



Universidade do Minho  
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

### 3. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

[fmiranda@math.uminho.pt](mailto:fmiranda@math.uminho.pt)  
[mif@math.uminho.pt](mailto:mif@math.uminho.pt)

2015/2016

### 3.1 DERIVADAS PARCIAIS

Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- A derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x$ , no ponto  $(a, b)$  é o limite (se este existir)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{ou} \quad f_x(a, b).$$

- A derivada parcial de  $f$  em ordem a  $y$ , no ponto  $(a, b)$  é o limite (se este existir)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \text{ou} \quad f_y(a, b).$$

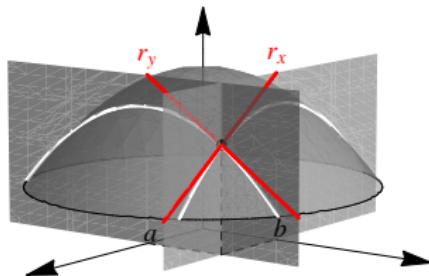
## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos o gráfico de uma função  $f$  de duas variáveis e a curva que resulta da interseção desse gráfico com o plano de equação  $y = b$ .

Esta curva é o gráfico da função  $g(x) = f(x, b)$ .

Assim

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$  é o declive da reta  $r_x$  tangente à curva no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .



Analogamente,

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  é o declive da reta  $r_y$  tangente ao gráfico da função  $h(y) = f(a, y)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

**Exemplo:** Se  $f(x, y) = x^2y + y^3$ , então:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 1) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 1+h) - f(1, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + (1+h)^3 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = 4. \end{aligned}$$

O cálculo da derivada em ordem a  $x$  faz-se considerando  $y$  como constante e aplicando as regras usuais de derivação relativamente à variável  $x$ .

O cálculo da derivada em ordem a  $y$  faz-se de forma análoga.

**Exemplo:** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

► Se  $(x, y) \neq (0, 0)$  então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

► Se  $(x, y) = (0, 0)$  então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

*f* possui derivadas parciais em todos os pontos, embora seja descontínua!

## GENERALIZAÇÃO

Sejam  $\mathcal{D}$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$ .

A derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x_i$ , no ponto  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  é, se existir, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \quad \text{ou} \quad f_{x_i}(\mathbf{a}).$$

### 3.2 DERIVADAS DIRECIONAIS

Sejam  $\mathcal{D}$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $a \in \mathcal{D}$  e  $u$  um vetor de  $\mathbb{R}^n$ .

A derivada de  $f$ , no ponto  $a$ , segundo o vetor  $u$  define-se como o limite (se este existir)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$$

e denota-se por  $Df(a; u)$  ou  $f'(a; u)$ .

A derivada direcional de  $f$ , no ponto  $a$ , na direção do vetor não nulo  $u$  denota-se por  $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$  e define-se como

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = Df(a; \frac{u}{\|u\|}).$$

- ▶ Se  $e_i$  designar o  $i$ -ésimo vetor da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

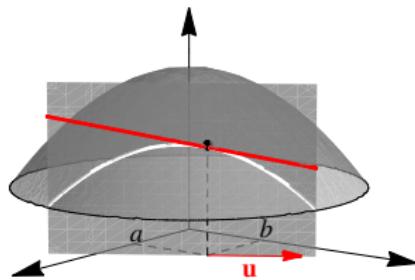
## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Quando  $n = 2$ , a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(a, b)$ , segundo o vetor não nulo  $\mathbf{u}$ , tem a seguinte interpretação geométrica:

Consideremos o plano vertical que passa no ponto  $(a, b, f(a, b))$  e tem a direção do vetor  $\mathbf{u}$ .

Este plano interseca o gráfico de  $f$  segundo uma curva.

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a, b)$  é o declive da reta tangente a essa curva no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .



**Exemplo:** Sejam

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- ▶ Se  $\mathbf{u} = (0, 0)$ , então  $Df((0, 0); (0, 0)) = 0$ ;
- ▶ Se  $\mathbf{u} \neq (0, 0)$ , então

$$\begin{aligned} Df((0, 0); (u_1, u_2)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(u_1, u_2)) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 u_1^3 u_2}{h^7 u_1^6 + h^3 u_2^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h u_1^3 u_2}{h^3 u_1^6 + u_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Esta função tem derivada em  $(0, 0)$ , segundo **todas as direções**. No entanto, esta função **não é contínua** em  $(0, 0)$  (verifique!).

### 3.3 DERIVADA GLOBAL

Sejam  $\mathcal{D}$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $a$  um elemento de  $\mathcal{D}$ .

Uma função  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **derivável** ou **diferenciável** em  $a$ , se existir uma aplicação linear<sup>1</sup>

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} = 0.$$

Pode provar-se que a aplicação linear  $L$ , se existir, é única.

$L$  diz-se a **derivada de  $f$  em  $a$**  e denota-se por  $Df(a)$  ou  $f'(a)$ , i.e.

$$\begin{aligned} Df(a) : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \longmapsto L(v) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Relembre que, dados dois espaços vetoriais reais  $E$  e  $F$ ,  $L : E \rightarrow F$  é uma aplicação linear se  $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$ , para todo  $x, y \in E$  e todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

► Será possível relacionar a derivada de  $f$  no ponto  $(a, b)$  com a noção de plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ ?

Recordado a interpretação das retas  $r_x$  e  $r_y$  do diapositivo 3, é natural tomar como plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  o plano que contém essas retas. Sendo os vetores

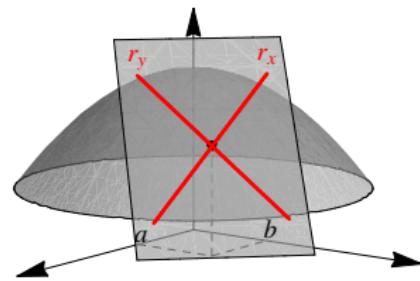
$$(1, 0, f_x(a, b)) \quad \text{e} \quad (0, 1, f_y(a, b))$$

vetores diretores do plano, uma equação desse plano é

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(1, 0, f_x(a, b)) + \mu(0, 1, f_y(a, b)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ou ainda

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$



Interpretemos o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$  como sendo o plano que melhor aproxima, num certo sentido, o gráfico de  $f$  na vizinhança de  $(a, b, f(a, b))$ .

Dizemos que

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

corresponde à *melhor aproximação linear* de  $f$  na vizinhança de  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|f(x,y) - (f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b))|}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0.$$

Considerando a aplicação linear  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $L(u_1, u_2) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$ , a expressão anterior escreve-se como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|f(x,y) - f(a,b) - L(x-a, y-b)|}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0,$$

onde se conclui de imediato que  $L \equiv Df(a, b)$ .

No que se segue  $\mathcal{D}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  é um ponto de  $\mathcal{D}$  e  $f$  é uma função real definida em  $\mathcal{D}$ .

**Teorema:** Se  $f$  é derivável em  $a$ , então existem todas as derivadas parciais de  $f$  em  $a$  e

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a}) : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})u_n \end{aligned}$$

Chama-se **gradiente de  $f$  em  $a$**  e denota-se por  $\nabla f(\mathbf{a})$ , ao vetor

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Conclui-se de imediato que, se  $f$  é derivável em  $a$ , então

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

**Exemplo:** Consideremos novamente a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

A função  $f$  será derivável em  $(0, 0)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Já sabemos que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , logo  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

e este limite não existe (verifique!), conclui-se que  $f$  não é derivável em  $(0, 0)$ .

**Teorema:** Se  $f$  é derivável no ponto  $a \in \mathcal{D}$ , então  $f$  é contínua em  $a \in \mathcal{D}$ .

**Exemplo:** Relativamente à função anterior, poderíamos ter concluído que ela não é derivável em  $(0, 0)$ , porque já tínhamos verificado anteriormente que esta função não é contínua em  $(0, 0)$ .

**Teorema:** Seja  $f$  uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas numa vizinhança de um ponto  $a \in \mathcal{D}$ . Então  $f$  é derivável em  $a$ .

Uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas diz-se uma **função de classe  $\mathcal{C}^1$** .

**Exemplo:** Consideremos novamente a função do exemplo anterior.

Já sabemos que:

- ▶ existem as derivadas parciais de  $f$  em todos os pontos;
- ▶  $f$  não é derivável em  $(0, 0)$ .

O resultado anterior permite concluir que pelo menos uma das derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é descontínua na origem (verifique!).

**Teorema:** Se  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a$ , então  $f$  admite derivada em  $a$  segundo qualquer vetor não nulo  $u$  e

$$Df(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

**Exemplo:** A função  $f(x, y, z) = xe^{-yz}$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ , logo é derivável.

$$Df((0, 0, 0); (1, 1, 1)) = \nabla f(0, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1) = 1.$$

## Exemplo: Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

- ▶  $Df((0, 0); (1, 1)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{h} = 2;$
- ▶  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0;$
- ▶  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$

Como

$$Df((0, 0); (1, 1)) \neq \nabla f(0, 0) \cdot (1, 1),$$

conclui-se que  $f$  não é derivável na origem.

## RESUMO:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existem e são contínuas numa vizinhança de  $a$

$$\Downarrow \cancel{X} \text{ [Ex 3.13]}$$

a função  $f$  é derivável no ponto  $a$  e

$$Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u$$

$$\Downarrow \cancel{X} \text{ [Ex 3.11]}$$

existem as derivadas em  $a$  segundo todos os vetores não nulos  $u$  e

$$Df(a; u) = \nabla f(a) \cdot u$$

$$\Downarrow \cancel{X} \text{ [Ex 3.10]}$$

existem as derivadas parciais no ponto  $a$  e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a; e_i)$$

## GENERALIZAÇÃO

Seja  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função. Diz-se que  $f$  é **derivável** ou **diferenciável** em  $a \in \mathcal{D}$ , se existir uma aplicação linear

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - \mathbf{L}(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

A esta aplicação linear, que se existir é única, chama-se **derivada de  $f$  em  $a$**  e denota-se por  $Df(a)$  ou  $f'(a)$ .

**Teorema:** A função  $f = (f_1, \dots, f_m)$  é derivável em  $a$  se e só se cada função componente  $f_i$  é derivável em  $a$ .

**Teorema:** Se  $f = (f_1, \dots, f_m)$  é derivável em  $a$ , então

$$Df(\mathbf{a}) : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

À matriz de  $Df$  relativamente às bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  chama-se **matriz jacobiana de  $f$  em  $a$**  e denota-se por  $Jf(\mathbf{a})$ , i.e.

$$Jf(\mathbf{a}) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{array} \right]$$

Note que a linha  $i$  de  $Jf(\mathbf{a})$  “corresponde” ao vetor gradiente de  $f_i$  em  $a$ .

## Exemplo: Seja

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y) : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (e^{x+y} + y, y^2x + x, \sin(x + y)) \end{aligned}$$

Calcular  $D\mathbf{f}(0, 0)$ .

- ▶ As funções componentes de  $f$

$$f_1(x, y) = e^{x+y} + y, \quad f_2(x, y) = y^2x + x, \quad f_3(x, y) = \sin(x + y)$$

são funções de classe  $\mathcal{C}^1$ , logo  $f$  é derivável em  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{f}(0, 0) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ u_1 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{f}(0, 0)(u_1, u_2) = (u_1 + 2u_2, u_1, u_1 + u_2).$$

### 3.4 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Sejam  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in \mathcal{D}$  e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que existe  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  numa vizinhança de  $a$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  admite derivada parcial em ordem a  $x_j$  em  $a$ , diz-se que  $f$  tem uma **derivada parcial de segunda ordem em  $a$**  que se representa por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \text{ou} \quad f_{x_i x_j}(a) \quad \text{ou} \quad \partial x_j \partial x_i f(a).$$

É também usual representar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$  por  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ .

Note que poderão existir  $n^2$  derivadas parciais de segunda ordem.

Indutivamente define-se **derivada parcial de ordem  $k$**  como uma derivada parcial de uma derivada parcial de ordem  $k - 1$ .

Quantas derivadas parciais de ordem  $k$  poderão existir?

**Exemplo:** Determine todas as derivadas parciais de 2<sup>a</sup> ordem da função  $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$ :

►  $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y) = 2x + 5y;$

►  $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y) = 5x + 8y;$

►  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 5y) = 2;$

►  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(5x + 8y) = 8;$

►  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(5x + 8y) = 5;$

►  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 5y) = 5.$

Sejam  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- ▶ Diz-se que  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ , quando existem e são contínuas todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k$ .
- ▶ Uma função  $f$  diz-se de classe  $\mathcal{C}^0$  se for contínua.
- ▶ Uma função  $f$  diz-se de classe  $\mathcal{C}^\infty$  se  $f$  for de classe  $\mathcal{C}^k$ , para todo  $k$ .

$$\mathcal{C}^0 \supsetneq \mathcal{C}^1 \supsetneq \mathcal{C}^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{C}^\infty$$

### Teorema de Schwarz

Se  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

O teorema anterior implica que, se  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ , então qualquer permutação na ordem de derivação de uma derivada parcial de ordem menor ou igual a  $k$ , conduz ao mesmo resultado.

**Exemplo:** Verifique o Teorema de Schwarz para a função  
 $f(x, y) = xe^y + yx^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2yx, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x.$$

**Exemplo:** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- ▶  $f_x(0, y) = -y, \quad f_y(x, 0) = x.$
- ▶  $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 1.$
- ▶  $f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = -1.$

Esta função possui derivadas de 2ª ordem em todos os pontos, mas

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Este resultado contraria o Teorema de Schwarz?

### 3.5 PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

- Se  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é derivável em  $a$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então  $h(x) = cf(x)$  é derivável em  $a$  e

$$Dh(a) = cDf(a)$$

↑

$$Jh(a) = cJf(a)$$

- Se  $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são deriváveis em  $a$ , então  $h(x) = f(x) + g(x)$  é derivável em  $a$  e

$$Dh(a) = Df(a) + Dg(a)$$

↑

$$Jh(a) = Jf(a) + Jg(a)$$

## PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

- Se  $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são deriváveis em  $a$ , então  $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$  é derivável em  $a$  e

$$Dh(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})$$



$$\nabla h(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})$$

- Se  $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são deriváveis em  $a$  e  $g$  não se anula em  $\mathcal{D}$ , então  $h(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$  é derivável em  $a$  e

$$Dh(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})Dg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}$$



$$\nabla h(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}$$

## REGRA DA CADEIA

Sejam  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  funções tais que  $\mathbf{g}$  é derivável em  $a$  e  $\mathbf{f}$  é derivável em  $\mathbf{g}(a)$ . Então  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  é derivável em  $a$  e

$$D\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(a) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(a)) \circ D\mathbf{g}(a)$$



$$J\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(a) = J\mathbf{f}(\mathbf{g}(a))J\mathbf{g}(a)$$

**Exemplo:**  $\mathbf{f} : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (xz, xy) \end{matrix}$        $\mathbf{g} : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathbb{R} \\ x^2 + y \end{matrix}$

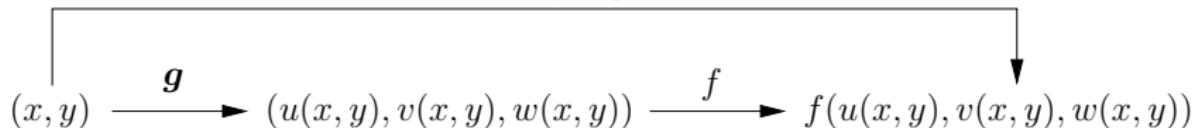
$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla g \circ \mathbf{f}(x, y, z) = \nabla g(f(x, y, z)) J\mathbf{f}(x, y, z) = (2xz^2 + y, x, 2x^2z)$$

$$(2xz \quad 1) \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = (2xz^2 + y \quad x \quad 2x^2z)$$

**Observação:**  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$        $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h = f \circ \mathbf{g}$$



$$\nabla h(x, y) = \nabla f(\mathbf{g}(x, y)) J\mathbf{g}(x, y)$$

$$\nabla f(\mathbf{g}(x, y)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbf{g}(x, y)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{g}(x, y)}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\mathbf{g}(x, y)} \right)$$

$$f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \textcolor{teal}{x}}(\textcolor{teal}{x}, y, z)$$

$$\nabla f(\mathbf{g}(x, y)) = \nabla f(\textcolor{red}{u}, \textcolor{red}{v}, \textcolor{red}{w})$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w} \right)$$

$$h = f(u, v, w), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y).$$

$$\nabla h(\textcolor{teal}{x}, \textcolor{teal}{y}) = \nabla f(\textcolor{red}{u}, \textcolor{red}{v}, \textcolor{red}{w}) \ J\mathbf{g}(\textcolor{teal}{x}, \textcolor{teal}{y})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

**Exemplo:** Sejam  $h(x, y) = f(e^{-x+y}, e^{xy})$  e  $f(u, v) = u^2 - 3v$ .

$$h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \quad u(x, y) = e^{-x+y}, \quad v(x, y) = e^{xy}.$$

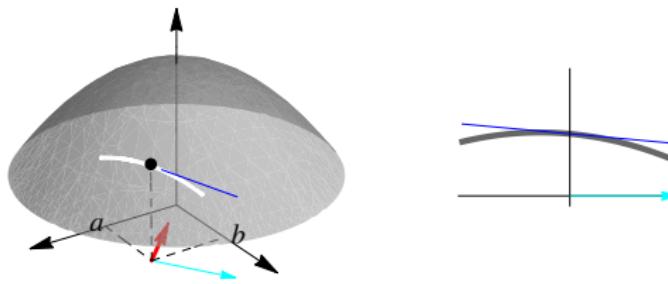
$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u \Big|_{u=e^{-x+y}} (-e^{-x+y}) - 3ye^{xy} \\ &= -2e^{-2x+2y} - 3ye^{xy}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 2u \Big|_{u=e^{-x+y}} e^{-x+y} - 3xe^{xy} \\ &= 2e^{-2x+2y} - 3xe^{xy}. \end{aligned}$$

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE

► Seja  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que  $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$ .

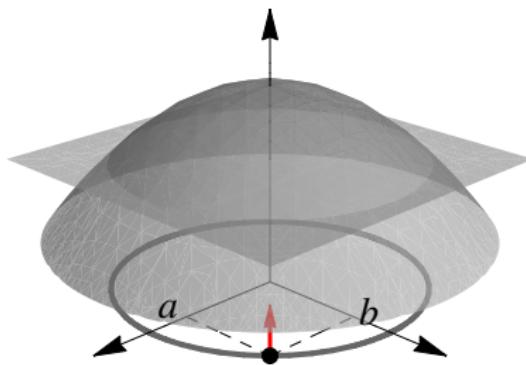
$\nabla f(x_0)$  aponta na direção e sentido de crescimento máximo.



► Seja  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que  $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$  e seja  $\Sigma_c$  a hipersuperfície de nível  $c$  de  $f$ , isto é,

$$\Sigma_c = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : f(\mathbf{x}) = c\}.$$

$\nabla f(x_0)$  é normal, em  $x_0$ , à hipersuperfície de nível  $f(x_0)$  de  $f$ .



## RETA NORMAL E HIPERPLANO TANGENTE A $\Sigma_c$

Sejam  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável,  $\Sigma_c$  a hipersuperfície de nível  $c$  de  $f$  e  $x_0 \in \Sigma_c$  tal que  $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$ .

- ▶ Uma equação da **reta normal** a  $\Sigma_c$  em  $x_0$  é

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \nabla f(\mathbf{x}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Uma equação do **hiperplano tangente** a  $\Sigma_c$  em  $x_0$  é

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0.$$

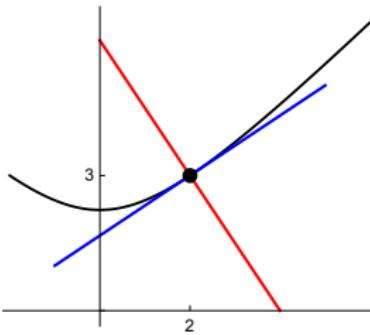
**Exemplo:** Determinar uma equação da reta perpendicular e da reta tangente à hipérbole  $y^2 - x^2 = 5$  no ponto  $(2, 3)$ .

A hipérbole é a curva de nível 5 da função

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

e passa em  $(2, 3)$ . Como  $\nabla f(3, 5) = (-4, 6)$ , obtém-se:

- **reta perpendicular:**  $(x, y) = (2, 3) + \lambda(-4, 6)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- **reta tangente:**  $(x - 3, y - 5) \cdot (-4, 6) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 5$ .



**Exemplo:** Determinar uma equação do plano tangente à superfície de equação  $z = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$  no ponto  $(1, 2, \frac{e}{5})$ .

Esta superfície é a superfície de nível 0 da função

$$f(x, y, z) = z - \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

e passa em  $(1, 2, \frac{e}{5})$ . Como

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{2e^x x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{e^x}{x^2 + y^2}, \frac{2e^x y}{(x^2 + y^2)^2}, 1 \right),$$

obtém-se  $\nabla f(1, 2, \frac{e}{5}) = (-\frac{3e}{25}, \frac{4e}{25}, 1)$

**Plano tangente:**

$$(x - 1, y - 2, z - \frac{e}{5}) \cdot (-\frac{3e}{25}, \frac{4e}{25}, 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + \frac{25}{e}z = 10.$$