

Relatório Trabalho Prático MDIO



André Freitas A74619
Cesário Pernaut A73883
João Palmeira A73864
Sofia Carvalho A76658

Trabalho 2
MIEI
2/12/2016

1 Índice

2	Introdução	2
3	Parte I	3
4	Parte II	21
5	Parte III	31
6	Conclusão	43

2 Introdução

No âmbito da unidade curricular Modelos Determinísticos e Investigação Operacional, iremos elaborar um segundo trabalho que consiste na construção de um modelo de transportes em rede para uma empresa de produção de sumos, que permita determinar as quantidades a comprar, a produzir e a armazenar, em cada período do sumo de laranja, de modo a fornecer os pedidos dos clientes num horizonte de planeamento de doze meses, com um custo global mínimo.

Essa empresa produz sumo de laranja, à base de concentrado. A sua produção consiste, mais concretamente, em misturar a matéria prima, concentrado de sumo de laranja, água e açúcar, sendo os pacotes de sumo enchidos na única linha de engarrafamento existente.

Neste trabalho analisaremos as quantidades a comprar, a produzir e a armazenar, em cada período deste tipo de sumo num período de 12 meses de forma a minimizar os custos totais desta empresa.

Para este problema em questão usámos o software *RELAX4*, o qual determina a solução ótima de um problema de otimização em rede e em que os dados de entrada devem ser números inteiros.

Pretendemos também, com este trabalho, consolidar todos os conhecimentos adquiridos na unidade curricular aplicando-os ao longo da realização do mesmo.

3 Parte I

1. Modelo de Transporte em Rede

Tendo em conta que os custos do concentrado de laranja estão sujeitos a grande volatilidade no mercado, de acordo com os nossos números de alunos verificamos que o maior número de inscrição é o 76658 (ABCDE). Assim sendo, no nosso caso, os algarismos D e E indicam-nos que $X=180$ e $Y=200$, respetivamente.

A formulação deste problema é a que se segue.

1. Variáveis de decisão: x_{ij}
2. Função objetivo: *minimizar* $\text{custo} = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \times x_{ij}$
3. Restrições: $-\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} + \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = b_j, \forall j \in V$ (Conservação de fluxo)

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A \text{ (Capacidade)}$$

Onde:

1. V corresponde ao conjunto de vértices e A ao conjunto de arcos.
2. x_{ij} representa o fluxo no arco orientado (i,j) .
3. c_{ij} representa o custo unitário de transporte no arco orientado (i,j) .
4. u_{ij} corresponde à capacidade do arco orientado (i,j) .
5. b_j corresponde à oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j .

A figura 1 ilustra o modelo de transportes em rede. Encontra-se simplificado pois apenas foram representadas as considerações mais relevantes.

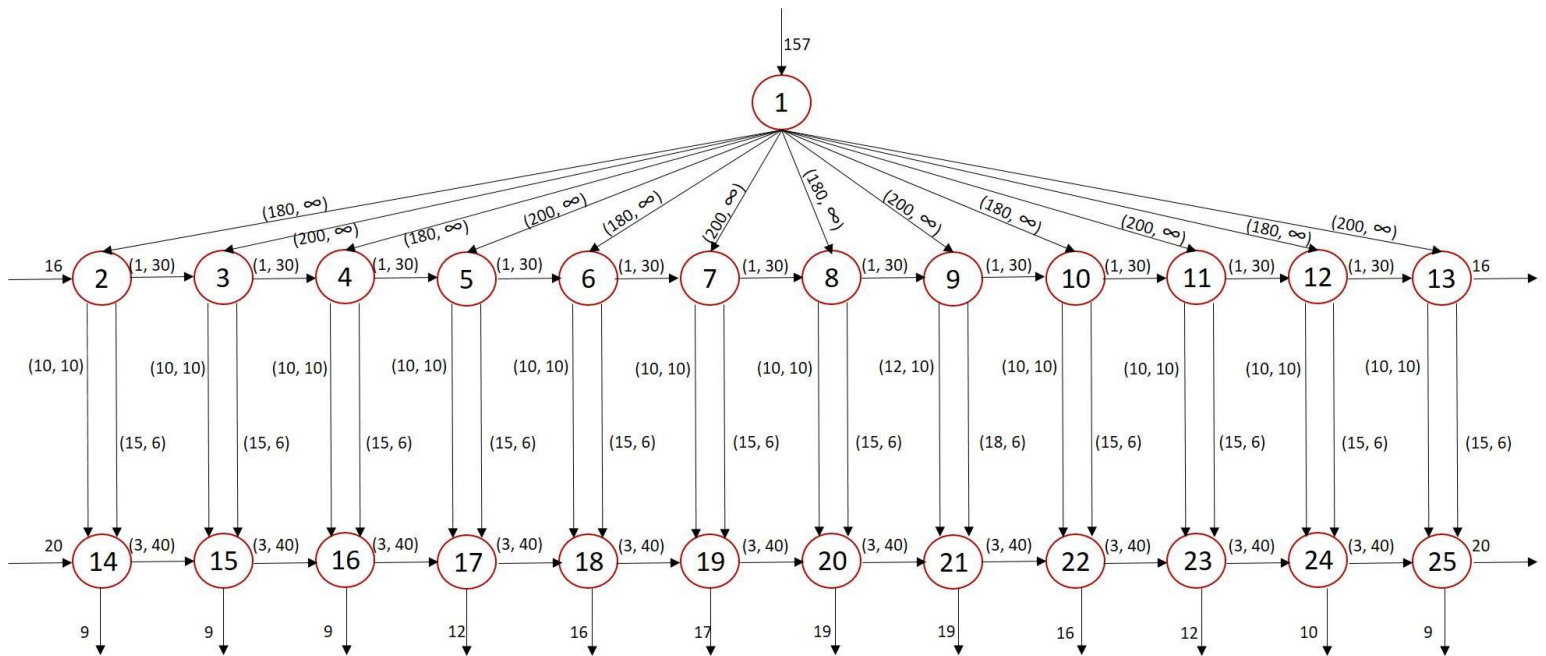


Figura 1 - Modelo de Transportes em Rede

1) Nós

Para resolver este problema foi necessário adicionarmos um total de 25 nós. Cada nó está identificado por um número da seguinte maneira:

a) 1

Nó correspondente ao fornecedor de concentrado;

b) 2-13

Nós correspondentes aos armazéns de concentrado ao longo dos períodos;

c) 14-25

Nós correspondentes aos armazéns de produto final ao longo dos períodos;

2) Arcos

No ficheiro usado no RELAX4, os arcos estão ordenados por grupos (primeiro vêm os arcos relativos às compras, etc.) e nesta secção iremos explicar o significado de cada arco neste modelo.

Sabendo que:

a) $1 \rightarrow 2-13$

Transporte de concentrado para os armazéns respetivos;

b) $2 \rightarrow 14, 3 \rightarrow 15, 4 \rightarrow 16, 5 \rightarrow 17, 6 \rightarrow 18, 7 \rightarrow 19, 8 \rightarrow 20, 9 \rightarrow 21, 10 \rightarrow 22, 11 \rightarrow 23, 12 \rightarrow 24, 13 \rightarrow 25$

Transporte do armazem de concentrado para o armazem de sumo em cada período onde existem dois arcos entre cada par de nós, sendo que o arco da direita corresponde ao transporte da produção extraordinária;

c) $2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 7, 7 \rightarrow 8, 8 \rightarrow 9, 9 \rightarrow 10, 10 \rightarrow 11, 11 \rightarrow 12, 12 \rightarrow 13$

Transporte de matéria prima de um período para o seguinte;

d) $14 \rightarrow 15, 15 \rightarrow 16, 16 \rightarrow 17, 17 \rightarrow 18, 18 \rightarrow 19, 19 \rightarrow 20, 20 \rightarrow 21, 21 \rightarrow 22, 22 \rightarrow 23, 23 \rightarrow 24, 24 \rightarrow 25$

Transporte de produto final de um período para o seguinte.

2. Ficheiro de Input

O ficheiro *input* desta primeira parte do trabalho é o que se apresenta na próxima imagem. Como temos que garantir a conservação de fluxo, o valor de oferta no vértice 1 é 157, que corresponde ao somatório de toda a procura.

De notar que o valor 11 que aparece na linha 74 da figura 3 corresponde ao facto de, no início, existirem em inventário no armazém 20 U.E de produto e a procura do cliente neste mês ser de 9 U.E. de sumo de laranja ($11=20-9$). O valor -29 que aparece na linha 85 da figura 3 corresponde ao facto de a procura do cliente no décimo segundo mês ser 9 U.E de sumo de laranja e o facto de no fim do horizonte de planeamento os inventários terem de ser os mesmos, ou seja, para o primeiro mês do próximo ano tem de estar em inventário no armazém 20 U.E de produto final.

1	25
2	58
3	1 2 180 1000
4	1 3 200 1000
5	1 4 180 1000
6	1 5 200 1000
7	1 6 180 1000
8	1 7 200 1000
9	1 8 180 1000
10	1 9 200 1000
11	1 10 180 1000
12	1 11 200 1000
13	1 12 180 1000
14	1 13 200 1000
15	2 3 1 30
16	2 14 10 10
17	2 14 15 6
18	3 4 1 30
19	3 15 10 10
20	3 15 15 6
21	4 5 1 30
22	4 16 10 10
23	4 16 15 6
24	5 6 1 30
25	5 17 10 10
26	5 17 15 6
27	6 7 1 30
28	6 18 10 10
29	6 18 15 6
30	7 8 1 30
31	7 19 10 10
32	7 19 15 6
33	8 9 1 30
34	8 20 10 10
35	8 20 15 6
36	9 10 1 30
37	9 21 12 10
38	9 21 18 6
39	10 11 1 30
40	10 22 10 10
41	10 22 15 6
42	11 12 1 30
43	11 23 10 10

Line 1, Column 1

Figura 3 - Input

43	11 23 10 10
44	11 23 15 6
45	12 13 1 30
46	12 24 10 10
47	12 24 15 6
48	13 25 10 10
49	13 25 15 6
50	14 15 3 40
51	15 16 3 40
52	16 17 3 40
53	17 18 3 40
54	18 19 3 40
55	19 20 3 40
56	20 21 3 40
57	21 22 3 40
58	22 23 3 40
59	23 24 3 40
60	24 25 3 40
61	157
62	16
63	0
64	0
65	0
66	0
67	0
68	0
69	0
70	0
71	0
72	0
73	-16
74	11
75	-9
76	-9
77	-12
78	-16
79	-17
80	-19
81	-19
82	-16
83	-12
84	-10
85	-29
86	

Line 1, Column 1

Figura 2 - Input

3. Ficheiro de Output

Nesta secção apresentamos o ficheiro *output* do ficheiro *input* apresentado no tópico anterior, obtido através do *RELAX4*. O resultado obtido corresponde aos arcos e aos seus custos associados.

```
C:\> Administrator: Linha de comandos

C:\Users\Utilizador\Desktop\MDIO\TRABALHO2\RELAX>cd "RELAX4 2013"

C:\Users\Utilizador\Desktop\MDIO\TRABALHO2\RELAX\RELAX4 2013>relax4 <parte1.txt
END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 58
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 1 4 13.
 1 6 32.
 1 8 32.
 1 10 32.
 1 12 46.
 1 13 2.
 2 3 16.
 3 4 7.
 3 15 9.
 4 5 10.
 4 16 10.
 5 17 10.
 6 7 16.
 6 18 10.
 6 18 6.
 7 19 10.
 7 19 6.
 8 9 16.
 8 20 10.
 8 20 6.
 9 21 10.
 9 21 6.
10 11 16.
10 22 10.
10 22 6.
11 23 10.
11 23 6.
12 13 30.
12 24 10.
12 24 6.
13 25 10.
13 25 6.
14 15 11.
15 16 11.
16 17 12.
17 18 10.
18 19 10.
19 20 9.
20 21 6.
21 22 3.
22 23 3.
23 24 7.
24 25 13.
OPTIMAL COST = 30544.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 70
NUMBER OF ITERATIONS = 89
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 21
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 10
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 15
*****
C:\Users\Utilizador\Desktop\MDIO\TRABALHO2\RELAX\RELAX4 2013>
```

Figura 4 - Output

4. Plano detalhado de produção

Apresentamos agora na figura 5 abaixo que mostra o plano detalhado de produção, onde estão indicadas as quantidades a comprar, a produzir e a armazenar e a entregar em cada período, tendo em conta o *output* do RELAX4.

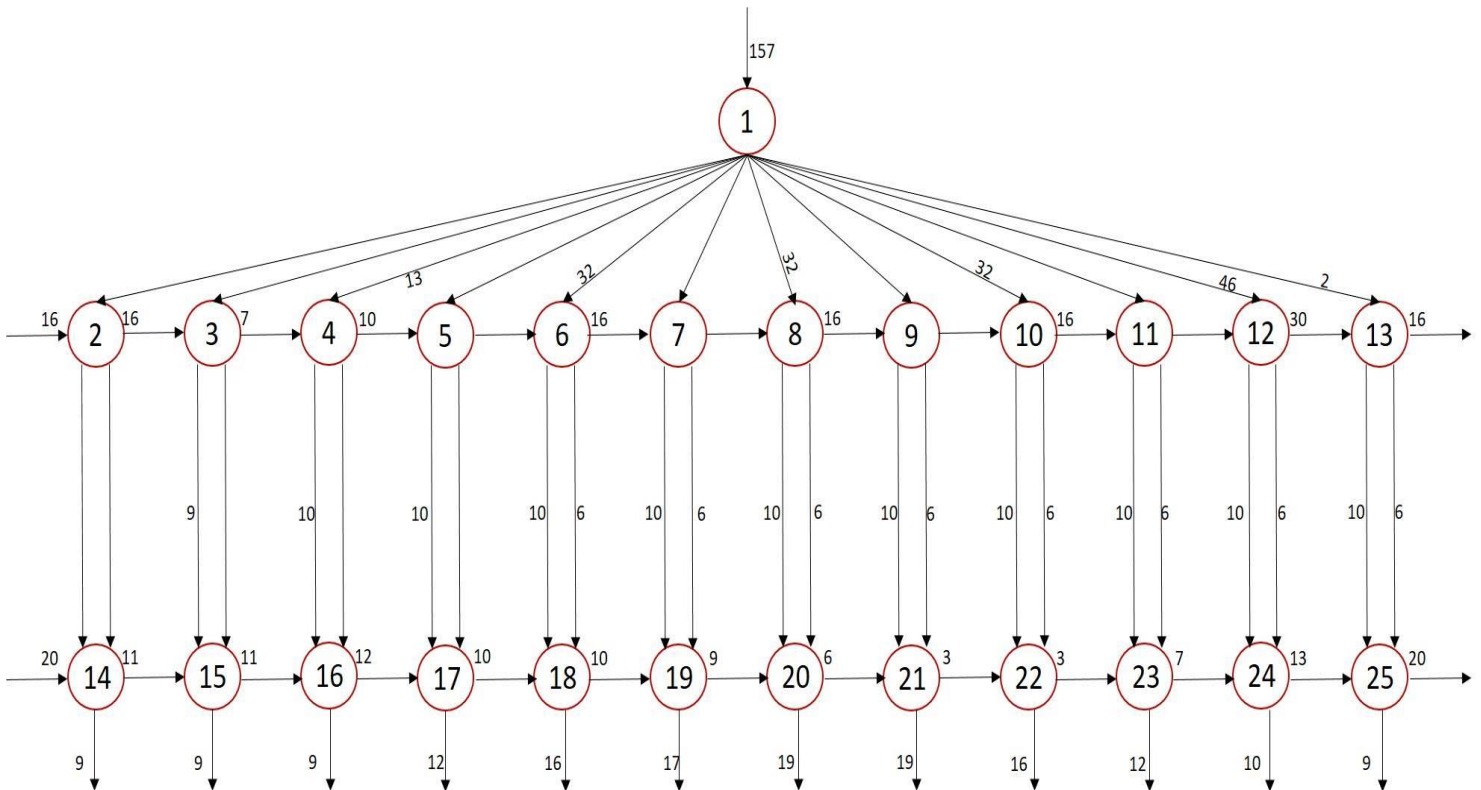


Figura 5 - Plano detalhado de produção

5. Validação do Modelo pelas restrições

Neste tópico, abordaremos a verificação da validação do modelo. Primeiro, através da conservação de fluxo, ou seja, se o fluxo de entrada num nó é igual ao fluxo de saída, e se as restrições de capacidade e produção são respeitadas.

As verificações serão apresentadas segundo esta enumeração:

1. Capacidade do armazém de matéria-prima (concentrado);
2. Capacidade do armazém do produto final (sumo);
3. Concentrado comprado + quantidade armazenada de concentrado = sumo produzido + quantidade armazenada de concentrado do mês seguinte;
4. Sumo produzido + quantidade armazenada de sumo = sumo vendido + quantidade armazenada de sumo no mês seguinte;

Nó 1

$$157 = 0 + 0 + 13 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 46 + 2 \equiv 157 = 157$$

Nó 2

$$16 + 0 = 0 + 0 + 16 \equiv 16 = 16$$

Nó 3

$$16 + 0 = 9 + 0 + 7 \equiv 16 = 16$$

Nó 4

$$7 + 13 = 10 + 10 \equiv 20 = 20$$

Nó 5

$$10 + 0 = 10 + 0 \equiv 10 = 10$$

Nó 6

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 7

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 8

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 9

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 10

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 11

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 12

$$0 + 46 = 10 + 6 + 30 \equiv 46 = 46$$

Nó 13

$$30 + 2 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 14

$$20 + 0 + 0 = 9 + 11 \equiv 20 = 20$$

Nó 15

$$11 + 9 + 0 = 9 + 11 \equiv 20 = 20$$

Nó 16

$$11 + 10 + 0 = 9 + 12 \equiv 21 = 21$$

Nó 17

$$12 + 10 + 0 = 12 + 10 \equiv 22 = 22$$

Nó 18

$$10 + 10 + 6 = 16 + 10 \equiv 26 = 26$$

Nó 19

$$10 + 10 + 6 = 17 + 9 \equiv 26 = 26$$

Nó 20

$$9 + 10 + 6 = 19 + 6 \equiv 25 = 25$$

Nó 21

$$6 + 10 + 6 = 19 + 3 \equiv 22 = 22$$

Nó 22

$$3 + 10 + 6 = 16 + 3 \equiv 19 = 19$$

Nó 23

$$3 + 10 + 6 = 12 + 7 \equiv 19 = 19$$

Nó 24

$$7 + 10 + 6 = 10 + 13 \equiv 23 = 23$$

Nó 25

$$13 + 10 + 6 = 9 + 20 \equiv 29 = 29$$

Estes resultados das restrições de capacidade são comprovados pelas figuras anteriores (1 e 5).

6. Validação pelo custo da solução ótima

Calcularemos agora o custo da solução ótima separadamente em custos de compra de concentrado, custos de produção e custos de armazenamento. Usaremos o plano detalhado de produção como suporte e, no final, é esperado que as somas destes custos coincidam com a solução ótima.

O modelo usado para o *RELAX4* não tem em conta as quantidades de produto final que transitam de um ano para o próximo.

Custos de compra de concentrado

$$180 * (0 + 13 + 32 + 32 + 32 + 46) + 200 * (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2) = 28300$$

Custos de produção

$$10 * (0 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10) + 12 * 10 + 15 * (0 + 0 + 0 + 0 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6) + 18 * 6 = 1848$$

Custos de armazenamento

$$1 * (16 + 7 + 10 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 30) + 3 * (11 + 11 + 12 + 10 + 10 + 9 + 6 + 3 + 3 + 7 + 13) = 396$$

Somatório dos custos

$$28300 + 1848 + 396 = 30544$$

7. Comparação com o Trabalho Prático 1 (TP1)

Neste tópico, iremos comparar a solução obtida na Parte 1 do primeiro trabalho prático com a solução obtida no *RELAX4*. Começaremos por apresentar o *input* e *output* do *LPSolve*.

Input:

```
////////////////////////////////////
```

```
//
```

```
// Trabalho 1
```

```
//
```

```
////////////////////////////////////
```

```
/* Variáveis de decisão:
```

```
i=1->laranja; i=2->maçã; i=3->pêra
```

```
xi_j: quantidade produzida do sumo i no mês j; i=1,2,3; j=1,2,...,12
```

```
ci_j: quantidade comprada do concentrado i no mês j; i=1,2,3; j=1,2,...,12
```

```
si_j: quantidade armazenada em stock do sumo i no mês j; i=1,2,3; j=1,2,...,12
```

```
ai_j: quantidade armazenada em stock do concentrado i no mês j; i=1,2,3; j=1,2,...,12
```

```
ei_j: quantidade extra produzida*/
```

```
/* Função objetivo: minimizar os custos */
```

```
min: CusC + CusS + CusStS + CusStC + CusE;
```

/* Restrições */

/*Final do horizonte de planeamento - os inventários de sumo são os mesmos - j=13
corresponde ao primeiro mês do ano seguinte*/

s1_1 = 20;

/*Final do horizonte de planeamento - os inventários de concentrado são os mesmos
- j=13 corresponde ao primeiro mês do ano seguinte*/

a1_1 = 16;

/* Quantidade máxima de sumo produzida por período é 30 */

x1_1 <= 10;

x1_2 <= 10;

x1_3 <= 10;

x1_4 <= 10;

x1_5 <= 10;

x1_6 <= 10;

x1_7 <= 10;

x1_8 <= 10;

x1_9 <= 10;

x1_10 <= 10;

x1_11 <= 10;

x1_12 <= 10;

/* Quantidade máxima de sumo armazenada por período é 40 */

s1_1 <= 40;

s1_2 <= 40;

s1_3 <= 40;

s1_4 <= 40;

s1_5 <= 40;

s1_6 <= 40;

s1_7 <= 40;

s1_8 <= 40;

s1_9 <= 40;

s1_10 <= 40;

s1_11 <= 40;

s1_12 <= 40;

/* Quantidade máxima de concentrado armazenada por período é 30 */

a1_1 <= 30;

a1_2 <= 30;

a1_3 <= 30;

a1_4 <= 30;

a1_5 <= 30;

a1_6 <= 30;

a1_7 <= 30;

a1_8 <= 30;

a1_9 <= 30;

$a1_{10} \leq 30;$

$a1_{11} \leq 30;$

$a1_{12} \leq 30;$

/* Quantidade de sumo armazenada por período
corresponde à soma da quantidade produzida
com a quantidade armazenada do período
anterior menos a quantidade pedida pelo cliente */

$x1_1 + e1_1 + 20 - 9 = s1_2;$

$x1_2 + e1_2 + s1_2 - 9 = s1_3;$

$x1_3 + e1_3 + s1_3 - 9 = s1_4;$

$x1_4 + e1_4 + s1_4 - 12 = s1_5;$

$x1_5 + e1_5 + s1_5 - 16 = s1_6;$

$x1_6 + e1_6 + s1_6 - 17 = s1_7;$

$x1_7 + e1_7 + s1_7 - 19 = s1_8;$

$x1_8 + e1_8 + s1_8 - 19 = s1_9;$

$x1_9 + e1_9 + s1_9 - 16 = s1_{10};$

$x1_{10} + e1_{10} + s1_{10} - 12 = s1_{11};$

$x1_{11} + e1_{11} + s1_{11} - 10 = s1_{12};$

$x1_{12} + e1_{12} + s1_{12} - 9 = 20;$

/* Quantidade de concentrado armazenada por período corresponde à soma da
quantidade comprada com a quantidade armazenada do período anterior menos a
quantidade de sumo produzida */

$c1_1 + 16 - x1_1 - e1_1 = a1_2;$

$c1_2 + a1_2 - x1_2 - e1_2 = a1_3;$

$$c1_3 + a1_3 - x1_3 - e1_3 = a1_4;$$

$$c1_4 + a1_4 - x1_4 - e1_4 = a1_5;$$

$$c1_5 + a1_5 - x1_5 - e1_5 = a1_6;$$

$$c1_6 + a1_6 - x1_6 - e1_6 = a1_7;$$

$$c1_7 + a1_7 - x1_7 - e1_7 = a1_8;$$

$$c1_8 + a1_8 - x1_8 - e1_8 = a1_9;$$

$$c1_9 + a1_9 - x1_9 - e1_9 = a1_10;$$

$$c1_10 + a1_10 - x1_10 - e1_10 = a1_11;$$

$$c1_11 + a1_11 - x1_11 - e1_11 = a1_12;$$

$$c1_12 + a1_12 - x1_12 - e1_12 = 16;$$

/* Quantidade máxima de sumo produzida extraordinária por período*/

$$e1_1 \leq 6;$$

$$e1_2 \leq 6;$$

$$e1_3 \leq 6;$$

$$e1_4 \leq 6;$$

$$e1_5 \leq 6;$$

$$e1_6 \leq 6;$$

$$e1_7 \leq 6;$$

$$e1_8 \leq 6;$$

$$e1_9 \leq 6;$$

$$e1_10 \leq 6;$$

$$e1_11 \leq 6;$$

$$e1_12 \leq 6;$$

/* Custos Totais */

/*Custos Concentrado*/

$$\text{CusC} = 180 \cdot c1_1 + 200 \cdot c1_2 + 180 \cdot c1_3 + 200 \cdot c1_4 + 180 \cdot c1_5 + 200 \cdot c1_6 + 180 \cdot c1_7 + 200 \cdot c1_8 + 180 \cdot c1_9 + 200 \cdot c1_10 + 180 \cdot c1_11 + 200 \cdot c1_12;$$

/*Custos Sumos*/

$$\text{CusS} = 10 \cdot x1_1 + 10 \cdot x1_2 + 10 \cdot x1_3 + 10 \cdot x1_4 + 10 \cdot x1_5 + 10 \cdot x1_6 + 10 \cdot x1_7 + 12 \cdot x1_8 + 10 \cdot x1_9 + 10 \cdot x1_10 + 10 \cdot x1_11 + 10 \cdot x1_12;$$

/*Custos Sumos Produção Extraordinária*/

$$\text{CusE} = 15 \cdot e1_1 + 15 \cdot e1_2 + 15 \cdot e1_3 + 15 \cdot e1_4 + 15 \cdot e1_5 + 15 \cdot e1_6 + 15 \cdot e1_7 + 18 \cdot e1_8 + 15 \cdot e1_9 + 15 \cdot e1_10 + 15 \cdot e1_11 + 15 \cdot e1_12;$$

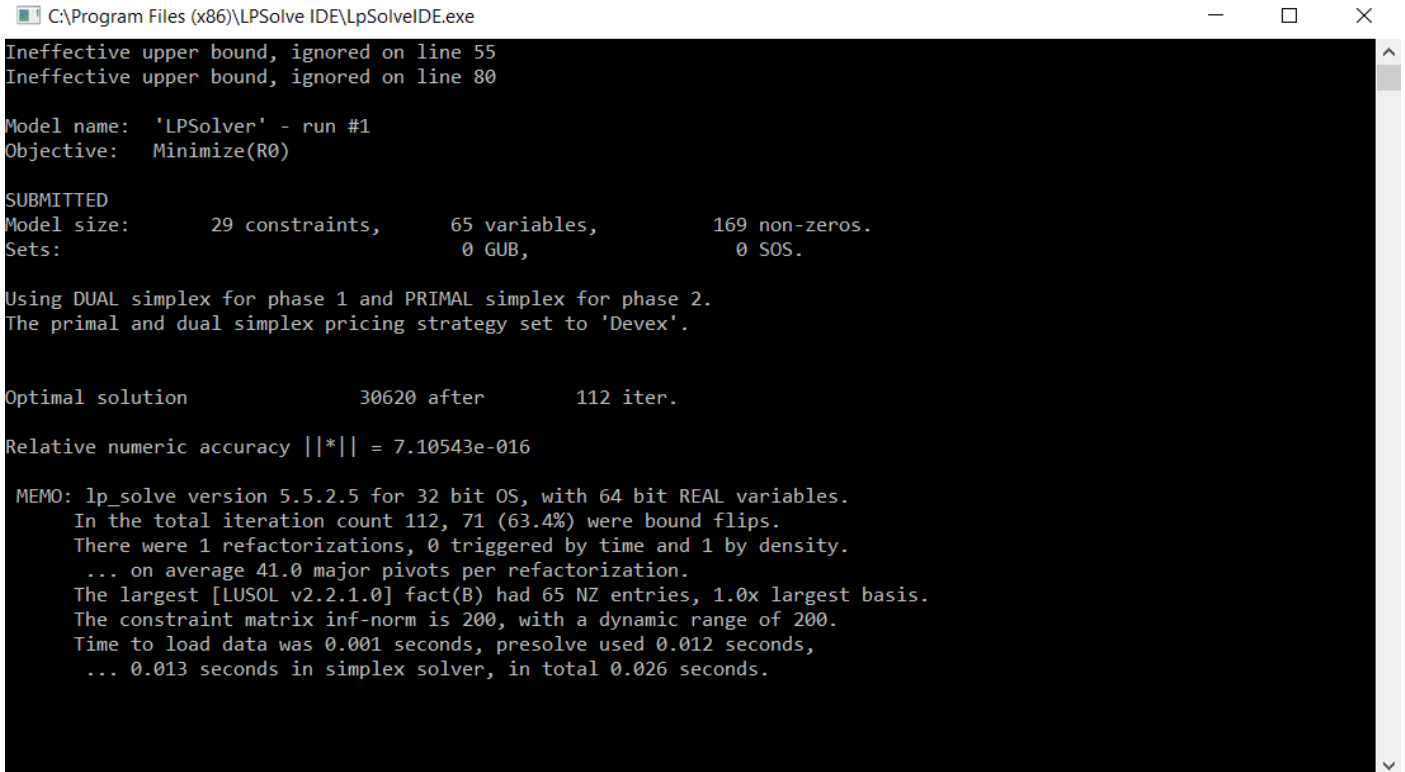
/*Custo do Stock de Sumos*/

$$\text{CusStS} = 3 \cdot s1_1 + 3 \cdot s1_2 + 3 \cdot s1_3 + 3 \cdot s1_4 + 3 \cdot s1_5 + 3 \cdot s1_6 + 3 \cdot s1_7 + 3 \cdot s1_8 + 3 \cdot s1_9 + 3 \cdot s1_10 + 3 \cdot s1_11 + 3 \cdot s1_12;$$

/*Custo do Stock de Concentrados*/

$$\text{CusStC} = 1 \cdot a1_1 + 1 \cdot a1_2 + 1 \cdot a1_3 + 1 \cdot a1_4 + 1 \cdot a1_5 + 1 \cdot a1_6 + 1 \cdot a1_7 + 1 \cdot a1_8 + 1 \cdot a1_9 + 1 \cdot a1_10 + 1 \cdot a1_11 + 1 \cdot a1_12;$$

Output:



```
C:\Program Files (x86)\LPSolve IDE\LpSolveIDE.exe
Ineffective upper bound, ignored on line 55
Ineffective upper bound, ignored on line 80

Model name: 'LPSolver' - run #1
Objective: Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:      29 constraints,      65 variables,      169 non-zeros.
Sets:           0 GUB,              0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Optimal solution      30620 after      112 iter.

Relative numeric accuracy ||*|| = 7.10543e-016

MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 112, 71 (63.4%) were bound flips.
There were 1 refactorizations, 0 triggered by time and 1 by density.
... on average 41.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 65 NZ entries, 1.0x largest basis.
The constraint matrix inf-norm is 200, with a dynamic range of 200.
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.012 seconds,
... 0.013 seconds in simplex solver, in total 0.026 seconds.
```

Figura 6 - Output

Através da imagem, verificamos que o custo ótimo obtido pelo *LPSolve* é de 30620 U.M.. Tendo em conta que o custo ótimo desta parte é de 30544 U.M, concluímos que usando o *LPSolve* são contados os custos relativos ao armazenamento de concentrado e de sumo que transita do ano anterior ($30544 + (20 * 3 + 16) = 30620$). Estes valores apenas se diferenciam porque, para este modelo de transporte, assumimos que não haveria custos de armazenamento das quantidades que vêm do ano anterior.

4 Parte II

1. Modelo de Transporte em Rede

A formulação da parte 2 deste problema é a que se segue.

1. Variáveis de decisão: x_{ij}
 2. Função objetivo: *minimizar custo* $= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$
 3. Restrições: $-\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} + \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = b_j, \forall j \in V$ (Conservação de fluxo)
- $$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A \text{ (Capacidade)}$$

Onde:

1. V corresponde ao conjunto de vértices e A ao conjunto de arcos.
2. x_{ij} representa o fluxo no arco orientado (i,j) .
3. c_{ij} representa o custo unitário de transporte no arco orientado (i,j) .
4. u_{ij} corresponde à capacidade do arco orientado (i,j) .
5. b_j corresponde à oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j .

A figura 7 ilustra o modelo de transportes em rede. Encontra-se simplificado, pois apenas foram representadas as considerações mais relevantes.

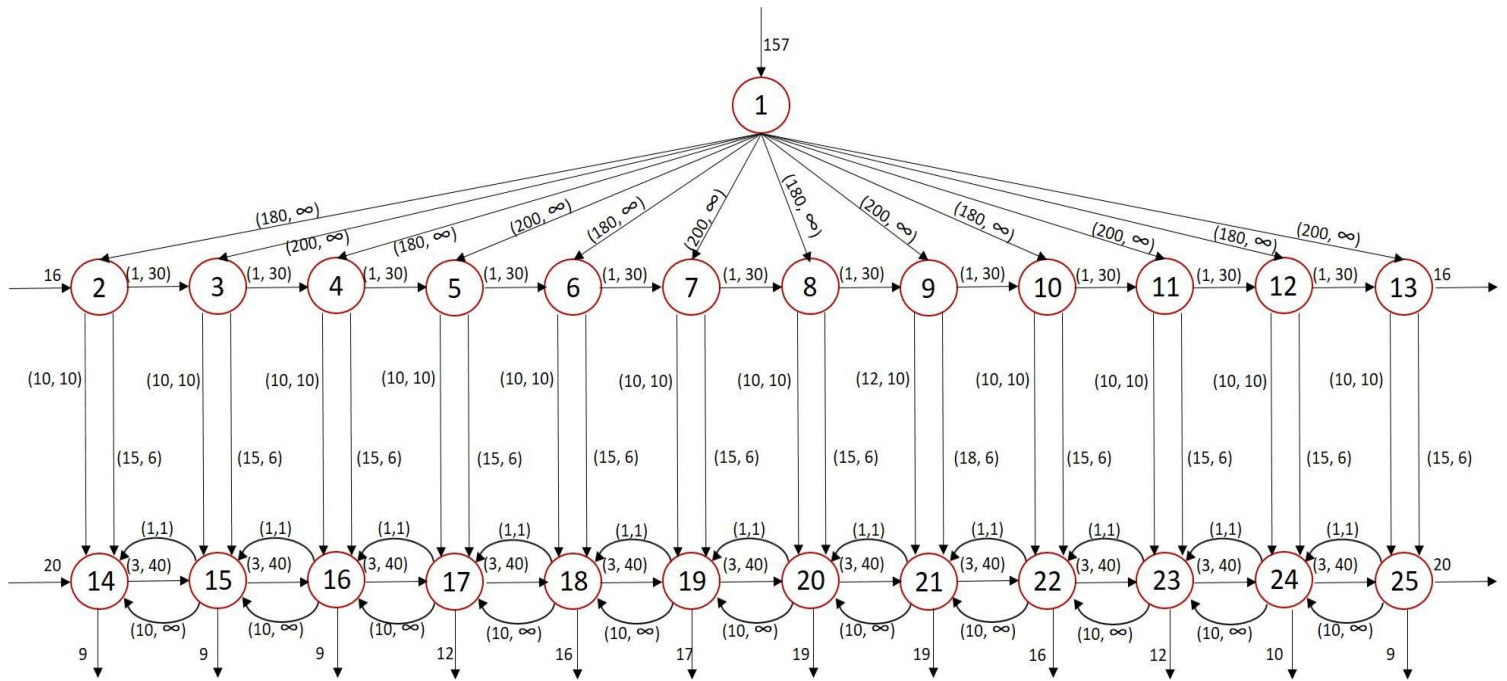


Figura 7 - Modelo de transportes em rede

2. Ficheiro de Input

O ficheiro *input* usado na segunda parte do trabalho é o que se encontra na imagem abaixo. As principais diferenças que ocorrem em relação ao modelo da Parte I resume-se a introduzir mais arcos nos nós relacionados com o stock de sumo.

Na parte referente ao armazenamento de produto final foram acrescentados arcos para permitir as entregas em atraso.

De notar que o valor 11 que aparece na linha 74 da figura 9 corresponde ao facto de, no início, existirem em inventário no armazém 20 U.E de produto e a procura do cliente neste mês ser de 9 U.E. de sumo de laranja ($11=20-9$). O valor -29 que aparece na linha 85 da figura 3 corresponde ao facto de a procura do cliente no décimo segundo mês ser 9 U.E de sumo de laranja e o facto de no fim do horizonte de planeamento os inventários terem de ser os mesmos, ou seja, para o primeiro mês do próximo ano tem de estar em inventário no armazém 20 U.E de produto final.

1	25
2	80
3	1 2 180 1000
4	1 3 200 1000
5	1 4 180 1000
6	1 5 200 1000
7	1 6 180 1000
8	1 7 200 1000
9	1 8 180 1000
10	1 9 200 1000
11	1 10 180 1000
12	1 11 200 1000
13	1 12 180 1000
14	1 13 200 1000
15	2 3 1 30
16	2 14 10 10
17	2 14 15 6
18	3 4 1 30
19	3 15 10 10
20	3 15 15 6
21	4 5 1 30
22	4 16 10 10
23	4 16 15 6
24	5 6 1 30
25	5 17 10 10
26	5 17 15 6
27	6 7 1 30
28	6 18 10 10
29	6 18 15 6
30	7 8 1 30
31	7 19 10 10
32	7 19 15 6
33	8 9 1 30
34	8 20 10 10
35	8 20 15 6
36	9 10 1 30
37	9 21 12 10
38	9 21 18 6
39	10 11 1 30
40	10 22 10 10
41	10 22 15 6
42	11 12 1 30
43	11 23 10 10
44	11 23 15 6
45	12 13 1 30
46	12 24 10 10
47	12 24 15 6
48	13 25 10 10
49	13 25 15 6
50	14 15 3 40
51	15 16 3 40
52	15 14 1 1
53	15 14 10 1000

Line 1, Column 1

Figura 8 - Input

54	16 17 3 40
55	16 15 1 1
56	16 15 10 1000
57	17 18 3 40
58	17 16 1 1
59	17 16 10 1000
60	18 19 3 40
61	18 17 1 1
62	18 17 10 1000
63	19 20 3 40
64	19 18 1 1
65	19 18 10 1000
66	20 21 3 40
67	20 19 1 1
68	20 19 10 1000
69	21 22 3 40
70	21 20 1 1
71	21 20 10 1000
72	22 23 3 40
73	22 21 1 1
74	22 21 10 100
75	23 24 3 40
76	23 22 1 1
77	23 22 10 1000
78	24 25 3 40
79	24 23 1 1
80	24 23 10 1000
81	25 24 1 1
82	25 24 10 1000
83	157
84	16
85	0
86	0
87	0
88	0
89	0
90	0
91	0
92	0
93	0
94	0
95	-16
96	11
97	-9
98	-9
99	-12
100	-16
101	-17
102	-19
103	-19
104	-16
105	-12
106	-10
107	-29
108	

Line 1, Column 1

Figura 9 - Input

3. Ficheiro de Output

Abaixo apresenta-se o ficheiro *output*, do ficheiro *input* apresentado no ponto anterior, obtido através do *RELAX4*. O resultado obtido corresponde aos arcos e aos seus custos associados.

```
C:\> Administrator: Linha de comandos

NUMBER OF ITERATIONS = 103
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 27
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 13
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 22
*****

C:\Users\sofia\Desktop\UM 2016'17\MDIO\Trabalho 2\RELAX4 2013>relax4 <parte2.txt
END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 80
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 1 4 13.
 1 6 32.
 1 8 32.
 1 10 32.
 1 12 46.
 1 13 2.
 2 3 16.
 3 4 7.
 3 15 9.
 4 5 10.
 4 16 10.
 5 17 10.
 6 7 16.
 6 18 10.
 6 18 6.
 7 19 10.
 7 19 6.
 8 9 16.
 8 20 10.
 8 20 6.
 9 21 10.
 9 21 6.
10 11 16.
10 22 10.
10 22 6.
11 23 10.
11 23 6.
12 13 30.
12 24 10.
12 24 6.
13 25 10.
13 25 6.
14 15 11.
15 16 11.
16 17 12.
17 18 10.
18 19 10.
19 20 9.
20 21 6.
21 22 3.
22 23 3.
23 24 7.
24 25 13.
OPTIMAL COST = 30544.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 75
NUMBER OF ITERATIONS = 103
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 27
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 13
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 22
*****
```

Figura 10 - Output

4. Plano detalhado de produção

O plano detalhado de produção nesta parte é igual ao da parte 1. Os arcos usados para as entregas em atraso não têm qualquer fluxo.

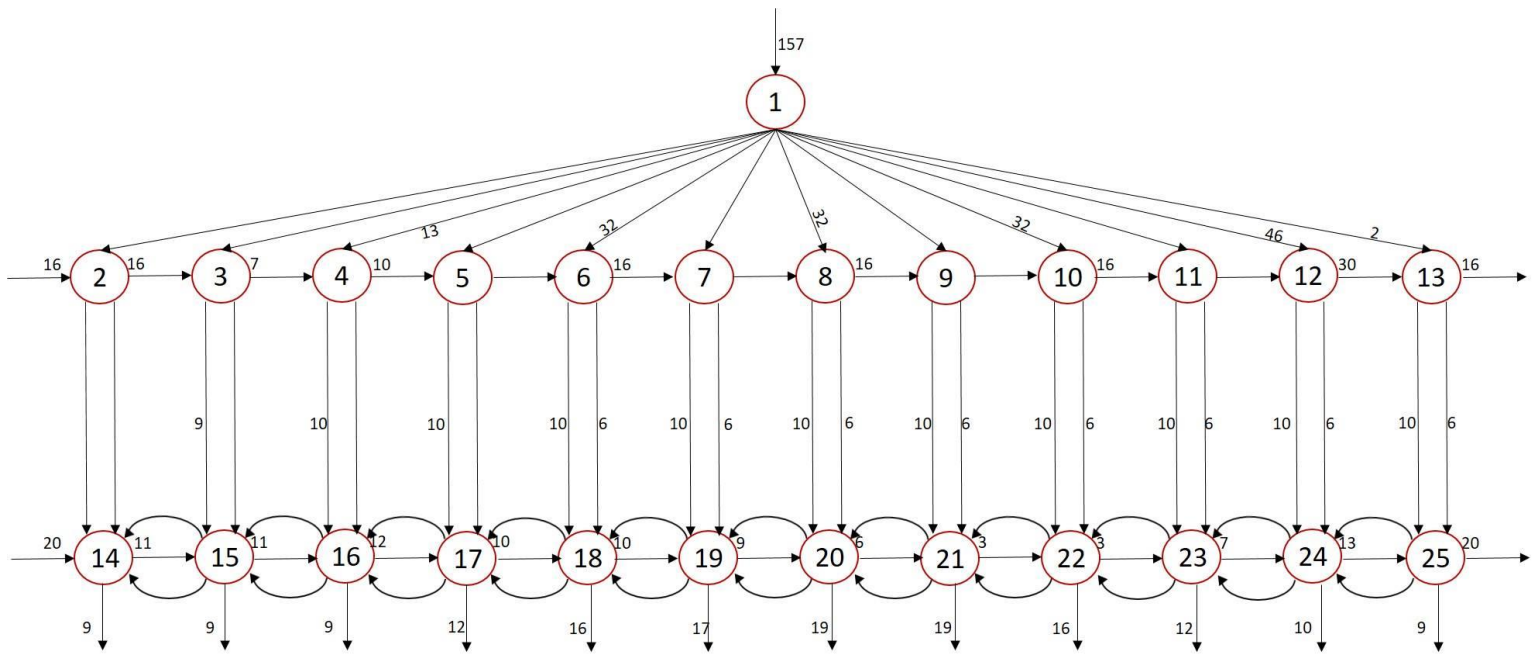


Figura 11 - Plano detalhado de produção

5. Validação do Modelo pelas restrições

Neste tópico, abordaremos a verificação da validação do modelo. Primeiro, através da conservação de fluxo, ou seja, se o fluxo de entrada num nó é igual ao fluxo de saída, e de seguida iremos calcular o custo da solução ótima.

1. Conservação de Fluxo

Nó 1

$$157 = 0 + 0 + 13 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 46 + 2 \equiv 157 = 157$$

Nó 2

$$16 + 0 = 0 + 0 + 16 \equiv 16 = 16$$

Nó 3

$$16 + 0 = 9 + 0 + 7 \equiv 16 = 16$$

Nó 4

$$7 + 13 = 10 + 10 \equiv 20 = 20$$

Nó 5

$$10 + 0 = 10 + 0 \equiv 10 = 10$$

Nó 6

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 7

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 8

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 9

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 10

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 11

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 12

$$0 + 46 = 10 + 6 + 30 \equiv 46 = 46$$

Nó 13

$$30 + 2 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 14

$$20 + 0 + 0 + 0 + 0 = 9 + 11 + 0 + 0 \equiv 20 = 20$$

Nó 15

$$11 + 9 + 0 + 0 + 0 = 9 + 11 + 0 + 0 \equiv 20 = 20$$

Nó 16

$$11 + 10 + 0 + 0 + 0 = 9 + 12 + 0 + 0 \equiv 21 = 21$$

Nó 17

$$12 + 10 + 0 + 0 + 0 = 12 + 10 + 0 + 0 \equiv 22 = 22$$

Nó 18

$$10 + 10 + 6 + 0 + 0 = 16 + 10 + 0 + 0 \equiv 26 = 26$$

Nó 19

$$10 + 10 + 6 + 0 + 0 = 17 + 9 + 0 + 0 \equiv 26 = 26$$

Nó 20

$$9 + 10 + 6 + 0 + 0 = 19 + 6 + 0 + 0 \equiv 25 = 25$$

Nó 21

$$6 + 10 + 6 + 0 + 0 = 19 + 3 + 0 + 0 \equiv 22 = 22$$

Nó 22

$$3 + 10 + 6 + 0 + 0 = 16 + 3 + 0 + 0 \equiv 19 = 19$$

Nó 23

$$3 + 10 + 6 + 0 + 0 = 12 + 7 + 0 + 0 \equiv 19 = 19$$

Nó 24

$$7 + 10 + 6 + 0 + 0 = 10 + 13 + 0 + 0 \equiv 23 = 23$$

Nó 25

$$13 + 10 + 6 = 9 + 20 + 0 + 0 \equiv 29 = 29$$

2. Custo Total

Calcularemos agora o custo da solução ótima separadamente em custos de compra de concentrado, custos de produção, custos de armazenamento e custos de entregas em atraso. Usaremos o plano detalhado de produção como suporte e, no final, é esperado que as somas destes custos coincidam com a solução ótima.

O modelo usado para o *RELAX4* não tem em conta as quantidades de produto final que transitam de um ano para o próximo.

Custos de compra de concentrado

$$180 * (0 + 13 + 32 + 32 + 32 + 46) + 200 * (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2) = 28300$$

Custos de produção

$$10 * (0 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10) + 12 * 10 + 15 * (0 + 0 + 0 + 0 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6) + 18 * 6 = 1848$$

Custos de armazenamento

$$1 * (16 + 7 + 10 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 30) + 3 * (11 + 11 + 12 + 10 + 10 + 9 + 6 + 3 + 3 + 7 + 13) = 396$$

Custos de entregas em atraso

$$1*(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) + 10*(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

Somatório dos custos

$$28300 + 1848 + 396 + 0 = 30544$$

5 Parte III

0. Pequeno exemplo ilustrativo

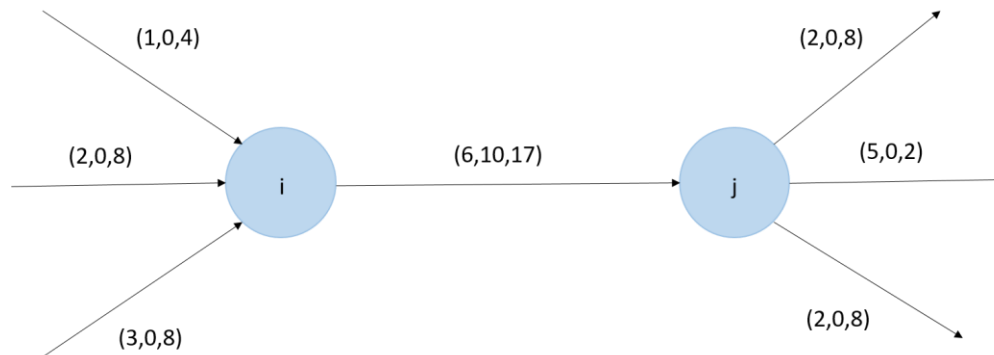


Figura 12 - Exemplo de modelo com arcos com limites inferior e superior

Valores associados aos arcos: (c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}) , sendo:

- c_{ij} : custo unitário de transporte
- l_{ij} : limite inferior de fluxo no arco
- u_{ij} : limite superior de fluxo no arco

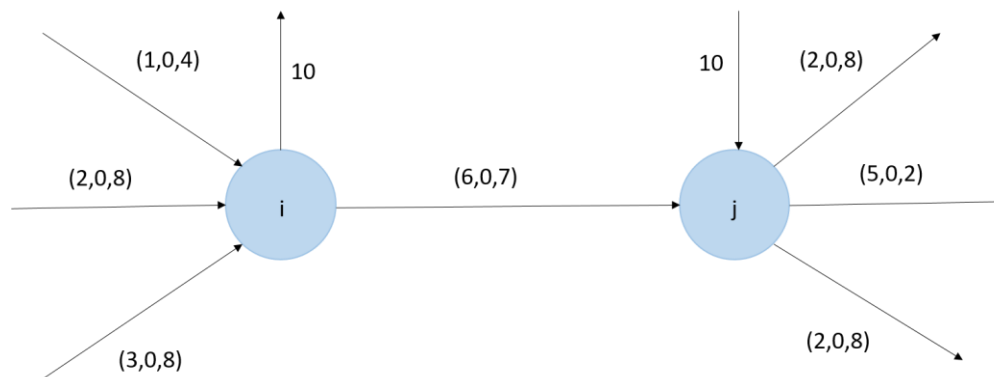


Figura 13 – Exemplo do modelo transformado

Os valores da oferta (ou procura) nos vértices i e j devem ser reajustados: a procura do vértice i é aumentada de l_{ij} unidades e a oferta do vértice j é aumentada de l_{ij} unidades.

Esta transformação é equivalente a efetuar uma mudança de variável $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ no modelo de programação linear apresentado.

Após calcular a solução ótima do problema transformado, os valores finais do fluxo no arco devem ser recalculados, bem como os custos.

1. Modelo original numa Rede

Neste modelo consideramos a existência de limites inferiores em todos os arcos, sendo que nos arcos correspondentes ao armazenamento de produto final consideramos o limite inferior 4 devido à existência de um inventário de segurança com o mesmo valor. Todos os outros arcos tem limite inferior zero visto não terem sido impostas restrições a esse nível no enunciado.

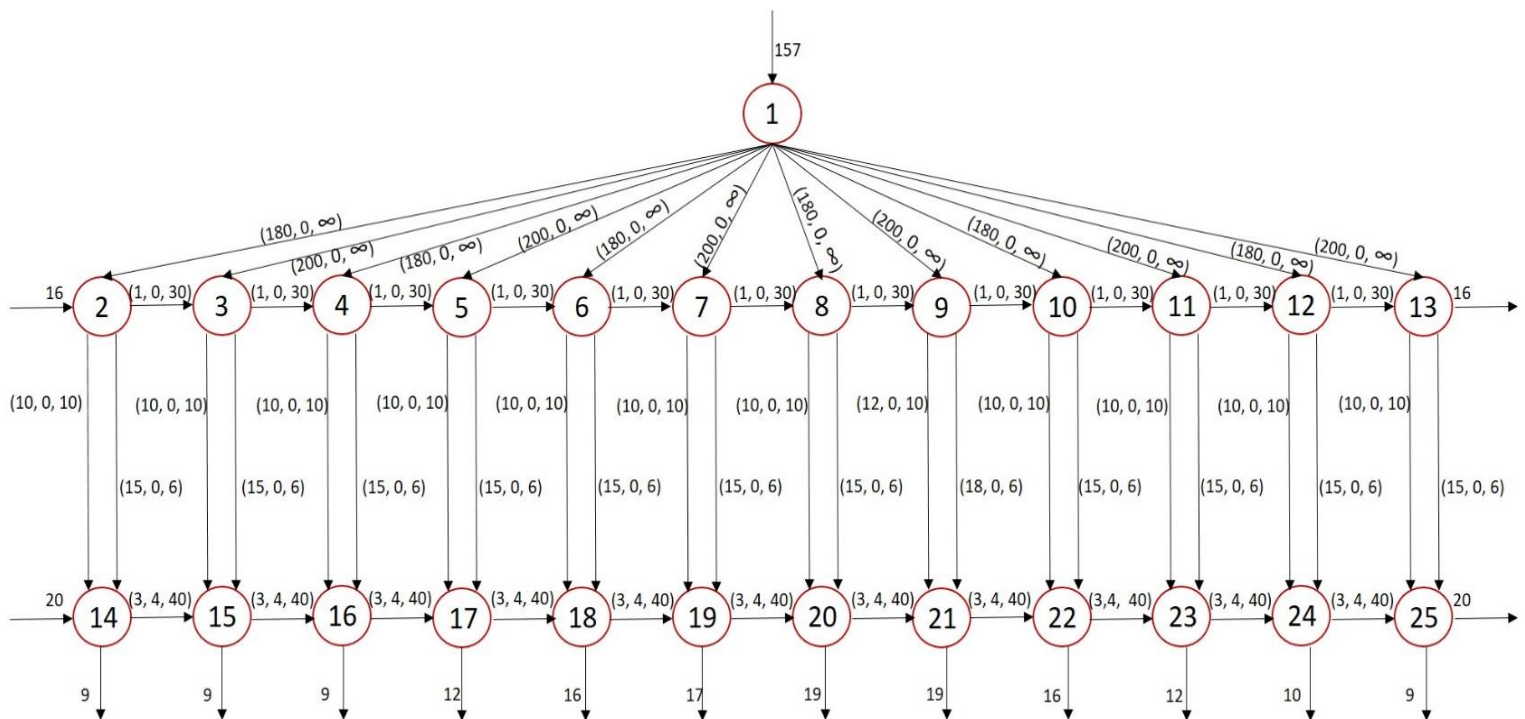


Figura 14 - Modelo original numa Rede

2. Modelo transformado numa Rede

O *RELAX4* não admite a existência de limites inferiores. Por isso, foi necessário fazer algo semelhante àquilo que foi demonstrado no exemplo 0 (figuras 12 e 13), ou seja, foi reajustada a procura e a oferta nos nós de forma a retirar o limite inferior o que também teve como consequência a redução do limite superior.

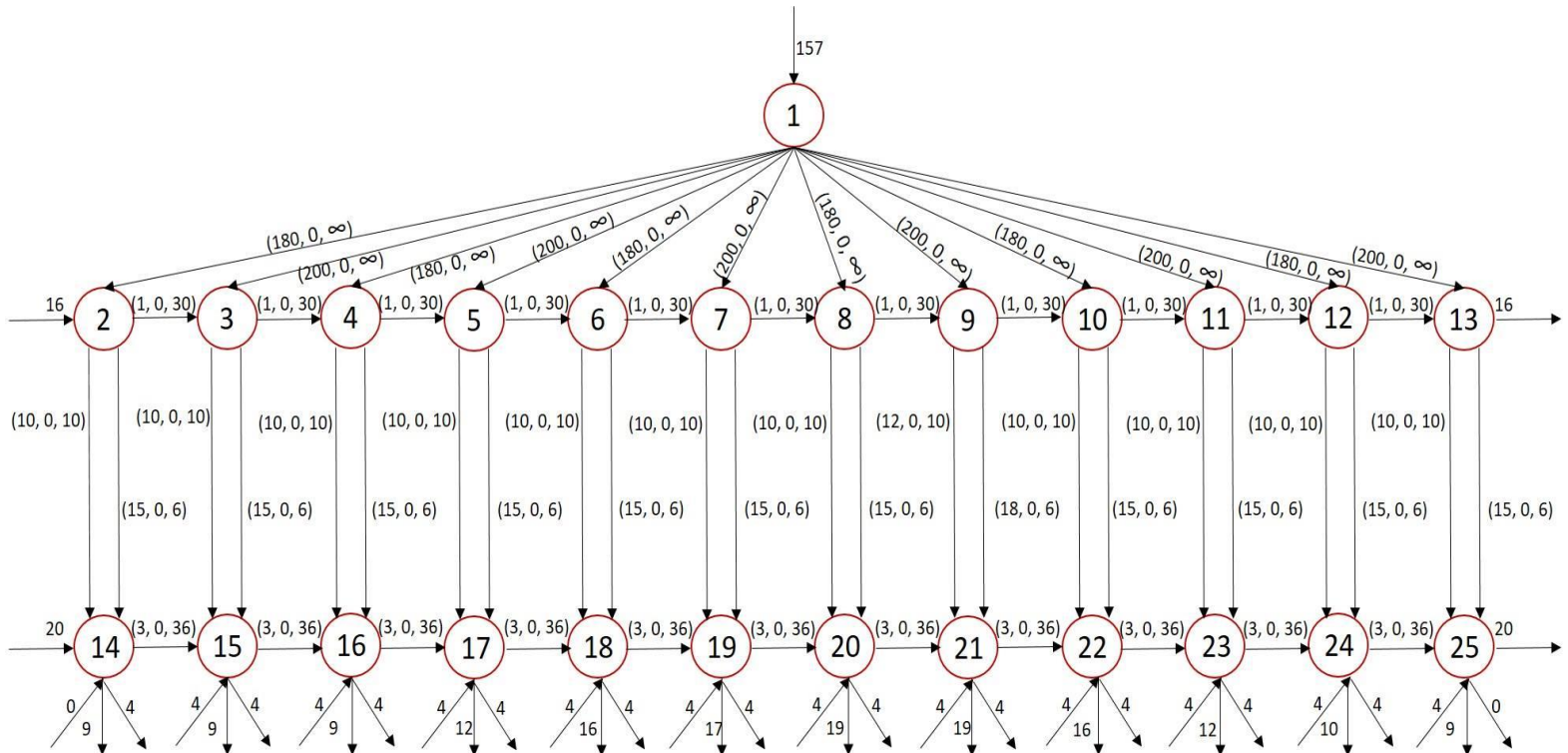


Figura 15 - Modelo transformado numa Rede

3. Ficheiro de Input

O ficheiro *input* usado na terceira parte do trabalho é o que se encontra na imagem abaixo (figuras 16 e 17). As principais diferenças que ocorrem em relação ao modelo das Partes I e II resume-se a fazer alterações aos limites superior devido ao facto de ser necessário introduzir limites inferior nos arcos sendo que o *RELAX4* não os admite.

De notar que o valor 7 que aparece na linha 74 da figura 17 corresponde ao facto de, no início, existirem em inventário no armazém 20 U.E de produto, a procura do cliente neste mês ser de 9 U.E. e ainda ter sido acrescentada a procura extra 4 devido à transformação do modelo necessária devido à existência de limites inferiores.

O valor -25 que aparece na linha 85 da figura 3 corresponde ao facto de a procura do cliente no décimo segundo mês ser 9 U.E de sumo de laranja, ao facto de no fim do horizonte de planeamento os inventários terem de ser os mesmos, ou seja, para o primeiro mês do próximo ano tem de estar em inventário no armazém 20 U.E de produto final e ainda por ter sido acrescentada a oferta extra 4 devido à transformação do modelo necessária devido à existência de limites inferiores.

1	25
2	58
3	1 2 180 1000
4	1 3 200 1000
5	1 4 180 1000
6	1 5 200 1000
7	1 6 180 1000
8	1 7 200 1000
9	1 8 180 1000
10	1 9 200 1000
11	1 10 180 1000
12	1 11 200 1000
13	1 12 180 1000
14	1 13 200 1000
15	2 3 1 30
16	2 14 10 10
17	2 14 15 6
18	3 4 1 30
19	3 15 10 10
20	3 15 15 6
21	4 5 1 30
22	4 16 10 10
23	4 16 15 6
24	5 6 1 30
25	5 17 10 10
26	5 17 15 6
27	6 7 1 30
28	6 18 10 10
29	6 18 15 6
30	7 8 1 30
31	7 19 10 10
32	7 19 15 6
33	8 9 1 30
34	8 20 10 10
35	8 20 15 6
36	9 10 1 30
37	9 21 12 10
38	9 21 18 6
39	10 11 1 30
40	10 22 10 10
41	10 22 15 6
42	11 12 1 30
43	11 23 10 10


 Line 1, Column 1

Figura 16 - Input

44	11 23 15 6
45	12 13 1 30
46	12 24 10 10
47	12 24 15 6
48	13 25 10 10
49	13 25 15 6
50	14 15 3 36
51	15 16 3 36
52	16 17 3 36
53	17 18 3 36
54	18 19 3 36
55	19 20 3 36
56	20 21 3 36
57	21 22 3 36
58	22 23 3 36
59	23 24 3 36
60	24 25 3 36
61	157
62	16
63	0
64	0
65	0
66	0
67	0
68	0
69	0
70	0
71	0
72	0
73	-16
74	7
75	-9
76	-9
77	-12
78	-16
79	-17
80	-19
81	-19
82	-16
83	-12
84	-10
85	-25
86	


 Line 1, Column 1

Figura 17 - Input

4. Ficheiro de Output

Abaixo apresenta-se o ficheiro *output*, do ficheiro *input* apresentado no ponto anterior, obtido através do *RELAX4*. O resultado obtido corresponde aos arcos e aos seus custos associados.

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 25, NUMBER OF ARCS = 58
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
 1 4 14.
 1 6 32.
 1 8 32.
 1 10 32.
 1 12 46.
 1 13 1.
 2 3 16.
 3 4 6.
 3 15 10.
 4 5 10.
 4 16 10.
 5 17 10.
 6 7 16.
 6 18 10.
 6 18 6.
 7 19 10.
 7 19 6.
 8 9 16.
 8 20 10.
 8 20 6.
 9 21 10.
 9 21 6.
10 11 16.
10 22 10.
10 22 6.
11 23 10.
11 23 6.
12 13 30.
12 24 10.
12 24 6.
13 25 10.
13 25 5.
14 15 7.
15 16 8.
16 17 9.
17 18 7.
18 19 7.
19 20 6.
20 21 3.
23 24 4.
24 25 10.
OPTIMAL COST = 30416.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 58
NUMBER OF ITERATIONS = 89
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 26
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 20
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 16
*****
```

Figura 16 - Output

5. Plano detalhado de produção

A partir do *output* gerado no *RELAX 4*, elaboramos o seguinte plano detalhado de produção resultante:

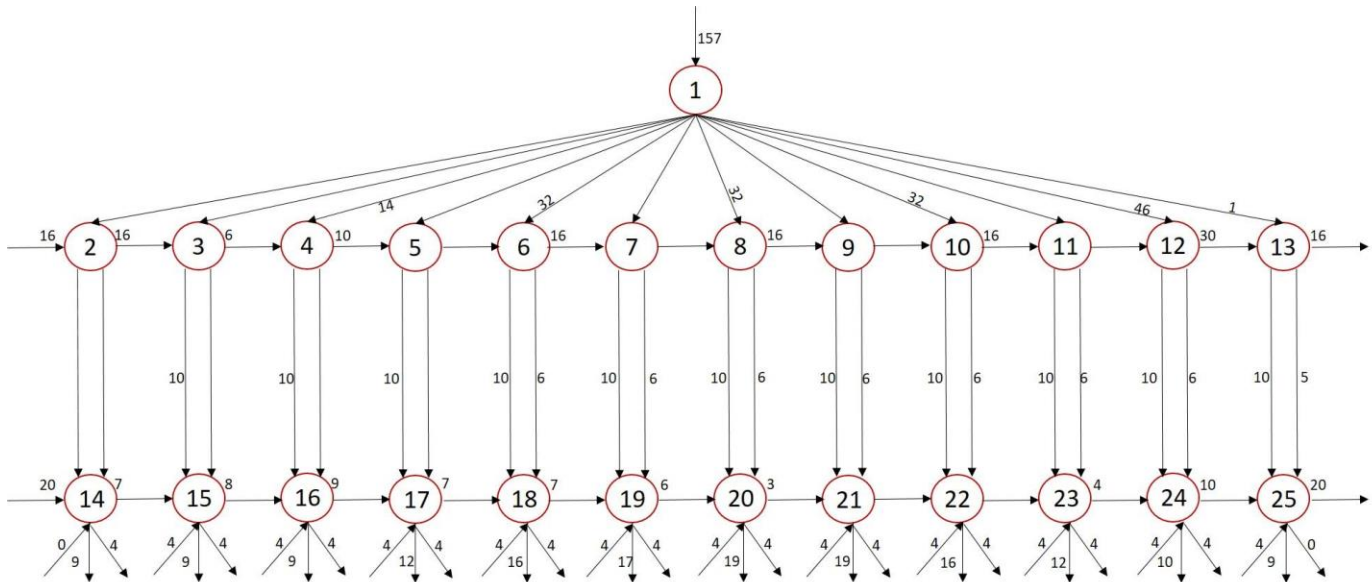


Figura 17 - Output

Nó 1

$$157 = 0 + 0 + 14 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 32 + 0 + 46 + 1 \equiv 157 = 157$$

Nó 2

$$16 + 0 = 16 + 0 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 3

$$16 + 0 = 6 + 10 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 4

$$6 + 14 = 10 + 0 + 10 \equiv 20 = 20$$

Nó 5

$$10 + 0 = 10 + 0 + 0 \equiv 10 = 10$$

Nó 6

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 7

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 8

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 9

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 10

$$0 + 32 = 10 + 6 + 16 \equiv 32 = 32$$

Nó 11

$$16 + 0 = 10 + 6 + 0 \equiv 16 = 16$$

Nó 12

$$0 + 46 = 10 + 6 + 30 \equiv 46 = 46$$

Nó 13

$$30 + 1 = 10 + 5 + 16 \equiv 31 = 31$$

Nó 14

$$20 + 0 + 0 + 0 = 9 + 4 + 7 \equiv 20 = 20$$

Nó 15

$$7 + 10 + 0 + 4 = 9 + 8 + 4 \equiv 21 = 21$$

Nó 16

$$4 + 8 + 10 + 0 = 9 + 4 + 9 \equiv 22 = 22$$

Nó 17

$$9 + 10 + 4 + 0 = 12 + 4 + 7 \equiv 23 = 23$$

Nó 18

$$4 + 7 + 10 + 6 = 16 + 4 + 7 \equiv 27 = 27$$

Nó 19

$$4 + 10 + 6 + 7 = 17 + 4 + 6 \equiv 27 = 27$$

Nó 20

$$6 + 10 + 6 + 4 = 19 + 4 + 3 \equiv 26 = 26$$

Nó 21

$$4 + 3 + 10 + 6 = 19 + 4 + 0 \equiv 23 = 23$$

Nó 22

$$4 + 10 + 6 + 0 = 16 + 4 + 0 \equiv 20 = 20$$

Nó 23

$$4 + 10 + 6 + 0 = 12 + 4 + 4 \equiv 20 = 20$$

Nó 24

$$4 + 10 + 6 + 4 = 10 + 4 + 10 \equiv 24 = 24$$

Nó 25

$$10 + 10 + 5 + 4 = 9 + 20 + 0 \equiv 29 = 29$$

6. Validação pelo custo da solução ótima

Calcularemos agora o custo da solução ótima separadamente em custos de compra de concentrado, custos de produção e custos de armazenamento. Usaremos o plano detalhado de produção como suporte e, no final, é esperado que as somas destes custos coincidam com a solução ótima.

O modelo usado para o *RELAX4* não tem em conta as quantidades de produto final que transitam de um ano para o próximo.

Custos de compra de concentrado

$$180 * (0 + 14 + 32 + 32 + 32 + 46) + 200 * (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1) = 28280$$

Custos de produção

$$10 * (0 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10) + 12 * 10 + 15 * (0 + 0 + 0 + 0 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5) + 18 * 6 = 1843$$

Custos de armazenamento

$$1 * (16 + 6 + 10 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 30) + 3 * (7 + 8 + 9 + 7 + 7 + 6 + 3 + 0 + 0 + 4 + 10) = 293$$

Somatório dos custos

$$28280 + 1843 + 293 = 30416$$

7. Plano detalhado de produção real

Neste modelo, tivemos como ponto de partida o modelo da questão 5 desta terceira parte. Para chegarmos à solução real, somamos 4 U.E aos fluxos nos arcos de armazenamento de produto visto que o *RELAX4* não tem em consideração limites inferiores. Essas 4 U.E. são provenientes das procuras e ofertas extra que criámos para satisfazer essa restrição do *RELAX4*. Isto deve-se ao facto de existir sempre um inventário de segurança de 4 U.E. que, por se encontrarem em inventário, terão também o mesmo custo de todas as outras unidades que circulam nestes arcos correspondentes ao armazenamento de produto.

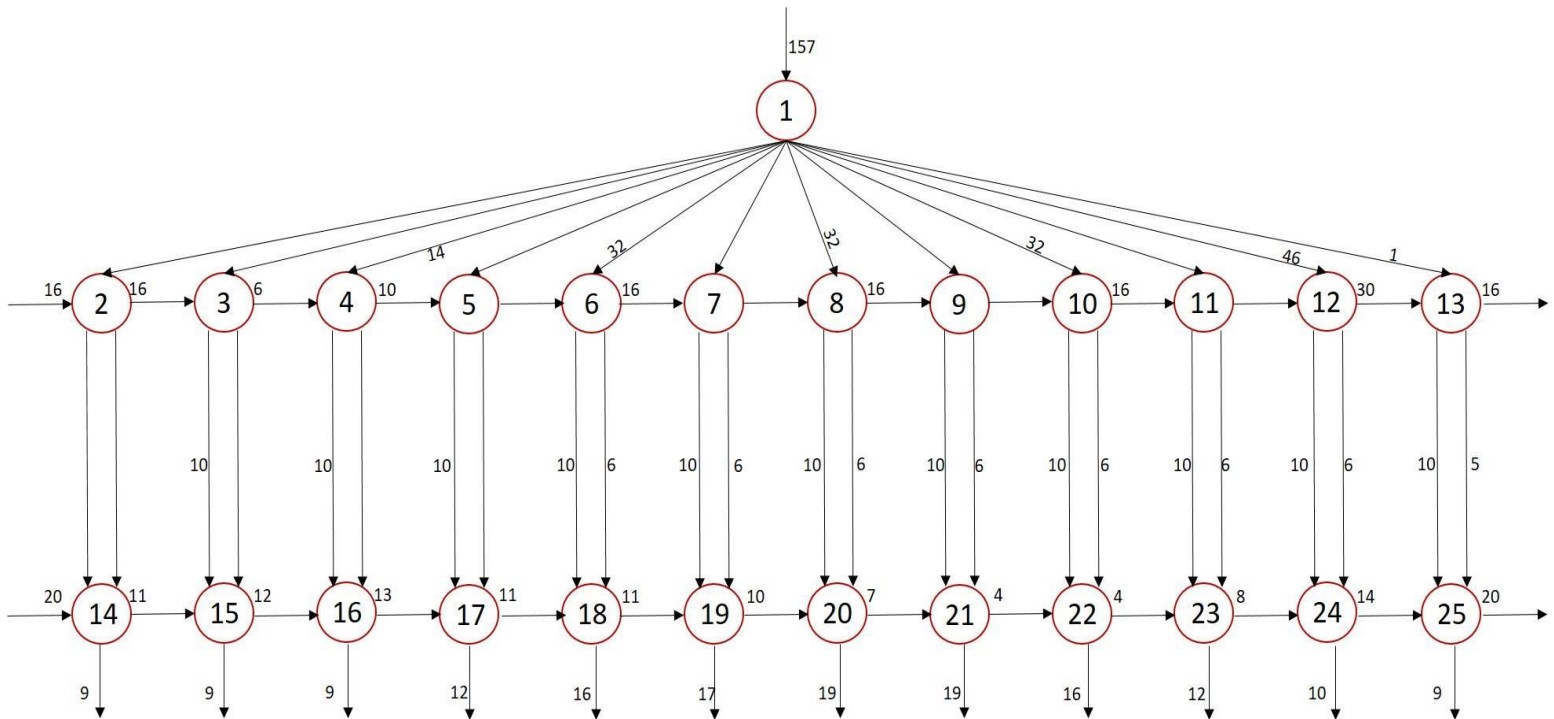


Figura 18 - Plano detalhado de produção real

8. Custo do Plano de produção real

O plano detalhado do modelo transformado nas alíneas anteriores não corresponde ao plano real a ser implementado, visto que não considera os limites inferiores. Por isso, adicionamos o fluxo extra criado nos nós do modelo transformado aos arcos que correspondem aos custos de armazenamento de produção visto que estes fluxos extra correspondem a quantidades mínimas de segurança que terão de ser sempre armazenadas e que terão os mesmos custos das outras unidades armazenadas.

Custos de compra de concentrado

$$180 * (0 + 14 + 32 + 32 + 32 + 46) + 200 * (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1) = 28280$$

Custos de produção

$$10 * (0 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10) + 12 * 10 + 15 * (0 + 0 + 0 + 0 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5) + 18 * 6 = 1843$$

Custos de armazenamento

$$1 * (16 + 6 + 10 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 16 + 0 + 30) + 3 * (11 + 12 + 13 + 11 + 11 + 10 + 7 + 4 + 4 + 8 + 14) = 425$$

Somatório dos custos

$$28280 + 1843 + 425 = 30548$$

6 Conclusão

Em suma, este trabalho prático, que abordou a temática de transportes em rede com limite superior e inferior, serviu para consolidar os nossos conhecimentos sobre a mesma.

Ao longo da realização do trabalho prático, observámos que no nosso caso, tanto o atraso na entrega assim como o inventário de segurança, são opções que não têm influências bastante marcantes nos resultados.

No caso do atraso na entrega, os valores até são idênticos ao caso normal, o que revela que não é mais rentável realizar as entregas nesse contexto.

Já no caso do inventário de segurança, através da análise do modelo real, a situação é ligeiramente diferente, pois os valores são um pouco maiores (diferença muito pouco significativa), o que se revela ser uma opção ligeiramente pior.

Contudo, concluímos que a opção mais rentável é uma das duas primeiras opções, sendo preferível a primeira visto que é entregue ao cliente o que por ele é pedido quando é desejado, embora a diferença não seja muito significativa comparativamente com os outros casos.