Universidade do Minho

2ºSemestre 2016/17

(MIEI, 3ºAno)

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

Trabalho Prático Nº 1

(*Programação Dinâmica Estocástica*)

Identificação do Grupo

Número	Nome completo:	Rubrica
A71150	André Ricardo Covelo Germano	André Germano
A74619	André Rodrigues Freitas	André Freitas
A76658	Sofia Manuela Gomes de Carvalho	Sofia Carvalho

Conteúdo

Introdução

Este trabalho prático consiste na construção de um modelo de programação dinâmica estocástica para determinar qual a política ótima de reposições do stock de peças de um técnico-reparador de uma empresa multinacional que produz produtos farmacêuticos usando tecnologia de ponta.

Essa empresa possui cinco fábricas na Península Ibérica, uma em cada uma das seguintes cidades: Lisboa (cidade 1), Porto (cidade 2), Vigo (cidade 3), Madrid (cidade 4) e Valência (cidade 5). Para fazer manutenção destas fábricas, há um técnico-reparador que as visita a todas de forma sucessiva sempre pela mesma ordem, correspondendo essa ordem aos números atribuídos a cada cidade e visitando uma fábrica por dia de segunda a sexta-feira.

Para além de fazer manutenção, o técnico-reparador pode ainda ter de substituir peças fulcrais para o funcionamento de algum equipamento eletrónico, mas só pode levar um stock máximo de peças consigo num dado momento e pode também, por vezes, não ter um número de peças suficiente para reparar o equipamento em questão. Quando o número de peças não é suficiente, pode contratar um técnico-reparador local que complete o serviço de reparação, sendo isso acrescido de um custo fixo extra. Deve-se ter ainda em conta que o técnico-reparador da empresa pode fazer uma reposição do seu stock de peças para o nível máximo em qualquer cidade, sendo que o custo varia de cidade para cidade, mas não depende da quantidade reposta.

Neste trabalho, analisaremos se é possível a empresa adotar uma política de reposição do stock de peças do seu técnico-reparador, em função da cidade que este vai visitar a seguir e do número de peças por si transportadas da cidade anterior, de forma a minimizar a esperança total dos custos semanais que dependem da contratação, ou não, de um técnico-reparador local e do custo de uma reposição de stock efetuada pelo técnico-reparador da empresa numa dada cidade.

Pretendemos também consolidar os conhecimentos adquiridos ao longo desta unidade curricular, mais concretamente os referentes à programação dinâmica estocástica.

Desenvolvimento

Formulação do problema

Para determinar a política ótima referida anteriormente, foi formulado um modelo de programação dinâmica estocástica, tendo sido seguidos os passos necessários. Deve ser dito ainda que este se trata de um problema com um número finito de estágios, com alternativas, algo que fica bastante claro de seguida.

Estágios

Primeiro, começamos por identificar os estágios (*j*), que correspondem ao final de cada dia, sendo que em cada dia é visitada a fábrica de uma cidade, pela seguinte ordem:

1. Lisboa (segunda-feira);
2. Porto (terça-feira);
3. Vigo (quarta-feira);
4. Madrid (quinta-feira);
5. Valência (sexta-feira).

A ordem de visita das cidades é sempre a mesma e, por isso, o estágio 1 corresponde ao final do dia em que se visitou Lisboa, o estágio 2 ao final do dia em que se visitou a cidade do Porto, e assim sucessivamente. Temos, por isso, um número finito de estágios.

Estados

De seguida, definimos os estados deste problema, que correspondem ao número de peças em *stock* do técnico-reparador num dado instante (estágio). Neste caso, o número máximo de peças (*M*) que o técnico-reparador pode transportar é 5 e, por isso, os estados variam entre 0 a 5 peças.

Decisões

Existem ainda as decisões que o técnico-reparador pode tomar e que queremos que passem a obedecer a uma política sistemática, sendo elas:

- Não repor;
- Repor.

Queremos averiguar, então, se o técnico-reparador deve ou não repor o seu *stock* de peças num determinado dia, sabendo que isso acarreta custos diferentes consoante a cidade, sendo, no entanto, o custo de reposição independente do número de peças repostas. Assim, trata-se de um problema com alternativas.

Objetivo

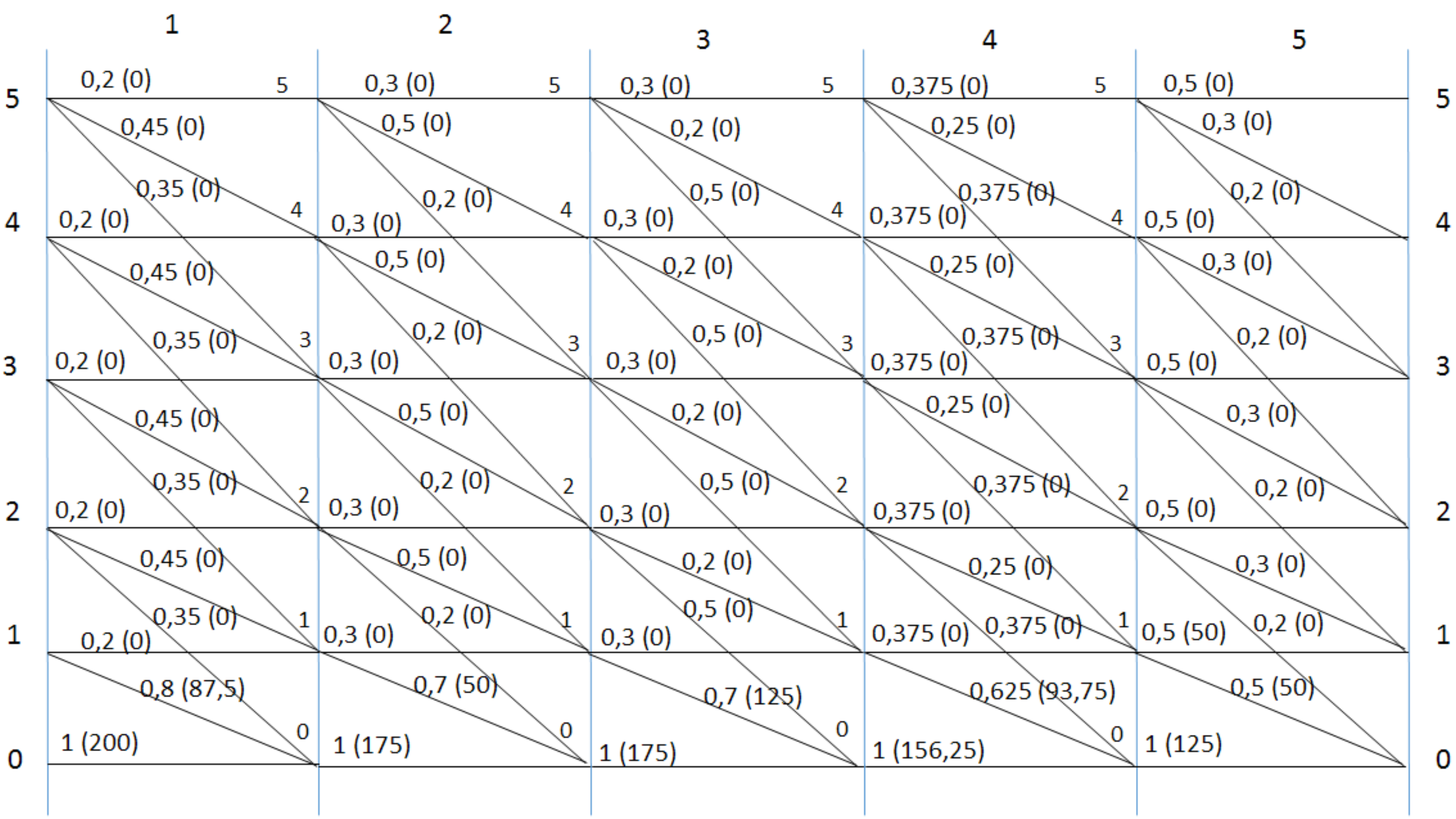
Por último, foi definido o objetivo do problema que é minimizar a esperança total dos custos semanais, o que tem em conta os custos de reposição, mas também os custos dos serviços de um técnico-reparador local que possa ter de ser chamado.

Antes de analisar em detalhe os modelos, é útil referir alguns pressupostos considerados. Visto não haver informação sobre a quantidade de peças com que o técnico-reparador tem de iniciar ou acabar uma determinada semana, foi assumido que o técnico-reparador poderá começar a semana com qualquer número de peças em *stock* de 0 a 5 e o mesmo acontece para o número de peças com que pode acabar a semana de manutenção.

Para além disso, consideramos que sempre que é chamado um técnico-reparador local para completar um serviço de substituição de peças, no caso em que o técnico-reparador possui 1 peça e são necessárias 2 peças para efetuar a substituição, a peça que o técnico-reparador tinha em *stock* é também ela utilizada na substituição, ou seja, o técnico-reparador local é chamado para fornecer a peça em falta. Embora o custo do reparador local seja independente do número de peças que são necessárias substituir e, por isso, nos pareça mais vantajoso ficar com uma peça em *stock* e o técnico local fazer toda a substituição, consideramos que o conceito de completar faria mais sentido utilizando a peça em *stock* e pareceu-nos também que seria mais realista, tendo em conta o funcionamento desta empresa.

Não repor

Tendo em conta as diferentes probabilidades (*p*) de ter de substituir *k* peças, num determinado estágio (*j*), foi desenhado o seguinte modelo de programação dinâmica para os casos em que não há reposição de *stock* no final do dia.



Analisaremos com mais exaustão o primeiro estágio, sendo a explicação para os restantes estágios análoga, podendo apenas variar probabilidades e custos.

No primeiro estágio, no arco que corresponde à transição de 5 peças no início do dia para 5 peças no fim do dia, está representada a situação em que não é necessário substituir nenhuma peça, o que faz com que não seja necessário repor qualquer peça no final do dia e assim o custo associado a este arco é nulo. A probabilidade de este acontecimento ocorrer é de 0,2. O arco de 5 peças no início do dia para 4 peças no fim do dia corresponde ao facto de ter de substituir 1 peça, algo que ocorre com uma probabilidade de 0,45, não havendo reposição de *stock* no final do dia, o que tem um custo de 0 U.M.. O arco da transição de 5 peças no início do dia para 5 peças no fim do dia representa a situação em que é necessário substituir 2 peças, acontecimento este que ocorre com uma probabilidade de 0,35. Como não há reposição de *stock*, o custo desta transição é nulo.

Nos estados iniciais 4, 3 e 2 repetem-se as hipóteses dos três primeiros arcos descritos acima e os cálculos dos custos é também igual, obtendo-se um custo nulo.

Quando o estado inicial é de 1 peça, a probabilidade de no fim do dia o técnico continuar com 1 peça em *stock* é de 0,2 e corresponde à probabilidade de não repor qualquer peça, tendo um custo de 0 U.M.. Partindo deste estado inicial é também possível chegar ao fim do dia sem nenhuma peça em *stock*, o que corresponde ao facto de ter de substituir 1 peça, algo que ocorre com probabilidade de 0,8 (0,8+0,2=1). O custo desta transição resulta do somatório da multiplicação das probabilidades pelos respetivos custos. Neste caso, isso corresponde ao seguinte cálculo: 0,45*0 + 0,35*(0+250) = 87,5 e obtém-se, assim, o valor do custo visível no arco desta rede.

A última transição desta rede corresponde à hipótese de o técnico ter no início do dia 0 peças em *stock*, não efetuar nenhuma substituição e de não repor o *stock,* terminando assim com 0 peças em *stock*. Como este é o único acontecimento que pode ocorrer partindo deste estado inicial, devido ao facto de o técnico poder apenas fazer manutenção de rotina, ou então substituir uma ou duas unidades de determinada peça, o estado final é sempre 0 peças em *stock*, o que acontece com uma probabilidade de 1. O custo desta transição traduz-se no somatório da multiplicação das probabilidades pelos respetivos custos. Neste caso, isso corresponde ao seguinte cálculo: 0,2*0 + 0,45*(0+250) + 0,35*(0+250) = 200. Assim, obtém-se o valor do custo visível no arco desta rede.

Para os outros estágios (Porto – cidade 2, Vigo – cidade 3, Madrid – cidade 4 e Valência – cidade 5), o método de determinação das probabilidades e respetivos custos de cada transição é análogo ao realizado para a cidade 1, descrita acima.

Listam-se de seguida os cálculos para os custos das várias transições em cada estágio.

<u>Porto</u>

- 5 para 5: 0
- 5 para 4: 0
- 5 para 3: 0
- 4 para 4: 0
- 4 para 3: 0
- 4 para 2: 0
- 3 para 3: 0
- 3 para 2: 0
- 3 para 1: 0

- 2 para 2: 0
- 2 para 1: 0
- 2 para 1: 0
- 1 para 1: 0
- 1 para 0: 0,5*0 + 0,2*(0+250) = 50
- 0 para 0: 0,3*0 + 0,5*(0+250) + 0,2*(0+250) = 175

Vigo

- 5 para 5: 0
- 5 para 4: 0
- 5 para 3: 0
- 4 para 4: 0
- 4 para 3: 0
- 4 para 2: 0
- 3 para 3: 0
- 3 para 2: 0
- 3 para 1: 0
- 2 para 2: 0
- 2 para 1: 0
- 2 para 1: 0
- 1 para 1: 0
- 1 para 0: 0,2*0 + 0,5*(0+250) = 125
- 0 para 0: 0,3*0 + 0,2*(0+250) + 0,5*(0+250) = 175

Madrid

- 5 para 5: 0
- 5 para 4: 0
- 5 para 3: 0
- 4 para 4: 0
- 4 para 3: 0
- 4 para 2: 0
- 3 para 3: 0
- 3 para 2: 0
- 3 para 1: 0
- 2 para 2: 0
- 2 para 1: 0
- 2 para 1: 0
- 1 para 1: 0

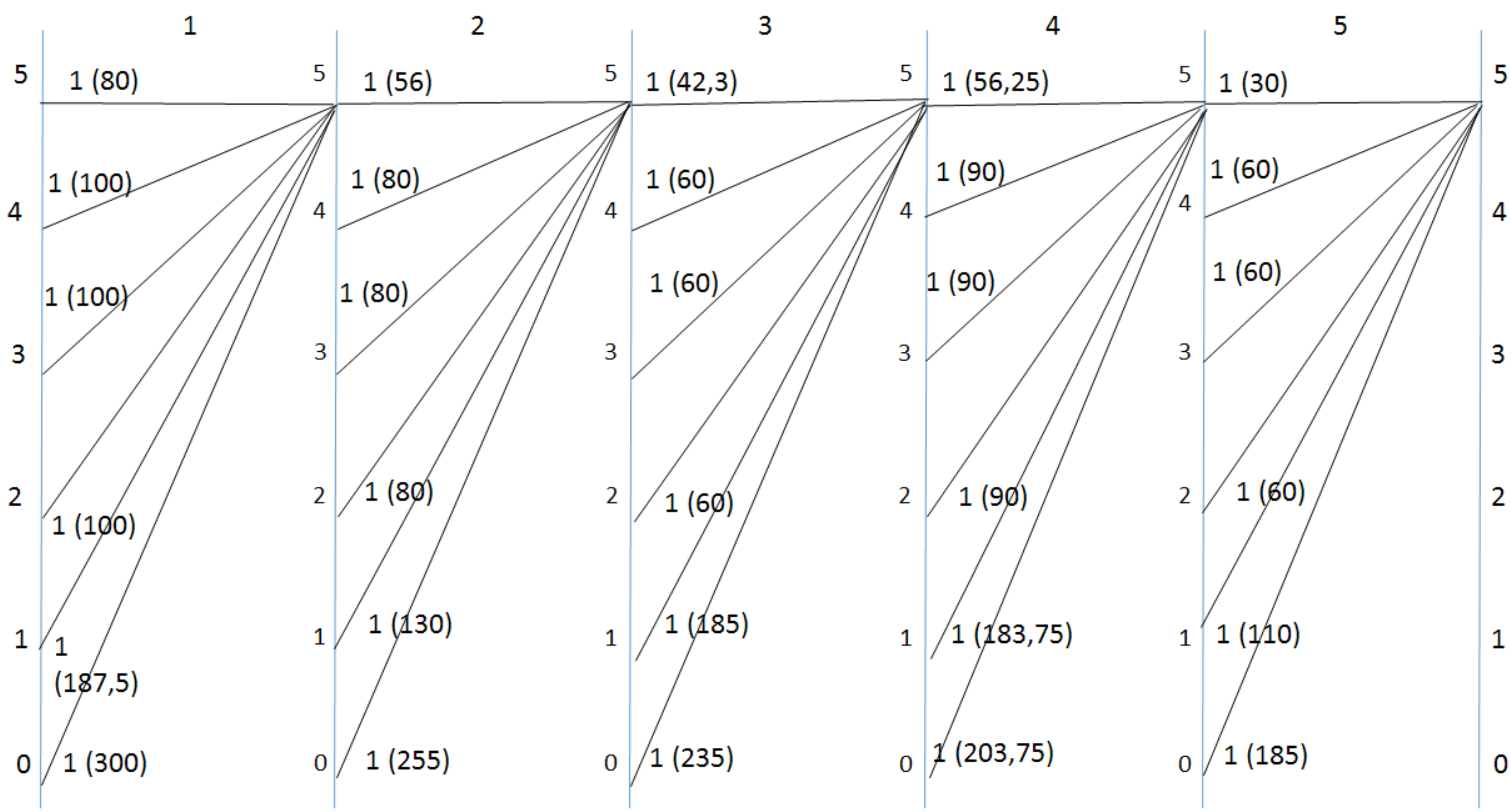
- 1 para 0: 0,25*0 + 0,375*(0+250) = 93,75
- 0 para 0: 0,375*0 + 0,25*(0+250) + 0,375*(0+250) = 156,25

Valência

- 5 para 5: 0
- 5 para 4: 0
- 5 para 3: 0
- 4 para 4: 0
- 4 para 3: 0
- 4 para 2: 0
- 3 para 3: 0
- 3 para 2: 0
- 3 para 1: 0
- 2 para 2: 0
- 2 para 1: 0
- 2 para 1: 0
- 1 para 1: 0
- 1 para 0: 0,3*0 + 0,2*(0+250) = 50
- 0 para 0: 0,5*0 + 0,3*(0+250) + 0,2*(0+250) = 125

Repor

Como existem diferentes probabilidades (*p*) de ter de substituir *k* peças, num determinado estágio (*j*), foi desenhado o seguinte modelo de programação dinâmica para os casos em que há reposição de *stock* no final do dia.



Como se vê pela figura acima, quando é tomada a decisão de repor no final do dia, independentemente do *stock* que o técnico possua no início do dia e das peças que sejam usadas, no final do mesmo dia terá o *stock* máximo de 5 peças, como previsto.

Analisaremos em detalhe o primeiro estágio, sendo a explicação para todos os outros análoga, podendo apenas variar probabilidades e custos.

Lisboa

No primeiro estágio, no arco que corresponde à transição de 5 peças no início do dia para 5 peças no fim do dia, estão implícitos 3 arcos e o mesmo acontece para os restantes. Isto deve-se ao facto de haverem 3 hipóteses nesta situação:

- Não ter de substituir nenhuma peça, algo que ocorre com uma probabilidade de 0,2 e que faz com que não seja necessário repor qualquer peça no final do dia e assim não haja qualquer custo associado a este arco;
- Ter de substituir 1 peça, algo que ocorre com uma probabilidade de 0,45, havendo reposição de stock no final do dia, o que tem nesta cidade um custo de 100 U.M.;

- Ter de substituir 2 peças, algo que ocorre com uma probabilidade de 0,35, havendo reposição de stock no final do dia, o que tem nesta cidade um custo de 100 U.M..

Estas 3 hipóteses podem ser unificadas num só arco que terá, por isso, probabilidade de 1, e cujo custo resulta do somatório da multiplicação das probabilidades pelos respetivos custos. Neste caso, isso corresponde ao seguinte cálculo: 0,2*0 + 0,45*100 + 0,35*100 = 80. Assim, obtém-se o valor do custo visível no arco desta rede.

Para o segundo arco, há apenas uma diferença que consiste no facto de no caso de não se ter de substituir peças, se poder fazer reposição visto que se parte de um stock de 4, tendo essa reposição o custo de 100 U.M.. O cálculo do custo deste arco é o seguinte: 0,2*100 + 0,45*100 + 0,35*100 = 100.

No terceiro e quarto arcos, repetem-se as hipóteses do segundo arco e o cálculo dos custos é também exatamente igual, obtendo-se o custo de 100 U.M..

No quinto arco, que corresponde à transição de 1 peça para 4 peças, existe uma nova situação, pois pode acontecer de ser necessário substituir 2 peças, o que se revelaria impossível quando só se possui apenas uma peça. Por isso, é necessário chamar um técnico-reparador local para resolver esta situação, o que tem um custo acrescido de 250 U.M., para além do custo da reposição. Assim, o cálculo do custo para este arco é o seguinte: 0,2*100 + 0,45* 100 + 0,35*(100+250) = 187,5.

Para o sexto e último arco, a situação é semelhante à do arco anterior para quando é necessário substituir 2 peças, mas ocorrendo também agora para 1 peça, pois parte-se de 0 peças em stock no início. O custo do reparador local é de 250 U.M. para ambas as situações. O cálculo do custo deste arco corresponde, por isso, a: 0,2*100 + 0,45*(100+250) + 0,35*(100+250) = 300.

Concluída a análise do primeiro estágio e sendo todos os outros análogos, listam-se de seguida os cálculos para os custos das várias transições em cada estágio.

<u>Porto</u>

- 5 para 5: 0,3*0 + 0,5*80 + 0,2*80 = 56
- 4 para 5: 0,3*80 + 0,5*80 + 0,2*80 = 80
- 3 para 5: 0,3*80 + 0,5*80 + 0,2*80 = 80
- 2 para 5: 0,3*80 + 0,5*80 + 0,2*80 = 80
- 1 para 5: 0,3*80 + 0,5*80 + 0,2*(80+250) = 130
- 0 para 5: 0,3*80 + 0,5*(80+250) + 0,2*(80+250) = 225

<u>Vigo</u>

- 5 para 5: 0,3*0 + 0,2*60 + 0,5*60 = 42,3
- 4 para 5: 0,3*60 + 0,2*60 + 0,5*60 = 60
- 3 para 5: 0,3*60 + 0,2*60 + 0,5*60 = 60
- 2 para 5: 0,3*60 + 0,2*60 + 0,5*60 = 60
- 1 para 5: 0,3*60 + 0,2*60 + 0,5*(60+250) = 185
- 0 para 5: 0,3*60 + 0,2*(60+250) + 0,5*(60+250) = 235

Madrid

- 5 para 5: 0,375*0 + 0,25*90 + 0,375*90 = 56,25
- 4 para 5: 0,375*90 + 0,25*90 + 0,375*90 = 90
- 3 para 5: 0,375*90 + 0,25*90 + 0,375*90 = 90
- 2 para 5: 0,375*90 + 0,25*90 + 0,375*90 = 90
- 1 para 5: 0,375*90 + 0,25*90 + 0,375*(90+250) = 183,75
- 0 para 5: 0,375*90 + 0,25*(90+250) + 0,375*(90+250) = 203,75

Valência

- 5 para 5: 0,5*0 + 0,3*60 + 0,2*60 = 30
- 4 para 5: 0,5*60 + 0,3*60 + 0,2*60 = 60
- 3 para 5: 0,5*60 + 0,3*60 + 0,2*60 = 60
- 2 para 5: 0,5*60 + 0,3*60 + 0,2*60 = 60
- 1 para 5: 0,5*60 + 0,3*60 + 0,2*(60+250) = 110
- 0 para 5: 0,5*60 + 0,3*(60+250) + 0,2*(60+250) = 185

Obtenção de resultados

n	k	P_n^k	R_n^k	Q_n^k	$P_n^k.F_{n-1}$	V_n^k	F_n
0		——	——	——	——	——	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$
1	NR	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0\\0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 0\\0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0\\0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}125\\25\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}125\\25\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}125\\25\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$
	R	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 185\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 110\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}185\\110\\60\\60\\60\\30\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}185\\110\\60\\60\\60\\30\end{bmatrix}$	
2	NR	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0,625 & 0,375 & 0 & 0 & 0 & 0\\0,375 & 0,25 & 0,375 & 0 & 0 & 0\\0 & 0,375 & 0,25 & 0,375 & 0 & 0\\0 & 0 & 0,375 & 0,25 & 0,375 & 0\\0 & 0 & 0 & 0,375 & 0,25 & 0,375\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}156,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\93,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}156,25\\58,594\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}125\\87,5\\53,125\\9,375\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}281,25\\146,094\\53,125\\9,375\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}203,75\\146,094\\53,125\\9,375\\0\\0\end{bmatrix}$
	R	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 203,75\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 183,75\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56,25\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}203,75\\183,75\\90\\90\\90\\56,25\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}203,75\\183,75\\90\\90\\90\\56,25\end{bmatrix}$	

3	NR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 175 \\ 87{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 203{,}75 \\ 186{,}45 \\ 147{,}03 \\ 86{,}484 \\ 28{,}438 \\ 4{,}6875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 378{,}75 \\ 273{,}953 \\ 147{,}031 \\ 86{,}4844 \\ 28{,}4375 \\ 4{,}6875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 235 \\ 185 \\ 60 \\ 60 \\ 28{,}4375 \\ 4{,}6875 \end{bmatrix}$
	R	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 235 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 185 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 235 \\ 185 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 42{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 235 \\ 185 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 42{,}3 \end{bmatrix}$	
4	NR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 175 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 235 \\ 220 \\ 157{,}5 \\ 85 \\ 50{,}531 \\ 27{,}625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 410 \\ 255 \\ 157{,}5 \\ 85 \\ 50{,}5313 \\ 27{,}625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 259{,}688 \\ 134{,}688 \\ 84{,}6875 \\ 84{,}6875 \\ 50{,}5313 \\ 27{,}625 \end{bmatrix}$
	R	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 255 \\ 130 \\ 80 \\ 80 \\ 80 \\ 56 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4{,}6875 \\ 4{,}6875 \\ 4{,}6875 \\ 4{,}6875 \\ 4{,}6875 \\ 4{,}6875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 259{,}988 \\ 134{,}688 \\ 84{,}6875 \\ 84{,}6875 \\ 84{,}6875 \\ 60{,}6875 \end{bmatrix}$	
5	NR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 87{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 200 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 259{,}69 \\ 234{,}69 \\ 168{,}44 \\ 102{,}19 \\ 77{,}856 \\ 57{,}905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 459{,}688 \\ 304{,}688 \\ 168{,}438 \\ 102{,}188 \\ 77{,}8563 \\ 57{,}9047 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 327{,}625 \\ 215{,}125 \\ 127{,}625 \\ 102{,}188 \\ 77{,}8563 \\ 57{,}9047 \end{bmatrix}$
	R	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 187{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 300 \\ 187{,}5 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 27{,}625 \\ 27{,}625 \\ 27{,}625 \\ 27{,}625 \\ 27{,}625 \\ 27{,}625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 327{,}625 \\ 215{,}125 \\ 127{,}625 \\ 127{,}625 \\ 127{,}625 \\ 107{,}625 \end{bmatrix}$	

Para a resolução deste problema, recorremos a um algoritmo muito utilizado e eficaz para este género de problemas e foi usada uma folha de cálculo do Excel, que se encontra em anexo, sendo que os resultados obtidos estão na tabela acima.

Primeiro, deve-se referir que se trata de um caso em que temos um número finito de estágios, com alternativas, o que influencia o método utilizado. Como se pode ver, partimos das redes representadas na secção anterior deste relatório para definir as matrizes de probabilidade (P_n^k) e as matrizes de contribuição (R_n^k) em cada um dos estágios e através destas foram calculadas a:

- Q_n^k – matriz de esperança da contribuição de estágio;
- $P_n^k.F_{n-1}$;
- V_n^k – esperança total da contribuição;
- F_n – esperança total da contribuição quando o sistema segue uma política ótima.

As matrizes P contêm as probabilidades de transição para um estado a partir de um determinado estado num estágio *j*, correspondendo aos valores fora de parêntesis nas redes, ou seja, às probabilidades de o técnico-reparador ter de substituir 0, 1 ou 2 peças de uma fábrica num determinado dia.

As matrizes R contêm as contribuições de transição para um estado a partir de um determinado estado num estágio *j*, correspondendo aos valores dentro de parêntesis nas redes, ou seja, aos custos de uma transição em específico, que poderão englobar tanto os custos de reposição de stock como os custos da contratação de um técnico-reparador local.

As matrizes Q resultam da multiplicação linha a linha de matrizes P e R para um mesmo *n* e constituem a esperança de contribuição de um estágio.

As matrizes V correspondem à soma de matrizes Q com a multiplicação matricial de matrizes P e F e constituem a esperança total da contribuição, sendo que é a partir destas que se vão obter as matrizes F.

A matriz F para *n*=0 deve-se ao facto de não existirem valores terminais neste problema e, por isso, trata-se de uma matriz nula. Para os valores de *n* seguintes, há que ter em conta que estamos perante um problema de minimização e, por isso, para constituir uma matriz F é necessário selecionar o menor valor entre as duas matrizes V (a que provém do “Não repor” e a que provém do “Repor”) para cada estado. Por exemplo, para *n*=1, para o estado 0, foi escolhido o valor 125 em vez de 185, pois era o menor dos dois. Como o 125 provém da decisão de “Não repor”, podemos dizer, neste caso, que no estágio 5, se o stock de peças for 0, não devemos repor esse stock. De salientar que analisamos o estágio 5 quando *n*=1, pois este algoritmo inicia-se a partir do final dos estágios e não do início.

Para os restantes valores de *n* e para os restantes estados, este método é utilizado de forma análoga e é através dele que se obtém a resolução do problema que corresponde à secção seguinte do relatório.

Resolução do problema

Tendo em conta os resultados obtidos anteriormente através do modelo desenvolvido na folha de cálculo do Excel e a estratégia deste algoritmo de programação dinâmica estocástica, estamos em condições de definir um plano detalhado para a reposição de stock do técnico-reparador de forma a minimizar os custos desta empresa. Esse plano para os vários estágios (fábricas das várias cidades) encontra-se então de seguida.

Lisboa (segunda-feira)

- Se no início do dia, o stock de peças do técnico-reparador for 0, a decisão da empresa deve ser repor o stock no final do dia de visita a esta fábrica;
- Se for 1, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 2, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 3, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 4, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 5, a decisão deve ser não repor no final do dia.

Porto (terça-feira)

- Se no início do dia, o stock de peças do técnico-reparador for 0, a decisão da empresa deve ser repor o stock no final do dia de visita a esta fábrica;
- Se for 1, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 2, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 3, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 4, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 5, a decisão deve ser não repor no final do dia.

Vigo (quarta-feira)

- Se no início do dia, o stock de peças do técnico-reparador for 0, a decisão da empresa deve ser repor o stock no final do dia de visita a esta fábrica;
- Se for 1, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 2, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 3, a decisão deve ser repor no final do dia;
- Se for 4, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 5, a decisão deve ser não repor no final do dia.

Madrid (quinta-feira)

- Se no início do dia, o stock de peças do técnico-reparador for 0, a decisão da empresa deve ser repor o stock no final do dia de visita a esta fábrica;
- Se for 1, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 2, a decisão deve ser não repor no final do dia;

- Se for 3, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 4, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 5, a decisão deve ser não repor no final do dia.

Valência (sexta-feira)

- Se no início do dia, o stock de peças do técnico-reparador for 0, a decisão da empresa deve ser não repor o stock no final do dia de visita a esta fábrica;
- Se for 1, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 2, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 3, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 4, a decisão deve ser não repor no final do dia;
- Se for 5, a decisão deve ser não repor no final do dia.

Assim, se o técnico-reparador seguir estas instruções da empresa, a esperança total dos custos semanais terá um valor mínimo ótimo.

Conclusão

Tal como pretendido, foi possível adotar uma política sistemática de reposição do *stock* máximo de peças do técnico-reparador da empresa de modo a retirar a decisão de repor ou não repor ao técnico, visto que acarretava alguns riscos de introduzir ineficiências na otimização dos custos.

Através do seguimento dessa política, a empresa poderá minimizar a esperança total dos custos semanais e, assim, tornar-se mais competitiva na indústria farmacêutica.

Em suma, este trabalho permitiu-nos consolidar os nossos conhecimentos sobre programação dinâmica estocástica obtidos nesta Unidade Curricular e motivou-nos ainda à utilização de uma ferramenta de criação e edição de folhas de cálculo como o Excel, que permite a rápida resolução de problemas deste género, em larga escala.