Insertion Sort

Algoritmo:

1. Seleciona-se a cabeça da lista.
2. Ordena-se a cauda da lista.
3. Insere-se a cabeça da lista na cauda ordenada, de forma a que a lista resultante continue ordenada.

```
isort [] = []
isort (x:xs)  = insert x (isort xs)
```

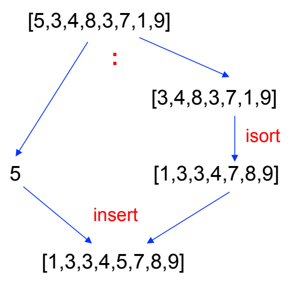
```
insert x [] = [x]
insert x (y:ys) = if x<y then x:y:ys
                         else y:(insert x ys)
```

A função insert (que faz a inserção ordenada) é o núcleo deste algoritmo.

```
isort [3,5,6,2,7,5,8]  ⇒  insert 3 (isort [5,6,2,7,5,8])
                ⇒ ... ⇒  insert 3 [2,5,5,6,7,8]
                ⇒ ... ⇒  [2,3,5,5,6,7,8]
```


Insertion Sort

Exemplo: Esquema do cálculo de (isort [5,3,4,8,3,1,9])



Quick Sort

Algoritmo:

1. Seleciona-se a cabeça da lista (como *pivot*) e parte-se o resto da lista em duas sublistas: uma com os elementos inferiores ao pivot, e outra com os elementos não inferiores.
2. Estas sublistas são ordenadas.
3. Concatena-se as sublistas ordenadas, de forma adquada, conjuntamente com o pivot.

```
qsort [] = []
qsort (x:xs) = qsort [ y | y <- xs, y<x ]
                 ++ [x] ++ qsort [ y | y <- xs, y>=x ]
```

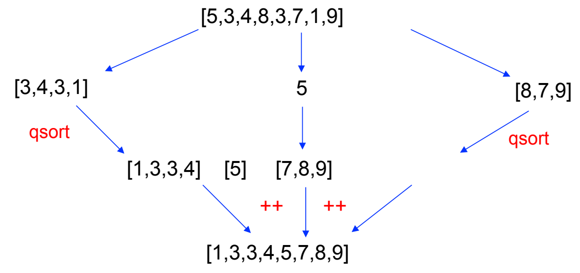
Esta versão do qsort é pouco eficiente ...

Quantas travessias da lista se estão a fazer para partir a lista ?

```
qsort [5,3,4,8,3,7,1,9] ⇒
              ... ⇒  (qsort [3,4,3,1])++[5]++(qsort [8,7,9])
            ⇒ ... ⇒  [1,3,3,4] ++ [5] ++ [7,8,9]
            ⇒ ... ⇒  [1,3,3,4,5,7,8,9]
```


Quick Sort

Exemplo: Esquema do cálculo de (qsort [5,3,4,8,3,1,9])



Uma *versão mais eficiente* (fazendo a partição da lista numa só passagem), pode ser:

```
parte _ [] = ([],[])
parte x (y:ys) | y < x = (y:as,bs)
               | otherwise = (as,y:bs)
   where (as,bs) = parte x ys
```

```
quicksort [] = []
quicksort (x:xs) = let (l1,l2) = parte x xs
                   in (quicksort l1)++[x]++(quicksort l2)
```

Merge Sort

Algoritmo:

1. Parte-se a lista em duas sublistas de tamanho igual (ou quase).
2. Ordenam-se as duas sublistas.
3. Fundem-se as sublistas ordenadas, de forma a que a lista resultante fique ordenada.

```
merge [] l = l
merge l [] = l
merge a@(x:xs) b@(y:ys) | x < y     = x:(merge xs b)
                        | otherwise = y:(merge a ys)
```

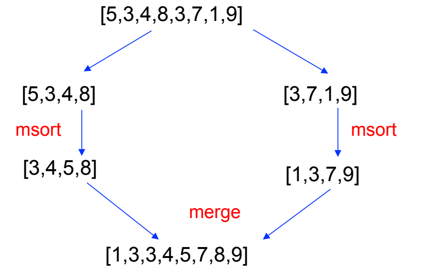
```
msort []  = []
msort [x] = [x]
msort xs  = merge (msort xs1) (msort xs2)
   where                             -- pouco eficiente ...
         k   = (lenght xs) `div` 2
         xs1 = take k xs
         xs2 = drop k xs
```

Esta versão do msort é muito pouco eficiente ...

Quantas travessias da lista se está a fazer para partir a lista em duas ?

Merge Sort

Exemplo: Esquema do cálculo de (msort [5,3,4,8,3,1,9])



Uma *versão mais eficiente* (fazendo a partição da lista numa só passagem), pode ser:

```
split [] = ([],[])
split (x:xs) = let (l,r) = split xs
               in (x:r,l)
```

```
mergesort []  = []
mergesort [x] = [x]
mergesort l   = merge (mergesort l1) (mergesort l2)
   where (l1,l2) = split l
```


Acumuladores

Considere a definição da função factorial.

```
fact 0 = 1
fact n | n>0 = n * fact (n-1)
```

O cálculo da factorial de um número positivo n é feito multiplicando n pelo factorial de (n-1).

A multiplicação fica *em suspenso* até que o valor de fact (n-1) seja sintetizado.

```
fact 3  ⇒  3*(fact 2)  ⇒  3*(2*(fact 1))  ⇒  3*(2*(1*(fact 0)))
        ⇒  3*(2*(1*1)) ⇒  6
```

Uma outra estratégia para resolver o mesmo problema, consiste em definir uma função auxiliar com um parametro extra que serve para ir guardando os resultados parciais – a este parametro extra chama-se **acumulador**.

```
fact n | n >=0 = factAc 1 n
  where factAc ac 0 = ac
        factAc ac n = factAc (ac*n) (n-1)
```

```
fact 3  ⇒  factAc 1 3  ⇒  factAc (1*3) 2  ⇒  factAc (1*3*2) 1
        ⇒  factAc (1*2*3*1) 0  ⇒  1*2*3*1  ⇒  6
```


Dependendo do problema a resolver, o uso de acumuladores pode ou não trazer vantagens.

Por vezes, pode ser a forma mais natural de resolver um problema.

Exemplo:

Considere as duas versões da função que faz o cálculo do valor máximo de uma lista.

Qual lhe parece mais natural ?

```
maximum [x] = x
maximum (x:y:xs) | x > y     = maximum (x:ys)
                 | otherwise = maximum (y:xs)
```

```
maximo (x:xs) = maxAc x xs
  where maxAc ac [] = ac
        maxAc ac (y:ys) = if y>ac then maxAc y ys
                                  else maxAc ac ys
```

Em maximo o acumulador guarda o valor máximo encontrado até ao momento.

Em maximum a cabeça da lista está a funcionar como acumulador.

Considere a função que inverte uma lista.

```
reverse [] = []
reverse (x:xs) = (reverse xs) ++ [x]
```

```
reverse [1,2,3] ⇒ (reverse [2,3])++[1] ⇒ ((reverse [3])++[2])++[1]
        ⇒ (((reverse [])++[3])++[2])++[1] ⇒ ((([]++[3])++[2])++[1]
        ⇒ ([3]++[2])++[1] ⇒ (3:([]++[2]))++[1] ⇒ (3:[2])++[1]
        ⇒ 3:([2]++[1]) ⇒ 3:(2:([]++[1])) ⇒ 3:2:[1] = [3,2,1]
```

Este é um exemplo típico de uma função que implementada com um acumulador é muito mais eficiente.

```
reverse l = revAc [] l
  where revAc ac [] = ac
        revAc ac (x:xs) = revAc (x:ac) xs
```

```
reverse [1,2,3] ⇒ revAc [] [1,2,3] ⇒ revAc [1] [2,3]
                ⇒ revAc [2,1] [3] ⇒ revAc [3,2,1] [] ⇒ [3,2,1]
```


Sequência de Fibonacci

O n-ésimo número da sequência de Fibonacci define-se matematicamente por

$$fib\ n = 0 \qquad , se\ \ n = 0$$
$$fib\ n = 1 \qquad , se\ \ n = 1$$
$$fib\ n = fib\ (n\text{-}2) + fib\ (n\text{-}1) \quad , se\ \ n \geq 2$$

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n | n>=2  = fib (n-2) + fib (n-1)
```

O cálculo do fib de um número pode envolver o cálculo do fib de números mais pequenos, repetidas vezes.

```
fib 5 ⇒  (fib 3)+(fib 4)  ⇒  ((fib 1)+(fib 2))+((fib 2)+(fib 3))
      ⇒ (1+((fib 0)+(fib 1)))+((fib 2)+(fib 3)) ⇒  ... ⇒  ... ⇒ 5
```

A sequência de Fibonnacci pode ser definida por

```
seqFibonnacci = [ fib n | n <- [0,1..]  ]
```


Uma versão mais eficiente dos números de Fibonnacci utiliza um parametro de acumulação.

Neste caso o acumulador é um par que regista os dois últimos números de Fibonnacci calculados até ao momento.

```
fib n = fibAc (0,1) n
  where fibAc (a,b) 0 = a
        fibAc (a,b) 1 = b
        fibAc (a,b) (n+1) = fib (b,a+b) n
```

```
fib 5  ⇒  fibAc (0,1) 5  ⇒  fibAc (1,1) 4  ⇒  fibAc (1,2) 3
       ⇒  fibAc (2,3) 2  ⇒  fibAc (3,5) 1  ⇒  5
```

A sequência de Fibonnacci pode ser definida por

```
seqFib = 0 : 1 : [ a+b | (a,b) <- zip seqFib (tail seqFib) ]
```

Note que é a lazy evaluation que faz com que este género de definição seja possível.

Funções de Ordem Superior

Em Haskell, as funções são entidades de primeira ordem, isto é, as funções podem ser passadas como parametro e/ou devolvidas como resultado de outras funções

Exemplo: A função app tem como argumento uma função f de tipo a->b.

```
app :: (a->b) -> (a,a) -> (b,b)
app f (x,y) = (f x, f y)
```

```
app fact (5,4) ⇒ (120,24)

app chr (65,70) ⇒ ('A','F')
```

Exemplo:

A função mult pode ser entendida como tendo dois argumentos de tipo Int e devolvendo um valor do tipo Int. Mas, na realidade, mult é uma função que recebe um argumento do tipo Int e devolve uma função de tipo Int->Int.

```
mult :: Int -> Int -> Int   ≡ Int -> (Int -> Int)
mult x y =  x * y
```

Em Haskell, todas a funções são unárias !

```
mult 2 5 ≡ (mult 2) 5 :: Int
           (mult 2) :: Int -> Int
```