Exercício 4.3.9

1. $y''' + y' = \operatorname{sen} x$

1º obter a solução geral da EDO linear homogénea associada, y_h

$$y''' + y' = 0$$

- eq. característica: $r^3 + r = 0$

$$r^3 + r = 0$$
$$\Leftrightarrow r(r^2+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{r = 0}_{\downarrow} \vee \underbrace{r = \pm i}_{\alpha = 0 \quad \beta = 1}$$

$e^{0x} = 1$ $\qquad$ $e^{0x}\cos(1x) = \cos x$

$e^{0x}\operatorname{sen}(1x) = \operatorname{sen} x$

- Sistema fundamental de soluções: $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$
- Solução geral da equação homogénea: $\boxed{y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x \quad , C_1, C_2 \text{ e } C_3 \in \mathbb{R}}$

2º Determinar uma solução particular, y_p

- Pelo método dos coeficientes indeterminados:

$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \longrightarrow P(x) = 1 \quad m = 0$

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

1º) $b(x) = \operatorname{sen} x$

2º) $r = 0 \pm i$ $\qquad$ r é raiz simples do polinómio característico $\rightarrow K = 1$

3º) $y_p(x) = x^K e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$

$y_p(x) = x[P(x)\cos x + Q(x)\operatorname{sen} x]$ em que $P(x)$ e $Q(x)$ têm grau 0 logo

$y_p(x) = x[A\cos x + B\operatorname{sen} x]$

4º) $y_p'(x) = [A\cos x + B\operatorname{sen} x] + x[-A\operatorname{sen} x + B\cos x]$

4

$$y_p''(x) = -A\,sen\,x + B\cos x + 1.\left[-A\,sen\,x + B\cos x\right] + x\left[-A\cos x - B\,sen\,x\right]$$

$$= -2A\,sen\,x + 2B\cos x + x\left[-A\cos x - B\,sen\,x\right]$$

$$y_p'''(x) = -2A\cos x - 2B\,sen\,x + 1\left[-A\cos x - B\,sen\,x\right] + x\left[A\,sen\,x - B\cos x\right]$$

$$= -3A\cos x - 3B\,sen\,x + x\left[A\,sen\,x - B\cos x\right]$$

substituindo na equação completa:

$$-3A\cos x - 3B\,sen\,x + Ax\,sen\,x - Bx\cos x + A\cos x + B\,sen\,x - Ax\,sen\,x + Bx\cos x = sen\,x$$

$$\Leftrightarrow -2A\cos x - 2B\,sen\,x = sen\,x$$

$$\begin{cases} -2A = 0 \\ -2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{1}{2}x\,sen\,x$$

3° Apresentar a solução geral da equação completa.

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\,sen\,x - \frac{1}{2}x\,sen\,x \qquad , c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Digitalizada com CamScanner

2. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

1° obter a solução geral da EDO linear homogénea associada, y_h

$$2y'' - 4y' - 6y = 0$$

- eq. característica: $2r^2 - 4r - 6 = 0$

$2r^2 - 4r - 6 = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-3)}}{2}$

$\Rightarrow r = \dfrac{2 \pm 4}{2}$

$\Rightarrow r = -1 \vee r = 3$

raízes do polinómio característico

$r = -1 \longrightarrow e^{-x}$

$r = 3 \longrightarrow e^{3x}$

- Sistema Fundamental de soluções: $\{e^{-x}, e^{3x}\}$
- Solução geral da equação homogénea: $\boxed{y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

2° Determinar uma solução particular, y_p

Pelo Método dos coeficientes indeterminados

$b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) \longrightarrow P(x) = 3 \quad m = 0$

$\alpha = 2$

$\beta = 0$

1°) $b(x) = 3e^{2x}$

2°) $r = 2$ r não é raíz do polinómio característico $\rightarrow K = 0$

3°) $y_p(x) = x^K e^{\alpha x} \left[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\operatorname{sen}(\beta x)\right]$

$y_p(x) = Ae^{2x}$.

4°) $y_p'(x) = 2Ae^{2x}$; $y_p''(x) = 4Ae^{2x}$

Substituindo na equação completa:

$2(4Ae^{2x}) - 4(2Ae^{2x}) - 6Ae^{2x} = 3e^{2x}$ $\Rightarrow -6A = 3$

$\Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \; y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{2x}$

3º Apresentar a solução geral da EDO completa

$$y = y_h + y_p$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \;, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

3. $y' + y = (x+1)\, e^{2x}$

1º obter a solução geral da EDO linear homogénea associada

$$y' + y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\, dy = -1\, dx$$

$$\ln|y| = -x + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{-x} \;, \; c_1 \in \mathbb{R}}$$

2º Determinar uma solução particular, y_p

1º) $b(x) = (x+1)\, e^{2x}$ $\quad b(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $\quad P_m(x) = x+1$ $\quad m = 1$

$\alpha = 2$

$\beta = 0$

2º) $r = 2$ não é raiz do polinómio caract. $\rightarrow K = 0$

3º) $y_p(x) = e^{2x}\,[P(x)]$ $\quad y_p(x) = (Ax+B)\, e^{2x}$

$$y_p'(x) = A e^{2x} + (Ax+B) \cdot 2 e^{2x}$$

Substituindo $\quad A e^{2x} + 2Ax e^{2x} + 2B e^{2x} + Ax e^{2x} + B e^{2x} = (x+1)\, e^{2x}$

$$\Rightarrow (A + 3B + 3Ax)\, e^{2x} = (x+1)\, e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 3B = 1 \\ 3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B = \frac{2}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{9} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases} \quad y_p(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) e^{2x}$$

3º Solução geral : $\boxed{y = c_1 e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) e^{2x}}$