

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

# Matemática Discreta

## Lógica Proposicional

Universidade de Aveiro 2019/2020

<http://moodle.ua.pt>

## Lógica proposicional

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- **Princípio da não contradição**: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa (ao mesmo tempo).
- **Princípio do terceiro excluído**: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (i.e., verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).
- O **valor lógico** de uma proposição é **verdadeiro** (V ou 1) ou **falso** (F ou 0).

## Exemplos

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

São proposições:

1)  $2 > 3$

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas

3) a equação  $x^2 = 4$  tem duas soluções reais

Não são proposições:

1)  $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3)  $x^2 = 4$

## Exemplos

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

São proposições:

1)  $2 > 3$

→ Falso

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas

→ Verdadeiro

3) a equação  $x^2 = 4$  tem duas soluções reais

→ Verdadeiro

Não são proposições:

1)  $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3)  $x^2 = 4$

## Decomposição de proposições

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Uma proposição

**atômica** não se pode decompor noutras proposições.

- Denotam-se por letras minúsculas:  $p$ ,  $q$ ,  $\dots$

**composta** pode decompor-se em proposições atômicas e operadores lógicos.

**Exemplo de proposição composta:**

- Se o cão tem fome então o cão come muito,

**proposições atômicas:**

- $p$ : "o cão tem fome"
- $q$ : "o cão come muito"

**operador lógico:**  $\Rightarrow$

$$p \Rightarrow q$$

## Operadores lógicos (ou conetivos lógicos)

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Negação  $\neg$  (não)

Conjunção  $\wedge$  (e)

Disjunção  $\vee$  (ou)

Implicação  $\Rightarrow$  (se ... então)

Equivalência  $\Leftrightarrow$  (se e só se (sse))

## Tabelas de verdade

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da **negação**:

$p$	$\neg p$
1	
0	

## Tabelas de verdade

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da **negação**:

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

## Tabelas de verdade (cont.)

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da **conjunção**:

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da **disjunção**:

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

## Tabelas de verdade (cont.)

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da **conjunção**:

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela de verdade da **disjunção**:

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

## Tabelas de verdade (cont.)

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da implicação:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela de verdade da equivalência:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

## Tabelas de verdade (cont.)

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Tabela de verdade da implicação:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabela de verdade da equivalência:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

## Fórmulas bem formadas

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

### Definição [fórmula bem formada (fbf)]

- 1 **Verdadeiro** (V ou 1) é uma fbf;
- 2 **Falso** (F ou 0) é uma fbf;
- 3 Uma proposição atômica é uma fbf;
- 4 se  $r$  é uma fbf então  $\neg r$  é uma fbf;
- 5 se  $r$  e  $s$  são fbf's então  $(r \wedge s)$ ,  $(r \vee s)$ ,  $(r \Rightarrow s)$ ,  $(r \Leftarrow s)$  e  $(r \Leftrightarrow s)$  são fbf's.

Também utilizamos os parêntesis retos "[" e "]" em alternativa ou conjuntamente com os parêntesis curvos "(" e ")".

Uma fórmula bem formada também se designa por **expressão lógica**.

## Tautologias e contradições

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

### Definição de tautologia e contradição

Uma **tautologia** é uma fórmula que tem valor lógico **1** qualquer que seja a interpretação.

Uma **contradição** é uma fórmula que tem valor lógico **0** qualquer que seja a interpretação.

**Exemplo de tautologia:**  $p \vee \neg p$

**Exemplo de contradição:**  $p \wedge \neg p$

## Fórmulas válidas, inconsistentes e equivalentes

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

### Definição [fórmula válida]

Uma fbf diz-se **válida** se é uma tautologia, i.e., se é verdadeira sobre qualquer das suas possíveis interpretações.

Uma fbf diz-se **não válida (ou inválida)** se não é válida.

### Definição [fórmula inconsistente]

Uma fbf diz-se **inconsistente** se é uma contradição, i.e., se é falsa qualquer que seja a interpretação.

Uma fbf diz-se **consistente** se não é inconsistente.

## Fórmulas lógicas equivalentes

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

### Definição [fórmulas equivalentes]

Duas fórmulas lógicas,  $r$  e  $s$ , dizem-se **equivalentes** ( $\equiv$ ) se  $r \Leftrightarrow s$  é uma tautologia.

- Duas fórmulas lógicas com as mesmas variáveis são equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.
- Como consequência, podemos afirmar que  $(p \Rightarrow q)$  é equivalente a  $\neg p \vee q$  conforme decorre das respectivas tabelas de verdade.



## Comutatividade, leis de De Morgan e associatividade

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Comutatividade:

- $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

- Leis de De Morgan:

- $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

- Associatividade:

- $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
- $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

## Idempotência, distributividade, lei da contraposição, lei da dupla negação

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Idempotência:

- $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
- $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

- Distributividade:

- $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

- Lei da contraposição:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

- Lei da dupla negação:

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

## Outras propriedades

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Seja  $p$  uma proposição arbitrária.

$$\blacksquare (p \wedge 1) \Leftrightarrow p;$$

$$\blacksquare (p \vee 1) \Leftrightarrow 1;$$

$$\blacksquare (p \wedge 0) \Leftrightarrow 0;$$

$$\blacksquare (p \vee 0) \Leftrightarrow p;$$

$$\blacksquare \neg 1 \Leftrightarrow 0;$$

$$\blacksquare \neg 0 \Leftrightarrow 1;$$

## Modus ponens e modus tollens

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Modus ponens:

$$\blacksquare [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

- Modus tollens:

$$\blacksquare [(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

## Outras regras

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Adição:

- $p \Rightarrow (p \vee q)$

- Simplificação:

- $(p \wedge q) \Rightarrow p$

- Silogismo hipotético:

- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

## Utilização do "ou exclusivo" em fórmulas lógicas

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Para além do conetivo  $\vee$  que se designa também por *ou inclusivo*, por vezes adopta-se o *ou exclusivo* (ou *rejeição*) que se denota por  $\dot{\vee}$ .

- Este *ou exclusivo* aplicado às proposições  $p$  e  $q$  produz a proposição  $p \dot{\vee} q$  que significa  $p$  ou  $q$ , mas não ambos.

- Assim, a proposição  $p \dot{\vee} q$  é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições  $p$  ou  $q$  é verdadeira.

## Referências bibliográficas

Matemática  
Discreta

Lógica  
Proposicional

Lógica  
Proposicional

Fórmulas bem  
formadas (fbf)

Fórmulas  
válidas e  
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- **Referência bibliográfica principal:**  
D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami,  
*Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.
- **Referência bibliográfica complementar:**  
N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).