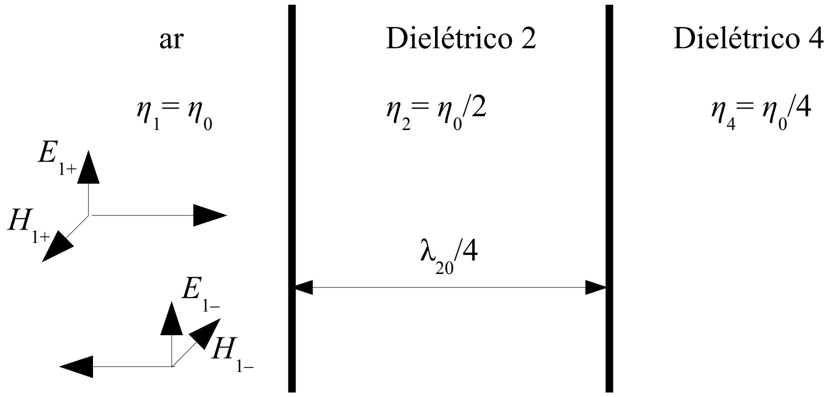

a) Calcule a profundidade pelicular δ e a espessura *e*. Verifique que $k\,e \ll 1$.
b) Mostre que nessa frequência o material é bom condutor.
c) Calcule a impedância de onda na superfície da película condutora ($Z(-z_1)$).
d) Determine o coeficiente de reflexão no ar em $z=-z_1$ e calcule a fração da potência incidente que é refletida.
Se nessa estrutura (mantendo-se o mesmo valor de *e* anterior) a frequência da onda incidente for 0,95 GHz, repita os itens c) e d)

**25)** Calcular o coeficiente de reflexão e a porcentagem de energia refletida quando uma onda plana uniforme incide normalmente numa janela dielétrica de espessura 10 cm, com constante dielétrica relativa $\varepsilon_r$=4,0 e com ar em ambos os lados; para as seguintes frequências do sinal:
a) 3,0 GHz; b) 1,5 GHz; c) 300 MHz.

**26)** Mostre que duas camadas, de um quarto de comprimento de onda cada, com impedâncias $\eta_2$ e $\eta_3$ entre dois meios com $\eta_1$ e $\eta_4$, causam casamento perfeito se $\frac{\eta_2}{\eta_3}=\left(\frac{\eta_1}{\eta_4}\right)^{1/2}$.

Supondo $\eta_4=\eta_0/4$, $\eta_3=\eta_0/\sqrt{8}$ , $\eta_2=\eta_0/\sqrt{2}$ e $\eta_1=\eta_0$, calcule o coeficiente de reflexão no meio 1 se a frequência do sinal for 10% abaixo da frequência na qual ocorre perfeito casamento (figura (a)). Compare com a situação de camada única de um quarto de comprimento de onda com $\eta_2=\eta_0/2$ (figura (b)). O que se pode concluir?

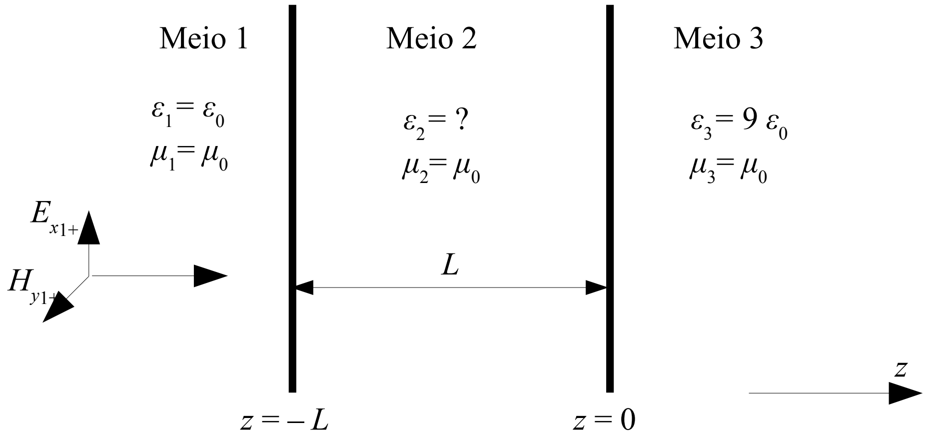





(b)

**27)** Uma fatia de dielétrico (ε' – *j* ε") de comprimento *L* está encostada em um plano condutor perfeito. Determine a expressão da impedância de onda na interface dielétrico/vácuo. Calcule os valores para $\varepsilon'=4\,\varepsilon_0$, $\varepsilon''=0{,}01\,\varepsilon_0$, $f = 3$GHz e $L = 1{,}25$ cm.

**28)** Uma onda plana, polarizada linearmente na direção *x*, propaga-se no sentido positivo de *z*, incidindo na estrutura mostrada abaixo.




Essa onda varia senoidalmente no tempo, na frequência de 1GHz, tendo valor eficaz de 1 $V_{ef}$/m e fase nula em $z = 0$: $\dot{\vec{E}} = 1\,e^{-j k_1 z}\,\hat{u}_x$ .

a) Determine as impedâncias intrínsecas ($\eta_1$ e $\eta_3$) e as constantes de propagação ($k_1$ e $k_3$) dos meios 1 e 3.

b) Deseja-se a máxima transferência de potência do meio 1 para o meio 3. Determine os valores de $\varepsilon_2$ e *L* (em m) que satisfazem esta condição na frequência de 1 GHz. (*L* deve ter o menor valor possível).

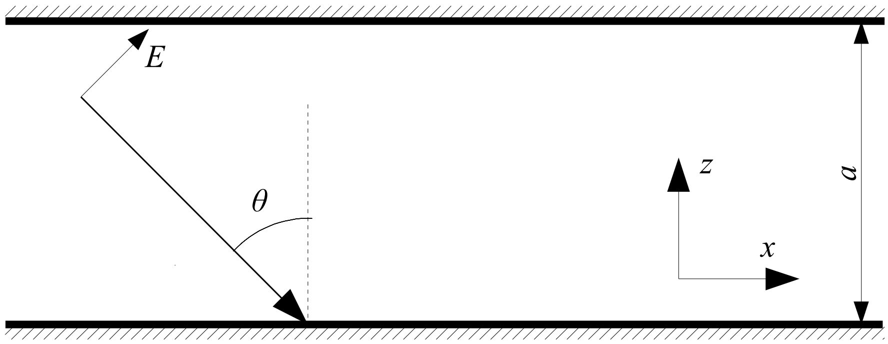
c) Ainda na mesma frequência, calcule os coeficientes de reflexão, $\rho_1(-L)$, $\rho_2(-L)$, $\rho_2(0)$, $\rho_3(0)$ nas interfaces.

d) Lembrando que, como os meios não têm perdas, o vetor de Poynting médio tem o mesmo valor nos 3 meios, calcule o valor eficaz do campo elétrico no meio 3 nessas condições e esboce o gráfico do valor eficaz do campo elétrico nos 3 meios.

e) Determine o valor eficaz do campo magnético nos meios 1 e 3 e esboce o gráfico do valor eficaz do campo magnético nos 3 meios.

f) Se a estrutura, com o mesmo valor de *L* calculado em b), for excitada na frequência de 2 GHz, qual será o valor da impedância de onda em $z = -L$ , $Z(z = -L)$, e qual será o valor do coeficiente de reflexão $\rho_1(-L)$?

**29)** Uma onda plana propagando-se no vácuo, na frequência de 1 GHz, incide num plano condutor perfeito segundo um ângulo θ em relação à normal, conforme ilustra a figura. Outro plano condutor perfeito é colocado paralelamente ao primeiro a uma distância *a*, formando um guia de onda de placas paralelas.




Pede-se:

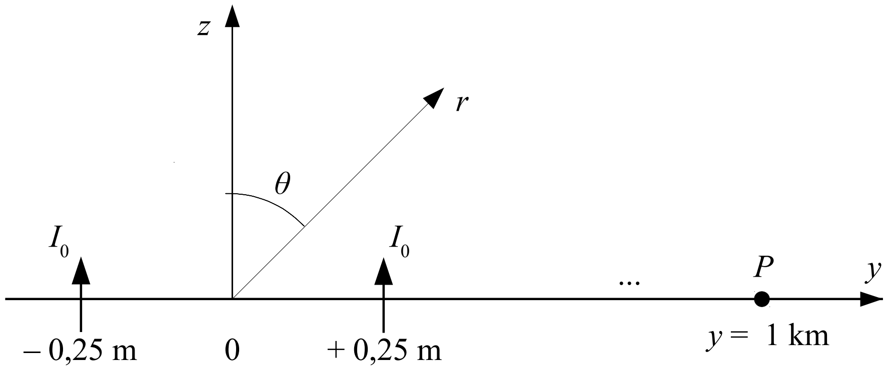
a) Qual o tipo de onda que se propaga entre os 2 planos (TM, TE ou TEM)?

b) Determinar os valores possíveis para θ de modo que ocorra propagação de uma onda entre os 2 planos na direção *x*, supondo: *a*= 10 cm; *a*= 15 cm; *a*= 20 cm; *a*= 50 cm.

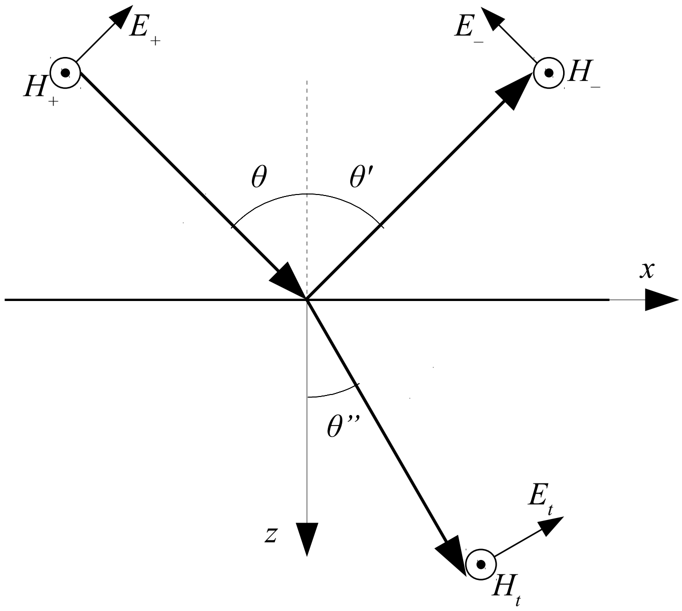
c) Esboçar as variações de amplitude das componentes $E_x$, $E_z$ e $H_y$ entre os 2 planos para *a*=20 cm;

d) Interprete os resultados obtidos no item b).

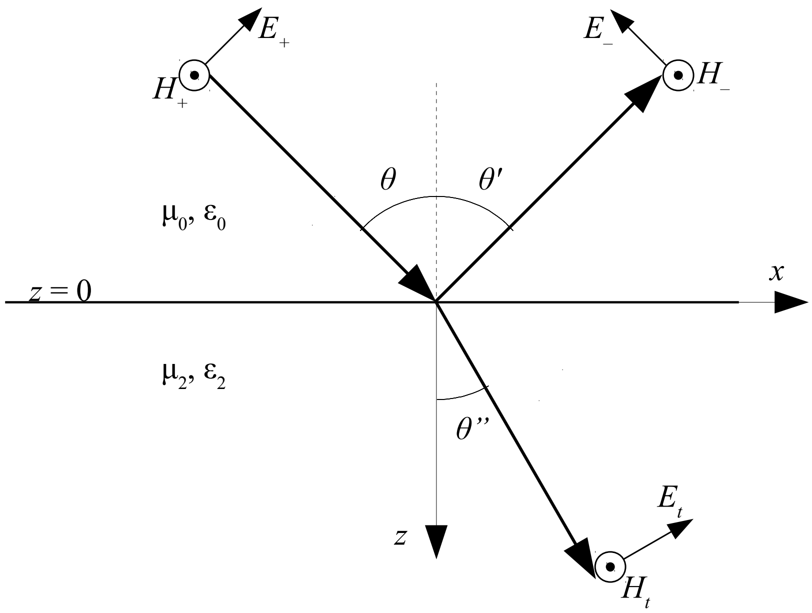
**30)** Dois elementos de corrente, de comprimento $h \ll \lambda$, com $I_0$ = 1,0 A e frequência $f$ = 300 MHz estão dispostos no vácuo como mostra a figura. Sabe-se que o campo elétrico para um único elemento de corrente é dado por $\dot{\vec{E}} = j\eta k \dfrac{h I_0}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr} \hat{u}_\theta$ , para pontos "distantes". Determine $\dot{\vec{E}}$ no ponto *P* e o correspondente $\dot{\vec{H}}$ ;



**31)** Considerando a reflexão oblíqua em dielétricos vista na figura, escreva as condições de contorno que devem ser satisfeitas.




**32)** Uma onda plana, propagando-se no ar, incide obliquamente com ângulo $\theta$ na superfície de separação ar/dielétrico 2 ($z$ = 0), conforme mostrado na figura abaixo.




Sabendo-se que:

$$\dot{\vec{E}}_{1+}=\dot{\vec{E}}_{01+}\,e^{-jk_0(x\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)}\quad,\quad \dot{\vec{E}}_{1-}=\dot{\vec{E}}_{01-}\,e^{+jk_0(-x\,\mathrm{sen}\,\theta'+z\cos\theta')}\quad \text{e}\quad \dot{\vec{E}}_{2+}=\dot{\vec{E}}_{02+}\,e^{-jk_2(x\,\mathrm{sen}\,\theta''+z\cos\theta'')}$$

onde $\dot{\vec{E}}_{01+}=E_{01+}\,\hat{u}_{\chi}$ , $\dot{\vec{E}}_{01-}=E_{01-}\,\hat{u}_{\chi'}$ e $\dot{\vec{E}}_{02+}=E_{02+}\,\hat{u}_{\chi''}$ pede-se:

a) Explicite as condições de contorno para $\dot{\vec{E}}$ e $\dot{\vec{H}}$ em $z$ = 0, em função de $E_{01+}$, $E_{01-}$, $E_{02+}$, $k_0$, $k_2$, $\theta$, $\theta'$ e $\theta''$;

b) Determine, a partir do item anterior, os ângulos $\theta'$ e $\theta''$.

**33)** Considere o elemento de corrente, de comprimento $h << \lambda$, percorrido por corrente senoidal de valor eficaz $I_0$ (fase zero graus) e frequência $f$, no vácuo, como mostra a figura. Sabe-se que o campo elétrico produzido por esse elemento de corrente é dado por

$$\dot{\vec{E}} = \frac{j\omega\mu I_0 h}{4\pi r} e^{-j\beta r}\left[\frac{2}{j\beta r} - \frac{2}{\beta^2 r^2}\right]\cos\theta\,\hat{u}_r + \frac{j\omega\mu I_0 h}{4\pi r} e^{-j\beta r}\left[1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{\beta^2 r^2}\right]\sin\theta\,\hat{u}_\theta .$$

Indique, na figura, a orientação dos vetores $\dot{\vec{E}}$ e $\dot{\vec{H}}$ nos pontos $P_1$ e $P_2$, sendo $r_1 << \lambda$, $\theta_1 \cong 0$ e $r_2 >> \lambda$, e explicite os valores de suas fases.