Guiões de Cálculo I - Agrupamento 2

Guião 1

Funções reais de variável real

Linguagem da matemática

Revisões sobre funções reais de variável real

Funções trigonométricas inversas

Teoremas sobre funções contínuas e deriváveis

Paula Oliveira

2019/20

Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 1

A linguagem da Matemática

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à linguagem usada em Cálculo e recordar algumas propriedades da Lógica.

O intuito é ajudar o estudante a entender um texto matemático, a saber distinguir definições de teoremas e conseguir elaborar demonstrações simples.

1.1 Definições e Teoremas

A Matemática é constituída por **definições** e **axiomas**, aceites como verdadeiros, como por exemplo, "Um triângulo é um polígono com 3 lados", e por **teoremas**, que têm de ser demonstrados, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e a fórmula resolvente da equação do 2° grau.

Para provar os teoremas usa-se a **dedução**, um raciocínio que tem uma única condição:

não se pode deduzir algo falso a partir de factos verdadeiros.

Um teorema é um facto verdadeiro que pode ser *deduzido* pelas leis da Lógica a partir de definições ou de outros teoremas. É frequente formular um teorema na forma "se P então Q", que se escreve "$P \Rightarrow Q$" (lê-se "P implica Q").

A implicação material é importante, pois é a base do raciocínio matemático:

uma dedução é uma sequência de implicações materiais verdadeiras.

A tabela de verdade da implicação material é a seguinte

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Repare-se que só não é possível deduzir uma proposição Falsa a partir de uma proposição Verdadeira, este é o único caso em que $P \Rightarrow Q$ é Falsa.

Exercício 1.1 Verifique que $P \Rightarrow Q$ e $\sim Q \Rightarrow \sim P$ têm a mesma tabela de verdade.

Observação 1.1. $\sim P$ significa a negação da proposição P, assim, $\sim V = F$ e $\sim F = V$.

A implicação material pode ser definida usando outros conetivos lógicos. Pela sua definição, a implicação material $P \Rightarrow Q$ só é falsa quando P é Verdadeira e Q é Falsa, ou seja, quando $\sim P$ é Falsa e Q é Falsa. Esta é exatamente a propriedade da disjunção de $\sim P$ e Q, logo

$$\boxed{P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim P \vee Q.}$$

Usando as leis de De Morgan pode-se verificar que

$$\boxed{\sim (P \Rightarrow Q) \text{ é equivalente a } P \wedge \sim Q.}$$

Se $A(x)$ e $B(x)$ são condições, a implicação material $A(x) \Rightarrow B(x)$ também o é. No estudo do seu Conjunto Solução (C.S.) usa-se a expressão equivalente $\sim A(x) \vee B(x)$.

Exemplo 1.1. $x^2 > x+2 \Rightarrow x^2 < 3x$ é equivalente a $\sim (x^2 > x+2) \vee x^2 < 3x$, ou seja, $x^2 - x - 2 \leq 0 \vee x^2 - 3x < 0$; então o seu C.S. em $\mathbb{R}$ é $[-1,2] \cup]0,3[= [-1,3[$.

Exercício 1.2 Indique o valor lógico das seguintes proposições:

1. $n \in \mathbb{N} \wedge 2n^2 \geq 3n+5 \Rightarrow 2n < 5$;
2. $x \in \mathbb{R} \wedge x^2+1 < 0 \Rightarrow xe^x = \operatorname{sen} x$.

Observação 1.2. Não é fácil perceber o porquê de $F \Rightarrow V$ e $F \Rightarrow F$ serem verdadeiras! Mas "se uma uma andorinha é um mamífero então um cão é uma ave." ou "se uma uma andorinha é um mamífero então um cão ladra." são proposições verdadeiras...

A proposição "para todo o x, se $x \in \mathbb{N}$ então $x \in \mathbb{Z}$" é equivalente a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (verdadeira) e assim a implicação material tem de ser verdadeira para $x = -1$ $(F \Rightarrow V)$ e para $x = \pi$ $(F \Rightarrow F)$.

Os enunciados de teoremas podem ser escritos sob a forma de implicação $H \Rightarrow T$ em que H e T são ditas, respetivamente, **hipótese** e **tese** do teorema. Supondo que a hipótese é verdadeira, para que a implicação seja verdadeira é necessário que a tese também seja verdadeira.

Um **exemplo** satisfaz a hipótese **e** satisfaz a tese. Um **contra-exemplo** satisfaz a hipótese **mas não** satisfaz a tese.

Uma implicação é **verdadeira** se não admitir contra-exemplos. Como os enunciados dos teoremas são verdadeiros por definição, segue-se que um teorema admite apenas exemplos — não admite contra-exemplos.

Ao contrário, uma implicação é **falsa** se admitir contra-exemplos, ou seja uma implicação que admitir um contra-exemplo **não** é um teorema.

Exemplo 1.2. A implicação "Se mn é par então m e n são pares" não pode ser um teorema:

- a implicação admite exemplos – se $m = 2$ e $n = 4$ então a hipótese é V e a tese V;
- mas admite também contra-exemplos – se $m = 1$ e $n = 2$ a hipótese é V e a tese F.

A **recíproca** de $A \Rightarrow B$ é $B \Rightarrow A$. Mesmo que $A \Rightarrow B$ seja verdadeira, $B \Rightarrow A$ pode não o ser. Por exemplo,

O enunciado "Se m e n são pares então mn é par" é um teorema, contudo, a sua recíproca, "Se mn é par então m e n são pares", não é um teorema.

Existem situações em que $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ são ambas verdadeiras. Nestes casos escreve-se $A \Leftrightarrow B$ (lê-se "A se e só se B" ou "A é equivalente a B").

Exemplo 1.3. "O número mn é par **se e só se** m ou n é par".

Se $A \Leftrightarrow B$ for V, A e B são **equivalentes** pois têm o mesmo valor lógico para toda a concretização das variáveis.

Num teorema $H \Rightarrow T$, é suficiente que a hipótese seja verdadeira para se poder afirmar que a tese é verdadeira; diz-se que H é **condição suficiente** para T.

Exemplo 1.4. "n é par" é condição suficiente para "$2n$ é par".

Observação 1.3. Quando a hipótese for falsa **não** se pode concluir que é falsa a tese!

Note-se que, no exemplo anterior, mesmo que n seja ímpar, $2n$ é par.

No teorema $H \Rightarrow T$, para se garantir que a hipótese é verdadeira é necessário que a tese seja verdadeira; diz-se que T é **condição necessária** para H.

Exemplo 1.5. "m é múltiplo de 2" é condição necessária para "m é múltiplo de 4". Contudo, a condição "m é múltiplo de 2" não é suficiente para "m é múltiplo de 4", já que 6 satisfaz a primeira condição mas não satisfaz a segunda.

Se o enunciado for $H \Leftrightarrow T$, H é **condição necessária e suficiente** para T.

Exemplo 1.6. "n é par" é condição necessária e suficiente para "$3n$ é par".

Para provar que um teorema é verdadeiro é preciso demonstrar que só admite exemplos, ou seja, que não admite contra-exemplos.

Observação 1.4. Mostrar alguns exemplos **não prova nada**! O enunciado "Se n é par então $n+1$ é primo" é verdadeiro para $n = 2, 4, 6$ (três exemplos)... então é um teorema?

Podem fazer-se vários tipos de demonstrações. Vamos aqui referir os mais usados em Cálculo.

Na **demonstração direta** garante-se que **só existem exemplos**.

A partir da hipótese chega-se à tese por deduções sucessivas. Assim, sempre que a hipótese é verdadeira, também o é a tese de cada implicação até ao fim.

Exercício resolvido 1.1. Prove que "se $n \in \mathbb{N}$ é múltiplo de 9 então n é múltiplo de 3".

Resolução: Seja n um número natural arbitrário.

$$\begin{aligned} n \text{ é múltiplo de } 9 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 9k \\ &\Rightarrow n = 3(3k) \\ &\Rightarrow \exists h \in \mathbb{N} : n = 3h \qquad (h = 3k) \\ &\Rightarrow n \text{ é múltiplo de } 3. \end{aligned}$$

Exercício 1.3 Mostre que

1. A soma de dois números ímpares é par.
2. A soma de um número par e de um número ímpar é ímpar.
3. O produto de números ímpares é um número ímpar.

A demonstração indireta de $H \Rightarrow T$ é uma demonstraçao direta de $\sim T \Rightarrow \sim H$.

As duas implicações são equivalentes mas a demonstração direta da segunda garante que se $\sim T$ é V, também $\sim H$ é V, ou seja, se a tese é falsa a hipótese não pode ser verdadeira.

Na demonstração indireta garante-se que **não existem contra-exemplos**.

Exemplo 1.7. Prove, no conjunto dos números naturais, que "se m^2 é ímpar então m é ímpar".
A implicação dada é $H \Rightarrow T$, onde a hipótese é $H =$"m^2 é ímpar" e a tese é $T =$"m é ímpar", que é equivalente a

$\sim T \Rightarrow \sim H$: "se m não é ímpar então m^2 não é ímpar",

ou seja,

"se m é par então m^2 é par"

Seja m um número natural par qualquer.

$$\begin{aligned} m \text{ é par} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = 2k \\ &\Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} : m^2 = 2r \qquad (r = 2k^2) \\ &\Rightarrow m^2 \text{ é par} \end{aligned}$$

Exercício 1.4 Mostre que:

1. Se m é ímpar então m^2 é ímpar .
2. O produto de dois números é par se e só se pelo menos um deles é par.
3. Se uma função é monótona em sentido estrito então é injetiva.

Na *demonstração por redução ao absurdo* garante-se que **os contra-exemplos são contradições**.

Para provar que $H \Rightarrow T$, mostra-se que a sua negação é falsa, ou seja, que

$$\sim (H \Rightarrow T) \Leftrightarrow H \wedge \sim T \text{ é uma contradição}$$

Observação 1.5. Se não houver contra-exemplos $H \wedge \sim T$ é uma condição impossível.

Exemplo 1.8. Prove que "se n^2 é par então n é par".

A hipótese é H: "n^2 é par". A tese afirma que n é par, logo a sua negação é $\sim T$: "n é ímpar". Assume-se portanto que $H \wedge \sim T$, ou seja, n^2 é par $\wedge$ n é ímpar. Então:

- $n^2 + n$ é ímpar, porque é a soma de um número par com um número ímpar;
- $n^2 + n = n(n + 1)$ é par porque é o produto de um número par $(n + 1)$ por outro número.

Então, o número $m = n^2 + n$ é simultaneamente par e ímpar, o que é um *absurdo.*

Exercício 1.5

Demonstre, por redução ao absurdo, que se "n é múltiplo de 6 então n é múltiplo de 3".

Exercício 1.6 Supondo que f é monótona crescente, mostre que $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$.

1.2 Conceitos de Supremo e Ínfimo

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que A é um conjunto ***majorado*** se

$$\exists M \in \mathbb{R} : a \leq M, \ \forall a \in A,$$
(existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M,$ qualquer que seja $a \in A$)

onde M é um **majorante** de A.

Ao menor dos majorantes dá-se a designação de ***supremo*** de A, i.e., $s \in \mathbb{R}$ diz-se o ***supremo*** de A, $\sup A$, se as duas condições são satisfeitas:

- $\forall a \in A, \ a \leq s$ (s é majorante de A);
- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A : \ s - \varepsilon < b$ (s é o menor dos majorantes de A).

Diz-se que A é um conjunto ***minorado*** se

$$\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a, \ \forall a \in A,$$
(existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq m,$ qualquer que seja $a \in A$)

onde m é um **minorante** de A.
Ao maior dos minorantes dá-se a designação de ***ínfimo*** de A, i.e., $i \in \mathbb{R}$ diz-se o ***ínfimo*** de A, $\inf A$, se as duas condições são satisfeitas:

- $\forall a \in A, \ i \leq a$ (i é minorante de A);
- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in A : \ b < i + \varepsilon$ (i é o maior minorante de A).

1.2.1 Axioma do Supremo

Considere-se o conjunto dos números racionais cujo quadrado é menor do que 2:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \right\}.$$

No universo $\mathbb{R}$ o conjunto A tem supremo, $\sup A = \sqrt{2}$, contudo, como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, no universo $\mathbb{Q}$ o conjunto A não tem supremo.

Traduzimos este resultado dizendo que o conjunto dos números reais é **completo** e o conjunto dos números racionais é **incompleto**.

Axioma 1.1. ***Axioma do Supremo:*** Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado (resp. minorado) tem supremo (resp. ínfimo) em $\mathbb{R}$.

Sejam $s = \sup A$ e $i = \inf A$. Se $s \in A$, s diz-se **máximo** de A; se $i \in A$, i diz-se **mínimo** de A.

Exemplo 1.9. Seja $A =]-\sqrt{3}, 4] \cup \{3\pi\}$.

O supremo de A é 3π e como o supremo pertence a A, 3π é máximo do conjunto A.

O ínfimo de A é $-\sqrt{3}$, contudo, como $-\sqrt{3}$ não pertence a A, o conjunto A não tem mínimo.

1.3 Distância no Conjunto dos Números Reais

A ***distância*** entre dois números reais é dada por $d(a,b) = |a-b|$ e satisfaz os seguintes axiomas:

i.	$d(a,b) \geq 0,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$ $(\lvert a-b\rvert \geq 0)$	**ii.**	$d(a,b) = 0$ se e só se $a = b$ $(\lvert a-b\rvert = 0 \Leftrightarrow a = b)$
iii.	$d(a,b) = d(b,a),\ \forall a,b \in \mathbb{R}$ $(\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert)$	**iv.**	$d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(\lvert a-b\rvert \leq \lvert a-c\rvert + \lvert b-c\rvert)$

Observação 1.6. A distância de qualquer ponto a zero é $d(a,0) = |a-0| = |a|$. Então, pelo axioma (iv), obtemos a desigualdade triangular:

$$|a-(-b)| \leq |a-0| + |-b-0| \Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |-b| \Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Observação 1.7. Se $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, dizer que $d(x,a) < \delta$ significa que $x \in]a-\delta, a+\delta[$ ou ainda que $a - \delta < x < a + \delta$.

Assim, o conjunto dos pontos cuja distância a 3 é inferior a 2, $d(x,3) < 2$, é

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x-3 < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -2+3 < x < 2+3\} =]1,5[.$$

1.3.1 Aproximação de Números Reais

Definição 1.1. *Sejam z um número real e δ um número real positivo ($\delta > 0$). Diz-se que o número real y é uma* ***aproximação*** *de z com erro inferior a δ se a distância entre z e y é inferior a δ,*

$$d(z,y) \ = \ |z-y| \ < \ \delta$$

Exemplo 1.10. 1. Seja $z = \sqrt{2} = 1.414213562\ldots$.

- 1.4 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro inferior a 0.1: $|\sqrt{2} - 1.4| \ < \ 0.1$
- 1.414 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro inferior a 10^{-3}: $|\sqrt{2} - 1.414| \ < \ 0.001$

1.414 é uma *melhor aproximação* de $\sqrt{2}$ do que 1.4!

2. O intervalo de números reais $]2.998, 3.002[$ pode ser representado na forma $|x-3| < 0.002$.

Exercício resolvido 1.2. Determine um número real r tal que,

"Se a distância de x a 2 é menor do que r e a distância de y a 6 é menor do que r, então a distância de $x+y$ a 8 é menor do que 0.1."

Traduzindo o problema em linguagem matemática temos:

$$\left.\begin{array}{l} |x-2| < r \\ \\ |y-6| < r \end{array}\right\} \Longrightarrow |(x+y)-8| < 0.1$$

Como $|(x+y)-8| = |(x-2)+(y-6)| \leq |x-2| + |y-6| < r + r = 2r$, **basta que** $2r = 0.1$, ou seja, $r = 0.05$ (naturalmente que se r for superior a este valor a desigualdade mantém-se válida).

1.3.2 Vizinhança

Uma ***vizinhança de um ponto*** $a \in \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, contendo o ponto a. Usualmente denota-se por $\mathcal{V}(a)$.

No âmbito desta disciplina vamos considerar apenas **vizinhanças centradas no ponto** a, isto é, intervalos do tipo $]a-\delta, a+\delta[$, com $\delta > 0$.

Definimos ainda:

- ***vizinhança esquerda*** de a, que se denota por $\mathcal{V}(a^-)$, como sendo um intervalo $]a-\delta, a[$, com $\delta > 0$.
- ***vizinhança direita*** de a, que se denota por $\mathcal{V}(a^+)$, como sendo um intervalo $]a, a+\delta[$, com $\delta > 0$.

É usual dizer que o raio da vizinhança $]a-\delta, a+\delta[$ é δ ou que se trata de uma vizinhança de raio δ de a. Se for necessário especificar o raio da vizinhança usam-se as notações $\mathcal{V}_\delta(a)$, $\mathcal{V}_\delta(a^-)$ e $\mathcal{V}_\delta(a^+)$.

Exemplo 1.11.
- $\mathcal{V}(2) =]0,4[=]2-2, 2+2[$, sendo $\delta = 2$;
- $\mathcal{V}(2) =]1.99, 2.01[=]2-0.01, 2+0.01[$, sendo $\delta = 0.01$;
- $\mathcal{V}(0^-) =]-0.001, 0[$, sendo $\delta = 0.001$;
- $\mathcal{V}(100^+) =]100, 100.05[$, sendo $\delta = 0.05$.

1.4 A reta "acabada"

Se adicionarmos ao conjunto dos números reais os elementos $+\infty$ e $-\infty$ obtemos um novo conjunto, designado por ***reta acabada***, $\widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

A noção de ordem estende-se naturalmente a este conjunto definindo

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podemos, parcialmente, estender a aritmética de $\mathbb{R}$ a $\widetilde{\mathbb{R}}$. Se $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, então:

$$a + \infty = +\infty \quad \text{se } a \neq -\infty, \qquad a - \infty = -\infty \quad \text{se } a \neq +\infty$$

$$a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad a < 0 \end{cases} \qquad a \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad a > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ ND & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ ND & \text{se} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

Note-se que as expressões $+\infty - \infty$, $1^{\pm\infty}$ e $0 \times (\pm\infty)$ não estão definidas e portanto não têm qualquer significado (dizem-se indeterminações).

Vizinhanças de ∞:

- O conjunto $]b, +\infty[$, com $b \in \mathbb{R}$ é uma vizinhança esquerda de $+\infty$;
- O conjunto $]-\infty, b[$ com $b \in \mathbb{R}$é uma vizinhança direita de $-\infty$.

1.5 Topologia da reta $\mathbb{R}$

Nesta secção vamos referir algumas noções que no 2º semestre serão definidas em $\mathbb{R}^n$.

Complementar - O *complementar* de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}\backslash A$, é o conjunto de todos os elementos que estão em $\mathbb{R}$ e não estão em A.

Interior - $a \in A$ diz-se *ponto interior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a, contida em A, $\mathcal{V}(a) \subseteq A$, isto é, $a \in A$ é ponto interior a A se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a-\delta, a+\delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior de* A é o conjunto de todos os pontos interiores de A e denota-se por $\mathrm{Int}(A)$.

Exterior - $a \in \mathbb{R}\backslash A$ diz-se *ponto exterior* a $A \subseteq \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a contida no complementar de A, $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, isto é,

$$\exists \delta > 0 :]a-\delta, a+\delta[\subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto exterior de A se e só se é ponto interior de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

O *exterior* de A é o conjunto de todos os pontos exteriores de A e denota-se por $\mathrm{Ext}(A)$.

Fronteira - Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a interseta A e interseta o complementar de A ($\mathbb{R}\backslash A$), isto é,

$$\forall \delta > 0,]a-\delta, a+\delta[\cap A \neq \emptyset \wedge]a-\delta, a+\delta[\cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto fronteira de A se e só se é ponto fronteira de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

A *fronteira* de A é o conjunto de todos os pontos fronteira de A e denota-se por $\mathrm{Frt}(A)$.

Fecho (ou aderência) - O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de $A \subseteq \mathbb{R}$ designa-se por *fecho ou aderência de* A e denota-se por $\overline{A}$, $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Frt}(A)$. Os pontos de $\overline{A}$ designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

Exemplo 1.12. Seja $A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup[\pi, 5[$.

- -1 e 0 não são pontos interiores a A nem a $\mathbb{R}\backslash A$;
- $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0.5 e 4 são pontos interiores a A;
- $\mathrm{Int}(A) \ =]-1, 0[\ \cup\ ]0, 1[\ \cup\ ]\pi, 5[$;
- $\mathbb{R}\backslash A \ =]-\infty, -1[\ \cup \{0\} \ \cup\ [1, \pi[\ \cup [5, +\infty[$;
- $\mathrm{Ext}(A) \ = \ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \pi[\ \cup\ ]5, +\infty[$;
- $\mathrm{Frt}(A) \ = \ \{-1, 0, 1, \pi, 5\}$;
- $\overline{A} \ = \ [-1, 1] \cup [\pi, 5]$.

Exercício 1.7 Seja $A =]-\infty, 1] \ \cup \ \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

- O interior de A;
- O complementar de A;
- O exterior de A;
- A fronteira de A;
- O fecho de A.

1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado

Aberto - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *aberto* em $\mathbb{R}$ se $A = \operatorname{Int}(A)$.

Fechado - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *fechado* em $\mathbb{R}$ se o seu complementar é aberto, isto é, se $\mathbb{R} \setminus A = \operatorname{Ext}(A)$.

Exemplo 1.13. São conjuntos abertos os conjuntos $]-1,4[\,;\ ]2,3[\cup]3,5[\,;\ ]2,+\infty[\,;\ \mathbb{R}\,;\ \emptyset$.

São conjuntos fechados os conjuntos $[-1,4]\,;\ ]-\infty,3]\,;\ [2,3] \cup [4,+\infty[\,;\ \mathbb{R}\,;\ \emptyset$.

Os conjuntos $[-1,3[$ e $]4,7]$ não são abertos nem fechados.

Observação 1.8. $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos abertos **e** fechados.

Proposição 1.1. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$ se e só se coincide com o seu fecho, i.e., $A = \overline{A}$. Equivalentemente, um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se e só se contém a sua fronteira, i.e., $A \supseteq \operatorname{Frt}(A)$.*

Exemplo 1.14. Seja $A = [2,8] \cup \{0,1,9\}$.

- $\operatorname{Int}(A) =]2,8[$
- $\operatorname{Frt}(A) = \{0,1,2,8,9\}$
- $\overline{A} = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Frt}(A) = A$

Logo, A é um conjunto fechado.

1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se ***ponto de acumulação*** de A se toda a vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, interseta $A \setminus \{a\}$:

$$\forall \mathcal{V}(a), \mathcal{V}(a) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

$$a \in \mathbb{R} \text{ é } \textit{ponto de acumulação} \text{ de } A \text{ se e só se } \forall \delta > 0,\ ]a-\delta, a+\delta[\, \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se ***derivado* de** A e denota-se por A'.

Um ponto $a \in A$ diz-se ***ponto isolado de*** A se existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, que interseta A apenas no ponto a:

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

Usando de novo as vizinhanças centradas no ponto, podemos dizer que

$$a \in A \text{ é um } \textit{ponto isolado} \text{ de } A \text{ se e só se } \exists \delta > 0 :]a-\delta, a+\delta[\, \cap A = \{a\}.$$

Observe que $A' \cap \{\text{pontos isolados de } A\} = \emptyset$ e que $A' \cup \{\text{pontos isolados de } A\} = \overline{A}$.

Exemplo 1.15. Seja $A =]-\sqrt{7},3] \cup \{\pi\}$. Então o derivado de A é $A' = [-\sqrt{7},3]$ e π é o único ponto isolado de A. o fecho de A é o conjunto $[-\sqrt{7},3] \cup \{\pi\}$.

Observação 1.9. Em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o ponto $+\infty$ (resp. $-\infty$) pode ser considerado ponto de acumulação e de aderência de todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ superiormente (resp. inferiormente) ilimitado.

Por exemplo, se $A = [3,+\infty[$ podemos dizer que, em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $a = +\infty$ é um ponto de acumulação e um ponto de aderência de A.

Proposição 1.2. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$, verificam-se as seguintes propriedades:*

1. $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$;
2. $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Frt}(A) \; = \; \mathrm{Ext}(A) \cap \mathrm{Frt}(A) \; = \; \emptyset$;
3. $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Frt}(A) \cup \mathrm{Ext}(A) \; = \; \mathbb{R}$;
4. $\overline{\mathrm{Int}(A)} \; \subseteq \; A'$;
5. $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Ext}(A) \; = \; \emptyset$;
6. $\overline{A} \; = \; A \cup \mathrm{Frt}(A)$;
7. $\mathrm{Ext}(A) \; = \; \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$;
8. *O limite de uma sucessão convergente é um ponto de aderência do conjunto dos seus termos, i.e.,*

$$\textit{Se } l = \lim_{n \to +\infty} u_n \textit{ então } l \in \overline{\{u_n : n \in \mathbb{N}\}}$$

Exemplo 1.16. As propriedades da proposição 1.2 aplicadas aos conjuntos

1. $A = [2, 3[$:
   - $\mathrm{Int}(A) =]2, 3[\subseteq A$
   - $\mathrm{Frt}(A) = \{2, 3\}$
   - $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$
   - $\mathrm{Ext}(A) =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[= \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$
   - $\overline{\mathrm{Int}(A)} = [2, 3]$
   - $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Frt}(A) =]2, 3[\cup \{2, 3\} = [2, 3]$
   - $A' = [2, 3]$

     3 é ponto de acumulação de A porque qualquer vizinhança de 3 interseta A.

     $$\forall \delta > 0,]3 - \delta, 3 + \delta[\cap A \neq \emptyset.$$

     Repare que como $3 \notin A$ não é necessário escrever interseta $A \setminus \{3\}$.
   - Todos os pontos de A são pontos de acumulação de A.
   - A não tem pontos isolados.

2. e $B = \left\{ x_n = 5 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$:
   - $\mathrm{Int}(B) = \emptyset \subseteq B$
   - $\mathrm{Frt}(B) = B \cup \{5\}$

     Note-se que 5 é o limite da sucessão $(x_n)_n$.
   - $\mathbb{R} \setminus B =]-\infty, 5] \cup \left\{ \left] 5 + \dfrac{1}{n+1}, 5 + \dfrac{1}{n} \right[: n \in \mathbb{N} \right\} \cup]6, +\infty[$
   - $\mathrm{Ext}(B) = \mathbb{R} \setminus (B \cup \{5\}) = \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus B)$
   - $\overline{\mathrm{Int}(B)} = \emptyset$
   - $\overline{B} = \mathrm{Int}(B) \cup \mathrm{Frt}(B) = B \cup \{5\}$

- $B' = \{5\}$
  5 é ponto de acumulação de B porque qualquer vizinhança de 5 contém pontos de B:
  $$\forall \epsilon > 0, \exists x_n \in B : x_n \in]5-\epsilon, 5+\epsilon[$$
  As condições $x_n \in]5-\epsilon, 5+\epsilon[$ e $|x_n - 5| < \epsilon$ são equivalentes. Assim,
  $$|x_n - 5| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$
  e se, por exemplo, $n = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$[1], $x_n \in B \cap]5-\epsilon, 5+\epsilon[$;
- Todos os pontos de B são pontos isolados, porque encontramos sempre uma vizinhança de cada um deles que só interseta o conjunto B no próprio ponto.
  Observe-se que para cada $x_n \in B$, o ponto de B mais próximo de x_n é x_{n+1} e
  $$d(x_n, x_{n+1}) = |x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{n(n+1)}.$$
  Assim, se considerarmos $\delta = \frac{1}{2n(n+1)}$, o único ponto de B que está em $]x_n - \delta, x_n + \delta[$ é o próprio x_n:
  $$]x_n - \delta, x_n + \delta[\cap B = \{x_n\}.$$

1.6 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 1.2

1. Falso;
2. Verdadeiro.

Exercício 1.7

- $\text{Int}(A) =]-\infty, 1[\cup]10, 35[$;
- $\mathbb{R} \setminus A =]1, 3[\cup]3, 10] \cup]35, +\infty[$;
- $\text{Ext}(A) =]1, 3[\cup]3, 10[\cup]35, +\infty[$;
- $\text{Frt}(A) = \{1, 3, 10, 35\}$;
- $\overline{A} =]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [10, 35]$.

[1] $\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ lê-se característica de $\frac{1}{\epsilon}$ e é o maior inteiro que não excede $\frac{1}{\epsilon}$.

Capítulo 2

Funções reais de variável real: recordar

Este capítulo é uma breve revisão do que foi estudado sobre este tema no ensino secundário e que é suposto os estudantes recordarem para ser usado na unidade curricular Cálculo I. Este capítulo pode ser complementado com materiais disponíveis na wiki Matemática Elementar.

2.1 Conceito de função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \to B$ é uma correspondência que _a cada_ elemento $x \in A$ associa _um único_ elemento $f(x) \in B$. Isto escreve-se

$$f: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \text{e, em notação lógica,} \quad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

O quantificador $\exists^1$ significa "existe um e um só" ou "existe um único".

Chama-se **domínio** de f ao conjunto A, **conjunto de chegada** ao conjunto B e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de f ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

O domínio de f denota-se por D_f e o seu contradomínio por $CD_f = f(D_f)$.

A função f é **real de variável real** se tem conjunto de chegada $\mathbb{R}$ e o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é, $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

$$f: \begin{array}{ccc} D_f \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

É preciso distinguir entre o domínio de uma função e o domínio da sua expressão (ou seja, o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde esta tem significado). Uma função definida só por uma expressão tem o domínio da expressão.

Funções que diferem apenas no domínio **são diferentes!**

Exemplo 2.1. A função $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ **não está definida** para valores negativos apesar destes fazerem parte do domínio da expressão x^2.

Observe-se que g é a restrição de f ao conjunto $\mathbb{R}_0^+$. A restrição denota-se da seguinte forma $g = f|_{\mathbb{R}_0^+}$.

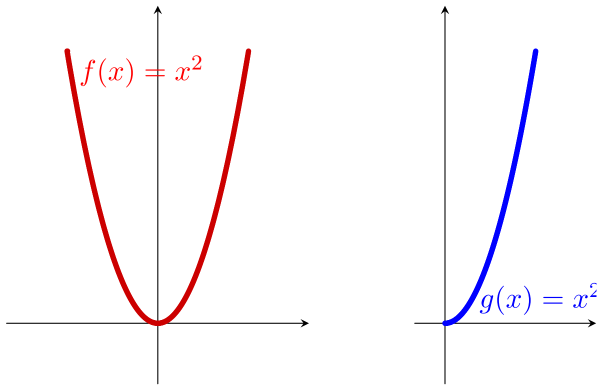


Figura 2.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2$ com domínio $D_f = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ com domínio $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

Exemplo 2.2. O domínio da função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \\ \sqrt{x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é o conjunto

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \neq 0 \wedge x \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0 \wedge x < 0\} = [-1, 0[\cup [0, +\infty[\setminus \{1\} = [-1, +\infty[\setminus \{1\}$$

Chama-se **gráfico** da função f ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$Gr_f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in D_f \big\}$$

Os gráficos, sendo conjuntos de pontos no plano, permitem representar *graficamente* uma função. Nem sempre as curvas no plano são funções. Explique porque é que uma circunferência não pode ser o gráfico de uma função.

2.2 Função composta

Dadas duas funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se o contradomínio de f for um subconjunto do domínio de g ($CD_f \subseteq D_g$) pode definir-se a **função composta** $g \circ f$:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemplo 2.3. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Vamos determinar as funções $g \circ f$ e $f \circ g$ (ou seja, os domínios **e** as respetivas expressões analíticas).
Como $D_f = \mathbb{R}_0^+$ e $D_g = \mathbb{R}$ (e $CD_f = CD_g = \mathbb{R}_0^+$ — verifique!), tem-se que

$$\begin{array}{ll} (g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \text{ com o domínio} & D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+ \\ (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|, \text{ com o domínio} & D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge g(x) \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{R} \end{array}$$

Se h for uma função real de variável real definida pela composição de duas funções, ou seja, se

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

então o domínio da função composta, h, é definido por: $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$.

Exemplo 2.4. Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

O domínio de f será o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão analítica tem significado. Note-se que $f = g \circ h$ com $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \dfrac{4-x}{x^2-2x}$. Assim,

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0 \wedge \frac{4-x}{x^2-2x} \geq 0\right\} =]-\infty, 0[\cup]2, 4] \end{aligned}$$

pois $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\}$ e $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

Exercício 2.1 Considere a função definida por $h(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$:

1. Sendo $h = g \circ f$, com $g(x) = \ln x$ e $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, determine D_h.
2. Seja $i(x) = \ln(x + 1)$. encontre j de forma a que $h = i \circ j$ e verifique que $D_{i \circ j} = D_h$.

Exercício 2.2 Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 5 + \sqrt{1-x}$

1. Determine os domínios de f e g, D_f e D_g, e o contradomínio de g, $CD_g = g(D_g)$.
2. Qual é o domínio da função $f + g$? E de $\dfrac{f}{g}$?

2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas

Definição 2.1. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **injetiva** se*

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função f é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 2.2. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **sobrejetiva** se*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real f é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

Exercício 2.3 Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

2.4 Funções monótonas

Definição 2.3. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***monótona crescente*** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

e é ***monótona decrescente*** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Definição 2.4. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***monótona estritamente crescente*** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

e é ***monótona estritamente decrescente*** *se*

$$\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Exercício 2.4 Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Mostre, usando a negação da definição, que f não é monótona decrescente no seu domínio.

Observe, contudo, que a função é monótona decrescente em $\mathbb{R}^-$ e monótona decrescente em $\mathbb{R}^+$.

2.5 A função inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por f^{-1} a função (dita **inversa** de f) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

f é invertível (com inversa g) se e só se existe $g : CD_f \to \mathbb{R} : \forall x \in D_f$, $(g \circ f)(x) = x$.

Observação 2.1. O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.

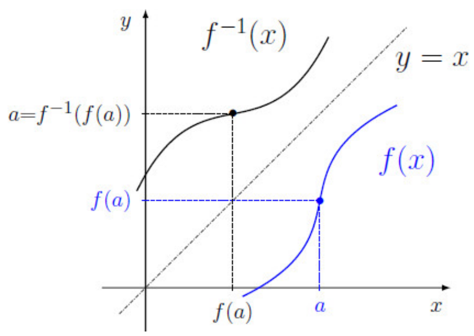


Figura 2.2: Função inversa

Nunca confundir a função inversa com a potência de f de expoente -1

$$f^{-1}(x) \neq \big(f(x)\big)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

Observação 2.2. Repare-se que se f invertível e a sua inversa é f^{-1}, então f é a inversa de f^{-1} e portanto $(f \circ f^{-1})(y) = y$, $\forall y \in CD_f = D_{f^{-1}}$.

Porém, pode haver funções f e $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(y) = y$, $\forall y \in CD_f$, **sem que f seja invertível**!

Exercício 2.5 Prove que a função definida por $f(x) = x^2$ não é invertível. Verifique que se $g(x) = \sqrt{x}$, então $f(g(y)) = y$, $\forall y \in CD_f$.

Porém, g não é f^{-1} nem f é g^{-1}. Porquê?

Teorema 2.1. *Se f é estritamente monótona então f é injetiva (e invertível).*

A recíproca é verdadeira?

Teorema 2.2. *A função f é estritamente crescente [resp. decrescente] em D_f se e só se a função f^{-1} é estritamente crescente [resp. decrescente] em CD_f.*

Exercício 2.6 Verifique que $f(x) = x^2$ com $D_f = \mathbb{R}_0^-$ é invertível e determine a sua inversa.

Teorema 2.3. *Sejam f e g duas funções invertíveis. No seu domínio, a função composta $f \circ g$ também é invertível e a sua inversa é $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Exercício 2.7 Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.

2.6 Funções pares e ímpares

Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um **conjunto simétrico** em relação à origem, isto é, se $x \in D$ o seu simétrico, $-x$, também está em D:

$$\forall x \in D, \ -x \in D$$

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se

- **par** se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.
- **ímpar** se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

As funções pares têm gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas. As funções ímpares têm gráficos simétricos em relação à origem do referencial.

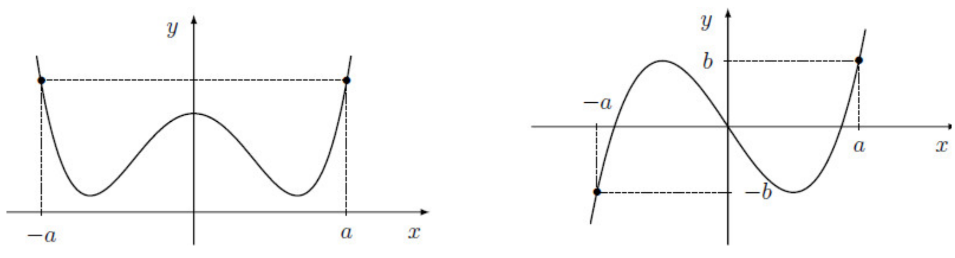


Figura 2.3: Função par e função ímpar.

Exemplo 2.5. Considerem-se as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^4 - 3x^2$, $g(x) = -2x^3 + 4x$ e $h(x) = 2x^2 - 3x$.

f é uma função par; g é uma função ímpar e h não é par nem ímpar.

2.7 Função limitada

Definição 2.5. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se* ***limitada*** *se*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\ |f(x)| \leq M.$$

Pode traduzir-se a definição de função limitada de forma equivalente por:

$$\exists A, B \in \mathbb{R} : A \leq f(x) \leq B,\ \forall x \in D_f.$$

Em linguagem corrente poderemos dizer que o gráfico de uma função limitada está contido entre duas retas paralelas ao eixo das abcissas.

Exemplo 2.6. A função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{3}{x^2+4}$ é uma função limitada. Basta observar que $x^2 + 4 \geq 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e portanto,

$$0 < \frac{3}{x^2+4} \leq \frac{3}{4}.$$

Contudo, a função $g(x) = \frac{3}{x+4}$, com $x \neq -4$ não é limitada. Qualquer que seja o número real positivo L, existe $x \in D_g$ tal que $g(x) > L$, basta escolher x tal que $-4 < x < \dfrac{3}{L} - 4$.

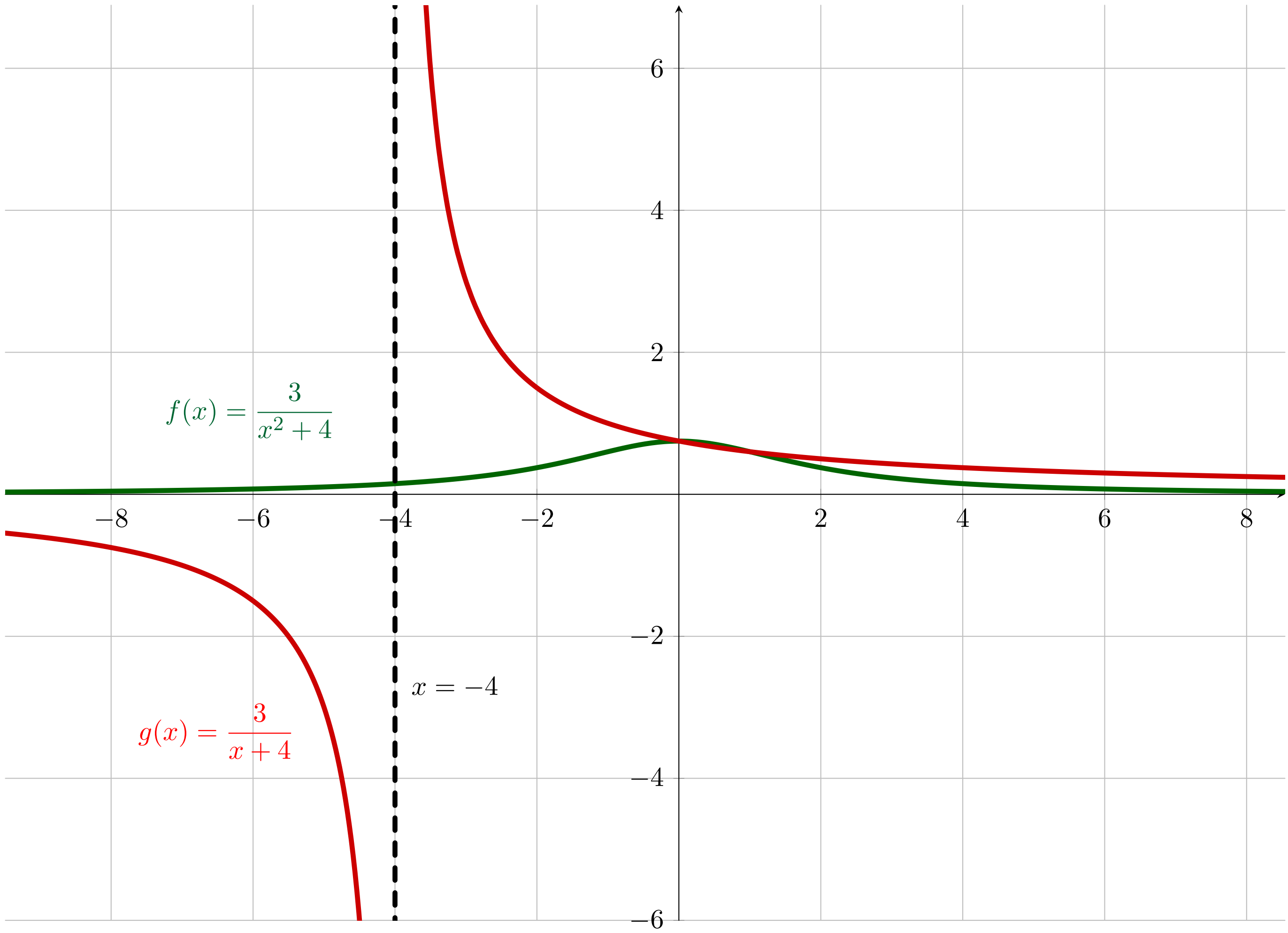


Figura 2.4: Gráficos das funções f e g.

O gráfico da função f situa-se entre as retas $y = 0$ e $y = \dfrac{3}{4}$, mas o gráfico da função g não é limitado.

Exercício 2.8 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Mostre que f não é limitada.

2.8 As funções exponencial e logarítmica

As funções exponencial, $\exp_a$, e logarítmica, $\log_a$, de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ são a inversa uma da outra.

$$\begin{array}{rcccl} \exp_a & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = \exp_a x = a^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \log_a & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = \log_a x \end{array}$$

- $D_{\exp} = \mathbb{R} = CD_{\log}$ e $D_{\log} = \mathbb{R}^+ = CD_{\exp}$
- São estritamente monótonas
  crescentes se $a > 1$ e decrescentes se $0 < a < 1$
- Pelas propriedades da inversa,
  $\log_a a^x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $a^{\log_a x} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Assim, usando as propriedades do logaritmo, obtém-se a importante fórmula (base $a = e$)

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^y = e^{y \ln x}.$$

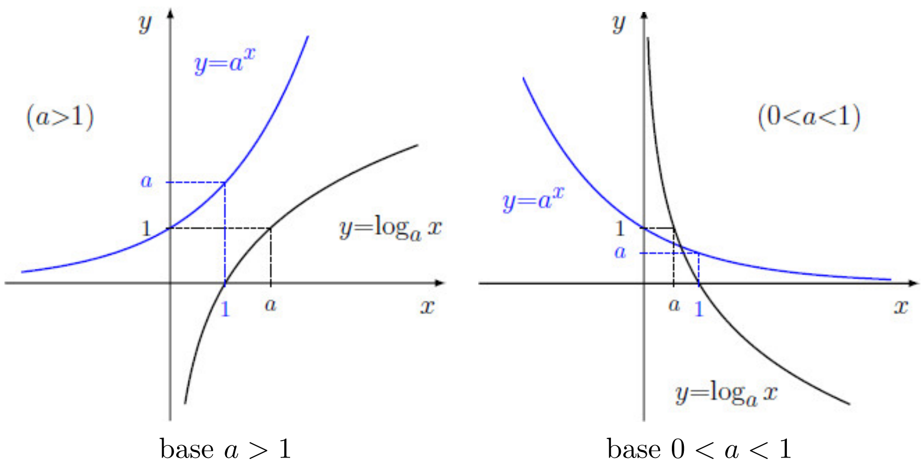


Figura 2.5: Função exponencial e função logarítmica.

2.9 Limites de funções reais de variável real

Nesta secção recorda-se a noção de limite e algumas propriedades dos limites de funções reais de variável real.

Para efeitos de limite vamos considerar a reta acabada $\widetilde{\mathbb{R}}$ (isto é, consideraremos os casos em que a e l poderão assumir os valores $\pm\infty$) e se D for ilimitado superiormente (resp. inferiormente), $+\infty$ (resp. $-\infty$) é um ponto de acumulação de D.

2.9.1 Definição sequencial de limite

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ um ponto de acumulação de D e $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Diz-se que f tem limite l quando x tende para a em D,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

se para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de D, distintos de a, que tende para a,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a,$$

a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende para l,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Em linguagem simbólica temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n, x_n \in D \setminus \{a\} : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to l.$$

Recordemos que o limite, quando existe, é **único**.

Exemplo 2.7. Seja $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ com $D_f = \mathbb{R}$, e considere-se a sucessão $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

$$x_n \in D_f \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} x_n = 1 \text{ e } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \tfrac{1}{3}.$$

Considerando apenas esta sucessão poderemos concluir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{3}$?

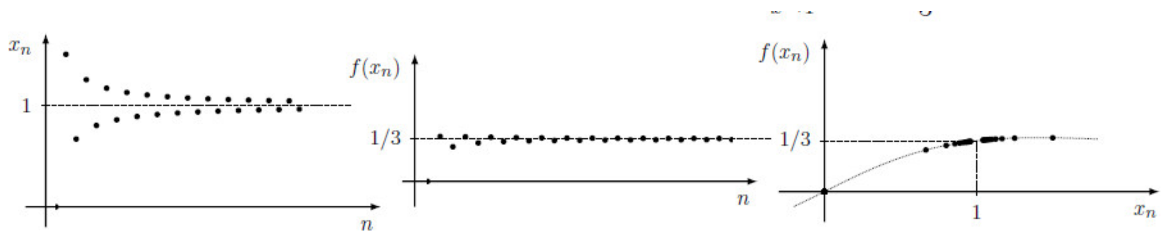


Figura 2.6: A noção de limite.

Considere a sucessão definida por $u_n = 1 - \dfrac{20}{n}$ e calcule os primeiros 30 termos da sucessão $(f(u_n))_n$.
Ainda acha que o limite de $f(x)$ quando x tende para 1 é $\dfrac{1}{3}$?
Deveremos ter cuidado com as conclusões, quando consideramos apenas uma sucessão! Para garantir que o limite é $\dfrac{1}{3}$, devemos considerar **qualquer** sucessão:

$$\forall (x_n)_n,\ x_n \in D_f \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \to 1 \ \Rightarrow\ f(x_n) = \frac{x_n}{x_n^2+2} \to \frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2.8. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \\ 1 - x & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Se considerarmos as sucessões de termo geral $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, ambas convergentes para 1, temos que

$$f(x_n) = 1 + x_n = 1 + 1 + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \text{ e } f(y_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

A sucessão $(f(x_n))_n$ converge para 2 e a sucessão $(f(y_n))_n$ converge para 0. O que nos permite concluir que não existe limite de $f(x)$ quando x tende para 1.

2.9.2 Limite usando vizinhanças

Podemos definir o limite em termos de vizinhanças:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall \mathcal{V}(l),\ \exists \mathcal{V}(a):\ f(D\cap \mathcal{V}(a)\setminus\{a\}) \subseteq \mathcal{V}(l),$$

ou seja, para cada vizinhança $\mathcal{V}(l)$ de $l\in\widetilde{\mathbb{R}}$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de $a\in\widetilde{\mathbb{R}}$ tal que $f(x)\in\mathcal{V}(l)$, para todo o $x\in\mathcal{V}(a)\cap D$, distinto de a.

Exemplo 2.9. Voltando à função do exemplo 2.7, $f : D_f \subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$:

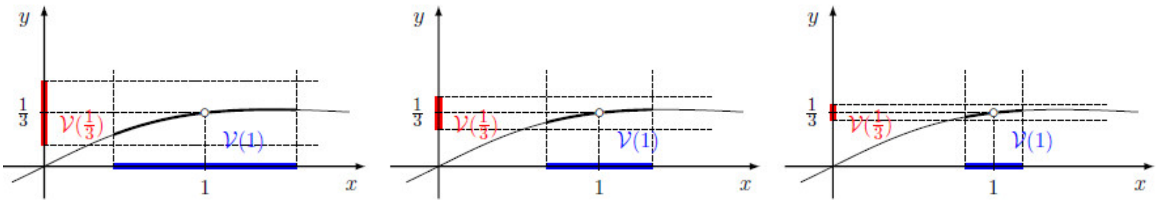


Figura 2.7: A noção de limite-2.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{3}$ porque para cada vizinhança de $\dfrac{1}{3}$, $\mathcal{V}(\frac{1}{3})$, existe uma vizinhança de 1, $\mathcal{V}(1)$, tal que, $f(\mathcal{V}(1)) \subseteq \mathcal{V}(\dfrac{1}{3})$, ou seja,

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0:\ \forall x\in D,\ 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{3}\right| < \epsilon.$$

em que $\mathcal{V}(\frac{1}{3}) = \left]\frac{1}{3}-\epsilon, \frac{1}{3}+\epsilon\right[$ e $\mathcal{V}(1) =]1-\delta, 1+\delta[$.

Exemplo 2.10. Considerem-se as funções g e f.

$$g(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{se } x>0 \\ x & \text{se } x<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{se } x\neq 1 \\ 0 & \text{se } x=1 \end{cases}$$

O domínio de g é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, mas existe $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe mas é diferente de $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

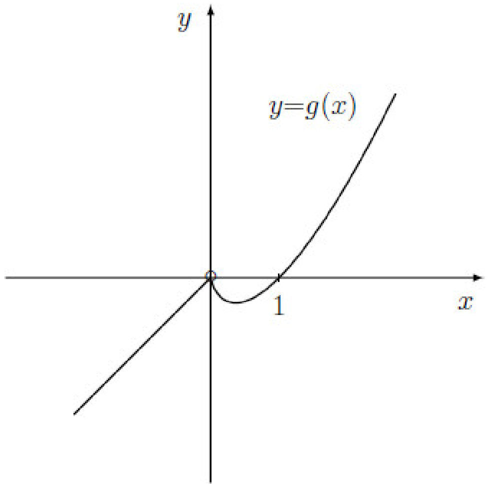


Figura 2.8: Gráfico da função g.

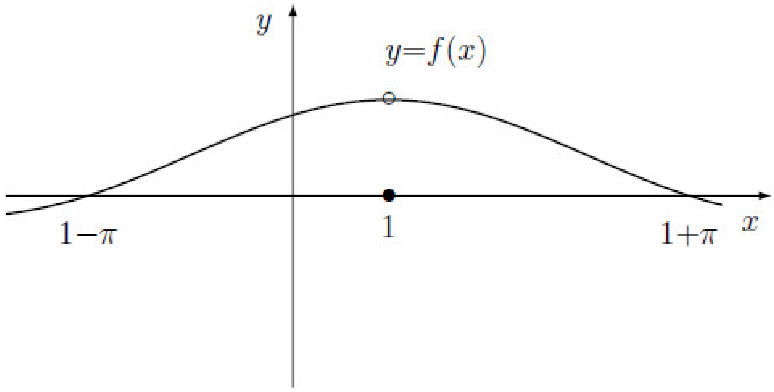


Figura 2.9: Gráfico da função f.

2.9.3 Limites infinitos e limites "no infinito"

A definição de limite dada aplica-se quer no caso de $a = \pm\infty$, quer no caso de $l = \pm\infty$, considerando vizinhanças esquerdas de $+\infty$ ou vizinhanças direitas de $-\infty$.

Se $a \in \mathbb{R}$,	$\mathcal{V}(a) =]a-\delta, a+\delta[$	Se $l \in \mathbb{R}$,	$\mathcal{V}(l) =]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$
Se $a = +\infty$,	$\mathcal{V}(a^-) =]\delta, +\infty[$	Se $l = +\infty$,	$\mathcal{V}(l^-) =]\epsilon, +\infty[$
Se $a = -\infty$,	$\mathcal{V}(a^+) =]-\infty, \delta[$	Se $l = -\infty$,	$\mathcal{V}(l^+) =]-\infty, \epsilon[$

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ um ponto de acumulação de D e $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Em linguagem simbólica o $\lim_{x\to a} f(x) = l$ escreve-se

Se $l, a \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

e basta notar que $\mathcal{V}(l) =]l-\epsilon, l+\epsilon[$ e $\mathcal{V}(a) =]a-\delta, a+\delta[$

Se $l \in \mathbb{R}$ **e** $a = +\infty$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in D,\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

e basta notar que $\mathcal{V}(l) =]l-\epsilon, l+\epsilon[$ e $\mathcal{V}(a^-) =]\delta, +\infty[$

Se $l = +\infty$ **e** $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

e basta notar que $\mathcal{V}(l^-) =]\epsilon, +\infty[$ e $\mathcal{V}(a) =]a-\delta, a+\delta[$

Se $l = +\infty$ **e** $a = +\infty$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in D,\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

e basta notar que $\mathcal{V}(l^-) =]\epsilon, +\infty[$ e $\mathcal{V}(a^-) =]\delta, +\infty[$

Se $l = -\infty$ **e** $a = +\infty$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall x \in D,\ x > \delta \Rightarrow -f(x) > \epsilon.$$

e basta notar que $\mathcal{V}(l^+) =]-\infty, \epsilon[$ e $\mathcal{V}(a^-) =]\delta, +\infty[$

Exemplo 2.11. Usemos a definição para mostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : -x > \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : -x > \delta \Rightarrow -\frac{1}{x} < \epsilon.$$

Observe-se que se $-x > \frac{1}{\epsilon}$ então $-\frac{1}{x} < \epsilon$. Assim,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{\epsilon} > 0 : -x > \delta \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{x} - 0\right|}_{=-\frac{1}{x}} < \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{\epsilon} > 0 : -x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \epsilon.$$

2.9.4 Limites laterais

Diz-se que f tem limite l quando x tende para a, por valores à direita de a em D

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

se, para cada vizinhança $\mathcal{V}(l)$ de l em $\widetilde{\mathbb{R}}$, existe uma vizinhança direita $\mathcal{V}(a^+)$ de a em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) \in \mathcal{V}(l)$, para todo o $x \in \mathcal{V}(a^+) \cap D$, ou seja,

$$\begin{array}{lll}
\text{Se} & l \in \mathbb{R}, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a, a+\delta[\cap D \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \\
\text{Se} & l = +\infty, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a, a+\delta[\cap D \Rightarrow f(x) > \epsilon \\
\text{Se} & l = -\infty, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a, a+\delta[\cap D \Rightarrow -f(x) > \epsilon
\end{array}$$

Diz-se que f tem limite l quando x tende para a, por valores à esquerda de a em D

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

se, para cada vizinhança $\mathcal{V}(l)$ de l em $\widetilde{\mathbb{R}}$, existe uma vizinhança esquerda $\mathcal{V}(a^-)$ de a em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) \in \mathcal{V}(l)$, para todo o $x \in \mathcal{V}(a^-) \cap D$, ou seja,

$$\begin{array}{lll}
\text{Se} & l \in \mathbb{R}, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a-\delta, a[\cap D \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \\
\text{Se} & l = +\infty, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a-\delta, a[\cap D \Rightarrow f(x) > \epsilon \\
\text{Se} & l = -\infty, & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in]a-\delta, a[\cap D \Rightarrow -f(x) > \epsilon
\end{array}$$

2.9.5 Propriedades dos limites

Unicidade do limite Se existe em $\widetilde{\mathbb{R}}$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ então esse limite é único. Porquê?

Limite e limites laterais Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \text{ se e só se } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l.$$

a menos que f esteja apenas definida à direita de a ou à esquerda de a.

Se f está definida apenas à direita de a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

e se f está definida apenas à esquerda de a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Todas as propriedades enunciadas para limites também são válidas para os limites laterais.

2.9.5.1 Infinitésimos e infinitamente grandes

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, f diz-se um ***infinitésimo*** com a.
- Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, f diz-se um ***infinitamente grande*** com a.

Teorema 2.4. *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D.*

- *Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, com $f(x) \neq 0$ numa vizinhança de a, então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.*
- *Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.*

Estes resultados costumam traduzir-se dizendo que o inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande e que o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo.

2.9.5.2 Propriedades Aritméticas dos Limites

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$, com $l, m \in \widetilde{\mathbb{R}}$, então:

- $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$;
- $\lim_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = l\, m$;
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ se $m \neq 0$.

Observação 2.3.

- Não estão definidas as operações do tipo $\pm\infty \times 0$; $+\infty - \infty$ (indeterminações).
- O quociente $\dfrac{l}{m}$ pode ser encarado como um produto: $l \times \dfrac{1}{m}$.

  Assim, as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$, podem ser consideradas como $0 \times \infty$ (ou vice-versa).
- Se $\sqrt[n]{f(x)}, \forall x \in D_f$ e $\sqrt[n]{l}$ existem em $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = l$ então $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} =$? E se $l = +\infty$?

Alguns dos **limites notáveis** que deveremos ter presentes são os seguintes:

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$, $p \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^p} = 0$, $p \in \mathbb{R}^+$
- $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x = 0$, $p \in \mathbb{R}^+$.

2.9.6 Teoremas sobre Limites

Teorema 2.5. ***(Teorema da Permanência do Sinal)*** *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D.*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \neq 0$ então existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que, para todo o $x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}$, $f(x)$ tem o sinal de l.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l > 0$ então existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}.$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l < 0$ então existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}.$$

Teorema 2.6. ***(Teorema do Enquadramento)*** *Sejam f, g e h funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}$ e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}},$$

então

$$\lim_{x \to a} h(x) = l.$$

Exercício 2.9 Para cada uma das funções cujos gráficos estão esboçados nas figuras abaixo indique, caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$, os limites $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

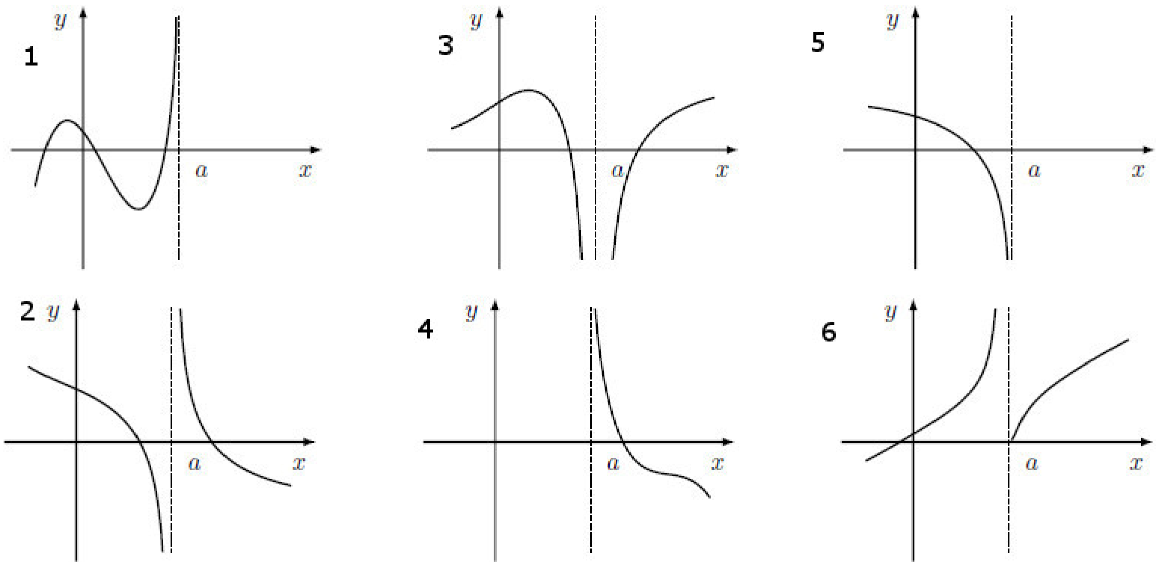


Figura 2.10: Funções do exercício 2.9.

Exercício 2.10 Mostre, usando a definição de limite que $\lim\limits_{x \to 1} 2(x+1) = 4$.

Exercício 2.11 Seja $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Mostre, usando sucessões, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercício 2.12 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ x_n \longrightarrow a,\ x_n \in D\backslash\{a\}$ e $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge então que dizer sobre

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?
2. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} =?$

Exercício 2.13 Justifique que:

1. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
2. $\lim\limits_{x\to a} c = c$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ não existe em $\widetilde{\mathbb{R}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Exercício 2.14 Calcule:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2 - \operatorname{sen}(3x)}{x^2+10}$.

Exercício 2.15 Seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Indique o valor lógico de cada uma das proposições:

1. Se $l = 0$ existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}$;
2. Se $l = 2\pi$ existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}$;
3. Se $l = -\infty$ existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, tal que $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathcal{V}(a) \cap D \setminus \{a\}$.

2.10 Funções contínuas

Definição 2.6. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função f é* contínua *em $a \in D$ se e só se para toda a vizinhança $\mathcal{V}(f(a))$ de $f(a)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a, tal que*

$$f(\mathcal{V}(a) \cap D) \subseteq \mathcal{V}(f(a)).$$

A definição de continuidade pode ainda traduzir-se por:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Da definição resulta imediatamente que se a for ponto isolado de D, a função f é contínua em a. Contudo, não iremos estudar a continuidade em pontos isolados do domínio da função.

Se $a \in D$ for um ponto de acumulação de D, dizer que f é contínua em a significa que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se f não for contínua em a, f diz-se **descontínua** em a.

Definição 2.7. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f diz-se contínua se é contínua em todos os pontos de D.*

Observação 2.4.

1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$. f é contínua em A se e só se $f|_A$ é contínua.
2. Se a função está definida num intervalo $[a, b]$, f diz-se contínua em a se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Analogamente, f diz-se contínua em b se $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

2.10.1 Propriedades das funções contínuas

Teorema 2.7. ***(Propriedades aritméticas das funções contínuas)*** *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D_f \cap D_g$ então as seguintes funções também são contínuas em a:*

$$\text{(a)}\ f \pm g; \quad \text{(b)}\ \ f \cdot g; \quad \text{(c)}\ \ \frac{f}{g},\ \text{se}\ g(a) \neq 0.$$

A recíproca da proposição anterior é falsa. Dê exemplos de funções descontínuas em que

- $f \pm g$ seja contínua;
- $f \cdot g$ seja contínua;
- $\dfrac{f}{g}$, com $g(a) \neq 0$ seja contínua.

Teorema 2.8. ***(Composição de funções)*** *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem limite $l \in \mathbb{R}$ quando x tende para a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $l \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ tem limite $g(l)$ quando x tende para a:*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(l).$$

Como consequência, a composição de funções contínuas é contínua.

Corolário 1. *Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(a) \in D_g$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.*

Teorema 2.9. ***(Continuidade da função inversa)*** *Seja D_f um intervalo de números reais, $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em D_f e invertível. Então a sua inversa, $f^{-1} : CD_f \to \mathbb{R}$, é contínua em CD_f.*

Exercício 2.16

Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo

(a) $f(x) = e^{1-2x}$ (b) $f(x) = \dfrac{5\ln(x-3) - 1}{4}$

2.10.1.1 Mais algumas indeterminações

Se $h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$ e $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, pode usar-se a transformação

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

para efeitos de determinação do seu limite.

Como a função exponencial é contínua, se existir o $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ então,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

Este facto usa-se para "levantar" indeterminações do tipo 0^0, 1^∞ e ∞^0.

Exercício resolvido 2.1. Determinar o limite $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^{\operatorname{sen} x}$.

Resolução: $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$, o que conduz a uma indeterminação do tipo 0^0. Atendendo a que, $x > 0$ porque $x \to 0^+$,

$$x^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln(x^{\operatorname{sen} x})} = e^{\operatorname{sen} x \ln x} \text{ e } \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x}$$

basta determinar o $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$.

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} x \ln x = 1 \cdot 0 = 0$$

Então,

$$\lim_{x\to 0^+} 2x^{\operatorname{sen} x} = 2 \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x \ln x} = 2e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x} = 2e^0 = 2$$

Exercício resolvido 2.2. Determinar o $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Resolução: Neste caso temos uma indeterminação do tipo ∞^0.
O $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}\right)$ é ainda uma indeterminação, mas do tipo $0 \times \infty$. Sabemos que

$$\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0 \text{ e } \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \frac{1}{\cos y} = 1,$$

então,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Exercício 2.17

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **3.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ **7.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

2.10.2 Assíntotas

Assíntotas não verticais: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que D contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. A reta de equação

$$y = mx + b$$

é uma *assíntota ao gráfico de f à direita* se

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Se existirem, em $\mathbb{R}$, os limites $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - mx]$ então a equação da assímptota é $y = mx + b$.

Como se define a assíntota ao gráfico de f à esquerda?

Assíntotas verticais: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. A reta de equação $x = a$ diz-se uma *assíntota vertical* ao gráfico de f se se verifica uma das condições:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Exercício 2.18 Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$.

1. Determine, caso existam, as assímptotas ao gráfico de f.
2. Mostre que a reta de equação $y = (\ln 2)x + \frac{1}{2}$ é uma assímptota bilateral (à esquerda e à direita) do gráfico de g, sendo $g(x) = xf(x)$.

Exercício 2.19 Mostre que a função definida por $f(x) = \ln x$ não tem assíntotas oblíquas.

2.11 Funções deriváveis

Definição 2.8. *Seja f uma função real de variável real. Uma reta que passa por dois pontos distintos do gráfico de f diz-se* ***reta secante*** *ao gráfico de f.*

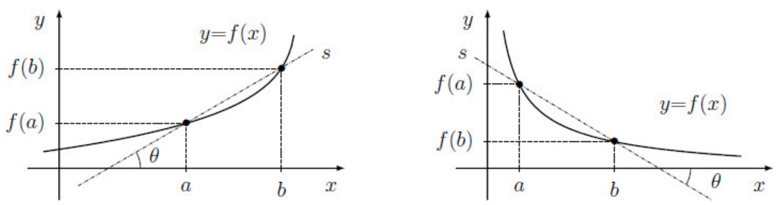


Figura 2.11: Interpretação geométrica da reta secante.

Verifique que a equação da reta secante ao gráfico de f em a e b é dada por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Ao declive da reta secante, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\theta$, chama-se **taxa de variação** da função f no intervalo $[a, b]$.

Observação 2.5. Se f é estritamente crescente, $b-a$ e $f(b)-f(a)$ têm o mesmo sinal; se é estritamente decrescente, têm sinais opostos. Daqui podemos concluir que o declive da reta secante é positivo se f é estritamente crescente e é negativo se f é estritamente decrescente.

- O que acontece se a função for monótona em sentido lato?

Se a função for monótona apenas em alguns intervalos, a análise do declive da reta secante não nos dá uma informação correta sobre a sua monotonia.

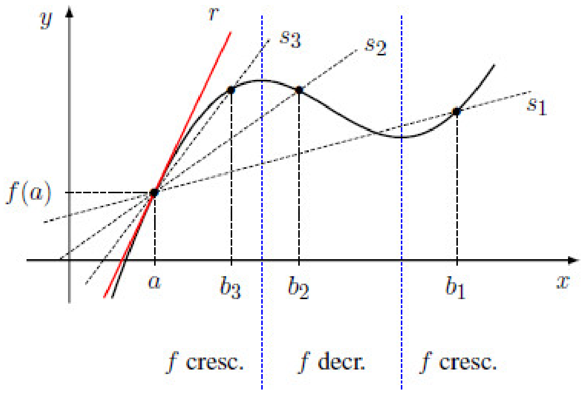


Figura 2.12: Reta secante e monotonia.

Se na figura 2.12, tomarmos valores b_1, b_2, b_3,... cada vez mais próximos de a, as retas secantes s_1, s_2, s_3,... aproximam-se da reta r que numa vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, intersecta o gráfico de f apenas no ponto $(a, f(a))$.
À reta r chama-se **reta tangente** ao gráfico de f em a.

2.11.1 Derivada de uma função num ponto

Definição 2.9. *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Se a é ponto de acumulação de D e*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe e é finito, a este limite chama-se a ***derivada*** *da função f no ponto a e denota-se por $f'(a)$. Sendo assim, diz-se que f é* ***derivável***[1] *no ponto a.*

Exemplo 2.12. Lembre-se do significado de velocidade média e velocidade instantânea.
Se $s(t)$ representa a posição no instante t de um corpo em movimento retilíneo então

- ◇ $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ é o deslocamento do corpo no intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$;
- ◇ $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ é a velocidade média (declive da reta secante!);
- ◇ $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ é a velocidade no instante t_0.

A *velocidade* do corpo no instante t_0 *é a derivada da função posição* calculada nesse instante,

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Exercício 2.20 Calcule a derivada, caso exista, da função no ponto $x = a$ indicado:

1. $f(x) = 3$, $a = \frac{1}{2}$;
2. $f(x) = 3x - 7$, $a = 1$;
3. $f(x) = |x|$, $a = 1$ e $a = -1$.

2.11.2 Reta tangente

A derivada da função f no ponto a é o limite da taxa de variação da função, logo, é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto a.
Assim, se f é derivável em a, a **equação da reta tangente** ao seu gráfico nesse ponto é

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

[1] Alguns autores consideram que derivável pode ter derivada infinita e **diferenciável** que tem derivada finita

Se o declive da reta tangente ao gráfico de f em a (ou seja o valor da derivada da função em a) for positivo ou negativo, podemos concluir que a função é estritamente monótona crescente ou descrescente, respetivamente, numa vizinhança de a.

Exercício 2.21

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x = -1$.
2. Mostre que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = mx + q$ em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ é a própria reta $y = mx + q$.

2.12 Noção de diferencial

Atendendo ao conceito de derivada e taxa de variação apresentados nas secções anteriores, na figura 2.13 está representada a variação da função no intervalo $[x_1, x_1 + \Delta x]$, denotada por

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

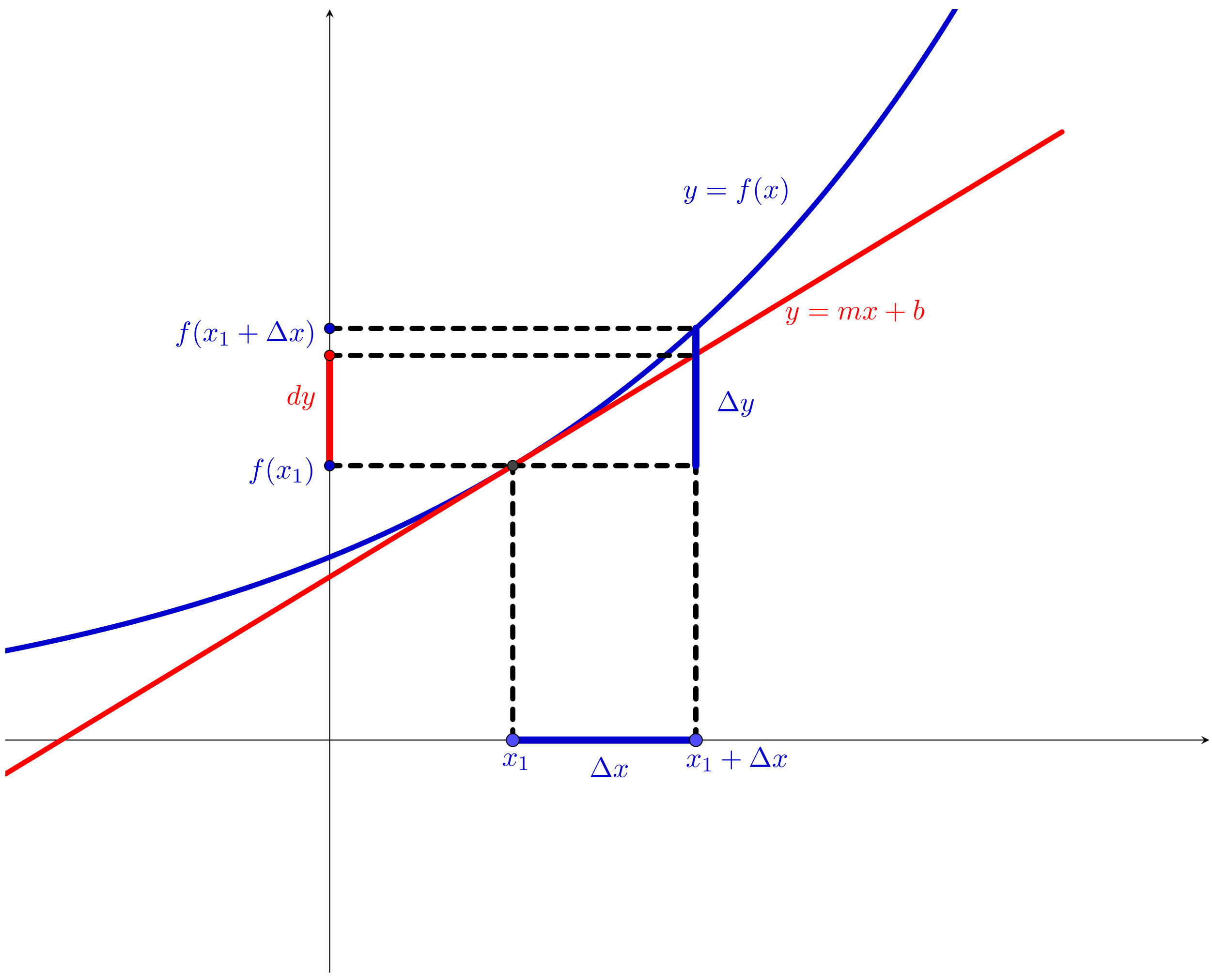


Figura 2.13: O diferencial dy e o acréscimo Δx.

O **diferencial** de uma função, dy, é o acréscimo sofrido pela ordenada da reta tangente correspondente a um acréscimo Δx sofrido por x. Sendo $y = mx + b$ a reta tangente ao gráfico da função f no ponto

$(x_1, f(x_1))$ a sua equação será

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Desigando por g a função que define a reta tangente,

$$g(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

podemos escrever o diferencial dy como

$$dy = g(x_1 + \Delta x) - g(x_1) = f'(x_1)(x_1 + \Delta x - x_1) + f(x_1) - (f'(x_1)(x_1 - x_1) + f(x_1)) = f'(x_1)\Delta x$$

Se designarmos o acréscimo Δx por dx (diferencial na variável independente), faz sentido usar a notação para derivada como um quociente

$$f'(x_1) = \frac{dy}{dx}(x_1).$$

Exercício resolvido 2.3. Considere a função $f(x) = 2x^3 - 3x - 4$. Determine o diferencial da função.

Resolução: Como $f'(x) = 6x^2 - 3$, o diferencial em qualquer ponto é dado por

$$dy = (6x^2 - 3)\, dx.$$

O diferencial torna-se muito útil na questão de aproximação de uma função derivável pela sua reta tangente, num valor próximo do ponto de tangência. Este processo de aproximação toma a designação de **linearização**.

Aproximando Δy por dy o erro cometido é dado por

$$\epsilon = |\Delta y - dy|$$

que no caso de uma função derivável será tanto menor quanto $\Delta x(= dx)$. Assim, para valores suficientemente pequenos de Δx podemos dizer que $\Delta y \approx dy$ (é aproximadamente). Como, $dy = f'(x)\Delta x($ ou $dx)$, podemos escrever

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \Leftrightarrow f(x + \Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x)$$

ou seja, numa vizinhança de x a função pode ser aproximada pela reta tangente em x, por isso se designa este processo por **linearização**.

Exemplo 2.13. Consideremos de novo a função do exercício resolvido 2.3 e os pontos $x_1 = 2.1$ e $x_2 = 2.01$. Relativamente ao ponto $(2, f(2))$, podemos dizer que $x_1 = x + \Delta x = 2 + 0.1$ e $x_2 = 2 + 0.01$ e $\Delta y_1 = f(2.1) - f(2)$ e $\Delta y_2 = f(2.01) - f(2)$. Usando o processo de linearização atrás referido, resulta que

$$f(2.1) \approx f'(2)\Delta x + f(2) = 21 \times 0.1 + 6 = 8.1$$

e

$$f(2.01) \approx f'(2)\Delta x + f(2) = 21 \times 0.01 + 6 = 6.21$$

Efetivamente, $f(2.1) = 8.222$ e $f(2.01) = 6.211202$. Ao fazer a linearização, no caso $x = 2.1$ o erro cometido é 0.122 e no caso de $x = 2.01$ o erro cometido é 0.001202. Para valores de Δx menores, a aproximação usando diferenciais é melhor.

Exercício 2.22 Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65.5}$ usando diferenciais.

2.12.1 Derivadas laterais

Seja a um ponto de acumulação de $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Quando existem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, os limites

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

designam-se por **derivada lateral esquerda** e **derivada lateral direita**, respetivamente, da função f no ponto a. Se a for um ponto interior do domínio de f, a derivada $f'(a)$ existe se e só se

$$f'_+(a) = f'_-(a) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a).$$

Observação 2.6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ então considera-se $f'(a) = f'_+(a)$. Analogamente, para o ponto $x = b$, se $f'_-(b) \in \mathbb{R}$ então considera-se $f'(b) = f'_-(b)$.

Exercício 2.23

1. A função definida por $f(x) = |x|$ é derivável em $x = 0$? E a função $f|_{[0,+\infty[}$?
2. A função com domínio $\mathbb{R}$ e expressão analítica

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$? Possui derivadas laterais?

2.12.2 Continuidade e derivabilidade

Teorema 2.10. *Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in D$ então f é contínua em a.*

Atenção: f pode ser contínua num ponto e não ser derivável nesse ponto.

Exercício 2.24

Demonstre o teorema 2.10 observando que

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \cdots$$

Exemplo 2.14.

1. A função dada por $f(x) = |x|$ é contínua e não derivável em 0.
2. A função definida por $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua mas não derivável em 0.
3. A função dada por $h(x) = \sqrt{|x|}$ é contínua em 0 mas não é derivável em 0.

2.12.3 Função derivada

Chama-se ***função derivada*** de f e denota-se por f' à função que a cada elemento $a \in D_f$ em que f admite derivada faz corresponder $f'(a)$.

Observe-se que $D_{f'} \subseteq D_f$ e que $\forall x \in D_{f'}, f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Exercício 2.25

1. Indique pelo menos um caso em que $D_{f'} \neq D_f$.
2. Mostre que a derivada de uma função constante é a função nula.
3. Mostre que a derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é $f'(x) = 2ax + b$.
4. Mostre que a derivada de $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x$. (Use o limite $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.)
5. Mostre que a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $f'(x) = \cos x$.
   (Ajuda: $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$, $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.)
6. Dada uma função f definam-se $g(x) = f(x + c)$ e $h(x) = f(x) + c$ com $c \in \mathbb{R}$.
   Verifique que $g'(x) = f'(x + c)$ e que $h'(x) = f'(x)$.
7. Prove que a derivada de $f(x) = \cos x$ é $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.
   (Ajuda: $\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ e $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$).

2.12.4 Limites laterais da função derivada

Seja f uma função contínua mas não derivável em $a \in D_f$ (logo, $a \notin D_{f'}$).

É possível estudar os limites laterais de f' em a, caso existam:

- Se $\lim_{x \to a^+} f'(x) \neq \lim_{x \to a^-} f'(x)$, o gráfico de f tem um "ponto anguloso" em a.
- Se $\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$ e não são finitos (isto é, são ambos iguais a $+\infty$ ou a $-\infty$), a reta vertical $x = a$ é *tangente* ao gráfico de f no ponto a.

Nestes casos as derivadas laterais de f são iguais aos correspondentes limites laterais de f'.

Exercício 2.26 Verifique, pela definição de derivada, que $f(x) = e^{|x|}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ têm em $x = 0$ um ponto anguloso e uma *tangente* vertical, respetivamente.

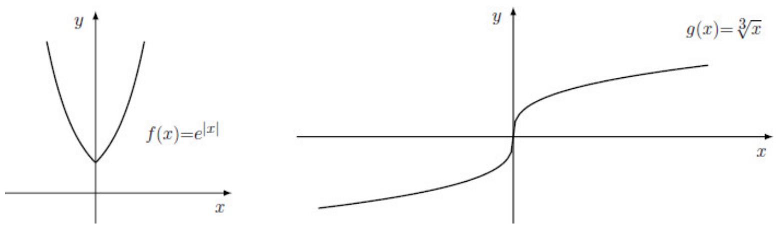


Figura 2.14: Ponto anguloso e tangente vertical.

Exercício 2.27 Verifique que se $f(x) = |x|$ e $g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$, então $f' = g$ (atenção aos domínios!).

2.12.5 Regras de derivação

Teorema 2.11. *Sejam f e g funções deriváveis em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:*

- *$\alpha f + \beta g$ é derivável em D e $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ ("linearidade");*

- fg *é derivável em* D *e* $(fg)' = f'g + fg'$ *("Regra de Leibniz");*
- $\frac{f}{g}$ *é derivável em* D *desde que* $\frac{f}{g}$ *esteja definida e nesse caso,* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exercício 2.28

1. Prove que $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. Seja $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$. Determine a função derivada f'.
3. Mostre que a derivada de $g(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$ é $g'(x) = nx^{n-1}$.
4. Calcule a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \quad g(t) = t \cos t - \operatorname{sen} t$$

2.12.6 Derivadas de ordem superior

A derivada da função f', ou seja $(f')'$, denota-se por f'' e designa-se por *função derivada de segunda ordem* ou *segunda derivada*.
Analogamente, a derivada de f'' é a derivada de terceira ordem $f''' = (f'')'$.

Repetindo (se possível) este processo n vezes obtém-se a *função derivada de ordem* n que se denota por $f^{(n)}$.

De modo análogo, a função f' designa-se também por *derivada de primeira ordem*.

Para designar derivadas usa-se frequentemente a notação de Leibniz:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

Exercício 2.29

1. Seja $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$. Calcule f'', f''' e $f^{(4)}$. O que é que se pode concluir acerca das derivadas de ordem superior a quatro?
2. Encontre a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.
3. Verifique que a derivada de ordem n da função $g(x) = x^n$ é $g^{(n)}(x) = n!$.
4. Encontre a expressão da derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = e^{ax}$ com $a \in \mathbb{R}$.

2.12.7 Derivada da função composta

Sejam f e g duas funções e $h = f \circ g$. Se g é derivável em a e f é derivável em $g(a)$ então h é derivável em a e $h'(a) = f'(g(a))g'(a)$. Assim,

$$\forall x \in D_{h'},\ h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Observação 2.7. A fórmula de cálculo da derivada da função composta é chamada *regra da cadeia* porque a derivada é calculada derivando cada composição sucessivamente. Por exemplo, no caso da composição de 3 funções, tem-se:

$$[f(g(h(x)))]' = f'(\,g(h(x)\,)\,[g(h(x))]' = f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)$$

Exemplo 2.15. A função $h(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 5)$ é a composição de $f(x) = \operatorname{sen} x$ após $g(x) = 3x^2 + 5$. A derivada de f é $f'(x) = \cos(x)$ e a derivada de g é $g'(x) = 6x$, logo $h'(x) = \cos(3x^2 + 5)\,(6x) = 6x\cos(3x^2 + 5)$.

Exercício 2.30

1. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} x)$. Encontre o domínio D, averigue se f é derivável em D e escreva a expressão analítica de f'.

2. Encontre o domínio e calcule a derivada da função definida por $g(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$.

3. Sendo $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, caracterize a derivada de $k(|x|)$ e de $|k(x)|$.

2.12.8 Derivada da função inversa

Seja f uma função invertível no domínio D_f com inversa $f^{-1} : CD_f \to \mathbb{R}$. Se f é derivável e f' nunca se anula em D, então f^{-1} é derivável em CD_f e

$$\forall y \in CD_f,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{2.1}$$

Observação 2.8. Para simplificar a notação, note-se que se $y = f(x)$ então

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Exercício 2.31 Obtenha a fórmula 2.1 derivando a identidade $y = f(f^{-1}(y))$, $\forall y \in CD_f$.

Exercício 2.32

1. Caracterize a função derivada de $f(x) = \ln x$.

2. Calcule a derivada de $g(x) = \ln|x|$ e compare $D_{g'}$ com $D_{f'}$ do exercício 1.

3. Calcule a derivada de $h(x) = a^x$ e da sua inversa. (Ajuda: $a^b = e^{b\ln a}$ $\forall$ $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$).

4. Mostre que a derivada de $k(x) = x^b$ é $k'(x) = bx^{b-1}$ para todo o $b \in \mathbb{R}$.

2.13 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 2.1

1. $D_h = [0, 1[$.
2. $j(x) = -\sqrt{x}$.

Exercício 2.2

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; $D_g =]-\infty, 1]$; $CD_g = [5, +\infty[$.
2. $D_{f+g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 1]$; $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} =]-\infty, 1]$.

Exercício 2.3 Sim, se $a = 1$.

Exercício 2.6 $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Exercício 2.7 $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $g^{-1}(x) = x^2$, $D_{g^{-1}} = [0, +\infty[$; $(f \circ g)^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^2$, $D_{(f \circ g)^{-1}} =]0, 1]$.

Exercício 2.9 1. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ não existe e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; 2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$;
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$; 4. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ não existe;
5. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ não existe e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$; 6. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

Exercício 2.14

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 - \operatorname{sen}(3x)}{x^2 + 10} = 5$.

Exercício 2.15

1. Falsa;
2. Verdadeira;
3. Verdadeira.

Exercício 2.16 (a) $f(x) = e^{1-2x}$ contínua, $D_f = \mathbb{R}$, $CD_f = \mathbb{R}^+$. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - \ln x)$ é contínua em $D_{f^{-1}} = CD_f$.
(b) $f(x) = \dfrac{5\ln(x-3) - 1}{4}$ contínua em $D_f =]3, +\infty[$; $CD_f = \mathbb{R}$. $f^{-1}(x) = 3 + e^{\frac{4x+1}{5}}$ contínua em $D_{f^{-1}} = CD_f$.

Exercício 2.17

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{1+\ln x}} = e$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = +\infty$ **5.** $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = e$ **6.** $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1$ **7.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x = e^{-2}$.

Exercício 2.18

1. $D_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[$. $y = \ln 2$ assíntota horizontal bilateral; $x = 0$ e $x = -\dfrac{1}{2}$ são assíntotas verticais.

Exercício 2.20 1. $f'(\frac{1}{2}) = 0$; 2. $f'(1) = 3$; 3. $f'(1) = 1$ e $f'(-1) = -1$.

Exercício 2.21

1. $y = -2x - 1$.

Exercício 2.22 $\sqrt[3]{65.5} \approx 4.03125$.

Exercício 2.23

1. $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$ mas a função $f|_{[0,+\infty[}$ é derivável em $x = 0$.
2. Não é derivável em $x = 0$ e não possui derivadas laterais nesse ponto.

Exercício 2.28

2. $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$.
4. $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$; $\quad g'(t) = -t \operatorname{sen} t$

Exercício 2.29

1. $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$, $f''(x) = 12x - 2$, $f'''(x) = 12$, $f^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 4$.
2. $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \operatorname{sen} x$ e $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$.
4. $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ com $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.30

1. $D = \mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)\cos x}{\cos^2(\operatorname{sen} x)}$, $\forall x \in D$.
2. $g'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. $k'(|x|) = \begin{cases} k'(x) & \text{se} \quad x > 0 \\ -k'(x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$.

   Se $k(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|k(x)|' = k'(x)$; se $k(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|k(x)|' = -k'(x)$; se $k(x)$ mudar de sinal em $\mathbb{R}$, nos pontos onde $k(x)$ se anula não há derivada.

Exercício 2.32

1. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.
2. $g'(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
3. $h'(x) = a^x \ln a$; $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Capítulo 3

As funções trigonométricas

Neste capítulo vamos focar o nosso estudo nas funções trigonométricas inversas. Começamos por recordar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, introduzimos as funções secante, cossecante e cotangente e finalmente fazemos o estudo das funções arco seno, arco cosseno, arco tangente e arco cotangente.

3.1 Funções trigonométricas diretas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas *geometricamente* no círculo trigonométrico, como estudado no Ensino Secundário.

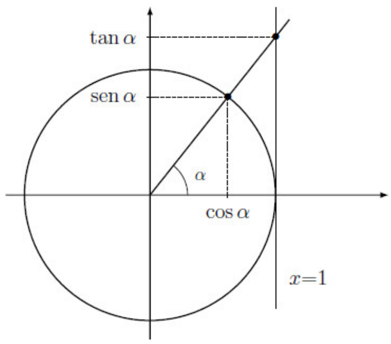


Figura 3.1: As funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico.

Exercício 3.1 Mostre que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, determine domínio e contradomínio de sen, cos, tg e prove que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Seja $p \in \mathbb{R}^+$ e D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ verificando a propriedade

$$x \in D \text{ se e só se } x + p \in D.$$

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica** com período p se e só se

$$\forall x \in D, \ f(x+p) = f(x) \tag{3.1}$$

As funções trigonométricas são periódicas. O período das funções seno e cosseno é 2π e o período da função tangente é π. Contudo, poderíamos dizer que estas funções têm outros períodos, por exemplo, 4π já que

$$\operatorname{sen}(x+4\pi) = \operatorname{sen} x; \ \cos(x+4\pi) = \cos x \text{ e } \operatorname{tg}(x+4\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Usualmente diz-se que o menor $p \in \mathbb{R}^+$ que satisfaz a condição 3.1 é o **período** da função f.

Observação 3.1. Uma função constante é periódica e o seu período é qualquer $p > 0$.

3.1.1 As funções secante, cossecante e cotangente

Para além de seno, cosseno e tangente, outras funções trigonométricas são definidas conforme indicado no círculo trigonométrico da figura 3.2: secante (sec), cossecante (csc), cotangente (cotg).

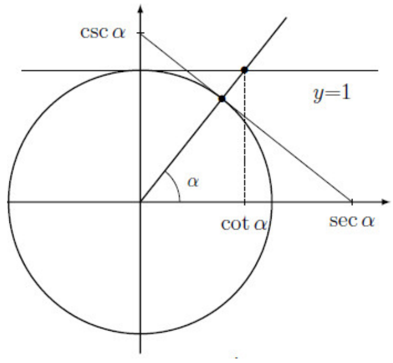


Figura 3.2: As funções cosecante (csc), secante (sec) e cotangente (cot) no círculo trigonométrico.

3.1.1.1 A função secante

Chama-se **secante** à função

$$\begin{array}{rccl} \sec : & D_{\sec} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}$$

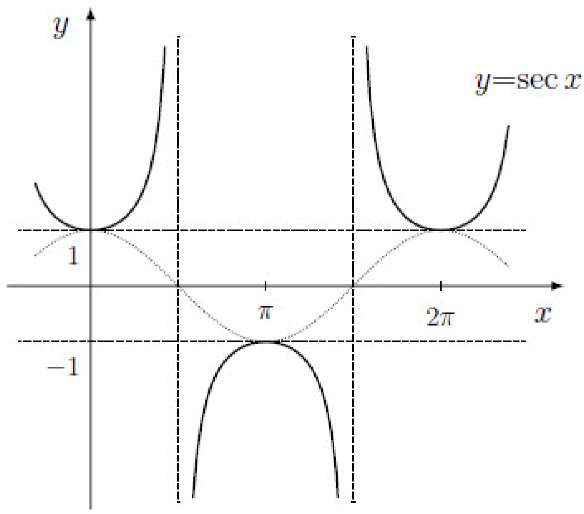


Figura 3.3: A função secante (sec).

Exercício resolvido 3.1. 1. Determine $D_{\sec}$ e $CD_{\sec}$.

2. Qual o período? Em que intervalos é monótona?

3. Verifique que $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, $\forall x \in D_{\sec}$.

4. Determine, caso existam, os zeros desta função.

Resolução:

1. $D_{\sec} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\sec} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, atendendo a que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2. O período é o mesmo da função cosseno: $p = 2\pi$. Monótona crescente em $\left]2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right[$ e em $\left]2k\pi, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ (nos intervalos onde a função cosseno é decrescente) e é monótona decrescente em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ e em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ (nos intervalos onde a função cosseno é crescente).

4. A função não tem zeros já que o numerador da expressão que a define é diferente de zero.

3.1.1.2 A função cossecante

Chama-se **cossecante** à função

$$\begin{array}{rccl} \csc: & D_{\csc} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

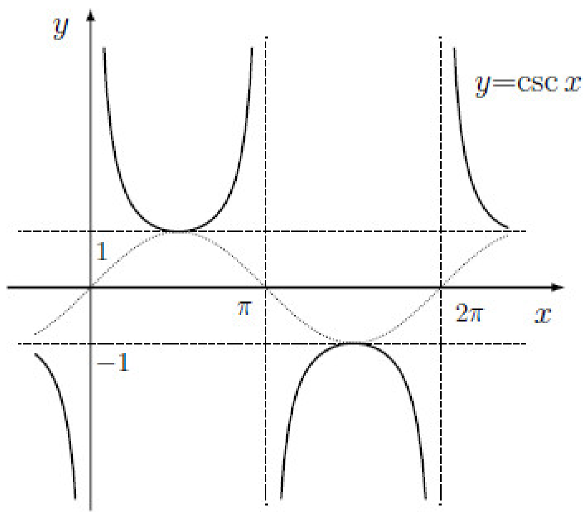


Figura 3.4: A função cossecante (csc).

Exercício 3.2 Determine $D_{\csc}$ e $CD_{\csc}$. Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine, caso existam, os zeros da função.

3.1.1.3 A função cotangente

Chama-se **cotangente** à função

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{cotg}: & D_{\operatorname{cotg}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{array}$$

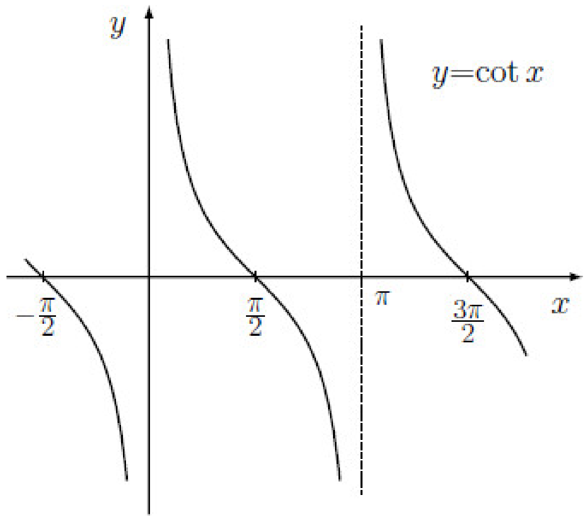


Figura 3.5: A função cotangente.

Exercício 3.3 Determine D_{cotg} e CD_{cotg}. Qual o período? Em que intervalos é monótona? Determine os zeros desta função. Verifique que $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x$, $\forall x \in D_{\text{cotg}}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ é verdadeira para todo o $x \in D_{\text{cotg}}$? E $\operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{tg} x$?
2. Para que valores de x é verdadeira a igualdade $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\csc x}$?
3. Mostre que se $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \csc x \quad \text{e} \quad (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$$
4. Explique porque **as funções trigonométricas não são invertíveis**

3.2 Funções trigonométricas inversas

Como se referiu, as funções trigonométricas não admitem inversa, já que, sendo periódicas não são injetivas. Contudo, podemos considerar restrições aos domínios dessas funções, onde o conjunto das imagens continua a ser o contradomínio da função original, mas o domínio escolhido faz com que as restrições a essas funções sejam funções injetivas.

3.2.1 Função arco seno

A **restrição** da função seno ao intervalo $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é **injetiva**, logo a função

$$\begin{array}{rccl} S: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

é invertível. À sua inversa chama-se **arco seno** e denota-se por arcsen.

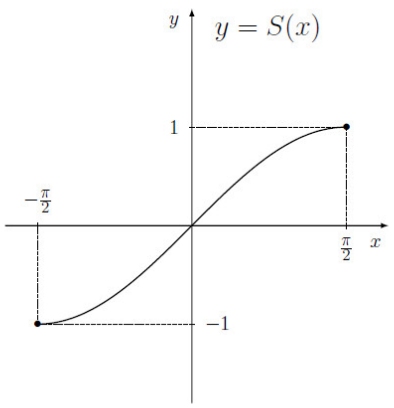


Figura 3.6: A restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

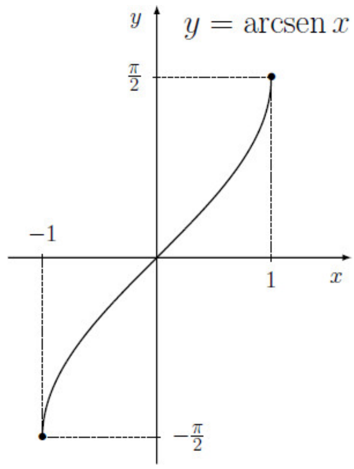


Figura 3.7: A função arco-seno.

Como o contradomínio de S é $[-1,1]$, a inversa de S é a função

$$\begin{array}{rccl} S^{-1}: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & S^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

com contradomínio $CD_{S^{-1}} = D_S = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, usando a definição de S,

$$\forall x \in [-1,1], \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x.$$

Pelas propriedades da função inversa escreve-se também

$$\forall x \in [-1,1], \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x.$$

Exercício 3.5

1. Seja f definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. Pode-se afirmar que $f(x) = x$, $\forall x \in D_f$?
2. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$.
3. Considere a função dada por $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Determine, caso existam, os zeros de f.

A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = \cos x$ não nula no intervalo $D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Portanto a sua inversa é derivável (aplica-se o teorema da função inversa) e

$$\forall y \in CD_f =]-1,1[, \ (\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3.2.2 Função arco coseno

A restrição da função coseno ao intervalo $[0,\pi]$ é injetiva. Assim, a função

$$\begin{array}{rccl} C: & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & C(x) = \cos x \end{array}$$

é invertível. A sua inversa, designada por **arco coseno**, denota-se por arccos.

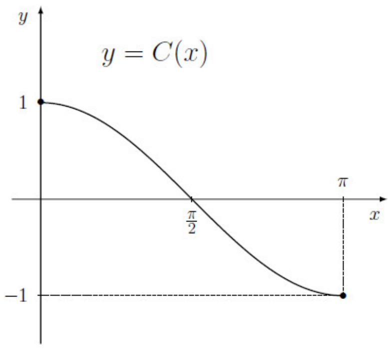


Figura 3.8: A restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$.

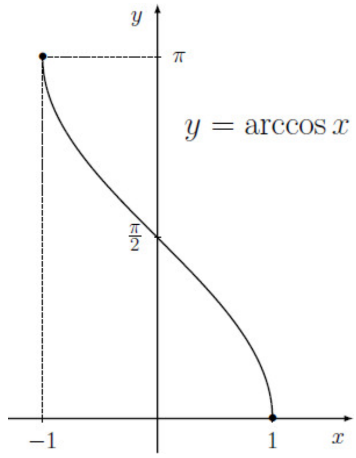


Figura 3.9: A função arco-cosseno.

Sendo $[-1, 1]$ o contradomínio de C, tem-se que

$$\begin{array}{rcll} C^{-1} : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & C^{-1}(x) = \arccos x \end{array}$$

O domínio da função arccos é $[-1, 1]$ e, pela definição de C,

$$\forall y \in [0, \pi],\ \forall x \in [-1, 1],\ y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x.$$

Como consequência das propriedades da função inversa obtém-se que

$$\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arccos x) = x \quad \text{e} \quad \forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos x) = x.$$

Exercício 3.6

1. Seja g definida por $g(x) = \cos(\arccos x)$. Pode-se afirmar que $g(x) = x$, $\forall x \in D_g$?
2. Considere a função dada por $f(x) = \arccos(e^x)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Determine, caso existam, os zeros de f.
3. Mostre que se $-1 \leq x \leq 1$ então $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

A função $f(x) = \cos x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ não nula no intervalo $D_f =]0, \pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f =]-1, 1[,\ (\arccos y)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Exercício 3.7 Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo $f(x) = \pi - \arccos(2x + 1)$

3.2.3 Função arco tangente

A função tangente não é injetiva no seu domínio mas a sua restrição ao intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ é. A função

$$\begin{array}{rccl} T: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & T(x)=\operatorname{tg} x \end{array}$$

tem inversa, designada por **arco tangente** e denotada por arctan, com domínio $\mathbb{R}$ pois T é sobrejetiva

$$\begin{array}{rccl} T^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & T^{-1}(x)=\arctan x \end{array}$$

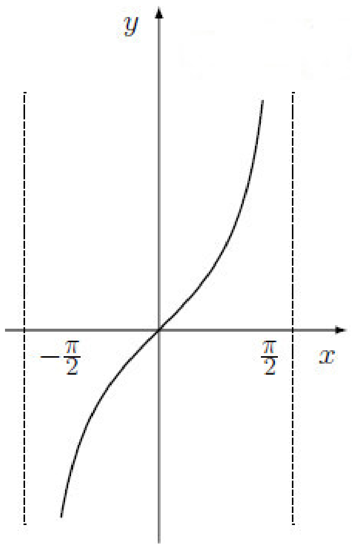


Figura 3.10: A restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

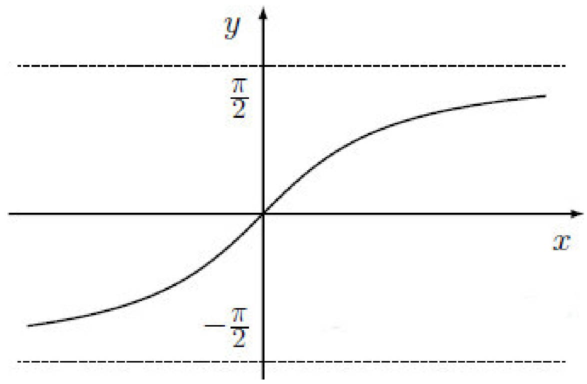


Figura 3.11: A função arcotangente.

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ y=\arctan x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$

Por definição de inversa:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{tg}(\arctan x)=x;\ \ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\operatorname{tg} x)=x.$$

A função $f(x)=\operatorname{tg} x$ é invertível e tem derivada $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ não nula no intervalo $D_f=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y\in CD_f=\mathbb{R},\ (\arctan y)'=\frac{1}{\cos^2(\arctan y)}=\frac{1}{1+y^2}.$$

Exercício 3.8 Mostre que as retas $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ e $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ são assíntotas ao gráfico da função $f(x)=x+\arctan x$.

Exercício 3.9 Mostre que $\sec(\arctan x)=\sqrt{1+x^2}$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1. A função definida em $D_f =]0, +\infty[$, por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 1 \\ \\ \frac{\pi}{4} + \ln x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

é contínua.

A função $l(x) = \ln x$ é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo a sua restrição ao intervalo $]0, 1[$ é contínua e portanto a função f é contínua em $]0, 1[$.

Considere-se a função invertível $a : \ ]1, +\infty[\ \rightarrow \ \mathbb{R}$ definida por $a(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$. A sua inversa é a função definida em $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ por $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Como a função tangente é contínua e não se anula neste intervalo, a função a é contínua em $]1, +\infty[$ e assim, f é contínua neste intervalo.
Falta analisar a continuidade de f em $x = 1$.

$$f(1) \ = \ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) = \frac{\pi}{4} \ = \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \arctan \frac{1}{x}$$

logo f é contínua em $x = 1$.

3.2.4 Função arco cotangente

A função cotangente não é injetiva no seu domínio $D_{\text{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ mas a sua restrição a $]0, \pi[$ é. Assim,

$$\begin{array}{rcll} G : &]0, \pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G(x) = \operatorname{cotg} x \end{array}$$

tem inversa, com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0, \pi[$. Chama-se **arco cotangente** e denota-se por arccot

$$\begin{array}{rcll} G^{-1} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x \end{array}$$

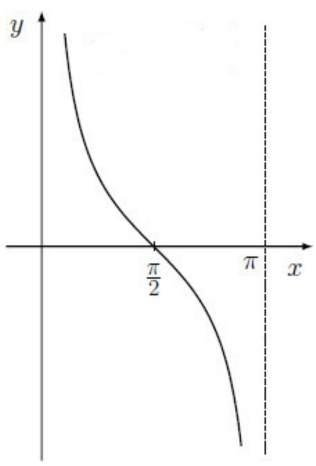


Figura 3.12: A restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$.

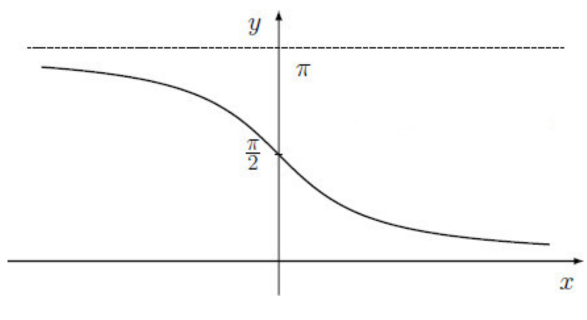


Figura 3.13: A função arco-cotangente.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, \pi[, \ y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} y = x.$$

Por definição de inversa:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \operatorname{cotg}(\operatorname{arccot} x) = x; \ \forall x \in]0, \pi[, \ \operatorname{arccot}(\operatorname{cotg} x) = x.$$

A função $f(x) = \operatorname{cotg} x$ é invertível e tem derivada $f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$ não nula no intervalo $D_f =]0, \pi[$. Portanto a sua inversa é derivável e

$$\forall y \in CD_f = \mathbb{R},\ (\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arccot} y)} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.10 Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1 \\ kx^2, & x \leq 1 \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} \arccos(\frac{2}{x}), & x \geq 2 \\ 2k\, e^{x-2}, & x < 2 \end{cases}$

Exercício 3.11 Considere a função dada por $f(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$.

1. Determine o domínio, o contradomínio e, caso existam, os zeros de f.
2. Estude f quanto à monotonia.

Exercício 3.12 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \arccos \frac{1}{x}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\operatorname{cotg} \frac{2}{x}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{sen} x + e^x)$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan(1-x)$ **(f)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ **(g)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$ **(h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}$

Exercício 3.13 Determine o domínio da função dada por $g(x) = \dfrac{3+2x^2}{\operatorname{cotg} x - 1}$.

Exercício 3.14 Caracterize a inversa da função h em $D \subseteq D_h$, sendo $h(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e D o maior intervalo tal que $h|_D$ seja invertível e $0 \in D$.

Exercício 3.15 Seja k a função dada por $k(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$.

1. Represente o domínio de k sob a forma de intervalo de números reais.
2. Caracterize a função inversa de k.
3. Calcule $\operatorname{sen}\big(k(2)\big)$.

Exercício 3.16 Considere a função dada por $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$. Determine:

1. o domínio de f;
2. os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

Exercício 3.17 Determine o domínio e os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se } x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Exercício 3.18 Determine domínio, contradomínio e zeros da função dada por $h(x) = -\frac{\pi}{3} + \text{arccot}(-3x)$.

3.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 3.2 $D_{\text{csc}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\text{csc}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. O período é 2π. Monótona crescente em $\left]2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right[$ e em $\left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ e é monótona decrescente em $\left]2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \right[$ e em $\left](2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right[$. A função não tem zeros.

Exercício 3.3 $D_{\text{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $CD_{\text{cotg}} = \mathbb{R}$. Período $= \pi$. Monótona decrescente em $]2k\pi, (2k+1)\pi[$; zeros em $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.4

1. A igualdade $\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$ não é verdadeira para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, porque estes pontos pertencem ao domínio da cotangente mas não pertencem ao domínio da tangente. A igualdade $\text{cotg}(x - \frac{\pi}{2}) = -\text{tg}\, x$ é verdadeira para todos os pontos do domínio da cotangente.
2. $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{\sec x}{\csc x}$ para $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 3.5

1. $f(x) = x$, $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e não para $x \in D_f = \mathbb{R}$.
3. (a) $D_f = \left[\dfrac{1}{e}, e\right]$ e $CD_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercício 3.6

1. Sim.
2. (a) $D_f =]-\infty, 0]$; $CD_f = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (b) $x = 0$.

Exercício 3.7 $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$ contínua em $D_f = [-1, 0]$; $CD_f = [0, \pi]$. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(\pi - x) - 1)$ é contínua em $D_{f^{-1}} = CD_f$.

Exercício 3.10 (a) $k = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $k = 0$.

Exercício 3.11

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $CD_f = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$; não tem zeros.
2. A função é decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, +\infty[$.

Exercício 3.12 (a) Seja $y = \text{arcsen}\,(5x)$, ou seja, $\text{sen}\, y = 5x$. Se $x \to 0$ então $y \to 0$, logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}(5x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{1}{5}\,\text{sen}\, y} = \lim_{y\to 0} 5\frac{y}{\text{sen}\, y} = 5 \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}\, y}{y}} = 5;$$

(b) $\dfrac{\pi}{2}$;

(c) Como $\text{cotg}\, y = \dfrac{\cos y}{\text{sen}\, y}$ e se $x \to +\infty$, então $y = \dfrac{1}{x} \to 0$, temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\text{cotg}\,\frac{2}{x} = \lim_{y\to 0} y\frac{\cos(2y)}{\text{sen}\,(2y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\frac{2y}{\text{sen}\,(2y)}\cos(2y) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2};$$

(d) $+\infty$; (e) $-\dfrac{\pi}{2}$; (f) e^2; (g) Não existe; (h) $+\infty$.

Exercício 3.13 $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \wedge x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercício 3.14 $D = [-\pi, 0]$; $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(2x) - \frac{\pi}{2}$ e $D_{h^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercício 3.15

1. $D_k = [0, 2]$.
2. $k^{-1}(x) = 1 - \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3}{2}x\right)$, $D_{k^{-1}} =$
3. $\operatorname{sen}\big(k(2)\big) = \frac{1}{2}$.

Exercício 3.16

1. $D_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$;
2. $x \in]-\infty, -3]$.

Exercício 3.17 $D_g = [-1, +\infty[$; o único zero é $x = -1$.

Exercício 3.18 $D_h = \mathbb{R}$; $CD_h = \left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$; o único zero é $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Capítulo 4

Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis

Neste capítulo serão estudados alguns teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis e a sua aplicação ao estudo completo de funções.

4.1 Teoremas sobre funções contínuas

Os teoremas seguintes foram estudados no ensino secundário e são aqui revisitados.

4.1.1 Teorema de Bolzano

Teorema 4.1. ***(Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b], a < b$, e $f(a) < Y < f(b)$ ou $f(b) < Y < f(a)$ então existe $X \in]a,b[$ tal que $f(X) = Y$.*

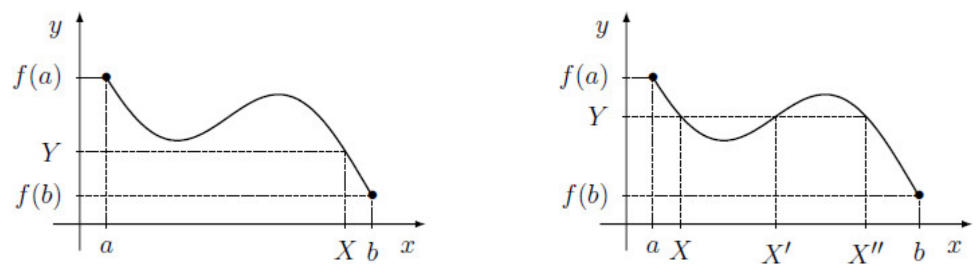


Figura 4.1: Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano.

Este teorema estabelece que uma função contínua em $[a,b]$ assume todos os valores intermédios entre $f(a)$ e $f(b)$ (uma ou mais vezes).

Corolário 1. *Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$ então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Exemplo 4.1. A equação $\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

Consideremos a função contínua em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$. Calculando $f(0)$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ obtemos:

$$f(0) = -1 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \text{portanto} \quad f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0$$

e o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário) permite-nos afirmar que a função se anula neste intervalo.

Veremos à frente que esta função tem um único zero em $\mathbb{R}$.

Corolário 2. *Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$ arbitrários e suponha-se, sem perda de generalidade, que $y_1 < y_2$. Então

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y_1 < y < y_2 \Rightarrow y \in f(I)$$

ou seja, $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$, o que prova ser $f(I)$ um intervalo. □

4.1.1.1 Método da Bissecção

Uma das aplicações do corolário do teorema de Bolzano é a localização de raízes de equações não lineares.

Exemplo 4.2. Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Pretende-se encontrar $\overline{x}$ entre 1 e 2 tal que $f(\overline{x}) = 0$. Como,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(2) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,2[: f(\bar{x}) = 0$$

Consideremos agora o ponto médio de $[1, 2]$, $x_1 = 1.5$. Como $|x_1 - \overline{x}| < 0.5$, x_1 é uma aproximação de $\overline{x}$ com erro inferior a 0.5. Aplicando novamente o teorema,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(x_1) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,x_1] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,x_1[: f(\bar{x}) = 0$$

Uma raiz da equação está em $]1, 1.5[$. Repetindo o processo anterior, seja $x_2 = 1.25$ (ponto médio de $[1, 1.5]$), temos

$|x_2 - \overline{x}| < 0.25$ e portanto x_2 é uma aproximação da raiz da equação com erro inferior a 0.25.

Como,

$$\left.\begin{array}{l} f(1)f(x_2) < 0 \\ \\ f \text{ é contínua em } [1,x_2] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \overline{x} \in]1,x_2[: f(\bar{x}) = 0$$

podemos aplicar sucessivamente o resultado até obter uma aproximação de $\overline{x}$ com a precisão desejada.

4.1.2 Teorema de Weierstrass

Este teorema garante a existência de máximo e mínimo de uma função contínua num intervalo fechado.

Comecemos por recordar estas noções.

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ com contradomínio CD_f. Um ponto $c \in D_f$ é

- ponto de *máximo* (*mínimo*) *global* se $f(c)$ é o máximo (mínimo) de CD_f;
- ponto de *máximo* (*mínimo*) *local* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(c)$ tal que
  c é ponto de máximo (mínimo) global da restrição da função f ao conjunto $D \cap \mathcal{V}(c)$.

Um ponto c de máximo ou de mínimo local (global) diz-se *ponto de extremo local* (*global*) de f. Ao valor $f(c)$ chama-se *extremo local* (*global*) de f.

Para encontrar os extremos globais é preciso estudar os extremo locais e compará-los.

Um ponto de extremo c da função f diz-se *extremo estrito* quando $f(x) \neq f(c)$ para todo o x diferente de c numa vizinhança de c.

Exercício 4.1 Encontre extremos e pontos de extremo locais e globais da função definida em $[-4, 6[$ pelo gráfico representado na figura 4.2, indicando os extremos estritos:

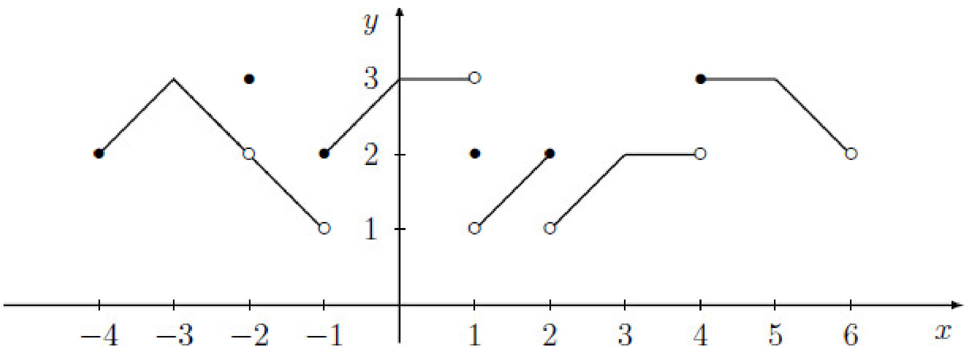


Figura 4.2: Gráfico da função.

Teorema 4.2. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se D_f é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em D_f, então f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem $x_m, x_M \in D_f$ tais que, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, para todo o $x \in D_f$.*

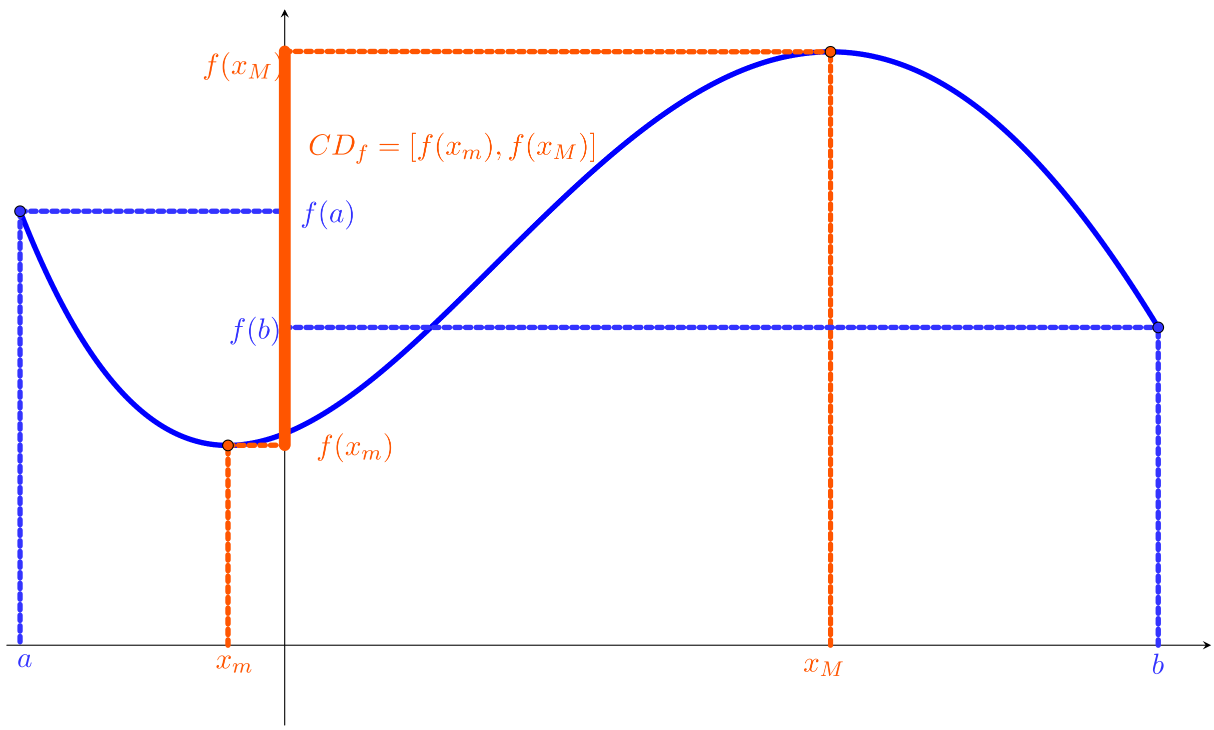


Figura 4.3: Interpretação geométrica do Teorema de Weierstrass.

Demonstração. Comecemos por provar que f é limitada. Suponha-se, pelo contrário, que f é contínua, mas não limitada em $[a, b]$. Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que se tem $|f(x_n)| > n$.

A sucessão $(x_n)_{n\geq 1}$ é limitada, já que $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, portanto, admite uma subsucessão $(x_{n_\tau})_{\tau\geq 1}$, convergente[1]. Seja $\lim\limits_{\tau\to\infty} x_{n_\tau} = \overline{x} \in [a,b]$.
Tem-se então, por um lado, que

$$\lim_{\tau\to\infty} |f(x_{n_\tau})| = +\infty$$

enquanto que

$$\lim_{\tau\to\infty} |f(x_{n_\tau})| = |f(\overline{x})| < +\infty$$

já que, da continuidade de f decorre (como facilmente se verifica) a continuidade de $|f|$.
A contradição resultou de se ter suposto que a função f era não limitada.

Seja $M = \sup f(x)$ e suponha-se que

$$f(x) < M \ , \ \forall x \in [a,b].$$

Então a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \ , \ a \leq x \leq b$$

é contínua e, portanto, de acordo com o o que vimos no início da demonstração para a função f, é limitada.
Seja $c = \sup g(x)$. É claro que se tem $c > 0$ e

$$g(x) \leq c \ , \ \forall x \in [a,b]$$

donde resulta que

$$f(x) \leq M - \frac{1}{c} \ , \ \forall x \in [a,b]$$

o que é contrário à definição de M.
Consequentemente,

$$\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) = M$$

e, portanto, $M = \max f(x)$.
Demonstração análoga se pode fazer para o caso do mínimo. □

- A função $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ não é limitada. Isto contradiz o teorema anterior?
- A função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume o valor máximo em $x = 0$, mas não existe $x \in [0,+\infty[$ tal que $g(x)$ seja mínimo. Porquê?

Exercício 4.2 Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \arctan x & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Estude f quanto à continuidade.
2. Determine, caso existam, as assímptotas ao gráfico de f.
3. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y = \frac{1}{2}$.

[1] Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.

Exercício 4.3 Considere a função g dada por

$$g(x) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Utilize o teorema de Bolzano para justificar que g admite uma raiz no intervalo $]0, 2[$.

Exercício 4.4 Considere a função f, real de variável real, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. f é contínua em $]1, 2]$? f é limitada em $]1, 2]$?
2. Existe contradição com o teorema de Weierstrass?

4.2 Teoremas sobre funções deriváveis

Vamos estudar alguns teoremas sobre funções deriváveis em intervalos de $\mathbb{R}$ que nos permitem fazer o estudo completo de funções, incluindo monotonia, extremos e sentidos das concavidades dos seus gráficos.

4.2.1 O Teorema de Rolle

Teorema 4.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

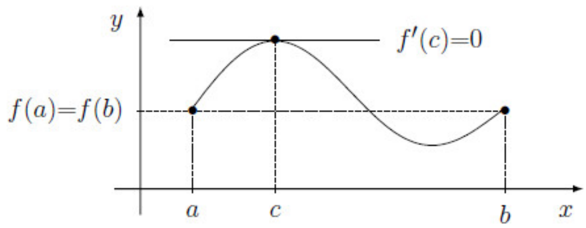


Figura 4.4: Teorema de Rolle.

Podemos afirmar que nas condições do Teorema de Rolle a função tem um ponto no interior do intervalo $[a, b]$ onde a tangente é uma reta horizontal.

Demonstração. Nas condições do Teorema de Rolle, f tem máximo e mínimo em $[a, b]$ (pelo Teorema de Weierstrass).

Se a função for constante em $[a, b]$, isto é, $f(x) = k$ onde $k = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a, b]$ e o máximo é igual ao mínimo e igual a k. Então, em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$ a derivada é nula, pelo que o teorema é verdadeiro neste caso.

Suponhamos agora que f não é constante. Como f é contínua, então, pelo Teorema de Weierstrass, admite no intervalo $[a, b]$ um máximo M e um mínimo m e $m \neq M$ já que a função não é constante.

Então a função admite no interior do intervalo $[a, b]$ um máximo, um mínimo ou até os dois.

Admita-se que f admite o valor máximo M no ponto c tal que $a < c < b$.

Então para valores de $x < c$ vem $x - c < 0$ e também $f(x) - f(c) \leq 0$ e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Como f é derivável no intervalo, vem

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)\geq 0.$$

Para valores de x à direita de c, $x-c>0$ e $f(x)-f(c)\leq 0$ e portanto

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0,$$

e também,

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)\leq 0.$$

Mas então conclui-se que

$$f'(c)\geq 0 \text{ e } f'(c)\leq 0$$

o que só é possível se $f'(c)=0$, provando-se assim o teorema.

A prova seria análoga se considerássemos o mínimo m atingido num ponto do interior do intervalo. □

Exercício resolvido 4.1. 1. Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$ com $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in]a,b[$. f é injetiva em $[a,b]$? E monótona?

2. Se f é estritamente monótona e derivável em $]a,b[$, então $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in]a,b[$?

3. Prove que entre duas raízes (dois zeros) consecutivas duma função, derivável em $\mathbb{R}$, existe uma raiz da sua derivada. Prove ainda que entre raízes consecutivas da derivada existe quando muito uma raiz da função.

Resolução do exercício 4.1. 1. Provemos que f é injetiva. Suponhamos, por redução ao absurdo, que f não era injetiva, isto é, que existiam x_1 e x_2 distintos $(x_1<x_2)$ mas $f(x_1)=f(x_2)$. Se aplicarmos o Teorema de Rolle ao intervalo $[x_1,x_2]$, como f é contínua neste intervalo, derivável em $]x_1,x_2[$ e $f(x_1)=f(x_2)$, existiria um $c\in]x_1,x_2[\subseteq]a,b[$ tal que $f'(c)=0$, contrariando a hipótese de que $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in]a,b[$.

Logo f é injetiva em $[a,b]$.

Provemos agora que a função é estritamente monótona em $[a,b]$. Suponhamos que não, isto é, ou existem x_1 e x_2 em $[a,b]$ distintos tais que $f(x_1)=f(x_2)$ e neste caso a função não seria injetiva, ou existem $x_1<x_2<x_3$ em $[a,b]$ tais que $f(x_1)<f(x_2)$ e $f(x_2)>f(x_3)$ ou $f(x_1)>f(x_2)$ e $f(x_3)>f(x_2)$.

Consideremos o primeiro caso, isto é, $x_1<x_2<x_3$ com $f(x_1)<f(x_2)$ e $f(x_3)<f(x_2)$. Podem suceder duas situações: $f(x_1)>f(x_3)$ ou $f(x_1)<f(x_3)$. Se $f(x_1)>f(x_3)$, pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um $c\in]x_2,x_3[$ tal que $f(c)=f(x_1)$ e a função não seria injetiva.

Se $f(x_1)<f(x_3)$, pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um $d\in]x_1,x_2[$ tal que $f(d)=f(x_3)$ e a função não seria injetiva.

A prova seria análoga para o caso em que $f(x_1)>f(x_2)$ e $f(x_3)>f(x_2)$. Portanto podemos afirmar que a função tem que ser estritamente monótona em $[a,b]$.

2. Não. Seja f a função definida em $[-1,1]$ por $f(x)=x^3$. Esta função é estritamente crescente e no entanto a derivada anula-se em $x=0$.

3. Sejam $r_1<r_2$ dois zeros consecutivos de f, isto é, $f(r_1)=f(r_2)=0$. f é contínua em $[r_1,r_2]$, derivável em $]r_1,r_2[$ e $f(r_1)=f(r_2)$. Aplicando o Teorema de Rolle podemos afirmar que existe um zero da derivada em $]r_1,r_2[$.

Sejam agora $s_1<s_2$ duas raízes consecutivas da derivada de f. Suponhamos que existiam dois zeros distintos de f, $r_1<r_2$, entre s_1 e s_2, isto é, $s_1\leq r_1<r_2\leq s_2$. Pelo que foi dito no parágrafo anterior, existiria um zero da derivada, s_3, entre r_1 e r_2, contrariando o facto de que s_1 e s_2 são zeros consecutivos de f', ou seja, teríamos $s_1\leq r_1<s_3<r_2\leq s_2$.

4.2.2 O Teorema de Lagrange

O seguinte teorema é também conhecido por **Teorema dos Acréscimos Finitos**.

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

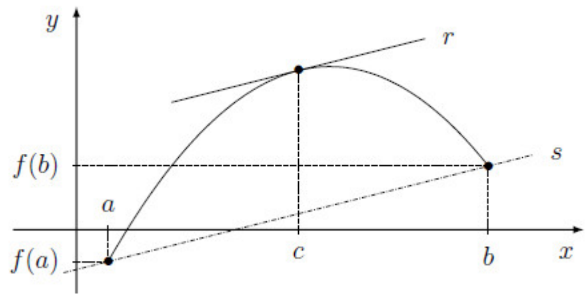


Figura 4.5: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{cccc} g & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \end{array}$$

Então g também é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Além disso, $g(a)=g(b)=0$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe algum $c \in]a,b[$ tal que $g'(c)=0$. Mas

$$g'(c)=0 \Longleftrightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Longleftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Pelo teorema existe um ponto $c \in]a,b[$ em que a reta r tangente ao gráfico da função f é paralela à reta secante em a e b (a reta s, na figura).

Facilmente se constata que estando c estritamente compreendido entre a e b, então pode expressar-se de forma única como

$$c = a+\theta(b-a),\ 0<\theta<1$$

e, portanto, a fórmula dos acréscimos finitos pode tomar o seguinte aspecto

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)),\ 0<\theta<1$$

ou ainda, fazendo $b=a+h$,

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Exercício 4.5 Seja $f:[3,2+e]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+\ln(x-2)$. Verifique que f satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.

4.2.2.1 Monotonia e Teorema de Lagrange

Da definição de derivada resulta que, sendo $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $]a, b[\subseteq D$,

$$\text{se } f \text{ é crescente em sentido lato em } [a, b] \text{ então } f'(x) \geq 0,\ \forall x \in]a, b[\ ;$$
$$\text{se } f \text{ é decrescente em sentido lato em } [a, b] \text{ então } f'(x) \leq 0,\ \forall x \in]a, b[\ ;$$
$$\text{(em particular) se} f(x) \text{ é constante em } [a, b] \text{ então } f'(x) = 0,\ \forall x \in]a, b[\ .$$

Contudo, o Teorema de Lagrange permite inferir acerca das recíprocas destas proposições. São consequências imediatas do Teorema de Lagrange as seguintes proposições:

Corolário 3. *Sendo f uma função definida e derivável num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (com mais de um ponto) tal que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, então f é uma função constante em I.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 pontos arbitrários em I, com $x_1 < x_2$. Sendo f derivável em I, pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ e portanto existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) = 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \text{ ou seja, } f(x_2) = f(x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é constante. □

Corolário 4. *Se f e g são funções deriváveis em D e $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in D$, então em cada intervalo $I \subseteq D$ existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$.*

Corolário 5. *Se f é uma função derivável em I e para todo o x pertencente a um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (com mais de um ponto) se tiver $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I e, se for $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 pontos arbitrários em I, com $x_1 < x_2$. Sendo f derivável em I, pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ e portanto existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) > 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \text{ ou seja, } f(x_2) > f(x_1)(\text{ já que } x_2 > x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é estritamente crescente.

Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, resulta que $f'(c) < 0$ e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ ou seja,} f(x_2) < f(x_1) \text{ (já que } x_2 > x_1).$$

Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários de I podemos concluir que f é estritamente decrescente. □

Note-se que nestes dois corolários I designa sempre um intervalo, pois de contrário não fica garantida a veracidade das afirmações feitas: por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem derivada nula em todos os pontos do seu domínio (que não é um intervalo) e, no entanto, não é constante nesse domínio.

Pode ainda deduzir-se do Teorema de Lagrange o seguinte corolário:

Corolário 6. *Dadas duas funções* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deriváveis, então*

$$f(a) \leq g(a) \ \wedge \ f'(x) \leq g'(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, b[.$$

Demonstração. Seja $x \in [a, b[$ qualquer e $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Pela fórmula dos acréscimos finitos, para cada $x \in]a, b[$, existe pelo menos um $c \in]a, x[$ tal que

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(c).$$

Como $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) \leq 0$ qualquer que seja $c \in]a, b[$, então obtém-se

$$\varphi(x) - \varphi(a) \leq 0, \ \forall x \in]a, b[$$

donde resulta

$$f(x) - g(x) \leq f(a) - g(a) \leq 0$$

ou seja,

$$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, b[$$

como se pretendia provar. □

Exercício 4.6

1. Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in [-1, 1]$
2. Estude o domínio e o gráfico de $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. (Ajuda: calcule f'!)

Exemplo 4.3. Mostremos que $f(x) = x + k \operatorname{sen} x$ é invertível se e só se $|k| \leq 1$.

A derivada de f é $f'(x) = 1 + k \cos x$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k \cos x = -1$.

- Se $|k| < 1$ então $|k \cos x| = |k| \, |\cos x| \leq |k| < 1$ e assim $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Se $k = \pm 1$ então $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \mp 1$ é satisfeita em pontos isolados
- Se $|k| > 1$ então f' muda de sinal: $f'(0) = 1 + k$ e $f'(\pi) = 1 - k$ têm sinais opostos.

Conclui-se que f é estritamente crescente, logo invertível, se e só se $|k| \leq 1$.

4.2.3 Máximos e mínimos locais

O elemento $a \in \operatorname{Int}(D_f)$ é *ponto crítico* de f se $f'(a) = 0$ ou se $a \notin D_{f'}$, ou seja, se a derivada se anula nesse ponto ou se não existe derivada nesse ponto.

Exemplo 4.4. Seja $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |1 - x^2|$. Os pontos críticos são $\{-1, 0, 1\}$.

Esta função não tem derivada em $c = -1$ nem em $c = 1$ e a derivada anula-se em $c = 0$.

Teorema 4.5. ***(Teorema de Fermat)*** *Seja f uma função definida e derivávell num intervalo aberto $]a, b[$, $a < b$. Se f tiver um extremo local num ponto $c \in]a, b[$, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. **(a)** Suponha-se que f tem um máximo local em $c \in]a, b[$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in]a, b[\quad x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

e, portanto, qualquer que seja $x \in]a, b[$,

$$\text{se } c - \varepsilon < x < c, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

e

$$\text{se } c < x < c+\varepsilon, \text{ então } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

donde resulta, por passagem ao limite quando $x \to c$ à esquerda e à direita, que

$$f'_e(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_d(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Como f é derivável em c, então ter-se-á $f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c)$, o que implica que seja $f'(c) = 0$.

(b) Analogamente se demonstra o caso em que f tem um mínimo local no ponto $c \in]a, b[$. □

Exemplo 4.5. Um ponto crítico pode não ser de extremo. As funções $f(x)=|x|+2x$ e $g(x)=x^3$ em $x=0$ têm um ponto crítico que não é extremo.

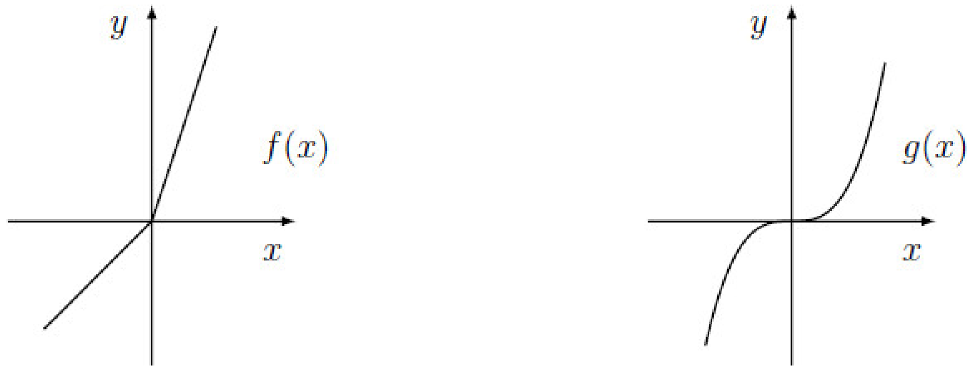


Figura 4.6: Ponto crítico que não é extremo.

Seja f for contínua no ponto crítico c. A derivada f' muda de sinal em c se e só se c é ponto de extremo estrito (mesmo que a derivada não exista em c).

Considere-se por exemplo a função $f(x) = |x|$ definida em $\mathbb{R}$. f é contínua, o único ponto crítico é $c = 0$, não existindo derivada neste ponto. Contudo, se $x < 0$ a função derivada $f'(x) = -1$ e se $x > 0$, $f'(x) = 1$. $c = 0$ é um minimizante e nesse ponto a derivada muda de sinal.

Se f' passar de positiva para negativa, f passa de estritamente crescente para decrescente, isto é, atinge um máximo (vice-versa para o mínimo).

Exercício 4.7

1. Seja $f(x)=|1-x^2|$ com domínio $D=]-1,2[$. Usando a derivada, justifique que 0 e 1 são pontos de extremo local. Classifique os pontos críticos e encontre os extremos globais.

2. Estude os extremos locais da função $g(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x+3}}$.

Em Cálculo II será estudado o Teorema de Taylor que justifica o seguinte resultado

Teorema 4.6. *Seja $c \in \text{Int}(D_f)$ um ponto crítico da função f. Se existir $f''(c)$, então:*

- *c é ponto de máximo quando $f''(c) < 0$;*
- *c é ponto de mínimo quando $f''(c) > 0$.*

Por ser útil no estudo de extremos locais de funções deriváveis que admitem segunda derivada, enunciamos aqui o resultado.

Exercício 4.8 Encontre e classifique os pontos de extremo da função $f(x) = x - \ln x$.

4.2.4 Convexidade, concavidade e pontos de inflexão

Definição 4.1. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é* ***convexa*** *no intervalo $I \subseteq D$ se para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq I$, o gráfico da função não está acima da reta secante nos pontos a e b.*

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é ***côncava*** *no intervalo $I \subseteq D$ se para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq I$, o gráfico da função não está abaixo da reta secante nos pontos a e b.*

Se f é convexa, diz-se que tem a concavidade voltada para cima e se f é côncava, diz-se que tem a concavidade voltada para baixo.

O ponto $c \in \text{Int}(D)$ é *ponto de inflexão* da função f se em $x = c$ o seu gráfico muda o sentido da concavidade.

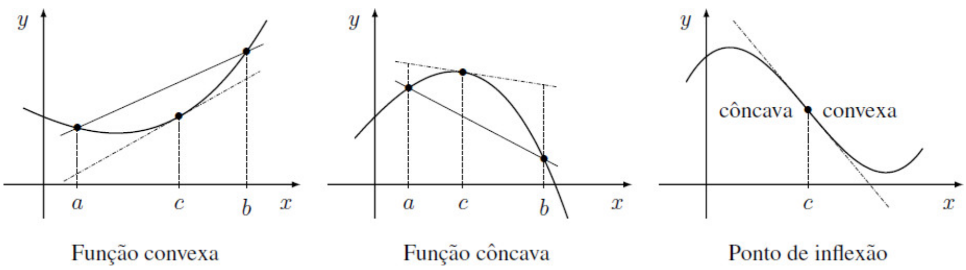


Figura 4.7: Exemplos de funções côncavas e convexas.

Seja $[a, b] \subseteq I$ um qualquer intervalo fechado contido em I. A equação da reta secante nos pontos a e b é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

- Dizer que o gráfico de f não está acima da reta secante significa que para qualquer $x \in [a, b]$,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

  Podemos então afirmar que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é ***convexa*** no intervalo $I \subseteq D$ se para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq I$ e para qualquer $x \in [a, b]$ se verifica

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{4.1}$$

- Dizer que o gráfico de f não está abaixo da reta secante significa que para qualquer $x \in [a, b]$,

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

  Podemos então afirmar que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é ***côncava*** no intervalo $I \subseteq D$ se para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq I$ e para qualquer $x \in [a, b]$ se verifica

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Proposição 4.1. *Seja f contínua. Se f é convexa em I então para todo o $a, b \in I$,*

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Obtém-se uma proposição análoga para f côncava.

Demonstração. Se na desigualdade (4.1) fizermos $x = \dfrac{a+b}{2}$ vem

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{2} + f(a) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

$\square$

Se f é derivável em $I \subseteq D_f$, pode-se estudar a sua concavidade a partir da função derivada f'.

Se f é convexa em I então a reta tangente em qualquer ponto $c \in I$ fica abaixo do gráfico da função em I. Se f é côncava em I então a reta tangente em qualquer ponto $c \in I$ fica acima do gráfico da função em I.

Seja f uma função definida num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e suponha-se que f é derivável num ponto $c \in I$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(c) + (x-c)f'(c)$$

representa no plano a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = c$. Se existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in]c-\delta, c+\delta[\cap I \;\Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

então dir-se-á que f é **convexa** no ponto c (ou que o gráfico de f tem, no ponto c, a concavidade voltada para cima).

Se existir $\delta' > 0$ tal que

$$x \in]c-\delta', c+\delta'[\cap I \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

então dir-se-á que f é **côncava** no ponto c (ou que o gráfico de f tem, no ponto c, a concavidade voltada para baixo).

Pode também acontecer que exista $\delta'' > 0$ tal que num dos intervalos $]c-\delta'', c[$ ou $]c, c+\delta''[$ se tenha $f(x) \leq g(x)$ enquanto que no outro se tem $f(x) \geq g(x)$. Nesta hipótese diz-se que $x = c$ é um **ponto de inflexão** de f (ou que o gráfico de f tem uma inflexão nesse ponto).

Se f é contínua no ponto c e se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$ também, nestas condições, se dirá que c é um ponto de inflexão de f.

Observe-se que se f é convexa num intervalo I e é derivável nesse intervalo, a função derivada é crescente. Analogamente, se f é côncava num intervalo I e é derivável nesse intervalo, a função derivada é decrescente. Assim, existindo a segunda derivada, f'', em I poderemos dizer que

$$f \text{ é convexa em } I \text{ se e só se } \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0.$$

$$f \text{ é côncava em } I \text{ se e só se } \forall x \in I,\ f''(x) \leq 0.$$

Observação 4.1. Mesmo que f seja não derivável num número finito de pontos do intervalo I,

- f é convexa em I se e só se f' é crescente onde existe em I;
- f é côncava em I se e só se f' é decrescente onde existe em I;
- $c \in \mathrm{Int}(I)$ é ponto de inflexão de f se e só se f' está definida numa vizinhança de c e, à esquerda e à direita, é estritamente monótona com sentidos opostos.

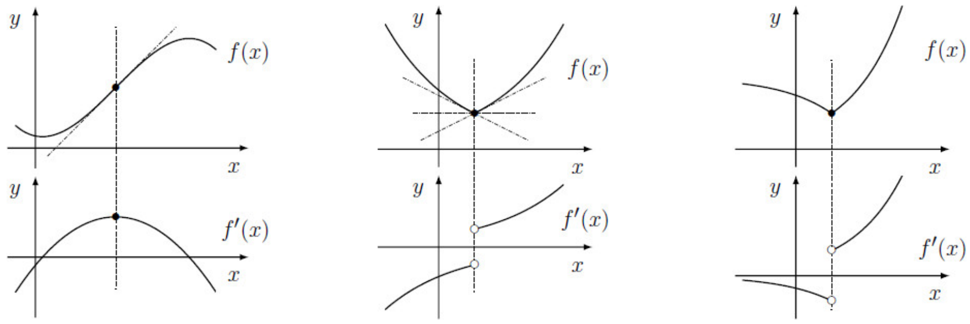


Figura 4.8: Ponto de inflexão.

- Um ponto $c \in \text{Int}(D_f)$ é de inflexão para f se e só se f'' muda de sinal em c.

  f'' pode mudar de sinal em c sem existir no ponto. Consequentemente, só zeros de f'' ou pontos onde f'' não existe podem ser pontos de inflexão de f.

Exercício 4.9 Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} x$ tem pontos de inflexão em $x = k\pi$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 4.10 Estude a concavidade de $f(x) = x^3 - 12x$ indicando, os pontos de inflexão, caso existam.

Exercício 4.11 Estude a concavidade das seguintes funções e averigue se 0 é ponto de inflexão.

1. $f(x) = |x|(mx + q)$ e $g(x) = mx^2 + q|x|$, com $m, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (esboce e analise o gráfico!);
2. $h(x) = x\sqrt{|x|}$ e $k(x) = x^2\sqrt{|x|}$.

Exercício 4.12 Esboce o gráfico das seguintes funções

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad g(x) = \frac{e^x}{x}, \qquad h(x) = 5|x|e^{-|x|}.$$

e estude a função quanto a

- domínio;
- sinal e zeros;
- assíntotas;
- intervalos de monotonia e pontos de extremo;
- concavidade e pontos de inflexão;
- contradomínio.

4.3 Teorema e regra de Cauchy

Sejam $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções nas condições do Teorema de Lagrange. Então existem dois pontos $c_1,\, c_2 \in]a,b[$, em geral distintos, tais que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

supondo $g'(c_2) \neq 0$ (o que implica, pelo Teorema de Lagrange que seja $g(b) \neq g(a)$).
O Teorema de Cauchy, no entanto, permite expressar aquela razão à custa de um único ponto $c \in]a,b[$.

Teorema 4.7. ***(Teorema de Cauchy)*** *Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e em $]a,b[$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Das hipóteses relativas à continuidade e diferenciabilidade da função g e ao facto de ser $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$, resulta, pelo Teorema de Rolle, que se tem $g(b)-g(a) \neq 0$ e, sendo assim, está bem definido o primeiro membro da igualdade a demonstrar.
Considere-se agora a função auxiliar

$$\varphi(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$$

definida em $[a,b]$. É de imediata verificação que
(1) φ é contínua em $[a,b]$;
(2) φ é derivável em $]a,b[$;
(3) $\varphi(a) = \varphi(b)$.
Então φ satisfaz as condições do Teorema de Rolle e, portanto, existe $c \in]a,b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Consequentemente, vem

$$0 = (g(b)-g(a))f'(c) - (f(b)-f(a))g'(c)$$

donde resulta a igualdade pretendida. □

Este teorema é também conhecido por Teorema dos Acréscimos Finitos Generalizado.

Observação 4.2. Substituindo no Teorema de Cauchy $g(x)$ por x obtém-se o Teorema de Lagrange.

Do ponto de vista prático, uma das aplicações mais importantes do Teorema de Cauchy é a seguinte

Teorema 4.8. ***(Regra de Cauchy)*** *Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em todos os pontos de um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponha-se que $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ é um dos extremos de I e que $g'(x) \neq 0$ em todo o ponto $x \in I$.*
Se, quando $x \to a$, $f(x)$ e $g(x)$ tendem simultaneamente para zero ou ambas para infinito (podendo ser $+\infty$, $-\infty$ ou uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$) e existe em $\tilde{\mathbb{R}}$ o limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ quando $x \to a$, então existe o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ em $\tilde{\mathbb{R}}$ quando $x \to a$ e

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser vista em [Campos Ferreira, Introdução à Análise Matemática, Cap.IV]. □

Visto que a regra de Cauchy é aplicável tanto ao caso do limite superior como ao caso do limite inferior do intervalo aberto I então, por combinação destas duas situações, pode obter-se

Corolário 7. *Sejam I um intervalo aberto, c um ponto de I e f e g duas funções deriváveis em $I \setminus \{c\}$. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, e se as funções f e g tendem ambas para zero quando $x \to c$ ou ou ambas para infinito quando $x \to c$, então*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite do segundo membro exista em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Exemplo 4.6. Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ uma constante. O limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

assume a forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Como as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^\alpha$ são deriváveis em $]0, +\infty[$ e $g'(x) \neq 0$ neste intervalo, pode aplicar-se a regra de Cauchy, obtendo-se então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

logo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Observação 4.3. **(a)** Observe-se que pode existir o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e, verificando-se todas as outras condições da regra de Cauchy (Teorema 4.8), não existir o limite de $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. É o que se passa no caso em que

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x$$

e se consideram os limites quando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Este limite não existe, contudo, existe o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(b) Se $f'(x)$ e $g'(x)$ tendem ambas para zero ou para infinito quando $x \to a$ e a regra de Cauchy é aplicável a $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e assim sucessivamente.
(c) Os símbolos $0 \times \infty$ ou $+\infty - \infty$ que podem surgir no cálculo do limite de $f(x)g(x)$ ou de $f(x) - g(x)$, respetivamente, reduzem-se a $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ pelas seguintes transformações

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right].$$

(d) No caso da potência exponencial

$$f(x)^{g(x)}, \ f(x) > 0, \ \forall x \in I$$

podem levantar-se indeterminações tendo em conta que

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$

Teorema 4.9. *Seja f uma função definida num intervalo aberto I e n vezes derivável num ponto $c \in I$. Se*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x-c)^n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Demonstração. A demonstração pode fazer-se por indução sobre n.
(1) Se $n = 1$, uma vez que $f(c) = 0$, vem

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c)$$

(resulta da definição de derivada de f em c).
(2) Suponha-se a afirmação verdadeira para $n = p$, ou seja, se

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(p-1)}(c) = 0$$

então verifica-se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x-c)^p} = \frac{f^{(p)}(c)}{p!}. \tag{4.2}$$

Suponha-se ainda que $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(p-1)}(c) = f^{(p)}(c) = 0$.

Usando a regra de Cauchy vem

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x-c)^{p+1}} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(p+1)(x-c)^p} = \frac{1}{(p+1)} \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(x-c)^p} \tag{4.3}$$

e, como $f'(c) = (f')'(c) = \ldots = (f')^{(p-1)}(c) = 0$, então de (4.2) resulta

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{(x-c)^p} = \frac{(f')^{(p)}(c)}{p!} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{p!}. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) obtém-se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x-c)^{p+1}} = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}.$$

De (1) e (2) resulta provado o teorema. □

Teorema 4.10. ***(Regra de l'Hôpital)*** *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo aberto I e deriváveis num ponto $c \in I$. Suponha-se que $g(x) \neq 0$ em $I \setminus \{c\}$, $f(c) = g(c) = 0$ e $g'(c) \neq 0$. Então, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem limite quando $x \to c$ e*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Em $I \setminus \{c\}$, tem-se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x) - g(c)}{x-c}}$$

donde, passando ao limite quando $x \to c$, se obtém o resultado pretendido. □

Observação 4.4. **(a)** A regra de l'Hôpital é válida se $g'(c) = 0$ e $f'(c) \neq 0$ e, neste caso, o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quando $x \to c$ é infinito. A regra ainda é válida se uma das derivadas $f'(c)$ ou $g'(c)$ (mas não ambas) for infinita com as convenções habituais $\dfrac{\infty}{\alpha} = \infty$ e $\dfrac{\alpha}{\infty} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) É de observar que a regra de l'Hôpital não é um caso particular de regra de Cauchy: as hipóteses são diferentes, já que neste caso se exige que as funções estejam definidas em c.

Exercício 4.13 Deduza os Teoremas de Rolle e de Lagrange a partir do Teorema de Cauchy.

Exercício 4.14 Calcule os seguintes limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ com $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x + \cos x$. Pode aplicar a Regra de Cauchy para o cálculo destes limites?

Exercício 4.15 A Regra de Cauchy pode utilizar-se para limites laterais. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

Exercício 4.16 Verifique que $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$ e aplique a regra aos limites $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}}$.

Exercício 4.17 Verifique que se f tiver assímptota não vertical direita $y = mx + b$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f'(x) = l$, então $m = l$ (analogamente à esquerda).

Exercício 4.18 Calcule os seguintes limites:
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arccot} x$.

Analisemos agora um exemplo de uma função definida por ramos. Seja a um ponto de acumulação de D_f, domínio da função contínua dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < a \\ b & \text{se } x = a \\ h(x) & \text{se } x > a \end{cases}$$

Note-se que $b = \displaystyle\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} h(x)$ pela continuidade de f.

- A derivada de f coincide com a derivada de g para $x < a$ e com a derivada de h para $x > a$ (nos pontos em que g e h são deriváveis).

- Contudo $f'(a)$ pode existir ou não. Considerem-se as funções

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

  Uma das derivadas existe e a outra não: $f_1'(0) = 0$ e $f_2'(0)$ não existe.

Lema 4.1. *Seja f contínua em a. Pode-se afirmar que*

$$\textit{Se } \lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_+(a) = l \quad \textit{e} \quad \textit{se } \lim_{x\to a^-} f'(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}} \textit{ então } f'_-(a) = l.$$

Exercício 4.19

Verifique que, nas condições do lema, pode usar a Regra de de l'Hôpital para calcular
$f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Teorema 4.11. *Seja f contínua em a. Se $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ então $f'(a) = l$.*

Exemplo 4.7. Vamos caracterizar a derivada da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1. \end{cases}.$$

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois x^2 é contínua em $x \leq 1$, $2x-1$ é contínua em $x > 1$ e

$$f(1) = 1^2 = \lim_{x\to 1^+} (2x-1).$$

Se $x < 1$ então $f'(x) = 2x$ e se $x > 1$ então $f'(x) = 2$.
Em $x = 1$ tem-se $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$, ou seja, $f'(1) = 2$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Exercício 4.20 Caracterize a derivada da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

explicando porque é que $D_{g'} \neq \mathbb{R}$.

Observação 4.5. Mesmo que os limites laterais da derivada f' não existam no ponto a, podem existir as derivadas laterais em a mas é preciso calculá-las pela definição. Note-se que, neste caso, a derivada pode existir em a mas não é contínua.

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Prove ainda que $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e que não existe o $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Apesar disso, a função é derivável também em $x = 0$ e assim $D_{f'} = \mathbb{R}$.

De facto, pela definição,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

4.4 Soluções dos exercícios do capítulo

Exercício 4.1 O domínio da função é $[-4,6[$. Em $x=-4$ a função tem um mínimo local, $f(-4)=2$; não tem mínimo global. Tem o máximo local 3 em $x=-3$, $x=-2$, $x\in[0,1[$ e $x\in[4,5]$. Tem o máximo local 2 em $x=2$ e em $x\in[3,4[$. 3 é o máximo global da função. são extremos estritos $f(-4)$, $f(-3)$ e $f(-2)$, $f(-1)$ e $f(2)$.

Exercício 4.2

1. f contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. $y=\frac{\pi+1}{2}$ é uma assíntota horizontal à direita; $y=1$ é uma assíntota horizontal à esquerda e não tem assíntotas verticais.
3. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{\ln 2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercício 4.3 $g(0)=-\dfrac{\pi}{15}<0$ e $g(2)=\dfrac{4\pi}{15}>0$, como g é contínua em $[0,2]$, g tem um zero neste intervalo.

Exercício 4.4 f é contínua em $]1,2]$ mas não é limitada em $]1,2]$. Não existe contradição com o Teorema de Weierstrass já que a continuidade não se verifica num intervalo fechado.

Exercício 4.5 $y-f(c)=\frac{e}{e-1}(x-c)$ onde $c=e+1$.

Exercício 4.8 $f(1)$ é um mínimo local e absoluto.

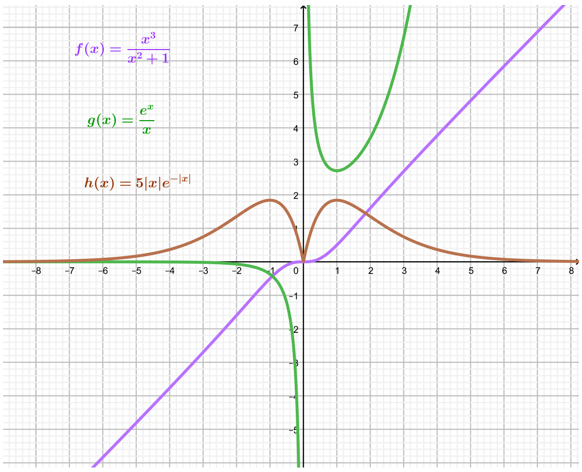
Exercício 4.10 $(0,f(0))$ ponto de inflexão; $]-\infty,0]$ côncava; $[0,+\infty[$ convexa.

Exercício 4.11

1. $f(x)=|x|(mx+q)$ se $m>0$ convexa em $]0,+\infty[$ e côncava em $]-\infty,0[$; se $m<0$ côncava em $]0,+\infty[$ e convexa em $]-\infty,0[$; 0 é ponto de inflexão.
   $g(x)=mx^2+q|x|$, se $m>0$ convexa e se $m<0$ côncava em $\mathbb{R}$ e 0 não é ponto de inflexão.
2. $h(x)=x\sqrt{|x|}$ convexa em $]0,+\infty[$ e côncava em $]-\infty,0[$. 0 é ponto de inflexão.
   $k(x)=x^2\sqrt{|x|}$ convexa em $\mathbb{R}$ e 0 não é ponto de inflexão.

Exercício 4.12

- $D_f=D_h=\mathbb{R}$; $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $f(x)<0\Leftrightarrow x<0$ e $f(x)>0\Leftrightarrow x>0$; g não tem zeros, $g(x)<0\Leftrightarrow x<0$ e $g(x)>0\Leftrightarrow x>0$; $h(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $h(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.
- $y=x$ assíntota bilateral para f; $x=0$ assíntota vertical para g e $y=0$ assíntota à esquerda para g; $y=0$ assíntota bilateral para h.
- f é crescente em $\mathbb{R}$; g decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]010[$, crescente em $]1,+\infty[$ e mínimo local em $(1,g(1))=(1,e)$; , intervalos de monotonia e pontos de extremo; h é crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]0,1[$, decrescente em $]-1,0[$ e em $]1,+\infty[$, mínimo local e absoluto em $(0,h(0))=(0,0)$ e máximo local e absoluto em $(1,h(1))=(1,5/e)$ e em $(-1,h(-1))=(1,5/e)$
- f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$, $(0,f(0))=(0,0)$ é ponto de inflexão; g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$ e voltada para cima em $]0,+\infty[$, não tem ponto de inflexão; h tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2[$ e em $]2,+\infty[$ e tem concavidade voltada para baixo em $]-2,0[$ e em $]0,2[$, pontos de inflexão $(-2,h(-2))=(-2,10/e^2)$ e $(2,h(2))=(2,10/e^2)$.
- $CD_f=\mathbb{R}$; $CD_g=]-\infty,0[\cup[e,+\infty[$; $CD_h=]0,5/e]$.



Exercício 4.14 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. Não.

Exercício 4.15 0

Exercício 4.16 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0.$

Exercício 4.18 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = 2$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2} = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{arccot} x = +\infty$.

Exercício 4.20

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Nota

Este texto teve como base textos de apoio da unidade curricular usados em anos anteriores e o livro Curso de Análise Matemática de José J. M. de Sousa Pinto, Ed. Universidade de Aveiro, 2010.

Agradeço aos colegas Domenico Catalano e Jorge Sá Esteves pela leitura cuidada e correção de erros.