introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios caos

1.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Como sabemos, ver um exercício anterior, dado um qualquer ponto $x \in [0,1]$, temos que a representação binária de $\mathcal{S}(x)$ corresponde ao deslocamento para a esquerda da representação binária de x, ou seja, se $x = (0.d_1d_2d_3\ldots)_2$, então $\mathcal{S}(x) = (0.d_2d_3\ldots)_2$.

1.1

Pela sua definição, facilmente se percebe que $\mathcal{S}$ não é diferenciável (não é contínua) num ponto, a saber $(0.1)_2$. Assim sendo, podemos retirar que $\mathcal{S}$ só não é diferenciável num ponto cuja imagem por $\mathcal{S}^2$ é um ponto fixo. Por outro lado, como a imagem por $\mathcal{S}$ dos intervalos $(0,1/2)$ e $(1/2,1)$ é o intervalo $(0,1)$, podemos concluir que a aplicação $\mathcal{S}^2$ não é diferenciável em três pontos, a saber $(0.d_1d_2)_2$, com d_1, d_2 quaisquer, excepto ambos nulos. Deste modo, podemos dizer que $\mathcal{S}^2$ só não é diferenciável em pontos cuja imagem por $\mathcal{S}^3$ é um ponto fixo. O mesmo tipo de argumentos permite-nos afirmar que a aplicação $\mathcal{S}^n$ não é diferenciável em pontos com representação binária $(0.d_1\ldots d_n)_2$, com $d_1,\ldots,d_n$ quaisquer, excepto todos nulos. Assim sendo, podemos dizer que $\mathcal{S}^n$ só não é diferenciável em pontos cuja imagem por $\mathcal{S}^{n+1}$ é um ponto fixo e concluir que $\mathcal{S}^n$ é diferenciável nos pontos periódicos de período n de $\mathcal{S}$.
Seja $\bar{x}$ um ponto periódico, de período n de $\mathcal{S}$. Então, temos que

$$|(\mathcal{S}^n)'(\bar{x})| = |\mathcal{S}'(\bar{x}) \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}(\bar{x})\big) \times \cdots \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}^{n-1}(\bar{x})\big)| = 2^n > 1,$$

pelo que $\bar{x}$ é um ponto periódico repulsivo. Pela arbitrariedade de $\bar{x}$, podemos concluir que todos os pontos periódicos de $\mathcal{S}$ são repulsivos.

1.2

Mostrar que Per$(\mathcal{S})$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$ corresponde a verificar que tão perto quanto queiramos de um ponto de $[0,1]$ existe sempre um elemento de Per$(\mathcal{S})$.
Seja $\varepsilon = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um qualquer número positivo, tão pequeno quanto queiramos. Então, para qualquer $x = (0.d_1d_2d_3\ldots)_2 \in [0,1]$, consideremos o ponto $\bar{x} = (0.\overline{d_1\ldots d_{n+1}})_2 \in$ Per$(\mathcal{S})$. Vamos mostrar que a distância entre estes pontos é inferior a ε:

$$\begin{aligned} |x - \bar{x}| &= |(d_1 - d_1) \times \frac{1}{2} + \cdots + (d_{n+1} - d_{n+1}) \times \frac{1}{2^{n+1}} + (d_{n+2} - d_1) \times \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots| \\ &= |(d_{n+2} - d_1) \times \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos concluir que Per$(\mathcal{S})$ é um conjunto denso em $[0,1]$.

1.3

Sabendo já que o conjunto dos pontos periódicos repulsivos de $\mathcal{S}$ é denso em $[0,1]$, basta mostrar que $\mathcal{S}$ tem sensibilidade às condições iniciais em $[0,1]$.

Seja $x = (0.d_1 d_2 \ldots)_2$ um qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ cuja representação binária não seja finita e seja $\delta = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um número positivo arbitrariamente pequeno. Então, $\bar{x} = (0.d_1 \ldots d_{n+1})_2$ é um ponto do intervalo $[0,1]$ cuja distância a x é inferior a δ e tal que $\mathcal{S}^k(\bar{x}) = 0$, para todo $k > n+1$. Deste modo, uma vez que, por hipótese, existe $m > n+1$, tal que $d_m = 1$, podemos imediatamente concluir que $|\mathcal{S}^m(x) - \mathcal{S}^m(\bar{x})| = |\mathcal{S}^m(x)| \geq 1/2 > 1/4$. Caso a representação binária de $x \in [0,1]$ seja finita, por outras palavras, se $x = (0.d_1 \ldots d_k)_2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então vamos escolher o ponto $\bar{x} = (0.d_1 \ldots d_{n+1}\bar{1})_2$. De facto, facilmente se mostra que, não só a distância entre estes pontos é inferior a $\delta = 2^{-n}$, como também que, para $m > k+1$, se tem $|\mathcal{S}^m(x) - \mathcal{S}^m(\bar{x})| = |\mathcal{S}^m(\bar{x})| = 1/2 > 1/4$. Fica assim provado que $\mathcal{S}$ tem sensibilidade às condições iniciais em $[0,1]$, pelo que podemos concluir que $\mathcal{S}$ tem caos no intervalo $[0,1]$.

2.

Chama-se aplicação tenda ao sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2 - 2\,x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

2.1 Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{T}$ são repulsivos.

2.2 Mostre que o conjunto $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ dos pontos periódicos de $\mathcal{T}$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$.

2.3 Conclua que o sistema dinâmico $\mathcal{T}$ tem caos em todo o intervalo $[0,1]$.

3.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x & \text{se } x < 1/2\,; \\ 3 - 3\,x & \text{se } x \geq 1/2\,. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos cuja órbita por f permanece no intervalo $[0,1]$.

3.1 Caracterize os pontos de $\mathcal{C}$.

3.2 Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de f são repulsivos.

3.3 Mostre que o conjunto $\mathrm{Per}(f)$ dos pontos periódicos de f é um conjunto denso em $\mathcal{C}$.

3.4 Conclua que o sistema dinâmico f tem caos em $\mathcal{C}$.