Transformada de Laplace

5.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

para os valores de $s \in \mathbb{R}$ onde o integral converge.

5.2 Existência da Transformada de Laplace

Seja $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que

(i) f é seccionalmente contínua em $[0,+\infty[$

(ii) existem constantes $M>0, T>0, a \in \mathbb{R}$ tais que $|f(t)| \leq M e^{at}$, $\forall t \geq T$

Então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

5.3 Linearidade da Transformada de Laplace

- $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$, $s > \max\{s_f, s_g\}$
- $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\, \mathcal{L}\{f\}(s)$, $s > s_f$

5.4 Transformadas de Laplace fundamentais

1. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
2. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
3. $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
5. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s > |a|$
6. $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s > |a|$

NOTA

4*) $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$

5.5 Deslocamento na transformada

$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em $[0,b]$, $\forall b>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$, $s>s_f$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s)=F(s-\lambda)}\quad, s>s_f+\lambda$$

5.6 Transformada do deslocamento

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrável em $[0,b]$, $\forall b>0$ e nula em $\mathbb{R}^-$

$\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$, $s>s_f$

$$\forall a\in\mathbb{R}^+,\quad \boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s)=e^{-as}F(s)}\quad, s>s_f$$

5.7 Transformada da contração / expansão de uma função

$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em $[0,b]$, $\forall b>0$ e $a\in\mathbb{R}^+$

$\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$, $s>s_f$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}\quad, s>as_f$$

5.8 Derivada da transformada

$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em $[0,b]$, $\forall b>0$

$\mathcal{L}\{f\}(s)=F(s)$, $s>s_f$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)=(-1)^n F^{(n)}(s)}\quad, s>s_f$$

5.9 Transformada da derivada

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

<u>NOTA</u>

- $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0)$
- $\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
- $\mathcal{L}\{f'''\}(s) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$

5.10 Transformada de Laplace inversa

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ representa a transformada de Laplace inversa de F, ou seja, a função f tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

<u>NOTA</u>: não podem existir duas funções contínuas distintas com a mesma transformada de Laplace.

<u>PROPRIEDADES</u>

1. $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$
2. $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$
3. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$