Guiões de Cálculo II - Agrupamento 2

Guião 3

Funções de várias variáveis reais

Paula Carvalho, Luís Descalço e Paula Oliveira

2019/20

Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 6

Funções de várias variáveis reais

6.1 Funções reais: domínio, contradomínio e gráfico

Podemos pensar numa função real de uma variável real como uma entidade que recebe um número real e produz a partir dele um único número real de acordo com uma regra bem definida. Vamos agora estudar funções reais com várias variáveis reais, que podemos ver como entidades que recebem vários números reais e produzem a partir deles um único número real.

No final desta secção o estudante deve ser capaz de

- Determinar domínios de funções de duas e três variáveis;
- Identificar curvas de nível de funções reais de duas variáveis e usar esse conhecimento para tirar conclusões acerca da superfície (ou parte dela) que é o seu gráfico;
- Identificar superfícies de nível de funções reais de três variáveis e usar esse conhecimento para tirar conclusões acerca do comportamento da função;
- Determinar domínios de funções reais;
- Indicar interior, exterior, derivado, fronteira e fecho de um conjunto no plano e no espaço;
- Classificar conjuntos de pontos em: aberto, fechado, limitado e compacto.

Definição 6.1 Uma função real de n variáveis, também designada usualmente na Física por campo escalar, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é uma correspondência de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, que associa a cada elemento de D, o domínio da função, um único elemento do conjunto de chegada $\mathbb{R}$. Escreve-se

$$\begin{array}{rcl} f \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Utilizamos naturalmente funções reais de várias variáveis no nosso dia a dia. Por exemplo, quando somamos ou multiplicamos dois números estamos a usar as funções $f(x, y) = x + y$ ou $g(x, y) = xy$, respetivamente. Podemos pensar que estas funções produzem um número real a partir de um par de números reais e são, portanto, funções com domínio $\mathbb{R}^2$. Quando queremos calcular a média aritmética de n números, usamos a função $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, a qual tem domínio $\mathbb{R}^n$.

Para definir rigorosamente uma função é preciso explicitar o domínio, o conjunto de chegada e uma regra que permita transformar cada elemento do domínio num único elemento do conjunto de chegada. No entanto é usual, no nosso contexto, definir uma função indicando apenas uma expressão que define a regra de transformação, ficando implícito que o domínio da função é o maior conjunto (no sentido de inclusão) em que a expressão indicada tem significado no conjunto de chegada.

Exemplo 6.1 A função f definida por $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ tem domínio $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, uma vez que a expressão $\frac{1}{x^2+y^2}$ tem significado em $\mathbb{R}$ para qualquer par de números reais (x,y) exceto para o ponto $(0,0)$.

O número de variáveis independentes da função fica também determinado (duas no exemplo) ao definir uma função deste modo. Em geral, quando definimos uma função f por $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ sem indicar o domínio, assumimos que o domínio da função é o conjunto

$$D = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ tem significado em } \mathbb{R}\},$$

e a função tem n *variáveis independentes* $x_1,x_2,\ldots,x_n$. A variável z diz-se *dependente* (depende de $x_1,x_2,\ldots,x_n$ por meio de f).

Exemplo 6.2 O domínio da função (de três variáveis) definida por $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2}$ é o conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$. Geometricamente, é todo o espaço $\mathbb{R}^3$ exceto o plano yOz.

Definição 6.2 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis. Chama-se contradomínio da função ao conjunto dos valores reais que a função pode tomar. Denotamos o contradomínio de f por CD_f, e temos

$$CD_f = \{f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R} : (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ pertence ao domínio de } f\}.$$

No exemplo anterior o contradomínio da função é $\mathbb{R}^+$ pois apenas os números reais positivos se podem escrever na forma $\frac{1}{x^2}$ e qualquer número real positivo é imagem de um $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Segue-se a definição de gráfico de uma função de n variáveis. É de particular interesse o caso em que a função tem duas variáveis já que, neste caso, o gráfico pode ser visualizado geometricamente no espaço.

Definição 6.3 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis. O gráfico de f é o conjunto

$$G_f = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1,\ldots,x_n) \in D, z = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}.$$

Exercício resolvido 6.1 Determine e descreva geometricamente o domínio e o gráfico de cada uma das seguintes funções:

1. $f(x,y) = 2x + 3y - 4$
2. $g(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

Resolução.

1. O domínio da função f é o conjunto

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) \text{ tem significado em } \mathbb{R}\}.$$

Temos $f(x,y) = 2x + 3y - 4$ e, portanto, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $2x + 3y - 4$ é um número real, logo $D_f = \mathbb{R}^2$. O gráfico de f é a superfície definida por

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D_f,\, z = f(x,y)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 2x + 3y - 4\},$$

o plano representado na Figura 6.1.

Como a expressão $\sqrt{6 - x^2 - y^2}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real não negativo, ou seja, se $6 - x^2 - y^2 \geq 0$, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 6 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 6\},$$

um círculo fechado (contém a circunferência que o limita) de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{6}$ (representado na Figura 6.2).

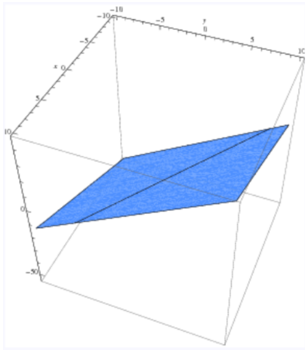

Figura 6.1: *Plano de equação* $z = 2x + 3y - 4$

2. O gráfico de g é o conjunto de pontos

$$\begin{aligned} G_g &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_g,\, z = g(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 6,\, z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

   Note-se que

$$z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6 \wedge z \geq 0,$$

   e, portanto, a equação $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ representa a parte superior da superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{6}$ *(que se pode ver na Figura 6.2)*.

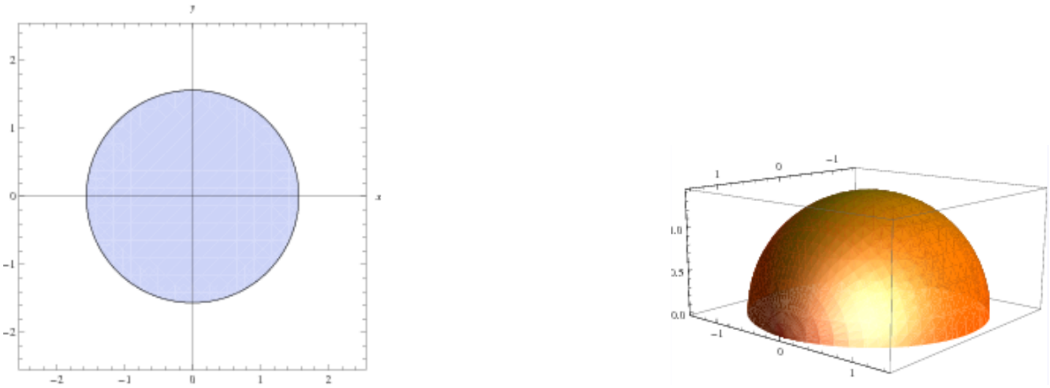

Figura 6.2: Domínio e gráfico da função $g(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

Se a função em questão depender de mais do que duas variáveis, o gráfico é um conjunto de pontos num espaço de dimensão maior do que 3, que não podemos visualizar.

Os conjuntos acabados de definir,domínio e contradomínio de uma função, são importantes sob vários pontos de vista e podem ser classificados de abertos ou fechados, de acordo com a subsecção seguinte.

6.1.1 Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Vamos generalizar o conceito de intervalo aberto (em $\mathbb{R}$) a espaços de maior dimensão, em particular, a $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e introduzir mais algumas noções topológicas em espaços de dimensão maior do que 1 necessárias à compreensão dos conceitos seguintes.

As interpretações geométricas associadas a espaços reais de dimensão $1, 2$ e 3 são a reta, o plano e o espaço tridimensional ordinário. Assumimos conhecidas as noções topológicas básicas num espaço de dimensão 1, nomeadamente, as noções de ponto interior e de interior, de ponto fronteiro e de fronteira de um subconjunto de números reais (um intervalo ou reunião de intervalos), entre outros. Uma vez que vamos considerar resultados que envolvem funções cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, em particular

$\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, vamos definir a terminologia que nos permite usar com rigor algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$.

A distância euclidiana entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) de $\mathbb{R}^2$ define-se por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ define-se, de modo análogo, distância euclidiana entre dois pontos por

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Uma distância em $\mathbb{R}^n$ é qualquer função d que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$,

(iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (desigualdade triangular),

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

Podem definir-se outras distâncias além da euclidiana, e um estudo mais detalhado sobre este assunto pode consultar-se, por exemplo, em [5]. Neste texto apenas vamos usar a distância euclidiana. Na reta real, no plano, ou no espaço, podemos pensar na distância euclidiana entre dois pontos como o comprimento do caminho em linha reta entre eles.

Definição 6.4 A bola aberta de centro em $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\},$$

formado pelos pontos que estão à distância de p inferior a r.

Analogamente, define-se bola fechada de centro em p e raio r como sendo o conjunto

$$\overline{B}_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) \leq r\}.$$

O conjunto dos pontos que verificam $d(x, p) = r$ denota-se, habitualmente, por $S_r(p)$. Se $n = 2$ este conjunto é uma circunferência e se $n = 3$ é uma superfície esférica (de centro em p e raio r). Temos, para qualquer n,

$$\overline{B}_r(p) = B_r(p) \cup S_r(p).$$

O complementar de um conjunto D em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os pontos que não pertencem a D:

$$D^C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \notin D\}.$$

Definição 6.5 Um ponto p diz-se um ponto interior de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se existir uma bola aberta de centro em p contida em D.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto D diz-se o interior de D e denota-se por $\operatorname{int}(D)$.

Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se aberto se todos os seus pontos são pontos interiores de D. Como $int(D) \subseteq D$, D é aberto se

$$D = \operatorname{int}(D).$$

Um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contenha um ponto p diz-se uma vizinhança do ponto p.

Notamos que uma bola aberta de centro em p é uma vizinhança de p mas nem toda a vizinhança é uma bola. No entanto, existir uma vizinhança de um ponto p contida num conjunto D é equivalente a existir uma bola aberta de centro em p contida em D, e assim usamos também por vezes neste texto a noção de vizinhança.

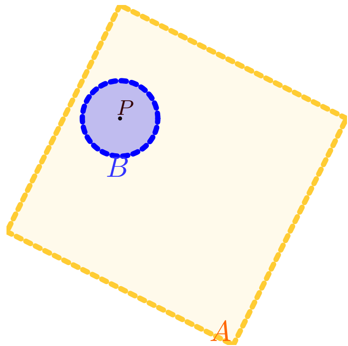

Figura 6.3: A é uma vizinhança do ponto P, B é uma bola que é também uma vizinhança de P

Definição 6.6 Um ponto p diz-se ponto de fronteira de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se qualquer bola aberta de centro em p tem pontos que pertencem a D e pontos que não pertencem a D.

A fronteira de D é o conjunto $\mathrm{fr}(D)$ formado por todos os pontos de fronteira de D.

Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se fechado em $\mathbb{R}^n$ se todos os pontos de fronteira de D lhe pertencem, isto é, se

$$\mathrm{fr}(D) \subseteq D.$$

Exemplo 6.3 Consideremos as bolas abertas em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Fixado um ponto p em $\mathbb{R}$, os pontos cuja distância a p é menor que r são os pontos do intervalo $]p-r, p+r[$. Assim, uma bola aberta de raio r centrada em p é, simplesmente, o intervalo de números reais $]p-r, p+r[$. No plano $(\mathbb{R}^2)$ os pontos que estão a uma distância de um ponto p inferior a r são os pontos do círculo de centro em p e raio r, sem incluir a circunferência. E, finalmente, no espaço $(\mathbb{R}^3)$ a bola aberta de centro p e raio r é a esfera de centro em p com raio r sem incluir a superfície esférica.

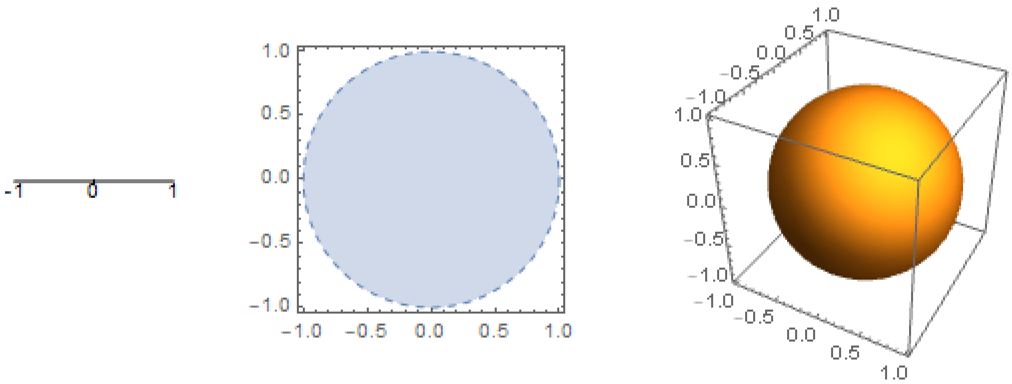

Figura 6.4: As bolas abertas de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, repetivamente.

As bolas abertas são exemplos de conjuntos abertos (em qualquer espaço euclidiano). Um círculo (incluindo a circunferência fronteira) e uma esfera (incluindo a superfície esférica) são exemplos de conjuntos fechados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. O conjunto vazio e todo o espaço $\mathbb{R}^n$ são conjuntos que são, simultaneamente, abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$. Mas há também conjuntos que não são abertos nem fechados. Por exemplo, o conjunto $]0,1[\times[0,1]$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$, pois não coincide com o seu interior, que é o conjunto $]0,1[\times]0,1[$, e também não contém a sua fronteira, que é o conjunto $(\{0,1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{0,1\})$.

Segue-se a definição de conjunto limitado (ver Figura 6.5).

Definição 6.7 Um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ diz-se limitado se existir uma bola B_r tal que $D \subseteq B_r$, para algum $r > 0$.

Definição 6.8 Um conjunto diz-se compacto se for limitado e fechado.

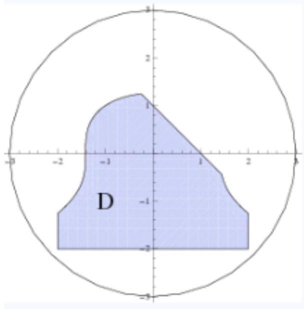

Figura 6.5: Conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$

Exercício resolvido 6.2 Diz-se que uma função é limitada se o seu contradomínio for um conjunto limitado. Encontre exemplos de funções de várias variáveis limitadas e não limitadas com domínio limitado e não limitado.

Resolução. A função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sin(xy)$ com $D = \overline{B}_1(0)$ é limitada pois o seu contradomínio está contido em $[-1, 1]$ (que é uma bola fechada em $\mathbb{R}$). O domínio desta função é um conjunto limitado (porque é uma bola fechada em $\mathbb{R}^2$). Se tomarmos a mesma expressão para $f(x, y)$ mas agora com $D = \mathbb{R}^2$ temos um exemplo de uma função limitada cujo domínio não é limitado. A função $g : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = x \text{ tg}(y)$ com $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$ tem domínio limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_4(0)$. O contradomínio da função não é limitado pois, fazendo $x = 1$ na expressão que define g, e tomando valores para y cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, o valor de g tende para infinito. Assim, não pode existir uma bola fechada que contenha o contradomínio de g.

Definição 6.9 Dizemos que p é um ponto de acumulação de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se, para qualquer $r > 0$, a bola $B_r(p)$ tem pontos de D distintos de p, ou seja,

$$B_r(p) \cap \big(D \backslash \{p\}\big) \neq \emptyset.$$

Um ponto p diz-se um ponto isolado de D se pertence a D e não é ponto de acumulação de D.

Exercício resolvido 6.3 Indique o interior, a fronteira, o conjunto dos pontos de acumulação e o conjunto dos pontos isolados dos seguintes conjuntos:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. A^C.

Resolução.

1. O conjunto A é um círculo em $\mathbb{R}^2$ ao qual foi retirado o seu centro, o ponto $(0, 0)$. Temos, de acordo com as definições anteriores,
   - $int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
   - $fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$
   - O conjunto dos pontos de acumulação é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. A este conjunto também se chama o derivado de A.
   - A não tem pontos isolados.
2. Comecemos por notar que o complementar de A é

   $$A^C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

   Neste caso,

- $int(A^C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 1\}$
- $fr(A^C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$
- O conjunto dos pontos de acumulação de A^C é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
- $\{(0,0)\}$ é ponto isolado de A^C

Observação 6.1 *Um conjunto e o seu complementar têm a mesma fronteira. Um ponto isolado de um conjunto é um ponto de acumulação do seu complementar.*

Recordamos que uma sucessão de números reais é uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definimos sucessão em $\mathbb{R}^n$ como sendo uma função que a cada $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vetor de números reais

$$(x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k}).$$

Assim, definir uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ corresponde a definir n sucessões de números reais. Por exemplo, a sucessão com termo geral $x_k = \left(\frac{1}{k}, \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ é uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$,

$$(1, \mathrm{e}), \left(\frac{1}{2}, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{3}, \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right), \ldots$$

cujas coordenadas são as sucessões de números reais de termo geral $u_k = \frac{1}{k}$ e $v_k = \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$.

Definição 6.10 Diz-se que uma sucessão de pontos de $\mathbb{R}^n$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, e escrevemos $\lim x_k = p$ ou simplesmente $x_k \to p$, se e só se para cada $r > 0$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}: \;\; k > k_0 \implies x_k \in B_r(p),$$

ou seja, existe uma ordem k_0 depois da qual todos os termos da sucessão estão na bola de raio r centrada em p.

Pode mostrar-se facilmente que uma sucessão de pontos de $\mathbb{R}^n$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ se e só se cada coordenada da sucessão converge para a correspondente coordenada do ponto p. Assim, a sucessão de termo geral $x_k = (\frac{1}{k}, \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ converge para o ponto $(0,1)$, pois a sucessão de números reais $u_k = \frac{1}{k}$ converge para 0 e a sucessão de números reais $v_k = \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ converge para 1.

Exercício resolvido 6.4 Mostre que um ponto p é ponto de acumulação de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se e só se existe uma sucessão de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p.

Resolução. Se p é ponto de acumulação de D então para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $B_{\frac{1}{k}}(p) \cap (D \backslash \{p\}) \neq \emptyset$. Logo podemos escolher para cada k, um ponto $x_k \in D$ diferente de p nesta bola, obtendo assim uma sucessão de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p. A implicação recíproca também se verifica facilmente. Seja $r > 0$ qualquer. Como a sucessão de termo geral (x_k) converge para p, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \implies x_k \in B_r(p) \cap \big(D \setminus \{p\}\big)$. Portanto $B_r(p) \cap \big(D \setminus \{p\}\big) \neq \emptyset$. Logo p é ponto de acumulação de D.

Exercício resolvido 6.5 Determine o domínio e o gráfico das seguintes funções e descreva geometricamente os seus domínios.

1. $f(x,y,z) = -2 \ln \left(9 - x^2 - y^2 + z^2\right)$
2. $g(x,y,z) = \dfrac{5z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Resolução.

1. A função $f(x,y,z) = -2\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)$ está definida para os ternos (x,y,z) para os quais $\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)$ tem significado em $\mathbb{R}$. Assim,

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 9 - x^2 - y^2 + z^2 > 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 < 9\},$$

é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$, limitado exteriormente pela superfície de equação $x^2+y^2-z^2 = 9$ (sem incluir a superfície). Esta superfície é um hiperbolóide de uma folha (ver Figura 6.6). O gráfico da função é o conjunto

$$G_f = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in D_f,\, w = -2\ln(9 - x^2 - y^2 + z^2)\}$$

o qual, sendo um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, não se pode visualizar geometricamente.

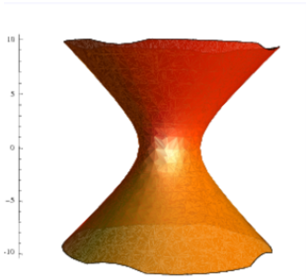

Figura 6.6: *Hiperbolóide de uma folha.*

2. Para a função g temos

$$\begin{aligned} D_g &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 > 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \neq 0 \vee y \neq 0\}, \quad \text{(note que } z \text{ pode ser qualquer)} \\ &= \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Assim, D_g é todo o espaço $\mathbb{R}^3$, exceto o eixo dos zz. O gráfico da função é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$G_g = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in D_g,\, w = \frac{5z}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

6.1.2 Curvas e superfícies de nível

Dada uma função f de duas variáveis, as curvas de nível de f podem ser representadas no plano, permitindo-nos obter informação sobre o gráfico da função. Um uso comum das curvas de nível são os mapas e cartas geográficas onde se representa a altitude. Do mesmo modo as superfícies de nível de uma função de três variáveis, cujo gráfico nem pode ser visualizado geometricamente, fornecem informação relevante sobre o comportamento da função.

Definição 6.11 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Define-se a curva de nível associada a k ($k \in \mathbb{R}$) como sendo o conjunto

$$C_k = \{(x,y) \in D : f(x,y) = k\},$$

isto é, o conjunto dos pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.

De um modo análogo,

Definição 6.12 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ uma função de três variáveis. Define-se a superfície de nível associada a k ($k \in \mathbb{R}$) como sendo o conjunto

$$S_k = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = k\},$$

isto é, o conjunto dos pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.

Podem definir-se de modo análogo as *hiperfícies de nível* ou *conjuntos de nível*, para funções com mais que três variáveis, as quais não se podem visualizar geometricamente.

Exemplo 6.4 As curvas de nível da função definida por $f(x,y) = 4 - 2x^2 - 3y^2$ são

$$\begin{aligned} C_k &= \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - 2x^2 - 3y^2 = k\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 = 4 - k\}, \end{aligned}$$

que constituem uma família de curvas definidas pelas equações $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$, com k a variar em $\mathbb{R}$.

A sua classificação deve ser discutida em função de k. Assim, se $k = 4$, a equação $2x^2 + 3y^2 = 0$ é satisfeita apenas pelo ponto $(0,0)$, logo $C_0 = \{(0,0)\}$.

Para todo o $k > 4$ $(4 - k < 0)$ a equação $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$ é impossível, logo $C_k = \varnothing$.

Se $k < 4$ então $4 - k > 0$ e as equações $2x^2 + 3y^2 = 4 - k$ que podem ser escritas na forma

$$\frac{x^2}{\frac{4-k}{2}} + \frac{y^2}{\frac{4-k}{3}} = 1$$

definem elipses de semieixos $\sqrt{\frac{4-k}{2}}$ e $\sqrt{\frac{4-k}{3}}$, representadas na *Figura 6.7.*

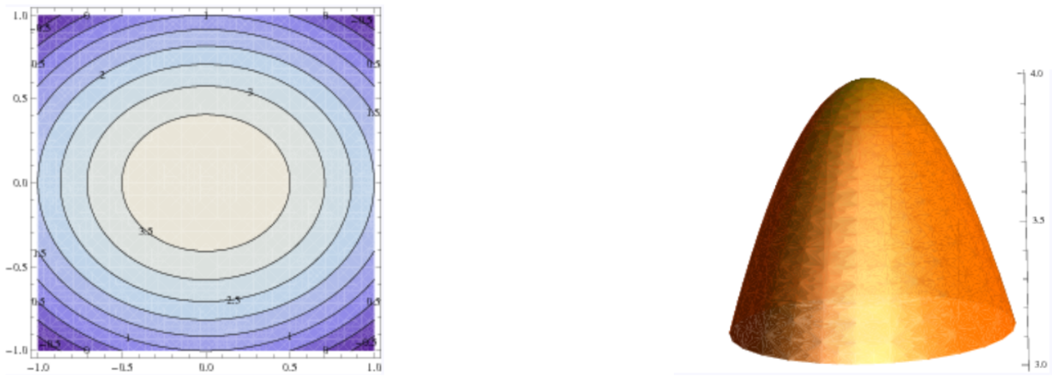

Figura 6.7: Curvas de nível e gráfico de $f(x,y) = 4 - 2x^2 - 3y^2$

O gráfico da função f é o parabolóide representado na *Figura 6.7.* O contradomínio da função é $]-\infty, 4]$ (um subconjunto de números reais).

Exercício resolvido 6.6 Descreva geometricamente as superfícies de nível da função escalar definida por $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ e esboce as que estão associadas aos níveis 0, -1 e 1.

Resolução.

Para cada $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_k &= \{(x,y,z) \in D_f : f(x,y,z) = k\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = k\}. \end{aligned}$$

Se $k = 0$, S_0 é a superfície definida pela equação $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, uma superfície cónica cujo eixo é o eixo dos yy. Se $k < 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = k$ define, para cada k, um hiperbolóide de duas folhas. Se $k > 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = k$ define de modo idêntico, para cada k, um hiperbolóide de uma folha. As superfícies para os níveis pedidos encontram-se representadas na Figura 6.8.

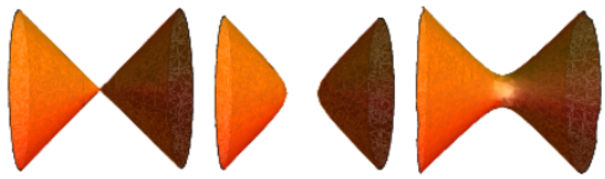

Figura 6.8: *Superfícies de nível associadas aos níveis* 0, -1 *e* 1, *respetivamente.*

6.2 Exercícios propostos

Exercício 6.2.1 Em cada uma das seguintes alíneas, D é o conjunto de pontos do plano que satisfaz as condições indicadas. Faça um esboço de D, diga se é um conjunto aberto ou fechado e explicite a sua fronteira:

1. $x \leq y$.
2. $|x| < 1$ e $|y| \leq 1$.
3. $x^2 + 9y^2 > 1 \vee (x, y) = (0, 0)$.

Exercício 6.2.2 Em cada uma das seguintes alíneas, S é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições indicadas. Faça um esboço de S, diga se é um conjunto aberto ou fechado e explicite a sua fronteira:

1. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$;
2. $x + y + z \geq 1$;
3. $1 < x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 9$.

Exercício 6.2.3 Determine o domínio das seguintes funções, descreva-o geometricamente e indique se o conjunto em questão é aberto ou fechado em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, conforme o caso.

1. $p(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
2. $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, com $a \in \mathbb{R}$.
3. $h(x, y, z) = \ln\left(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6\right)$.
4. $l(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, com $a \in \mathbb{R}$.
5. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}$, $(a \geq 0)$. Discuta o resultado em função de a.

Exercício 6.2.4 Determine o domínio e o contradomínio da função h definida por $h(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Use um sistema de computação para representar o gráfico da função.

Exercício 6.2.5 Determine as curvas de nível ou as superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as geometricamente; quando possível esboce o gráfico.

1. $f(x, y) = 2x + y$.
2. $g(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.
3. $h(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$.

4. $g(x, y) = e^{xy}$.

5. $j(x, y) = \sin x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $y \geq 0$.

6. $h(x, y, z) = x + y + 3z$.

7. $j\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercício 6.2.6 Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano XOY (admita que x e y são dados em kilómetros e a temperatura em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

6.3 Limites e Continuidade

Nesta secção dá-se destaque a métodos de prova de não existência de limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio bem como a alguns resultados que permitem provar que determinado limite existe e calcular o seu valor.

No final da secção o estudante deve ser capaz de

- Operar com limites e funções contínuas;
- Calcular limites segundo caminhos diferentes no domínio da função para concluir que certo limite não existe;
- Aplicar resultados conhecidos para mostrar a existência de limite;
- Usar a definição para averiguar se uma função é contínua num ponto;
- Calcular o domínio de continuidade de uma função.

De um modo intuitivo e informal dizemos que uma função f é contínua num ponto p do seu domínio se, para x próximo de p, a função f toma valores $f(x)$ próximos de $f(p)$. Mais precisamente, diz-se que f é contínua num ponto p se, o valor de $f(x)$ aproxima-se de $f(p)$ tanto quanto se queira, tomando x suficientemente próximo de p, independentemente do modo como x se aproxima de p.

A noção de limite de uma função de n variáveis e domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ num ponto $p \in \mathbb{R}^n$ exige que seja possível que um ponto $x \in D$ se possa aproximar arbitrariamente de p, sendo irrelevante se esse ponto p pertence, ou não, a D. Porém, para esta aproximação ser possível, este ponto deve ser um ponto de acumulação de D. A noção de continuidade de uma função num ponto exige que o ponto p pertença ao domínio da função, podendo ser um ponto de acumulação ou um ponto isolado.

Note-se que se f é uma função de uma só variável, o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um ponto genérico $x \in \mathbb{R}$ pode-se aproximar de $p \in \mathbb{R}$ pela esquerda ou pela direita. Recorde-se que, a existência de limite à esquerda e à direita do ponto p com valores iguais permite garantir a existência de limite da função nesse ponto. Mas se considerarmos uma função de duas variáveis, o seu domínio é um subconjunto do plano. Há um número infinito de maneiras (não apenas pela esquerda ou pela direita) de $x \in \mathbb{R}^2$ se aproximar de um ponto $p \in \mathbb{R}^2$. Assim, o conceito de limite lateral não existe em espaços de dimensão maior do que 1.

Neste capítulo definimos limite de uma função usando sucessões[1].

6.3.1 Limites e continuidade de funções reais

Começamos então por definir limite para uma função real de duas variáveis.

Definição 6.13 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e (a, b) um ponto de acumulação do seu domínio. Dizemos que o limite da função f quando (x, y) tende para (a, b) é o valor L, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para qualquer sucessão (x_k, y_k) de pontos de $D\backslash\{(a, b)\}$ tais que $x_k \to a$ e $y_k \to b$, a correspondente sucessão das imagens, a sucessão numérica $(f(x_k, y_k))$, converge para L.

Segue-se um exercício de aplicação da definição para o cálculo de um limite.

[1] É conhecida, e frequentemente usada em cursos desta natureza, uma definição de limite com base em vizinhanças. Veja, por exemplo, [2] e [5]. Prova-se que as definições são equivalentes (ver [5]).

Exemplo 6.5 Consideremos a função f definida por $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$. O domínio de f é o conjunto $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Para calcular o limite de f quando (x,y) tende para $(0,0)$, consideremos uma sucessão arbitrária (x_k, y_k) de pontos de D convergente para $(0,0)$, isto é, $x_k \to 0$ e $y_k \to 0$. Temos, para a sucessão $(f(x_k, y_k))$ que se obtém

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{3x_k^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2} \\
&= 3 \lim_{k\to\infty} \left(y_k \, \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

pois $\lim y_k = 0$ e a sucessão de termo geral $\dfrac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}$ é limitada (toma valores entre 0 e 1). Está assim provado que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

O exemplo seguinte ilustra como se pode aplicar a definição de limite para provar que um limite não existe.

Exemplo 6.6 Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y > 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases}.$$

Para mostrar que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tomemos duas sucessões de pontos

$$(x_k, y_k) = \left(0, \frac{1}{k}\right) \text{ e } (u_k, v_k) = \left(0, -\frac{1}{k}\right),$$

ambas convergentes para o ponto $(0,0)$. No primeiro caso,

$$f(x_k, y_k) = f\left(0, \frac{1}{k}\right) = 1,$$

porque $\frac{1}{k} > 0$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, e usamos o ramo de cima na definição de f. No segundo caso, a sucessão das imagens também é constante, pois

$$f(u_k, v_k) = f\left(0, -\frac{1}{k}\right) = 0,$$

uma vez que $-\frac{1}{k} < 0$, para todo o $k \in \mathbb{N}$ e usamos, por isso, o ramo de baixo na definição de f. Deste modo, exibimos duas sucessões convergentes para $(0,0)$ tais que as correspondentes sucessões das imagens convergem para valores diferentes, o que mostra que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

A definição de limite generaliza-se para funções escalares de n variáveis.

Definição 6.14 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação do seu domínio. Dizemos que o limite da função f, quando x tende para p, é o valor L, e escrevemos $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x) = L$, se para qualquer sucessão (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ convergente para p, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_k))$ converge para L.

Uma consequência imediata da definição de limite é que o limite de uma função num ponto, se existir, é único.

Exercício resolvido 6.7 Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sin\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Resolução. Seja (x_k, y_k, z_k) uma sucessão arbitrário de pontos de $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ convergente para o ponto $(0,0,0)$. Definindo a função f por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \sin\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

e a sucessão numérica (u_k) por $u_k = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2,\ k \in \mathbb{N}$, como as sucessões (x_k), (y_k), (z_k), convergem para zero temos $u_k \to 0$. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k, z_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\left(x_k^2+y_k^2+z_k^2\right)}{x_k^2+y_k^2+z_k^2} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sin u_k}{u_k} = 1, \end{aligned}$$

o que mostra que o valor de limite pedido é 1[2].

Além disso, como a definição dada é uma extensão da definição de limite de funções de uma variável, muitas das propriedades dos limites conhecidas são igualmente válidas para funções de várias variáveis. Em particular, são válidas as propriedades relativas a somas, produtos, quocientes, bem como composições de funções, sempre que estejam bem definidas estas operações.

Teorema 6.1 *Sejam a, b e c números reais, $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real com $f(D) \subseteq I$, tais que $\lim_{x\to p} f(x) = a$, $\lim_{x\to p} g(x) = b$, $\lim_{t\to a} \alpha(t) = \alpha(a) = c$, e seja p um ponto de acumulação de D. Então*

(i) $\lim_{x\to p}(f(x) + g(x)) = a + b$;

(ii) $\lim_{x\to p} \lambda f(x) = \lambda a$, *para todo o escalar* λ;

(iii) $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = ab$;

(iv) $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$;

(v) $\lim_{x\to p} (\alpha \text{ o } f)(x) = c$.

A demonstração resulta da utilização das propriedades correspondentes para sucessões numéricas. Demonstramos apenas uma das afirmações estabelecidas no Teorema 6.1 e deixamos a verificação das restantes como exercício.

Exercício resolvido 6.8 Demonstre a afirmação (i) do teorema anterior utilizando a definição de limite de uma função de n variáveis.

Resolução. Consideremos uma sucessão a arbitrária (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ a convergir para p. Por hipótese, as sucessões de números reais $(f(x_k))$ e $(g(x_k))$ convergem para a e b, respetivamente. Como sabemos que o limite da soma de duas sucessões é igual à soma dos limites respetivos, podemos escrever $(f+g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k) \to a+b$. Assim, para qualquer sucessão (x_k) de pontos de $D \backslash \{p\}$ a convergir para p temos $(f+g)(x_k) \to a+b$, o que mostra que

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p}(f+g)(x) = a+b.$$

[2]De acordo com um conhecido resultado para limites de funções reais de variável real: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definição 6.15 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D$. A função f é contínua no ponto p se existe $\lim_{x \to p} f(x)$ e

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

O domínio de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos onde a função é contínua. A função f diz-se contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio[3].

As propriedades das funções contínuas de várias variáveis são formalmente idênticas às já conhecidas para funções de uma variável.

Teorema 6.2 *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real com $f(D) \subseteq I$.*

(i) Se f e g são funções contínuas no ponto p então $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, sempre que $g(p) \neq 0$, e λf, para todo o escalar λ, são funções contínuas em p.

(ii) Se f é contínua em p e α é contínua em $f(p)$ então $\alpha \circ f$ é contínua em p.

Exercício resolvido 6.9 Demonstre a afirmação (ii) do Teorema 6.2.

Resolução. Consideremos uma sucessão arbitrária (x_k) de elementos de D convergente para p. Sendo f contínua em p, temos $f(x_k) \to f(p)$. Como α é contínua em $f(p)$, para toda a sucessão (y_k) de elementos de I convergente para $f(p)$ temos $\alpha(y_k) \to \alpha(f(p))$. Portanto também $\alpha(f(x_k)) \to \alpha(f(p))$. Assim,

$$(\alpha \circ f)(x_k) = \alpha(f(x_k)) \to \alpha(f(p)) = (\alpha \circ f)(p),$$

o que mostra que $\alpha \circ f$ é contínua em p.

Pode-se mostrar, utilizando a definição, que são contínuas as funções constantes e as projeções (para funções de duas variáveis as projeções são as funções definidas por $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = y$). Conjugando este facto com o teorema anterior concluímos que também são contínuas as funções polinomiais, pois podem ser vistas como somas e produtos de funções constantes e de projecções. Além disso, é contínua qualquer função que envolva somas, diferenças, produtos, quocientes e composições de funções polinomiais e outras funções contínuas conhecidas. A demonstração destes factos pode ser consultada em [2].

Exercício resolvido 6.10 Sendo f a função definida por $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-3y} + x^2y^2$, calcule

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y).$$

Resolução. A função f é a soma das funções contínuas $g(x,y) = x^2y^2$, que é polinomial, e $h(x,y) = \mathrm{e}^{x-3y}$, que resulta da composição de uma função exponencial com uma função polinomial, ambas contínuas. Logo f é contínua em $(1,0)$ e, portanto, $\lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y) = f(1,0) = \mathrm{e}$.

6.3.2 Existência de limite de funções escalares

Sabe-se que, para funções de uma variável, basta calcular o limite à esquerda e o limite à direita para concluir sobre a existência de limite num ponto. Para funções com mais que uma variável não podemos aplicar este procedimento pois há muitos modos diferentes de aproximação ao ponto em questão e não apenas pela direita ou esquerda. Existe, no entanto, um resultado análogo que pode ser útil na prática:

[3] Se p é um ponto isolado de D então f é contínua em p.

Proposição 6.1 (Existência de limite - 1) *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A_1 \dots A_k \subseteq D$, com $D = A_1 \cup \dots \cup A_k (k \in \mathbb{N})$ e p um ponto de acumulação de A_i, para qualquer $i \in \{1 \dots k\}$. Se existirem os limites*[4]

$$\lim_{x \to p} f_{|A_i}(x)$$

para $i = 1, \dots, k$ e tiverem todos o mesmo valor L então existe o limite de f em p e temos $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

Observamos que, neste resultado, é fundamental que o número de conjuntos A_i na reunião seja finito.

Exercício resolvido 6.11 Provar que existe o limite da função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad y > 0 \\ x^2+y^2 & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$ e determine o seu valor.

Resolução. Note-se que, no ponto $(0,0)$ não sabemos se a função é ou não contínua. A função está definida por duas expressões diferentes em qualquer vizinhança de $(0,0)$. Podemos, no entanto, usar a proposição anterior tomando os conjuntos $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ nos quais as respetivas restrições de f são contínuas. Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A_1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in A_2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

pelo que, de acordo com a proposição anterior,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Proposição 6.2 (Existência de limite - 2) *Sejam f e u funções reais de duas variáveis reais (resultado análogo é válido para n variáveis) e g uma função real de variável real, tais que $f(x,y) = g(u(x,y))$. Se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = c \quad \text{e} \quad \lim_{z\to c} g(z) = L$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{z\to c} g(z) = L.$$

Exercício resolvido 6.12 Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y}-1}{y-x}$.

Resolução. Vamos aplicar a proposição 6.2 considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, \; z = u(x,y) = x-y \;\text{ e }\; g(z) = \frac{e^z-1}{-z}.$$

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$ e $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = -1$, logo

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{-z} = -1.$$

[4]Denotamos o limite da restrição de uma função f a um subconjunto $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, num ponto p, por $\lim\limits_{x\to p} f_{|A}(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x\in A}} f(x)$, ou apenas $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ A}} f(x)$.

Temos ainda um terceiro resultado útil para provar a existência de limite.

Proposição 6.3 (Existência de limite - 3) *Sejam f e g funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de p então $\lim_{x \to p} (f(x)g(x)) = 0$.*

Exercício resolvido 6.13 Prove que é contínua em $\mathbb{R}^2$ a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Resolução. Para os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ a função é contínua por ser composição de funções contínuas. No ponto $(0, 0)$ a função é contínua se $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$.

Ora,

$$\frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} = x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 3x\frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(x\frac{x^2}{x^2 + y^2} - x\frac{3y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(x \, \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) - \lim_{(x,y) \to (0,0)} \left(3x \, \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &= 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

por aplicação (duas vezes) da Proposição 6.3, tendo em conta que as expressões $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ e $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ são limitadas, uma vez que só tomam valores entre 0 e 1.

6.3.3 Não existência de limite de funções reais

Em geral, provar que determinado limite não existe é mais simples do que provar que existe. Recordemos que, por definição, o limite de uma função f num ponto p existe e é igual a L, se para qualquer sucessão de pontos de $D_f \backslash \{p\}$ convergente para p, a sucessão das imagens converge para o mesmo valor L. Assim, para provar que o limite em p não existe, é suficiente encontrar uma sucessão de pontos de $D_f \backslash \{p\}$ tal que a correspondente sucessão das imagens não convirja, ou duas sucessões de pontos de $D_f \backslash \{p\}$ tais que as correspondentes sucessões das imagens convirjam para valores diferentes. Para isso, basta mostrar que existe um conjunto de pontos do domínio da função, usualmente uma curva (a que também chamamos trajeto ou caminho), ao longo do qual o *limite*[5] não existe, ou dois caminhos ao longo dos quais os limites calculados, tenham valores diferentes.

Proposição 6.4 (Não existência de limite) *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A e B subconjuntos de D e p um ponto de acumulação de A e de B. Se pelo menos um dos limites $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$ não existe ou, existindo ambos se tem*

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$$

então não existe $\lim_{x \to p} f(x)$.

Exercício resolvido 6.14 Prove que não existem os seguintes limites:

1. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{x^3 - y^3}$

[5] Aos limites calculados sobre trajetos ou caminhos chamamos *limites trajetoriais*; em particular, no caso de os caminhos serem retas, chamamos-lhe *limites direcionais*.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

3. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x - 2y}{x - 2 + (y-1)^2}$

Resolução.

1. O domínio desta função é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$. Considerando o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ do qual $(0, 0)$ é ponto de acumulação, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x}{x^3 - y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

   Com este último limite não existe em $\mathbb{R}$ (é $+\infty$) o limite inicial também não existe.

2. Basta tomar na proposição 6.4 os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. O ponto $(0, 0)$ é ponto de A e de B e, além disso, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 3.$$

   Uma vez que obtemos valores diferentes concluímos que o limite pedido não existe.

3. O domínio da função definida por $\frac{x - 2y}{x - 2 + (y-1)^2}$ é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2 + (y - 1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2 - (y - 1)^2\}.$$

   Assim, pertencem ao domínio desta função todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ exceto os que se encontram sobre a parábola de equação $x = 2 - (y - 1)^2$. Para mostrar que o limite referido não existe vamos calcular os limites direcionais. Consideremos, para cada $m \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_m = \{(x, y) \in D : y - 1 = m(x - 2)\}$ (reta de declive m que passa por $(2, 1)$). O ponto $(2, 1)$ é ponto de acumulação de cada um destes conjuntos, e temos

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(2,1)\\(x,y)\in A_m}} \frac{x - 2y}{x - 2 + (y-1)^2} &= \lim_{x\to 2} \frac{x - 2(1 + m(x - 2))}{x - 2 + m^2(x - 2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2) - 2m(x - 2)}{(x - 2)(1 + m^2(x - 2))} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1 - 2m}{1 + m^2(x - 2)} = 1 - 2m.\end{aligned}$$

   Este valor depende do parâmetro m, ou seja, para cada reta de declive m obtém-se um valor diferente para o respetivo limite, o que permite concluir que o limite pretendido não existe.

Sugestão de trabalho 1: Use este método (calcular os limites direcionais) para resolver as questões 1. e 2. do exercício resolvido anterior.

Sugestão de trabalho 2: Aceda a http://siacua.web.ua.pt onde pode encontrar muitos exercícios sobre este (e outros) assunto e testar os seus conhecimentos.

6.4 Exercícios propostos

Exercício 6.4.1 Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

1. Indique o domínio D da função f.
2. Descreva geometricamente os conjuntos $A = \{(x,y) \in D \ : \ f(x,y) = 1/4\}$ e $B = \{(x,y) \in D \ : \ f(x,y) = 1/3\}$.
3. Determine
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ A}} f(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ B}} f(x,y).$$
4. Diga, justificando, se a função f possui limite no ponto $(0,0)$.

Exercício 6.4.2 Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \in D\backslash\{(0,0)\}, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Determine e descreva geometricamente o domínio D da função f.
2. Estude a continuidade da função no ponto $(0,0)$.

Exercício 6.4.3 Determine o domínio de continuidade da função
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{se } \ x = 0. \end{cases}$$

Exercício 6.4.4 Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2-y^2}$. Estude a existência de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercício 6.4.5 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{-1+\sqrt{x^2+y^2+1}}$.
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x+y}+x+y}{(x+y)^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-\cos(x+y-1)}{(x+y-1)^2}$.

Exercício 6.4.6 Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que g é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$.

6.5 Cálculo diferencial

Nesta secção vamos introduzir as noções de derivadas parcial e direcional, bem como a diferenciabilidade de funções reais.

Os campos escalares e vetoriais[6] definidos no plano ou no espaço aparecem frequentemente em aplicações da matemática. Muitas vezes é importante saber de que modo varia o campo ao passar de um ponto para outro ponto próximo deste.

No final desta secção o estudante deve ser capaz de:

- Calcular derivadas parciais e derivadas direcionais;
- Usar o Teorema de Schwarz;
- Usar derivadas parciais para resolver problemas;
- Verificar se uma função é diferenciável num ponto, usando a definição;
- Relacionar diferencialidade e continuidade num ponto;

Recordamos que a derivada da função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in \text{int}(D)$ é o valor do limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se este limite existir, que se denota por $f'(a)$. Do ponto de vista geométrico, este valor é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. A função derivada de f é a função $f' : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ onde $E \subseteq D$ é o subconjunto dos pontos de D onde a derivada existe.

Dizer que uma função de uma variável tem derivada num ponto a é o mesmo que dizer que ela é diferenciável nesse ponto. Isto não se aplica, porém, a funções de mais do que uma variável. De facto, nem existe um número específico que possa ser chamado *a derivada* de f num ponto $p \in \mathbb{R}^n$; há uma infinidade de números (chamados derivadas direcionais de f em p, que vamos definir nesta secção) que podem ser vistos como análogos à derivada de uma função de uma variável mas cuja existência por si só não implica que a função seja diferenciável.

6.5.1 Derivadas parciais de primeira ordem

Seja f uma função de duas variáveis, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ e $(a, b) \in \text{int}(D)$. Definimos a função g, de apenas uma variável x, do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcl} g : A \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = f(x, b) \end{array}$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in D\}$.

A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é, se o limite existir,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a),$$

ou seja, é a derivada de g no ponto a. As notações mais usuais para a derivada parcial de f em ordem a x são $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ou $f_x(a, b)$. De modo semelhante, definindo $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto g(y) = f(a, y)$ onde $B = \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in D\}$, a derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é, se existir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = g'(b),$$

a derivada da função g no ponto b, que se denota, analogamente, por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ou $f_y(a, b)$.

[6] Os campos vetoriais são estudadados em Cálculo III.

Geometricamente, considerar os pontos de D da forma (x, b) (ou seja, fixar $y = b$) corresponde a intersetar o gráfico de f com o plano $y = b$ obtendo uma linha que pode ser vista como o gráfico da função de uma variável $g(x) = f(x, b)$. Por exemplo, considere-se o gráfico da função $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, que se mostra na figura 6.9. Tomando $x = 1/2$ (constante) e deixando variar y, a curva que resulta da interseção do gráfico de f com o plano $x = 1/2$ é a parábola representada a vermelho na figura 6.9. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mede a variação de z correspondente à variação de uma unidade de y ao longo da tangente a esta curva. Esta variação de z é $f_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1$, que é portanto o declive da reta tangente à curva no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (ver a figura 6.10).

A interpretação geométrica da derivada parcial de f em ordem a x é análoga.

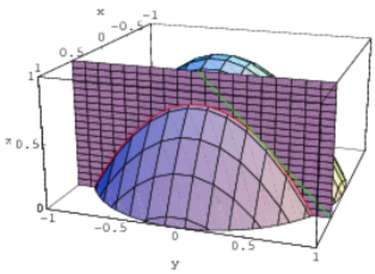

Figura 6.9: Interseção com o plano $y = \frac{1}{2}$

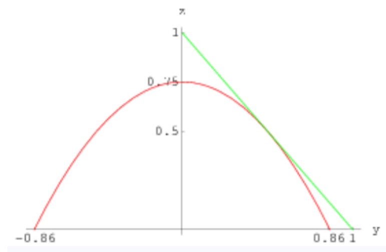

Figura 6.10: Projeção no plano yz

Na prática, para calcular a derivada parcial de f em ordem a uma das suas variáveis, calcula-se a derivada da função f como se ela dependesse apenas desta variável, usando as regras de derivação sempre que possível, considerando as outras variáveis como constantes.

Exemplo 6.7 Calculemos as derivadas parciais da função definida por $f(x, y) = x^2 - 3xy$ no ponto $(1, 0)$.

Tem-se, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2.$$

Este é o valor que se obtém considerando f como função apenas de x, assumindo y como constante, derivando em relação a x e aplicando ao ponto $(1, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \left(2x - 3y\right)\Big|_{(1,0)} = 2.$$

De modo análogo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left(-3x\right)\Big|_{(1,0)} = -3.$$

A generalização a funções de n variáveis ($n > 2$) é imediata:

Definição 6.16 *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar de n variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$ e $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \operatorname{int}(D)$. Para cada variável x_i $(i = 1, \ldots, n)$ define-se a derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto p por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \ldots, p_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{h}, \tag{6.1}$$

caso este limite exista.

Exemplo 6.8 As derivadas parciais da função de três variáveis definida por

$$f(x, y, z) = \ln(xz) + e^{xyz}$$

no conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, xz > 0\}$, num ponto genérico (x,y,z) são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{z}{xz} + yze^{xyz} = \frac{1}{x} + yze^{xyz},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xze^{xyz},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{x}{xz} + xye^{xyz} = \frac{1}{z} + xye^{xyz}.
\end{aligned}$$

Definem-se as funções derivadas parciais, como as funções que a cada ponto associam a derivada parcial nesse ponto. Notamos que estas funções têm o mesmo número de variáveis que a função inicial e estão definidas num subconjunto do seu domínio.

Exemplo 6.9 Calcular as derivadas parciais da função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < y \\ y & \text{se} \quad x \geq y \end{cases}.$$

Note-se que f é uma função contínua em todo o seu domínio, $\mathbb{R}^2$. Considere-se a seguinte partição do domínio de f:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < y\},\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > y\},\ D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$$

(i) Se $(x_0,y_0) \in D_1$ então é sempre possível considerar uma vizinhança de (x_0,y_0) na qual se tem $f(x,y) = x$. Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

(ii) Se $(x_0,y_0) \in D_2$ a situação é semelhante, tendo-se $f(x,y) = y$ numa vizinhança de (x_0,y_0). Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$.

(iii) Se $(x_0,y_0) \in D_3$ a situação é completamente diferente. De facto, em qualquer vizinhança de (x_0,y_0) existem pontos (x,y) para os quais $f(x,y) = x$, como também existem pontos (x,y) para os quais $f(x,y) = y$. O processo anteriormente usado não se aplica. É necessário recorrer à definição. Como $(x_0,y_0) \in D_3$ temos $x_0 = y_0$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,x_0) - f(x_0,x_0)}{h}.$$

Se $h > 0$ então $f(x_0+h,x_0) = x_0$ mas, se $h < 0$, tem-se $f(x_0+h,x_0) = x_0 + h$. Assim,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h,x_0) - x_0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x_0 - x_0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h,x_0) - x_0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1,$$

o que nos permite concluir que não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Analogamente se conclui que também não existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Do exposto, conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < y \\ 0 & \text{se} \quad x > y \end{cases} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < y \\ 1 & \text{se} \quad x > y \end{cases}$$

e o domínio das funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq y\}$.

Permanecem válidas para as derivadas parciais as conhecidas operações com derivadas de funções de uma só variável. O teorema seguinte vale também para as derivadas parciais em ordem a qualquer das variáveis de uma função com mais que duas variáveis.

Teorema 6.3 *Se f e g são funções de duas variáveis x e y, p é um ponto interior do domínio de ambas as funções e existem $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(p)$, então*

1. $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p)$;

2. $\frac{\partial(fg)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)g(p) + f(p)\frac{\partial g}{\partial x}(p)$;

3. $\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p)g(p) - f(p)\frac{\partial g}{\partial x}(p)}{(g(p))^2}$, *se* $g(p) \neq 0$.

6.5.2 Derivadas parciais de ordem superior

Como as derivadas parciais de uma função f real de várias variáveis são funções das mesmas variáveis, derivando estas funções em ordem a cada uma das variáveis, obtém-se as derivadas de segunda ordem da função f. Por exemplo, para uma função f de duas variáveis, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

as quais também são usualmente denotadas por

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}.$$

A possibilidade de derivar parcialmente mantém-se, pelo que podemos definir as derivadas parciais de terceira ordem da função f, e assim sucessivamente, definindo-se as derivadas parciais de qualquer ordem $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k existem e são contínuas em D. Diz-se ainda que uma função é de classe C^0 se é contínua e de classe C^∞ se tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem. Pode mostrar-se que qualquer função de classe C^1 num aberto é contínua (ver [5]). Note-se que uma função de classe C^{k+1} num aberto também é de classe C^k ($k \in \mathbb{N}_0$).

Exemplo 6.10 Calculemos as derivadas parciais de primeira e segunda ordens da função definida por $f(x,y) = x + \sin(xy) - e^y$.

Tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y\cos(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) - e^y.$$

As derivadas de segunda ordem obtém-se derivando as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = -y^2\sin(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = -x^2\sin(xy) - e^y.
\end{aligned}$$

Neste exemplo, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são iguais em qualquer ponto (x,y), o que nem sempre acontece, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 6.11 Considere-se a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Vamos mostrar que as derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de f não são iguais no ponto $(0,0)$. De facto, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0 = f(x,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x(x^2 - h^2)}{h^2 + x^2} = x.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 1,$$

em particular,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

não têm o mesmo valor.

Pode-se afirmar, no entanto, que se f é uma função escalar de duas variáveis definida num subconjunto aberto D do plano que admite derivadas parciais de primeira e de segunda ordem contínuas num ponto $p \in D$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p).$$

Esta propriedade estende-se a funções escalares com mais do que duas variáveis. O teorema seguinte, conhecido como Teorema de Schwarz, estabelece condições suficientes para que as derivadas parciais mistas de segunda ordem de uma função sejam iguais.

Teorema 6.4 *Seja $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Então para todo o $p = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ e para todo os índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ temos*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Demonstração.
Uma demonstração detalhada deste teorema pode ser consultada, por exemplo, em [2] □

Exemplo 6.12 Calcular todas as derivadas parciais de segunda ordem da função f definida por $f(x,y,z) = x^2 + 3yz - \sin(xz)$.

Começando por calcular as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x - z\cos(xz) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 3z \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 3y - x\cos(xz).
\end{aligned}$$

Neste caso temos 9 derivadas parciais de segunda ordem. Note-se, porém, que a função f é contínua em todos os pontos e o mesmo acontece com todas as suas derivadas, uma vez que todas elas resultam da composição de funções contínuas, o que permite usar o teorema de Schwarz e reduzir o esforço de cálculo. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= 2 + z^2\sin(xz) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= 0 \\
\frac{\partial f^2}{\partial z^2}(x,y,z) &= x^2\sin(xz)
\end{aligned}$$

e, utilizando o teorema de Schwarz,

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & = & 0 \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & = & -\cos(xz) + xz\sin(xz) \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & = & 3.
\end{array}$$

6.5.3 Derivadas direcionais

Seja $z = f(x,y)$ uma função escalar de duas variáveis e considerem-se um qualquer vetor, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, com $\|u\| = 1$ e um ponto $P = (a,b)$ interior do domínio D de f. Seja $Q = (a,b) + t(u_1,u_2) = (a + tu_1, b + tu_2)$ um ponto ainda pertencente ao domínio de D, sobre a reta que passa por P e tem direção de u. Como o vetor u tem norma 1, a distância entre P e Q é igual a $|t|$ e a razão

$$\frac{f(Q) - f(P)}{t} = \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a,b)}{t}$$

define a variação média de f quando se passa do ponto P para o ponto Q. Se existir, o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a,b)}{t}$$

diz-se a derivada direcional de f em (a,b) segundo o vetor u.

Esta derivada é, geometricamente, o declive de uma reta tangente ao gráfico de f. Mais precisamente, é o declive da tangente, no ponto $(a,b,f(a,b))$, à curva que se obtém intersetando o gráfico de f com o plano que contém o ponto $(a,b,0)$ e cuja direção é gerada pelos vetores $(u_1,u_2,0)$ e $(0,0,1)$, como ilustrado pela Figura 6.11.

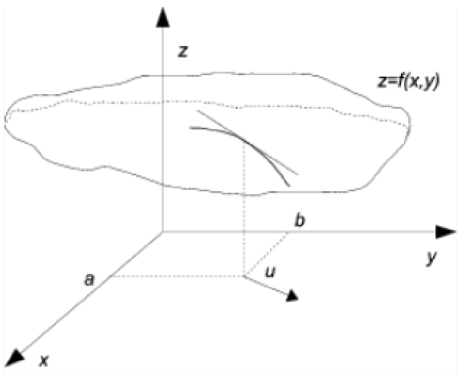

Figura 6.11: Ilustração da noção de derivada segundo o vetor u.

A definição estende-se para qualquer vetor não nulo e a funções com qualquer número de variáveis.

Definição 6.17 Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, p um ponto interior de D e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. A derivada de f no ponto p segundo o vetor u, denota-se por $D_u f(p)$, e é definida por

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t},$$

se este limite existir. Chamamos derivada direcional de f no ponto p segundo o vetor u à derivada de f segundo o vetor unitário $\frac{u}{\|u\|}$.

Exemplo 6.13 A derivada da função f definida por $f(x,y) = xy$ no ponto $p = (2,3)$ segundo o vetor $u = (1,-1)$ é,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(2+t, 3-t) - f(2,3)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(2+t)(3-t) - 6}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t - t^2}{t} = 1$$

e a derivada direcional de f segundo u é, por definição, a derivada de f segundo o vetor unitário $\frac{u}{\|u\|} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, ou seja,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, 3-\frac{\sqrt{2}}{2}t) - f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t)(3-\frac{\sqrt{2}}{2}t) - 6}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se f é uma função de duas variáveis e (a,b) é um ponto interior do domínio de f, considerando o vetor $u = (1,0)$ temos, por definição

$$D_u f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(1,0)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b),$$

ou seja, a derivada parcial de f em relação a x é uma derivada direcional. Em geral, as derivadas parciais de uma função de várias variáveis são as derivadas direcionais segundo os vetores da base canónica.

Definição 6.18 Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, $p = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto interior de D. O vetor $\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)\right)$ é o chamado vetor gradiente de f em $(x_1, \dots, x_n)$.

Observação 6.2 *Seja f uma função de duas variáveis diferenciável num ponto $p = (a,b)$ tal que $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$. Considere que um indivíduo que pratica montanhismo se encontra na posição $(a,b,f(a,b))$ e pretende deslocar-se na direção segundo a qual a subida é mais rápida, quer dizer, segundo a qual a função f cresce mais. A resposta passa por determinar o vetor unitário u segundo o qual a derivada direcional em (a, b) é máxima:*

$$D_u f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot u = \|\nabla f(a,b)\| \, \|u\| \cos\alpha = \|\nabla f(a,b)\| \, \cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado entre os vetores $\nabla f(a,b)$ e u. Esta quantidade é máxima quando $\alpha = 0$,ou seja, quando u é um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla f(a,b)$. Assim, podemos concluir que a função cresce mais no sentido do vetor gradiente. O valor máximo da derivada direcional $D_u f(a,b)$ é $\|\nabla f(a,b)\|$ e ocorre quando u tem a mesma direção e sentido de $\nabla f(a,b)$. Além disso, a função decresce mais no sentido oposto, ou seja, segundo o vetor $-\nabla f(a,b)$ e, neste caso, a taxa de decrescimento é $-\|\nabla f(a,b)\|$.

Notemos, também, que nestes pontos onde a taxa de crescimento da função é máxima ou mínima, o vetor gradiente é normal à curva de nível da função f que passa por (a,b).

6.5.4 Diferenciabilidade

Recorde-se que, se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de uma variável que admite derivada finita num ponto $p \in \text{int}(D)$, então f é diferenciável e pode escrever-se, para $p + h \in D$,

$$f(p+h) - f(p) = f'(p)h + \epsilon(h), \tag{6.2}$$

onde a função ϵ satisfaz

$$\lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0. \tag{6.3}$$

Além disso, pode mostrar-se que, sendo f diferenciável, é também contínua nesse ponto.

Para funções de duas ou mais variáveis a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função não é tão simples. Uma função pode admitir todas as derivadas parciais num ponto, ou mesmo, como ilustra o exemplo seguinte, admitir derivada segundo qualquer vetor num ponto (o que, como veremos, é uma condição necessária, mas não suficiente, para que a função seja diferenciável) e não ser contínua nesse ponto.

Exemplo 6.14 Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Considere-se $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e calcule-se $D_u f(0,0)$. De acordo com a definição 6.17, obtém-se

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(tu_1)\cdot(tu_2)^2}{t[(tu_1)^2 + (tu_2)^4]} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1 \cdot u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4}.$$

Se $u_1 \neq 0$ então $D_u f(0,0) = \frac{u_2^2}{u_1}$. Se $u_1 = 0$ e $u_2 \neq 0$ então $D_u f(0,0) = 0$, pelo que a derivada segundo qualquer vetor não nulo existe sempre. Mas verifica-se facilmente que esta função não é contínua em $(0,0)$ considerando, por exemplo, os caminhos $x = y^2$ e $x = 0$ no estudo do limite em $(0,0)$.

A caracterização de diferenciabilidade patente em (6.2) e (6.3) estende-se, com naturalidade, a funções escalares de várias variáveis.

Informalmente, pode dizer-se que uma função é diferenciável num ponto se ela pode ser aproximada, na vizinhança desse ponto, por uma função linear. Assim, uma função f de uma variável, é diferenciável num ponto x_0 se, numa vizinhança do ponto, podemos aproximar a função usando a reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$. Analogamente, vamos ver que uma função de duas variáveis é diferenciável num ponto (x_0, y_0) se existe um plano que a aproxima numa vizinhança deste ponto.

Definição 6.19 Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $p = (x_0, y_0) \in \text{int}(D)$ se existem constantes m_1 e m_2 e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem, tais que para todo o vetor não nulo $v = (h,k)$, com $p + v = (x_0 + h, y_0 + k) \in D$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + m_1 h + m_2 k + \epsilon(h,k) \tag{6.4}$$

onde $\epsilon(h,k)$ satisfaz

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{6.5}$$

É fácil mostrar que os números m_1 e m_2 que aparecem na definição anterior são as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0). De facto, sendo f diferenciável verifica-se, por definição, a relação (6.5). Consequentemente, tomando, em particular, $k = 0$ e $h > 0$ obtém-se, utilizando também (6.4),

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(h,k)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - m_1 h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} \right) - m_1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - m_1, \end{aligned}$$

e, o mesmo vale se considerarmos $h < 0$, concluindo-se que $m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Por um processo semelhante se conclui que $m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Assim, se f é diferenciável num ponto (x_0, y_0), então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e, pode escrever-se

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \epsilon(h,k) \tag{6.6}$$

ou ainda (usando $\cdot$ para denotar o produto interno de dois vetores),

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \cdot (h,k) + \epsilon(h,k). \tag{6.7}$$

Isolando $\epsilon(h,k)$ nesta equação e utilizando (6.5) obtemos a seguinte proposição:

Proposição 6.5 *Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é* diferenciável *num ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathrm{int}(D)$ se e só se as derivadas parciais de f existem em p e*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

A expressão (6.5) traduz que $\epsilon(h,k)$ tende mais rapidamente para zero do que $\|(h,k)\|$. Como, usando (6.6), temos

$$\epsilon(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k\right),$$

isto significa que o acréscimo $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pode ser aproximado pela função linear

$$\mathrm{df}(h,k) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)$$

no sentido preciso de que o erro ao tomar esta aproximação tende para zero mais rapidamente que $\|(h,k)\|$.

Exemplo 6.15 A função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, cujo gráfico é a folha positiva de uma superfície cónica, não é diferenciável no ponto $(0,0)$, o vértice da superfície. De facto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+0}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}.$$

Como $\frac{|t|}{t}$ tem o valor 1 se t é positivo e -1 se t é negativo, este limite não existe, logo não existe a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e, portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Contudo, a existência de ambas as derivadas parciais num ponto não é suficiente para garantir que f é diferenciável nesse ponto, conforme se pode ver no exemplo seguinte.

Exemplo 6.16 A função f definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, admite derivadas parciais no ponto $(0,0)$ mas não é aí diferenciável. De facto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0,$$

e, de modo análogo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Para mostrar que f não é diferenciável em $(0,0)$ temos que provar que o limite,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{1/3}k^{1/3}}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

não é igual a zero, utilizando a Proposição 6.5. Para isso vamos considerar o caminho definido por $h = k$, com $h > 0$, do qual $(0,0)$ é ponto de acumulação. Temos então

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=k,\ h>0}} \frac{h^{1/3}k^{1/3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^{2/3}}{h\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{1/3}\sqrt{2}} = +\infty.$$

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$, embora existam ambas as derivadas parciais neste ponto.

A definição 6.19 estende-se naturalmente para funções de mais do que duas variáveis:

Definição 6.20 Uma função $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \operatorname{int}(D)$ se existem constantes $m_1, \ldots, m_n$ e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, tais que para todo o vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo $p + v \in D$,

$$f(p+v) - f(p) = m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n + \epsilon(v) \tag{6.8}$$

com $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\epsilon(v)}{\|v\|} = 0$.

Mostra-se, de modo análogo, que se existirem as constantes $m_1, \ldots, m_n$, estas são as derivadas parciais de f e por isso a equação (6.8) pode escrever-se

$$f(p+v) - f(p) = f_{x_1}(p)\, v_1 + \ldots + f_{x_n}(p)\, v_n + \epsilon(v), \tag{6.9}$$

e temos a seguinte proposição:

Proposição 6.6 *Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \operatorname{int}(D)$ se e só se as derivadas parciais de f existem em p e*

$$\lim_{(v_1,\ldots,v_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(p+v) - f(p) - f_{x_1}(p)\, v_1 - \ldots - f_{x_n}(p)\, v_n}{\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}} = 0.$$

6.5.5 Diferenciabilidade e Continuidade

Tal como no caso de uma função de uma só variável, pode provar-se que se uma função de várias variáveis é diferenciável num ponto então é contínua nesse ponto.

Teorema 6.5 *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in \operatorname{int}(D)$, então:*

(i) f é também contínua nesse ponto;

(ii) para todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada de f segundo o vetor u em p, e temos

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u. \tag{6.10}$$

Demonstração.
(i) Se f é diferenciável em p então, tomando o limite quando v tende para zero em (6.8), obtemos

$$\lim_{v\to 0}(f(p+v) - f(p)) = \lim_{v\to 0}(m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n) + \lim_{v\to 0} \epsilon(v) = 0 + 0 = 0.$$

Assim

$$\lim_{v\to 0} f(p+v) = f(p),$$

ou seja,

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p),$$

o que mostra que f é contínua em p.

(ii) Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Tomando $v = tu = t(u_1, \ldots, u_n)$, na equação (6.9), com t um número real não nulo, e dividindo por t vem

$$\frac{f(p+tu) - f(p)}{t} = f_{x_1}(p)\, u_1 + \ldots + f_{x_n}(p)\, u_n + \frac{\epsilon(tu)}{t}.$$

Tomando nesta equação o limite, quando t tende para zero, obtemos

$$D_u f(p) = f_{x_1}(p)\, u_1 + \ldots + f_{x_n}(p)\, u_n = \nabla f(p) \cdot u.$$

□

Este teorema constitui, na prática, uma ferramenta importante para decidir se uma função é diferenciável em determinados pontos. Em particular, como consequência pode-se apontar o seguinte:

- Se uma função não é contínua num ponto p do seu domínio então também não é diferenciável nesse ponto.
- Se para algum vetor u, não nulo, não existe $D_u f(p)$ então podemos concluir que a função f não é diferenciável no ponto p. Em particular, se não existe alguma das derivadas parciais de f em p então f não é diferenciável em p.

Exemplo 6.17 A função escalar definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua no ponto $(0,0)$, o que se verifica facilmente calculando os limites direcionais nesse ponto. Assim, o teorema 6.5 permite concluir que f também não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser consultada por exemplo em [5], fornece um critério para testar a diferenciabilidade de uma função que é, por vezes, muito mais simples de usar do que a definição.

Teorema 6.6 (Condição suficiente de diferenciabilidade) *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto aberto D. Se f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos de D (i.e, se f é de classe C^1 em D) então f é diferenciável em D.*

De acordo com o teorema anterior, são exemplos de funções diferenciáveis, entre outras, as funções constantes, as funções polinomiais, as funções trigonométricas, as funções logaritmo e exponencial e todas as composições destas funções, quando definidas num conjunto aberto.

Exemplo 6.18 A função definida por $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ é diferenciável em todo o seu domínio, que é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De facto, as derivadas parciais de primeira ordem de g,

$$g_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad g_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

são funções contínuas (porque são quocientes de funções polinomiais) em $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ e, podemos aplicar o teorema anterior.

6.5.6 Plano tangente

Consideremos o gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x,y)$ e $(x,y) \in D$. Dizer que f é diferenciável em (x_0,y_0) é dizer que

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (h,k) + \varepsilon(h,k)$$

com $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ (ver (6.7)). Para (h,k) próximo de $(0,0)$, temos a aproximação (com erro $\varepsilon(h,k)$)

$$f(x_0+h, y_0+k) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (h,k). \tag{6.11}$$

Fazendo $x = x_0+h$ e $y = y_0+k$, temos

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0),$$

ou seja, para pontos (x,y) próximos de (x_0,y_0), os valores de $z = f(x,y)$ podem ser aproximados pela expressão do segundo membro.

Fazendo $z_0 = f(x_0,y_0)$, o conjunto dos pontos que verificam a equação

$$z = z_0 + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0),$$

isto é,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0), \tag{6.12}$$

é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0,z_0).

Exemplo 6.19 A função $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2+1}$, definida em $\mathbb{R}^2$, é diferenciável no ponto $(0,0)$ porque é de classe C^1 (em todo o seu domínio).

Temos $f(0,0)=0$ e, utilizando as regras de derivação, obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$.

Assim, aplicando (6.11), obtemos a aproximação linear de f em $(0,0)$ para $f(0.2,0.1)$:

$$f(0.2,0.1)=f((0,0)+(0.2,0.1))\approx f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot(0.2,0.1)=0+(1,-1)\cdot(0.2,0.1)=0.1.$$

Uma aproximação para $f(0.2,0.1)$ é, portanto 0.1, que aproxima o valor exato

$$f(0.2,0.1)=\frac{0.2-0.1}{0.2^2+0.1^2+1}=\frac{2}{21}=0.0952\ldots.$$

Usando (6.12) obtemos uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,0)$:

$$z-0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0),$$

ou seja,

$$z=x-y.$$

Exercício resolvido 6.15 Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função no ponto $(0,0,0)$.

Resolução. Em qualquer ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ a função é diferenciável (consequência do Teorema 6.6). É diferenciável também no ponto $(0,0)$ uma vez que existem as derivadas parciais neste ponto e, além disso,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

De facto, verifica-se facilmente (usando a definição) que

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Além disso, o limite referido acima é nulo pois temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} h\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{k^2}{h^2+k^2}$$

e, nesta última expressão o primeiro fator tende para 0 e os outros dois definem funções limitadas (verifique que são ambos em módulo menores que 1). Assim, a função é diferenciável no ponto $(0,0)$. Utilizando a fórmula (6.12) obtemos a equação pedida: $z=0$.

Na figura 4.4 estão representados o gráfico de f e o plano tangente ao gráfico no ponto $(0,0,f(0,0))$.

Observação 6.3 *Como já vimos, tal como para funções reais de uma variável real, a soma, o produto, o quociente e, também, a composição de funções diferenciáveis são ainda funções diferenciáveis. Tem particular interesse a composição de uma função real com uma função vetorial*[7] *de apenas uma variável que pode ser definida por* $r(t)=(r_1(t),\cdots,r_n(t))$, *onde* $r_i(t)$, $1\leq i\leq n$, *são funções reais de uma*

[7] Um estudo mais aprofundado das funções vetoriais será feito em Cálculo III.

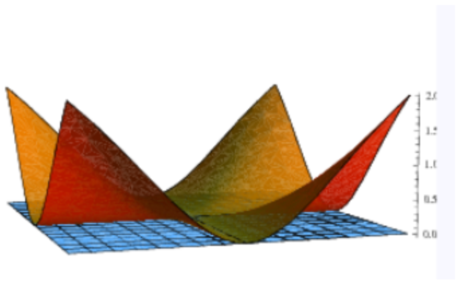

Figura 6.12: Gráfico e plano tangente no ponto $(0, 0, 0)$

variável. Estas funções têm o nome especial de curvas e a imagem de uma função deste tipo em $\mathbb{R}^2$ é uma curva geométrica. Por exemplo, a imagem da função $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (\cos t, \sin t)$ definida em $[0, 2\pi]$ é uma circunferência centrada na origem e raio 1. O estudo destas funções faz-se coordenada a coordenada; por exemplo, a continuidade e a diferenciabilidade de r obtém-se das propriedades correspondentes de cada uma das funções coordenadas $r_i, i = 1, \cdots, n$. O teorema da derivada da função composta (ou regra da cadeia, como também é conhecido) assume, neste caso a seguinte forma.

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que $r(I) \subseteq D$. Seja t_0 um ponto de acumulação de I tal que $r(t_0) \in int(D)$. Se r e f são funções diferenciáveis em t_0 e $r(t_0)$, respetivamente, então a função composta $f \circ r$ é diferenciável em t_0 e,

$$(f \circ r)'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0).$$

6.5.7 O diferencial total

No caso de uma função de uma variável, $y = f(x)$, a derivada de y em ordem a x é, como se sabe,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou, com $\Delta x = h$ (variação em x) e $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ (variação em y), temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

e portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

com $\varepsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Podemos, então, escrever

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\, \Delta x.$$

Isto significa que Δy pode ser aproximado por $f'(x)\Delta x$ no sentido preciso que acabamos de ver (no limite temos a igualdade), o que leva à definição do diferencial $\mathrm{d}y$ como sendo

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

O diferencial de uma função de várias variáveis define-se de modo semelhante. Para simplificar a exposição, consideremos uma função f de duas variáveis, de classe C^1, definida por $z = f(x, y)$ num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, e sejam Δx e Δy os incrementos de x e y, respetivamente. Então

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Podemos escrever,

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Por outro lado, usando a definição de derivada parcial em ordem a x, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y)$$

e, por isso,

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) + \varepsilon_1 \tag{6.13}$$

com $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Além disso, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \varepsilon_2 \tag{6.14}$$

com $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta y \to 0$, uma vez que $y + \Delta y \to y$. Assim, usando as equações (6.13) e (6.14), obtemos

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) + \varepsilon_1\right)\Delta x \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)\Delta x \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \end{aligned}$$

com $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. De modo análogo se obtém,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \varepsilon'\Delta y,$$

e temos, finalmente,

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon'\Delta y$$

com $\varepsilon \to 0$ e $\varepsilon' \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Vemos então que Δz pode ser aproximado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y,$$

e aplicando limites temos a igualdade, o que nos leva a definir

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

a que chamamos o diferencial (total) de z[8].

Em geral, se f é uma função escalar de n variáveis, $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, temos

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

O diferencial expressa uma aproximação para a variação da função provocada por pequenas variações $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ nas variáveis independentes $x_1, \ldots, x_n$ – a variação total é a soma dos efeitos devidos às várias variações independentes.

.

Exemplo 6.20 Estimar a quantidade de material usado para construir uma caixa cilíndrica fechada de altura 3 e diâmetro 4 (em metros) sabendo que a espessura da folha metálica é de 0.004.

O volume de uma caixa com estas dimensões é dado por $V(h, r) = \pi r^2 h$, onde h é a altura da caixa e r o raio da base circular. Tendo em conta a espessura da folha, o diferencial do volume

$$dV = \frac{\partial V}{\partial h}dh + \frac{\partial V}{\partial r}dr,$$

[8] Esta noção vai-nos aparecer mais adiante neste curso a propósito das equações diferenciais.

dá-nos uma estimativa para a quantidade de material que se procura. Assim, com $(h, r) = (3, 2)$, $dh = 0.008$ (temos que incluir a espessura da tampa circular da base e também a do topo) e $dr = 0.004$, como $\frac{\partial V}{\partial h}(3,2) = \left[\pi r^2\right]_{(3,2)} = 4\pi$ e $\frac{\partial V}{\partial r}(3,2) = \left[2\pi hr\right]_{(3,2)} = 12\pi$, uma estimativa para a quantidade de metal usado é

$$dV = 4\pi \times 0.008 + 12\pi \times 0.004 = 0.25132\ldots \text{ (em metros cúbicos).}$$

Note-se que a quantidade exata de material utilizado pode calcular-se subtraindo do volume da caixa (incluindo a espessura do material utilizado para a construir), o volume que a caixa pode conter, sendo por isso igual a $V(3 + 0.008, 2 + 0.004) - V(3, 2) = 0.25188\ldots$, pelo que a estimativa obtida é uma boa aproximação para o valor exato.

Observemos que o diferencial de uma função escalar pode ser visto como uma transformação linear. Se f é uma função escalar de n variáveis, $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, o diferencial de f no ponto p é a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}z : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n \end{array} \tag{6.15}$$

cuja matriz é a matriz (linha) das derivadas parciais de f.

6.6 Exercícios propostos

Exercício 6.6.1 Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

1. $f(x, y) = x^3 + 2xy$.
2. $g(x, y) = e^{2xy^3}$.
3. $h(x, y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$.
4. $i(x, y, z) = e^x \sin x + \cos(z - 3y)$.

Exercício 6.6.2 Determine todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função $f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y)$.

Exercício 6.6.3 Calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, sendo $f(x, y) = \sin(x + \cos y)$.

Exercício 6.6.4 Determine uma função f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

A função f encontrada é única? Discuta o resultado.

Exercício 6.6.5 Uma fábrica produz dois tipos de máquinas de lavar loiça: modelo A, de tipo independente e modelo B, de encastrar. O custo de fabricar x unidades de máquinas do modelo A e y unidades do modelo B é dado por

$$C(x, y) = 210\sqrt{xy} + 125x + 130y + 1025.$$

Calcule os custos marginais[9] quando se produzem, 80 máquinas de modelo A e 20 de modelo B. Interprete, compreenda e explique o resultado.

[9]Custo marginal é a variação no custo total de produção advinda da variação em uma unidade da quantidade produzida.

Exercício 6.6.6 A lei dos gases ideais foi derivada originalmente de resultados experimentais das Leis de Charles e de Boyle. Sabe-se que muitos gases comuns apresentam comportamentos próximos dos gases ideais à temperatura e pressão ambiente. Considere que P é a pressão de um gás, V o seu volume e T a sua temperatura (medida em graus Kelvin). A Lei dos gases ideais estabelece que

$$PV = nRT,$$

onde n é o número de moles de gás presente e R é a constante universal dos gases ($R = kN_A$, sendo k a costante de Boltzmann e N_A o número de Avogadro).

Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} + 1 = 0.$$

Exercício 6.6.7 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar, $P_0 \in \text{int(D)}$ e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$.

1. Defina derivada de f no ponto P_0 segundo o vetor u.
2. Defina derivada direcional de f no ponto P_0 segundo a direção do vetor u.
3. Calcule as derivadas direcionais das seguintes funções nos pontos dados e segundo as direcções indicadas:
   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $P_0 = (1, 1)$ segundo o vetor $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
   (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$ em $P_0 = (1, 2)$ segundo o vetor $u = (1, 1)$;
   (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ em $P_0 = (1, 1, 0)$ segundo o vetor $u = (1, -1, 2)$.

Exercício 6.6.8 Calcule a derivada da função f dada por

$$f(x, y) = \frac{y}{x},$$

segundo o vetor $u = (9, 3)$, no ponto $P = (3, -1)$.

Exercício 6.6.9 Mostre que a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{6x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 6.6.10 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.
2. Calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.
3. Diga, justificando, se f é diferenciável em $(0, 0)$.
4. Calcule, se existir, $D_u f(0, 0)$, sendo u um qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6.6.11 Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \ln x + xy^2$.

1. Indique o domínio de f.
2. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $P(1, 2)$.
3. Use a aproximação linear de f no ponto P para obter uma aproximação de $f(1.05, 2.10)$.

Exercício 6.6.12 Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 3xy + z^2$.

1. Calcule o gradiente da função num ponto genérico.

2. Determine a equação do plano tangente à superfície de nível de equação $f(x, y, z) = 4$, no ponto $(1, 1, 1)$.

6.7 Extremos de funções reais de várias variáveis

Esta secção é dedicada ao estudo de extremos, máximos e mínimos, de funções de duas ou mais variáveis. Veremos como usar as derivadas parciais, estudadas no capítulo anterior, para localizar máximos e mínimos de uma função de várias variáveis. O processo é análogo ao que se utiliza para funções de uma variável, embora um pouco mais complexo e, como veremos, alguns resultados não se podem estender de modo direto.

No final da secção o estudante deve ser capaz de:

- Definir ponto crítico, extremo local e extremo global de uma função;
- Calcular pontos críticos de uma função;
- Classificar extremos usando a matriz hessiana;
- Aplicar o teorema de Weierstrass;
- Determinar extremos condicionados usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

6.7.1 Pontos críticos e extremos locais

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, D um conjunto aberto e $p \in D$.

Definição 6.21 A função f tem um mínimo local no ponto p se $f(x) \geq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; o ponto p diz-se um minimizante (ou ponto de mínimo) local da função f.

De modo idêntico, f tem um máximo local no ponto p se $f(x) \leq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; neste caso, o ponto p diz-se um maximizante (ou ponto de máximo) local da função f. Aos maximizantes e minimizantes locais de f também se chamam extremantes locais de f e os valores correspondentes de $f(p)$ denominam-se, respetivamente, por máximos locais e mínimos locais ou, como também se diz, extremos locais da função f.

Note-se que um mínimo local não é necessariamente o menor valor atingido pela função; sabemos apenas que, numa região à volta do ponto p o valor da função para qualquer outro ponto é sempre superior a $f(p)$. Fora dessa região nada se sabe acerca do comportamento da função podendo acontecer que a função atinja valores inferiores a $f(p)$. O mesmo se pode dizer acerca dos máximos locais.

Exemplo 6.21 Na figura 6.13 assinalam-se um máximo e um mínimo local de uma função.

Recordemos que um ponto crítico de uma função real de uma variável é um ponto do seu domínio no qual a derivada da função se anula ou não existe. Define-se ponto crítico de funções de várias variáveis de um modo semelhante.

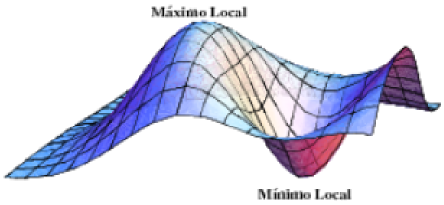

Figura 6.13: *Gráfico de uma função onde se visualiza um mínimo local e um máximo local.*

Definição 6.22 *Um ponto p é um ponto crítico ou ponto de estacionaridade de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida num conjunto aberto D, se se verifica uma das seguintes situações:*

(i) não existe pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem de f em p;

(ii) $\nabla f(p) = \mathbf{0}$.

Note-se que, na definição anterior, se se verifica *(i)* a função não é diferenciável em p. A condição *(ii)* obriga a que as derivadas parciais de f, existindo, sejam todas nulas no ponto p.

Se f é uma função de duas variáveis de classe C^1 definida num aberto e $p = (a, b)$ é um ponto de mínimo local de f, verifica-se, para todo o (x, y) numa vizinhança de (a, b) contida em D (a qual existe pois D é aberto), $f(a, b) \leq f(x, y)$; em particular, $f(a, b) \leq f(x, b)$, ou seja, sendo g_1 a função de uma variável definida por $g_1(x) = f(x, b)$, $g_1(a) \leq g_1(x)$ para pontos x próximos de a, o que significa que a é um ponto de mínimo para a função g_1 e, portanto, $g_1'(a) = 0$. Como $g_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ tem-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. De igual modo se conclui que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, usando agora a função g_2 definida por $g_2(y) = f(a, y)$. O caso em que p é ponto de máximo local é análogo, e concluímos que se p é um extremante local de uma função diferenciável f, então $\nabla f(p) = (0, 0)$. Esta ideia generaliza-se para funções reais com qualquer número de variáveis.

Proposição 6.7 *Se p é um extremante local da função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida no conjunto aberto D, então p é um ponto crítico de f.*

A proposição anterior afirma que, se f tem um máximo ou um mínimo local para $x = p$ e todas as derivadas parciais de f existem nesse ponto, então são todas nulas. O recíproco, porém, é falso: se p é um ponto crítico de f, nesse ponto a função pode atingir, ou não, um máximo ou mínimo local.

Note-se que a condição de D ser aberto é importante. Por exemplo, a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $D = \overline{B}_1(0, 0)$ (o círculo de raio e centro na origem, que não é aberto), definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, tem máximo de valor 1 atingido em todos os pontos da circunferência de raio 1, os quais não são pontos críticos, pois as derivadas parciais nestes pontos existem e não são ambas nulas.

Exemplo 6.22 Consideremos a função de duas variáveis $f(x, y) = x^2 - y^2$ cujas derivadas parciais são,

$$f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = -2y.$$

O único ponto onde ambas as derivadas parciais se anulam simultaneamente é o ponto $(0, 0)$, sendo este, portanto, o único ponto crítico da função. Porém, este não é um extremante de f. De facto, na vizinhança do ponto $(0, 0)$ temos $f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0, 0)$ para $x \neq 0$, isto é, se nos movemos no gráfico de f na direção do eixo dos xx, a função cresce; por outro lado, $f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0)$ para $y \neq 0$, ou seja, se nos movemos no gráfico de f na direção do eixo dos yy, a função decresce (ver figura 6.14). Assim sendo, $f(0, 0)$ não é máximo local nem mínimo local da função. Esta função não tem extremos locais.

Os pontos críticos que apresentam este tipo de comportamento, nos quais a função não atinge máximo nem mínimo local, chamam-se pontos de sela.

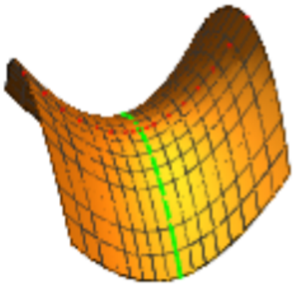

Figura 6.14: *Gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$, um parabolóide hiperbólico.*

A proposição 6.7 é muito útil quando procuramos os extremos relativos de uma função. Se conhecemos todos os pontos críticos da função conhecemos todos os candidatos a extremantes da função. Portanto, se uma função não possuir pontos críticos então não admite qualquer extremo local.

Para saber se num ponto crítico há ou não um extremo local usamos as derivadas de segunda ordem da função.

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $p \in \text{int}(D)$. A matriz

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

chama-se matriz Hessiana de f no ponto p. De acordo com o Teorema de Schwarz esta matriz é simétrica.

Recordemos que se f é uma função de uma variável, de classe C^2, definida num conjunto aberto, a fórmula de Taylor de ordem 2 de f num ponto p do seu domínio é

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)h + \frac{1}{2}f''(p)h^2 + R_2(h), \tag{6.16}$$

com $\lim_{h \to 0} \frac{R_2(h)}{h^2} = 0$ ($R_2(h)$ tende para zero mais rapidamente do que h^2). Se a derivada da função se anula em p, ou seja, se p é ponto crítico da função, a fórmula anterior reduz-se a

$$f(p+h) = f(p) + \frac{1}{2}f''(p)h^2 + R_2(h),$$

o que significa que, para h suficientemente pequeno[10], o sinal da diferença $f(p+h) - f(p)$ é o sinal de $f''(p)$, uma vez que h^2 é positivo e $R_2(h)$ tende para zero mais depressa que h^2 (o que nos garante que, em módulo, $R_2(h)$ é menor que $\frac{1}{2}f''(p)h^2$, para h suficientemente pequeno). Assim, se $f''(p) < 0$ temos um máximo local em p e se $f''(p) > 0$ temos um mínimo local em p.

Um raciocínio análogo é válido para funções com várias variáveis.

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 definida num conjunto aberto D, tal que $p + v \in D$, para qualquer vetor $v = (v_1, v_2)$, a fórmula de Taylor de f no ponto $p \in D$ é, onde $R_2(v)$ é o resto de ordem 2,

$$f(p+v) = f(p) + \begin{bmatrix} f_x(p) & f_y(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}v^T H_f(p) v + R_2(v), \tag{6.17}$$

com $\lim_{v \to 0} \frac{R_2(v)}{\|v\|^2} = 0$ ($R_2(v)$ tende para zero mais rapidamente do que $\|v\|^2$). Assim, se as derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto p se anulam, isto é, se p é um ponto crítico de f, a segunda parcela do segundo membro em (6.17) é nula e a fórmula reduz-se a

[10] Dizer que uma proposição é verdadeira para h suficiente pequeno é o mesmo que dizer que existe uma vizinhança da origem, tal que a proposição é verdadeira, para h nessa vizinhança.

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2} v^T H_f(p) v + R_2(v). \tag{6.18}$$

Podemos agora agir de modo análogo ao que fazemos para funções de uma variável, estudando o sinal da segunda derivada. Se garantirmos que $v^T H_f(p) v$ é maior ou igual a zero para todo o vetor v, então $f(p+v) - f(p) \geq 0$ para $\|v\|$ suficientemente pequeno, ou seja, $f(p+v) \geq f(p)$, o que significa que a função admite um mínimo local em p (analogamente, se $v^T H_f(p) v$ é menor ou igual a zero temos um máximo local).

Exercício resolvido 6.16 Determinar a fórmula de Taylor da função definida por $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ no ponto $(0,0)$ e averiguar se este ponto é minimizante local.

Resolução. Comecemos por calcular as derivadas parciais de primeira da função e verificar que $(0,0)$ é um ponto crítico:

$$f_x(x,y) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = 2y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

logo $\nabla f(0,0) = (0,0)$. As derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx}(x,y) = (2+4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} \ \text{ e } \ f_{yy}(x,y) = (2+4y^2)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

são funções contínuas. A matriz Hessiana é, portanto,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (2+4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 4xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} \\ 4xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} & (2+4y^2)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{bmatrix},$$

e,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, a fórmula de Taylor da função no ponto $(0,0)$ é, com $v = (h,k)$,

$$f((0,0)+(h,k)) = f(0,0) + \frac{1}{2}[h \ \ k]\ H_f(0,0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + R_2(v),$$

com $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{R_2(v)}{\|v\|^2} = 0$. Como

$$[h \ \ k] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 2h^2 + 2k^2 \geq 0, \text{ para quaisquer } h \text{ e } k,$$

temos $f(h,k) - f(0,0) \geq 0$ para $\|(h,k)\|$ suficientemente pequeno, e concluímos que a função atinge um mínimo local em $(0,0)$.

Contudo, se a função f é de classe C^2, para estudar o sinal de $v^T H_f(p) v$ podemos usar um resultado da Álgebra Linear (ver [2]) que nos permite olhar apenas para os menores principais da matriz Hessiana $H_f(p)$.

Chamamos *menor principal* de ordem k de uma matriz M, de ordem n, que denotamos por M_k, o determinante da submatriz de ordem k que se obtém da matriz M eliminando as últimas $n-k$ linhas e as últimas $n-k$ colunas.

O teorema seguinte é conhecido como *Teste da segunda derivada* ou *Critério dos menores principais.*

Teorema 6.7 (Teste da segunda derivada)
Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $p \in int(D)$. Se p é um ponto crítico de f, tem-se o seguinte:

(i) se todos os menores principais da matriz $H_f(p)$ são positivos,

$$H_1(p) > 0,\ H_2(p) > 0, H_3(p) > 0, \ldots$$

então p é um ponto de mínimo local;

(ii) se os menores principais da matriz $H_f(p)$ são alternadamente negativos e positivos, sendo o primeiro negativo,

$$H_1(p) < 0,\ H_2(p) > 0, H_3(p) < 0, \ldots$$

então p é um ponto de máximo local;

(iii) se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar com sinais diferentes então p é um ponto de sela.

Nos casos em que este critério é inconclusivo, teremos que usar alguma outra forma de analisar o comportamento da função na vizinhança do ponto p.

Como caso particular, se $n = 2$ podemos dizer que:

(i) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ e $\det(H_f(p)) > 0$ então p é ponto de mínimo;

(ii) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ e $\det(H_f(p)) > 0$ então p é ponto de máximo;

(iii) se $\det(H_f(p)) < 0$ então p é ponto de sela.

Exercício resolvido 6.17 Calcular e classificar os pontos críticos da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = -3x^2\, y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Resolução. Os pontos críticos são os pontos que verificam

$$\nabla f(x, y) = (0, 0), \text{ ou seja, } \left(4x - 6xy, -3x^2 + 4y - 3y^2\right) = (0, 0).$$

Daqui resulta o sistema,

$$\begin{cases} 4x - 6xy & = & 0 \\ -3x^2 + 4y - 3y^2 & = & 0 \end{cases}$$

cujas soluções são os pontos $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(0, 0)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

A matriz Hessiana de f, num ponto genérico $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4 - 6y & -6x \\ -6x & 4 - 6y \end{bmatrix}.$$

Nos pontos críticos $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, obtém-se:

$$H_f\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, temos apenas dois menores: $H_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $H_2 = \det(H_f)$.

Como $\det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = -16 < 0$, concluímos que $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ são pontos de sela.

Para o ponto $(0, 0)$, temos:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

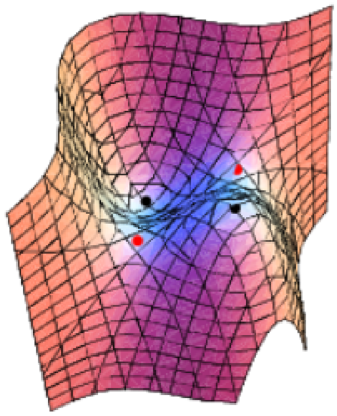

Figura 6.15: *Gráfico da função do Exemplo 6.17*

e, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0$ e $\det(H_f(0,0)) = 16 > 0$, resulta que $(0,0)$ é ponto de mínimo local. Finalmente,

$$H_f\left(0, \frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{4}{3}\right) = -4 < 0$ e $\det(H_f\left(0, \frac{4}{3}\right)) = 16 > 0$ e, portanto, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ é ponto de máximo local.

Na Figura 6.15 pode ver-se o gráfico de f onde os pontos de sela e os extremos locais estão assinalados.

Contudo, este critério nem sempre permite tirar conclusões, como se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 6.23 A função definida por $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$ tem um único ponto crítico: o ponto $(0,0)$. De facto,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(2x(2x^2+1), 3y^2\right) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

A matriz hessiana no ponto $(0,0)$,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ mas $\det(H_f(0,0)) = 0$. Não se aplica, portanto, o Teorema 6.7. Porém, como $f(0,0) = 0$, analisando a função na vizinhança do ponto $(0,0)$ sobre a reta $x = 0$, temos $f(0,y) = y^3$, que é positivo para $y > 0$ e negativo para $y < 0$, concluindo-se que o ponto $(0,0)$ não é um extremante - é um ponto de sela.

Já a função definida por $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^4$, que também tem $(0,0)$ como único ponto crítico e verifica, igualmente, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det(H_f(0,0)) = 0$, tem aí um ponto de mínimo, uma vez que $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) \geq 0$ para todo o $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercício resolvido 6.18 Calcular os extremos locais da função $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = x + (y-1)(x - \ln z) - \ln x,$$

no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \wedge z > 0\}$.

Resolução. Atendendo a que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y - \frac{1}{x}, x - \ln z, \frac{1-y}{z}\right),$$

temos

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y - \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ x - \ln z & = & 0 \\ \dfrac{1-y}{z} & = & 0 \end{array} \right.$$

Este sistema tem como solução o ponto $(1,1,e)$. Este ponto é, portanto, o único ponto crítico da função. A matriz Hessiana, num ponto genérico $(x,y,z) \in D$, é

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & -\frac{1}{z} & \frac{y-1}{z^2} \end{bmatrix}$$

donde, para $(x,y,z) = (1,1,e)$,

$$H_f(1,1,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{e} \\ 0 & -\frac{1}{e} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $H_1(1,1,e) = 1 > 0$ e $H_3 = \det\left(H_f\left(1,1,e\right)\right) = -\frac{1}{e^2} < 0$, o ponto $(1,1,e)$ é um ponto de sela.

Observação 6.4 *Existem outros critérios para classificar os pontos críticos de uma função, também baseados no estudo do sinal da forma quadrática*[11] $v^T H_f(p) v$. *Em particular, o teorema seguinte descreve a natureza dos pontos críticos usando os valores próprios da matriz Hessiana de* f *no ponto* p.

Teorema 6.8 *Sejam* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função com derivadas parciais de segunda ordem de* f *contínuas na vizinhança de um ponto* $p \in \text{int}(D)$. *Se* p *é um ponto crítico de* f, *tem-se o seguinte:*

(i) Se todos os valores próprios de $H_f(p)$ *são positivos, então* f *tem um ponto de ponto de mínimo local em* p;

(ii) Se todos os valores próprios de $H_f(p)$ *são negativos, então* f *tem um ponto de ponto de máximo local em* p;

(iii) Se $H_f(p)$ *tem valores próprios positivos e negativos, então* f *tem um ponto de sela em* p.

A aplicação deste critério exige o cálculo dos valores próprios da matriz, o que obriga à resolução de equações polinomiais de grau n. Por esta razão, muitas vezes o critério dos menores principais apresentado atrás, é vantajoso.

Sugestão de trabalho 3: Aceda a http://siacua.web.ua.pt onde pode encontrar muitos exercícios sobre este (e outros) assunto e testar os seus conhecimentos.

6.7.2 Extremos globais e o Teorema de Weirstrass

Nesta secção vamos considerar o problema de optimizar uma função, isto é, o problema de calcular os valores extremos absolutos de função num certo conjunto limitado e fechado. A resolução deste problema tem uma relação forte com o conhecido Teorema de Weierstrass.

Seja $f: \ D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D$. O ponto p diz-se um ponto de mínimo absoluto, se $f(p)$ é o menor valor atingido pela função em todo o seu domínio, isto é, se $f(p) \leq f(x)$ para todo o $x \in D$;

[11] Pode ser encontrada mais informação sobre este asssunto em [2], ou outros livros de Cálculo.

p diz-se um ponto de máximo absoluto, se $f(p)$ é o maior valor atingido pela função em todo o seu domínio, ou seja, $f(p) \geq f(x)$ para todo o $x \in D$.

Os mínimos e máximos (extremos) absolutos também se chamam extremos globais e o ponto p no qual é atingido um extremo global diz-se extremante global.

É claro que todo o extremo global é um extremo local, mas nem todos os extremos locais são globais.

O Teorema de Weirstrass, conhecido para funções de uma variável, generaliza-se para funções de várias variáveis.

Teorema 6.9 *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, definida num conjunto D compacto, então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.*

A demonstração pode ver consultada em [5].

Este teorema assegura a existência de mínimo e máximo para uma função contínua definida num compacto, mas não fornece um processo para os calcular.

Para encontrar os extremos absolutos de uma função contínua num conjunto compacto, podemos proceder do seguinte modo:

1. Obter os pontos críticos da função, isto é, pontos onde se anula o seu gradiente e pontos onde não exista alguma das derivadas parciais (apenas se consideram aqui os pontos interiores de D);

2. Obter os pontos extremantes da restrição da função à fronteira do seu domínio;

3. Calcular os valores da função em todos os pontos encontrados nos passos anteriores; o menor valor é o mínimo absoluto da função e o maior valor é o máximo absoluto da função.

Exemplo 6.24 Pretendemos calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função $f(x, y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$ no retângulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Como o domínio da função é um conjunto limitado e fechado e a função é contínua em R, o Teorema de Weirstrass garante a existência de máximo e de mínimo globais de f em R. Seguindo o processo descrito,

1. Os pontos críticos de f obtém-se resolvendo o sistema de equações

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4xy & = & 0 \\ -2y - 2x^2 & = & 0 \end{cases}$$

   Da primeira equação obtém-se $y = 2$ (valor que não satisfaz a segunda equação) ou $x = 0$. Substituindo $x = 0$ na segunda equação obtém-se $y = 0$, logo o ponto $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f no interior de R.

2. Estuda-se o comportamento de f na fonteira do conjunto R que é, neste caso, a união dos lados do retângulo definidos por

$$\begin{array}{ll} L_1 = \{(x, y) : y = -1, \ -1 \leq x \leq 1\}, & L_2 = \{(x, y) : y = 1, \ -1 \leq x \leq 1\}, \\ L_3 = \{(x, y) : x = -1, \ -1 < y < 1\}, & L_4 = \{(x, y) : x = 1, \ -1 < y < 1\}. \end{array}$$

   Em L_1, temos $y = -1$ e podemos definir a função g, de uma variável apenas,

$$g(x) = f(x, -1) = 6x^2,$$

   com domínio $[-1, 1]$. O problema de encontrar os extremos de $f(x, y)$ sobre L_1 é equivalente ao problema de encontrar os extremos de $g(x)$ em $[-1, 1]$. O gráfico de g é parte de uma parábola com vértice na origem e portanto o mínimo é atingido para $x = 0$ e o máximo para $x = -1$ e para $x = 1$. Assim os pontos $(0, -1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$ são candidatos a extremantes de f.

   Em L_2, temos $y = 1$ e definimos, de modo análogo, a função $g(x) = f(x, 1) = 2x^2$ em $[-1, 1]$. Esta função tem mínimo para $x = 0$ e máximo para $x = -1$ e $x = 1$. Assim, os pontos $(0, 1)$, $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são candidatos a extremantes de f.

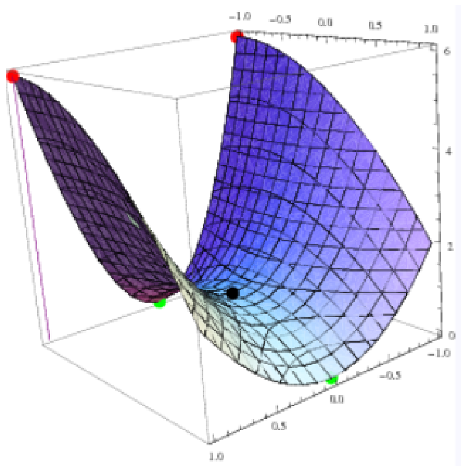

Figura 6.16: *Gráfico da função do exemplo 6.19 com destaque para os pontos estudados.*

Em L_3, temos $x = -1$ e definindo $g(y) = f(-1, y) = 5 - 2y - y^2$, com $y \in]-1, 1[$, vem,

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow -2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Como o gráfico de g é parte de uma parábola e o vértice se obtém para $y = -1$, a função g não admite extremantes em $]-1, 1[$. Logo não existem pontos candidatos a extremantes de f em L_3.

Por último, em L_4, temos $x = 1$. Definimos $g(y) = f(1, y) = 5-2y-y^2$ com $y \in [-1, 1[$, a mesma função que obtivemos para L_3. Portanto também não existem pontos candidatos a extremantes de f em L_4.

3. Finalmente, comparando os valores da função em todos os pontos candidatos a extremantes que obtivemos,

$$f(0,-1) = f(0,1) = 0,\ f(0,0) = 1,$$
$$f(-1,1) = f(1,1) = 2,\ f(-1,-1) = f(1,-1) = 6,$$

verificamos que o máximo absoluto de f é 6 e o mínimo absoluto é 0.

Na figura 6.16 estão assinalados sobre o gráfico da função, a preto o primeiro ponto encontrado (que é ponto de sela), a vermelho os dois pontos onde é atingido o máximo absoluto e a verde os dois pontos onde é atingido o mínimo. Note-se que o único ponto crítico do interior do domínio de f não é um extremante, há dois maximizantes situados nos vértices do retângulo R e há dois minimizantes situados em dois lados do retângulo R.

6.7.3 Extremos condicionados e multiplicadores de Lagrange

Nesta secção vamos estudar o problema do cálculo de extremos de uma função em que as variáveis independentes estão sujeitas a certas condições dadas. É o chamado problema da determinação de extremos condicionados (ou, como também se diz, extremos ligados).

Não se conhece um método que resolva estes problemas na sua generalidade, mas há métodos particulares para o caso em que as condições de ligação têm estruturas simples, como, por exemplo, uma curva ou uma superfície.

Exemplo 6.25 Considere-se o caso mais simples que consiste em obter os extremos de uma função f de duas variáveis x e y sujeita à equação de ligação

$$g(x, y) = 0.$$

Por exemplo, determinar os pontos da hipérbole de equação $xy = 2$ que estão mais próximos da origem. Este problema pode ser visto como o problema de minimizar a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito à condição $g(x, y) = xy - 2 = 0$. Na figura 6.17 representa-se a curva dada, $xy = 2$ e, também, algumas curvas de nível da função f. Como se observa na figura, um extremante de f na curva $g(x, y) = 0$ é um ponto $p = (a, b)$ situado numa curva de nível de f que é tangente à curva definida por $g(x, y) = 0$.

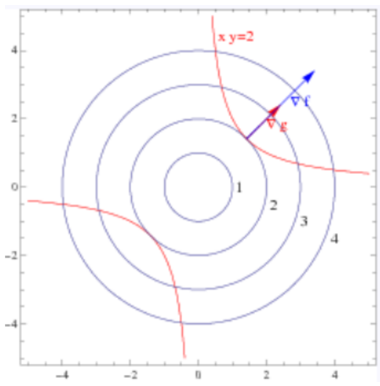

Figura 6.17: Curvas de nível de f.

Admitamos que g é diferenciável e que a curva de nível $g(x, y) = c$ é descrita por uma função $r(t)$. Veja a Observação 6.3. A composição de funções $(f \circ r)(t)$ dá os valores de f calculados sobre os pontos que pertencem à curva referida.

Para determinar os extremos de $f \circ r$ podemos observar o seguinte: o gradiente $\nabla g(p)$ é ortogonal aos vetores tangentes à curva de nível em $p_0 = (x_0, y_0) = r(t_0)$. Se f e r forem também diferenciáveis e se t_0 for um extremante de $f \circ r$ (interior ao domínio desta função), pela regra da cadeia

$$0 = (f \circ r)'(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot r'(t_0).$$

Assim, $\nabla f(p_0)$ é também ortogonal aos vetores tangentes à curva em p_0, pelo que $\nabla f(p_0)$ e $\nabla g(p_0)$ têm a mesma direção e, portanto, o ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ satisfaz

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, desde que $\nabla g(x, y) \neq 0$.

Esta afirmação é a base do método dos multiplicadores de Lagrange para a possível obtenção de extremos condicionados de uma função.

A proposição seguinte permite-nos lidar com problemas de extremos condicionados envolvendo apenas uma restrição.

Proposição 6.8 *(Método dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e f e g duas funções diferenciáveis em D. Seja $S = \{x \in D : g(x) = c\}$, sendo c uma constante real. Se a restrição de f a S, tem um extremo local num ponto $p \in S$ para o qual $\nabla g(p) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Ao escalar λ chama-se multiplicador de Lagrange. O ponto (p, λ) diz-se um ponto de estacionaridade da função auxiliar de $n+1$ variáveis L, que se denomina função de Lagrange ou Lagrangeano e é definida por

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{6.19}$$

Na prática, para determinar os extremos de uma função f real de duas variáveis sujeita a uma equação de ligação $g(x, y) = 0$, aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, o que fazemos é:

1. Determinar os pontos críticos do Lagrangeano, $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$, ou seja, as soluções do sistema
$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ L_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) &= 0 \end{cases}$$
Observemos que a equação $L_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ é equivalente à equação $g(x, y) = c$. Os pontos em que ocorrem os extremos de f encontram-se entre as soluções deste sistema.

2. Decidir quais desses pontos são, de facto, extremantes de f sujeita a essa condição, o que pode implicar uma análise mais pormenorizada. Mas, em geral, basta calcular o valor da função em todos os pontos encontrados e comparar os valores obtidos.

Exemplo 6.26 Determinar os pontos da circunferência definida pela equação $x^2+y^2=80$ que estão mais próximos e mais afastados do ponto $(1,2)$.

O problema consiste em calcular os extremantes (maximizantes e minimizantes) da função distância

$$d(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

sujeita à condição

$$g(x,y)=x^2+y^2-80=0.$$

Como os pontos que maximizam ou minimizam a função $d(x,y)$ são os mesmos que maximizam ou minimizam a função $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2$ (embora o valor máximo e mínimo não seja o mesmo para cada uma das funções), resolvemos o problema de otimizar a função f sujeita à condição

$$x^2+y^2-80=0.$$

Notemos que estamos a procurar os extremos da função f na circunferência de raio $\sqrt{80}$, que é uma região limitada e fechada e, portanto, o Teorema de Weirstrass garante que o mínimo e o máximo existem.

Temos, então,

$$\begin{array}{rcl} L(x,y,\lambda) & = & f(x,y)-\lambda\, g(x,y) \\ & = & (x-1)^2+(y-2)^2-\lambda(x^2+y^2-80). \end{array}$$

Os pontos críticos de L satisfazem

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 2(x-1)-2\lambda\, x=0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 2(y-2)-2\lambda\, y=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x^2+y^2-80=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & \lambda x \\ y-2 & = & \lambda\, y \\ x^2+y^2-80 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Notando que não existem soluções do sistema com $x=0$ ou $y=0$, eliminando o λ nas duas primeiras equações, obtemos

$$\frac{x-1}{x}=\frac{y-2}{y}$$

donde

$$y=2x.$$

Substituindo na terceira equação do sistema, vem

$$x^2+(2x)^2=80$$

donde

$$x=4 \vee x=-4.$$

Há, portanto, que considerar os pontos $(4,8)$ e $(-4,-8)$. Como $f(4,8)=45$ e $f(-4,-8)=125$, conclui-se que o primeiro ponto indicado é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e o segundo é o se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$), como ilustrado na figura 6.18.

Exemplo 6.27 Determinar as dimensões da caixa com a forma de prisma retangular de maior volume cujos vértices se situam sobre a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(r>0)$.

Primeiro precisamos de identificar a função a otimizar, bem como a condição de ligação. Considerando que a superfície esférica está centrada na origem, os lados do prisma têm comprimento $2x$, $2y$ e $2z$, sendo (x,y,z) o vértice do prisma que se situa no primeiro quadrante. O volume da caixa é dado por $f(x,y,z)=8xyz$. Queremos, portanto, maximizar a função

$$f(x,y,z)=8xyz$$

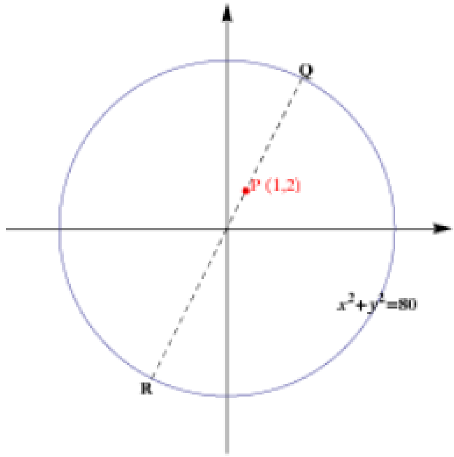

Figura 6.18: *Pontos da circunferência mais próximo, Q, e mais afastado, R, do ponto* $(1, 2)$.

sujeita à condição $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Forma-se o Lagrangeano

$$L(x, y, z, \lambda) = 8xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2).$$

Os possíveis extremos são os pontos críticos de L:

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda) &= 8yz - 2\lambda x = 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda) &= 8xz - 2\lambda y = 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda) &= 8xy - 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= x^2+y^2+z^2-r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4yz - \lambda x &= 0 \\ 4xz - \lambda y &= 0 \\ 4xy - \lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-r^2 &= 0 \end{cases}$$

Também neste caso, pela natureza geométrica do problema, não nos interessa considerar soluções que se obtêm com $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$ pois uma caixa com uma das dimensões nulas teria volume nulo (volume mínimo e não máximo, como se pretende). Assim, podemos assumir que x, y e z são não nulos e, multiplicando ambos os membros da primeira equação por x, da segunda por y e da terceira por z, obtemos

$$\begin{cases} x^2 = \frac{4xyz}{\lambda} \\ y^2 = \frac{4xyz}{\lambda} \\ z^2 = \frac{4xyz}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2-r^2 = 0 \end{cases}$$

e usando a última equação, obtemos

$$\lambda = \frac{12xyz}{r^2}.$$

Substituindo λ nas equações anteriores, vem

$$x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

O prisma procurado tem todas as arestas com o mesmo comprimento (é um cubo cuja aresta mede $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$) e tem volume $\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$.

Segue-se um exercício onde usamos, de um modo adaptado e com algum cuidado adicional, o método dos multiplicadores de Lagrange.

Exercício resolvido 6.19 Determinar os extremos globais da função $f(x, y) = xy$, no semicírculo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

Resolução. O domínio é um conjunto limitado e fechado e, pelo Teorema de Weierstrass, a função atinge um máximo global e um mínimo global no seu domínio. Assim, vamos determinar todos os candidatos a extremos, no interior de D e depois na sua fronteira e, em seguida, selecionar de entre eles, o máximo e o mínimo global.

Uma vez que $f_x(x,y) = y$ e $f_y(x,y) = x$, o único ponto crítico de f é o ponto $(0,0)$. Como este ponto não é um ponto interior de D, no interior de D não há pontos críticos. Vamos então estudar a fronteira de D, que é constituída por duas curvas: a semicircunferência D_1 e o segmento D_2:

$$D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}, \quad D_2 = \{(x,y) : y = 0,\ -1 \leq x \leq 1\}.$$

A fronteira de D não pode ser definida, portanto, por uma condição do tipo $g(x,y) = 0$ com g diferenciável. Para estudar a restrição de f a D_1 podemos considerar a função de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

tomando em atenção que apenas os pontos de estacionaridade desta função com $y \geq 0$ podem ser tomados como candidatos a extremantes da função. Fazendo $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x &= 0 \\ x - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}.$$

Este sistema não admite soluções com $x = 0$ ou $y = 0$ (verifique). Assim, multiplicando a primeira equação por y e a segunda equação por x obtemos $y^2 = x^2$ (com $\lambda \neq 0$). Substituíndo na terceira equação, vem $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e, como $y \geq 0$, vem $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Os pontos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são candidatos a extremantes de f.

O estudo da restrição de f a D_2 é trivial pois, como a função é constante em D_2 (temos $f(x,0) = 0$ para qualquer x), todos os pontos são máximos e mínimos desta restrição e, portanto, candidatos a extremantes. Uma vez que,

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x,0) = 0,$$

concluímos que o máximo global é $\frac{1}{2}$ e é atingido no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e o mínimo global é $-\frac{1}{2}$, atingido no ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Para terminar refira-se ainda que, para obter os extremos de uma função f real de n variáveis sujeita m ($m \geq 1$) condições do tipo $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, ($1 \leq i \leq m$) o procedimento é análogo, considerando, neste caso, a função de Lagrange

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

de onde resulta um sistema com $n + m$ equações.

Exercício resolvido 6.20 Determinar o valor máximo da função definida por $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano de equação $x - y + z = 1$ com a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução. A curva é uma elipse. Procuramos o valor máximo da função quando os pontos (x,y,z) pertencem a essa elipse, quer dizer, pertencer simultaneamente ao plano e à superfície cilíndrica. A solução pode ser obtida maximizando a função $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeita a duas restrições: $g(x,y,z) = x - y + z = 1$ e $h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$. O Lagrangeano é:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 3z - \lambda_1(x - y + z - 1) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 1).$$

Para determinar os candidatos a extremantes resolvemos o sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & = & 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & = & 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & = & 0 \\ L_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & = & 0 \\ L_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + 2x\lambda_2 & = & 1 \\ -\lambda_1 + 2y\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & = & 3 \\ x - y + z - 1 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.20}$$

Obtém-se,

$$\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{5}{4\lambda_2^2} = 1,$$

e, usando as duas primeiras equações, tem-se

$$x = -\frac{2}{\sqrt{29}} \vee x = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

$$y = -\frac{5}{\sqrt{29}} \vee x = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Tomando todas as combinações possíveis na quarta equação, determina-se z e obtém-se os pontos (x, y, z):

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{3}{\sqrt{29}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{29}}\right),$$

Calculando, finalmente, $f(x, y, z)$ em todos os casos, o máximo é

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{29}}\right) = 3 + \frac{33}{\sqrt{29}}.$$

Observação 6.5 *O método dos multiplicadores de Lagrange deve ser aplicado com cuidado. É preciso verificar que o método permite obter todos os pontos candidatos a extremantes, ou seja, que a função que define a curva $g(x, y) = 0$ é diferenciável e o seu vetor gradiente não se anula no ponto p. Por isso, quando procuramos extremos condicionados devemos também examinar todos os pontos críticos de $g(x, y)$.*

Para ilustrar o que acaba de ser dito, consideremos $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$. Se a condição é definida por $g(x, y) = 1$, o gradiente de g nunca se anula sobre a curva e tudo funciona bem. Mas se a condição é definida por $g(x, y) = 0$, o conjunto definido por esta condição tem apenas o ponto $(0, 0)$. É trivial que a função f admite, neste conjunto o valor 0 como máximo e mínimo (em simultâneo). Mas $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$ e $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, por isso não existe um escalar λ tal que $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$. Portanto, negligenciando o ponto crítico de g não encontraríamos o extremo de f.

Um outro caso mais interessante e menos trivial é o de encontrar o mínimo da função $f(x, y) = x$ sobre a curva definida por $g(x, y) = 0$, com $g(x, y) = y^2 + x^4 - x^3$. Esta curva chama-se piriforme (ver figura 6.19), o mínimo da função f sobre esta curva é 0 e ocorre no ponto $(0, 0)$ mas este ponto não satisfaz a condição de existir algum valor de λ tal que $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$.

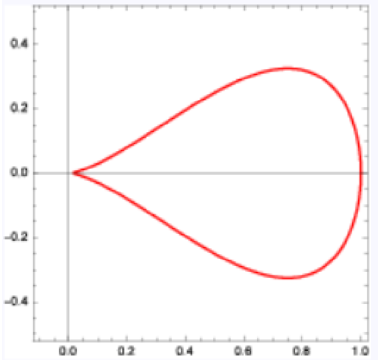

Figura 6.19: Piriforme: a curva definida por $y^2 + x^4 - x^3 = 0$.

6.8 Exercícios propostos

Exercício 6.8.1 Determine, caso existam, os extremos locais das seguintes funções:

1. $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$;
2. $f(x, y) = 3x^2y^2 + y^2 - 3x^2 - 6y + 7$;
3. $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$;
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;
5. $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$.

Exercício 6.8.2 Considere a função f definida por $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$, $a \in \mathbb{R}$. Determine os extremos locais de f em função do parâmetro a.

Exercício 6.8.3 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y^3)^2 - x^3$. Verifique que $(0, 0)$ é ponto crítico de f mas não é um extremante local de f.

Exercício 6.8.4 Seja g a função definida por $g(x, y) = x^2y^2$. Mostre que g possui um mínimo (global) nos pontos situados sobre os eixos coordenados (apesar do estudo da matriz Hessiana ser inconclusivo nesses pontos).

Exercício 6.8.5 Determine, caso existam, os extremos globais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

Exercício 6.8.6 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ onde

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\right\}.$$

1. Represente geometricamente o domínio e o gráfico da função f.
2. Justifique que a função f possui extremos globais em D e determine-os.

Exercício 6.8.7 Determine o ponto do plano de equação $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Exercício 6.8.8 Determine o(s) ponto(s) da superfície de equação $xyz = 1$ ($x > 0$ e $y > 0$), que se encontra(m) mais próximo(s) da origem.

Exercício 6.8.9 Utilize o teorema dos multiplicadores de Lagrange para determinar, caso existam, os extremos das seguintes funções, sujeitas às restrições indicadas:

1. $f(x,y) = 4x + 6y$, com $x^2 + y^2 = 13$;
2. $f(x,y) = x^2 y$, com $x^2 + 2y^2 = 6$;
3. $f(x,y) = xy$, com $2x + 3y - 5 = 0$;
4. $f(x,y,z) = xyz$, com $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;
5. $f(x,y,z) = yz + xy$, com $xy = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$.

Exercício 6.8.10 Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x,\ 2y + x \leq 4\}$. Determine o(s) ponto(s) de A que se encontra(m) à menor temperatura.

Exercício 6.8.11 Determine o(s) ponto(s) do elipsóide de equação $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza(m) a soma $x + 2y + z^2$.

Exercício 6.8.12 A função definida por $f(x,y) = \dfrac{4x^2y^2 - y^4}{16}$ representa o quadrado da área de um triângulo isósceles de lados x e y cujo perímetro é $2x + y = 3$. Determine x e y por forma a que o triângulo tenha área máxima.

Exercício 6.8.13 Determine o triângulo retângulo de área S cujo comprimento da hipotenusa é mínimo.

Exercício 6.8.14 Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.

1. Represente geometricamente o domínio D e faça um esboço do gráfico da função f.
2. Diga, justificando, se existem máximos ou mínimos globais da função f. Em caso afirmativo, determine-os.
3. A função f admite extremos não globais? Justifique.

Soluções dos exercícios

Exercício 6.2.1

1. É fechado em $\mathbb{R}^2$. $fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$
2. Não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$. $fr(D) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge (y = -1 \vee y = 1)\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = -1 \vee x = 1) \wedge 1 \leq y \leq 1\big\}$.
3. Não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}^2$. $fr(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

Exercício 6.2.2

1. É aberto em $\mathbb{R}^3$. $fr(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
2. É fechado em $\mathbb{R}^3$. $fr(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$;
3. Nem aberto nem fechado. $fr(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \vee x^2 + 9y^2 + z^2 = 9\}$

Exercício 6.2.3

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (disco de raio $|a|$), fechado em $\mathbb{R}^2$;
3. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{z^2}{3} - x^2 - \frac{y^2}{2} > 1\}$ (reunião das regiões interiores das duas folhas do hiperboloide), aberto em $\mathbb{R}^3$;
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ (esfera centrada na origem e raio $|a|$), fechado em $\mathbb{R}^3$;
5. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq a^2\}$ (todo o espaço exceto a superfície esférica de raio a, se $a > 0$; $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ se $a = 0$; aberto em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 6.2.4 $D_h = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $CD_h = [0, 1]$.

Exercício 6.2.5

1. $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x + k\}$, $k \in \mathbb{R}$ (família de retas com declive -2);
2. $C_1 = \{(0, 0)\}$; Se $k < 1$, $C_k = \emptyset$; Se $k > 1$, $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{k^2}\}$(circunferências);
3. Se $k < 0, C_k = \emptyset$; $C_0 = \{(0, 0)\}$; Se $k > 0$, $C_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{2}} = 1\right\}$ elipses;
4. Se $k \in \mathbb{R}^+$, $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(k)\}$ ($k \neq 1$: família de hipérboles; $k = 1$: eixos coordenados xx e yy); Se $k \leq 0$, $C_k = \emptyset$;
5. Se $k < 0$ ou $k > 1$, $C_k = \emptyset$; Se $0 \leq k < 1$, $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = \arcsin(k) \vee x = \pi - \arcsin(k)) \wedge y \geq 0\}$ (duas semirretas). $C_1 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \infty[$ (semirreta);
6. $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = k\}$, $k \in \mathbb{R}$ (família de planos);
7. $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$, se $k \in \mathbb{R}^+$ (família se superfícies esféricas centradas na origem e raio $\sqrt{k}$; $S_0 = \{(0, 0, 0)\}$; $S_k = \emptyset$ se $k < 0$.

Exercício 6.2.6 Elipse de equação $\dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{\frac{17}{2}} = 1$.

Exercício 6.4.1

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
2. A: retas de declives $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ excluindo a origem, B: retas de declives $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ excluindo a origem.
3. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$
4. Não.

Exercício 6.4.2

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$ (plano excluindo as circunferências de raios $\sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{N}$);
2. Não é contínua.

Exercício 6.4.3 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercício 6.4.4 Não existe limite.

Exercício 6.4.5

1. 2;
2. $-\frac{1}{2}$;
3. $\frac{1}{2}$.

Exercício 6.6.1

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$;
2. $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y^3 e^{2xy^3}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 e^{2xy^3}$;
3. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y+\frac{1}{y}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x-\frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}$;
4. $\frac{\partial i}{\partial x}(x,y) = e^x(\sin x + \cos x)$, $\frac{\partial i}{\partial y}(x,y) = 3\sin(z-3y)$, $\frac{\partial i}{\partial z}(x,y) = \sin(3y-z)$.

Exercício 6.6.2 $f_x(x,y) = -\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$, $f_y(x,y) = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$, $f_{xx}(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$, $f_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$.

Exercício 6.6.3 $\sin y \cos(x + \cos y)$.

Exercício 6.6.4 $f(x,y) = x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$.

Exercício 6.6.5 $C_x(80,20) = \frac{355}{2}$, $C_y(80,20) = 340$.

Exercício 6.6.7 $2\sqrt{2}$; $\frac{1}{9\sqrt{2}}$; $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Exercício 6.6.8 2.

Exercício 6.6.10 $f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = -1$. A função não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 6.6.11

1. $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$;
2. $5x + 4y - z = 9$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4 - z$;
3. 4.65.

Exercício 6.6.12

1. $\nabla f(x,y,z) = (3x, 3y, 2z)$;
2. $3x + 3y + 2z = 8$.

Exercício 6.8.1

1. $\frac{59}{27}$ é máximo local;
2. -2 é mínimo local;
3. 1 é máximo local;
4. $-\frac{4}{3}$ é mínimo local;
5. 1 é mínimo local.

Exercício 6.8.2 a^4 é máximo local (se $0 < a < 4$).

Exercício 6.8.5 $f(1,2) = -5$ é mínimo global.

Exercício 6.8.6 Mínimo global: $f(0,1) = 0$; Máximo global: $f(0,4) = 9$.

Exercício 6.8.7 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

Exercício 6.8.8 $(1,1,1)$.

Exercício 6.8.9

1. Mínimo global: $f(-2,-3) = -26$; máximo global: $f(2,3) = 26$;
2. Mínimo global: $f(-2,-1) = -4$; máximo global: $f(2,1) = 4$;

3. Máximo global: $f(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}) = \frac{25}{24}$;
4. Extremos: $(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(-\sqrt{2}, -1, \sqrt{\frac{2}{3}})$; Máximo: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e mínimo: $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
5. Máximo global: $\frac{3}{2}$ nos pontos $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; mínimo global: $\frac{1}{2}$ nos pontos $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exercício 6.8.10 O ponto que se encontra à menor temperatura é $P = (0, 2)$ (com temperatura 0).

Exercício 6.8.11 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercício 6.8.12 $x = y = 1$.

Exercício 6.8.13 Triângulo retângulo de catetos $x = y = \sqrt{2S}$ e hipotenusa $z = 2\sqrt{S}$.

Exercício 6.8.14 $f(0, 0) = 0$ é o mínimo global e $f(-2, 0) = f(2, 0) = 2$ é o máximo global de f em D. Não há outros extremos.

Bibliografia

[1] P. Carvalho e L. Descalço, Exercícios de Cálculo III, siacua.web.ua.pt

[2] T. Apostol, Cáculo vol 2, Ed Reverté.Lda, 1993.

[3] A. Breda, J. Nunes da Costa, *Cálculo com Funções de Várias Variáveis*, Apêndice B, Ed. McGrawHill, 1996.

[4] P. Carvalho e L. Descalço, Cálculo Diferencial a várias variáveis: o essencial, Silabas & Desafios, 2016.

[5] E.L. Lima, *Curso de análise*, Volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.

[6] Larson, Hostetler and Edwards, Cálculo vol 2, Oitava edição, McGraw-Hill 2006.

[7] J. Stewart, Cálculo vol II, 5ª edição, Cengage Learning, São Paulo, 2008.