Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica 2019/20

Agrupamento II

Folha 1

1. Determine o conjunto das soluções das seguintes equações nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4.

   a) $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$.

   b) $x_1 + x_2 - x_4 = 0$;

   c) $x_2 = 5$.

2. Determine uma equação nas incógnitas x, y, z onde x e z são incógnitas visíveis, y é invisível e $(1, -1, 0)$ é solução da equação.

3. Considere os sistemas nas incógnitas x, y, z

   (a) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \quad 2y - z = 4 \\ \qquad 3z = 6 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad x + 2z = 4 \\ \qquad z = 1 \end{cases}$;

   (c) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + 2z = 6 \end{cases}$; (d) $x + y - 4z = 0$.

   Indique os sistemas escalonados, classifique-os e determine o seu conjunto das soluções.

4. Considere o sistema nas incógnitas x, y, z e nos parâmetros reais a, b, c. Determine a, b, c de modo que $(1, 0, 0)$ seja solução do sistema.

$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 3 \\ bx + y + 3z = 1 \\ cx - y - z = -1 \end{cases} .$$

.

5. Indique um sistema de três equações lineares com três incógnitas que tenha $(1, 2, 3)$ como solução.

6. Indique um sistema de equações lineares impossível com três equações lineares e quatro incógnitas.

7. Quais dos sistemas seguintes são equivalentes?

(a) $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Quais das matrizes acima são matrizes em escada e quais estão na forma em escada reduzida?

b) Usando operações elementares reduza as matrizes A, B e C à:

   i. forma escalonada;

   ii. forma escalonada reduzida.

c) Calcule a característica das matrizes A, B e C.

9. Resolva os seguintes sistemas usando o método de redução de Gauss.

(a) $\begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=2 \\ 2x-y-z=-2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=2 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=2 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -x-y+z=-1 \\ 2x-y+z=4 \\ 2x-y+4z=4 \end{cases}$;

(e) $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=1 \\ 3x_1+6x_2+9x_3=2 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_3+x_4=1 \\ -x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$;

(g) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=-2 \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=-3 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=10 \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5=1 \end{cases}$.

10. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x+y=1 \\ x+\alpha y=1 \end{cases}$$

(a) não tem solução; (b) tem exactamente uma solução; (c) tem uma infinidade de soluções.

11. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+\beta y+\beta z=0 \\ \beta x+y+z=0 \\ x+y+\beta z=\beta^2 \end{cases} .$$

a) Discuta o sistema em função de β.

b) Considere o sistema homogéneo associado a $\beta=0$ e determine a sua solução.

12. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x-y-z &= a \\ x+y+z &= a \\ x-by+z &= -b \end{cases} ,$$

onde a e b são parâmetros reais.

a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é:

i. possível e determinado; ii. impossível.

b) Sabendo que $(1,-1,1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

13. Considere os planos seguintes definidos pelas equações indicadas

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}_1 : x+z-1=0, & \mathcal{P}_3 : x-2=-z+1, & \mathcal{P}_5 : 2y+2=0, \\ \mathcal{P}_2 : y=2, & \mathcal{P}_4 : y=-1, & \mathcal{P}_6 : x-z+3=0, \end{array}$$

e as retas r, t e l definidas pelas equações vetoriais

$$r: \ (x,y,z)=(1,2,0)+a(-1,0,1), \ a\in\mathbb{R},$$

$$t: \ (x,y,z)=(1,3,2)+a(1,1,1), \ a\in\mathbb{R},$$

$$l: \ (x,y,z)=(0,1,0)+a(0,-1,1), \ a\in\mathbb{R}.$$

Considere ainda as retas n e m que são a interseção dos planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e dos planos $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$, respectivamente. Determine:

a) a interseção dos planos

$$i.\, \mathcal{P}_1 \text{ e } \mathcal{P}_3; \quad ii.\, \mathcal{P}_4 \text{ e } \mathcal{P}_5;$$

b) a interseção das retas

$$i.\, r \text{ e } n; \quad ii.\, r \text{ e } t; \quad iii.\, r \text{ e } l; \quad iv.\, r \text{ e } m;$$

c) a interseção da reta l com o plano $\mathcal{P}_2$;

d) a interseção da reta r com o plano $\mathcal{P}_1$;

e) a interseção da reta t com o plano $\mathcal{P}_6$.

14. Considere a reta r com equações cartesianas

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ x+ay+2z=3 \end{cases}$$

e o plano $\mathcal{P}$ definido pela equação $bx+by+z=2$. Discuta a posição relativa da reta r e do plano $\mathcal{P}$, em função dos parâmetros reais a e b.

15. Determine uma equação vetorial da reta r definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P=(2,2,1)$ e que contém a reta r.

16. Considere o plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos $A=(1,1,1)$, $B=(0,1,0)$ e $C=(0,0,1)$ e a família de planos $\mathcal{P}_{a,b}$ definidos pela equação cartesiana $ax+y+z=b$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

b) Discuta a posição relativa dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b.

17. Considere a reta r definida por $x = 2y + z = 1$ e a família de retas $s_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + s(0, 2, b), \quad s \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa das retas r e $s_{a,b}$ em função dos parâmetros a e b.

18. Considere as retas r_1 e r_2 de equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Verifique que as retas r_1 e r_2 são enviezadas.

b) Determine o plano que contém r_2 e é paralelo a r_1.

Algumas soluções

1. a) $S = \{(2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

   b) $S = \{(-x_2 + x_4, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

   c) $S = \{(x_1, 5, x_3, x_4) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

3. Sistemas escalonados: a), c), d).

   a) Sistema possível e determinado; $S = \{(-4, 3, 2)\}$.

   c) Sistema possível e simplesmente indeterminado; $S = \{(5 - 2z, 6 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

   d) Sistema possível e duplamente indeterminado;$S = \{(-y + 4z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

4. $a = 3, b = 1, c = -1$.

7. $a), c)$.

8. a) matrizes em escada: A, C; matrizes em escada reduzida: C;

   b. i) por exemplo: $B \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   b. ii) $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   c) $\operatorname{car}(A) = 2$, $\operatorname{car}(B) = 3$, $\operatorname{car}(C) = 3$.

9. a) Conjunto solucção: $S = \{(-2z, 2-5z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

   b) Conjunto solução: $S = \{(-4, -8, 2)\}$.

   c) Sistema impossível.

   d) Conjunto solução: $S = \{(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0)\}$.

   e) Conjunto solução: $S = \{(x_3, \frac{1}{3} - 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   f) Conjunto solução: $S = \{(-1-2x_2, x_2, 0, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.

   g) Sistema impossível.

10. (a) $\alpha = -1$ (b) $\alpha^2 \neq 1$ (c) $\alpha = 1$.

11. a) O sistema $\begin{cases} \text{não tem solução} & \text{se } \beta = 1, \\ \text{tem uma infinidade de soluções} & \text{se } \beta = -1, \\ \text{tem exactamente uma solução} & \text{nos outros casos.} \end{cases}$

    b) $x = y = z = 0$ é a unica solução.

12. a) i. $b \neq -1$. ii. $b = -1$ e $a \neq 1$.

    b) $\{(1, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (neste caso $a = 1$ e $b = -1$).

13. a) (i) os planos não se intersetam; (ii) os planos são coincidentes;

    b) (i) r e n são coincidentes; (ii) r e t intersetam-se no ponto $(0, 2, 1)$: (iii) r e l não se intersetam e são enviezadas; (iv) r e m não se intersetam e são estritamente paralelas;

    c) l é concorrente com $\mathcal{P}_2$ no ponto $(0, 2, -1)$;

    d) r está contida em $\mathcal{P}_1$;

    e) t é estritamente paralela a $\mathcal{P}_6$.

14. se $b \neq 0$ e $a \neq 1$, r é concorrente com $\mathcal{P}$ num ponto; se $b = 0$, r é estritamente paralela a $\mathcal{P}$; se $a = b = 1$, r está contida em $\mathcal{P}$; se $a = 1$ e $b \neq 1$, r é estritamente paralela a $\mathcal{P}$.

15. uma equação vetorial da reta r é $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é $y - z = 1$.

16. a) $x - y - z + 1 = 0$;

    b) $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = -1$ e $b = 1$; estritamente paralelos se $a = -1$ e $b \neq 1$; concorrentes se $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$.

17. r e $s_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviezadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.

18. b) $x + y + z = 1$;