UNIVERSIDADE DO MINHO

ESCOLA DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Ricardo Severino e Maria Joana Torres

Licenciatura em Engenharia Informática

2011

Conteúdo

Parte I

Equações diferenciais

1 Equações diferenciais: noções básicas

Quando, a partir de finais do século XVII, foi possível entender e manipular o conceito de variação instantânea de uma quantidade, relativamente ao tempo, por exemplo, a perspetiva de modelar matematicamente os fenómenos naturais[1] teve um desenvolvimento e um sucesso sem paralelo na história. Veja-se o caso muito simples, mas que de alguma forma mostra como a nossa apreensão dos fenómenos naturais é basicamente feita registando variações.

Exemplo 1.1. Lei do arrefecimento de Newton. É habital chamar-se lei do arrefecimento de Newton à seguinte afirmação: *a taxa de variação da diferença de temperatura entre um determinado objeto e o meio onde está inserido é proporcional a essa diferença de temperatura.*

A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que consideramos as seguintes hipóteses:

1. a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;

2. a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;

3. o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m), \tag{1}$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

O sinal $-$ em (1) explica-se pelo fato de o calor fluir da fonte quente para a fonte fria, e assim, se $T > T_m$, então T decresce. Se $T < T_m$, então dT/dt cresce e o corpo aquece, em lugar de resfriar.

Este modelo foi considerado por Newton no estudo da perda de calor de uma bola de metal aquecida. Um modelo mais correto foi obtido usando a lei de Newton para "elementos

[1] Ideia essa com origem em Galileu Galilei, um século antes.

próximos" dentro do corpo e considerando uma equação envolvendo derivadas parciais da temperatura $T(t, x)$, que agora dependeria também do ponto x no corpo. A equação obtida

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

é conhecida como equação do calor e, após o trabalho de Fourier por volta de 1810, recebeu um tratamento extensivo.

Como podemos observar, as igualdades (1) e (2) são muito diferentes das equações que estamos habituados a resolver, primeiro porque as incógnitas são funções e depois porque temos a presença de derivadas dessas funções. Com efeito, na equação (1) a incógnita é a função $T(t)$ e temos a presença da derivada (total) de T. Na equação (2) a incógnita é a função $T(t, x)$ e temos a presença de derivadas parciais de T. Para resolver estas equações teremos de tentar encontrar uma função que satisfaz uma igualdade onde temos, para além da função, as suas derivadas. É a este tipo de equações que vamos passar a chamar **equação diferencial**.

Os nossos conhecimentos de Cálculo permitem-nos resolver a equação (1). Com efeito, se C é uma constante real qualquer, a função

$$T(t) = T_m + Ce^{-kt}$$

é uma solução da equação, uma vez que

$$T'(t) = -kCe^{-kt} = -k(T(t) - T_m).$$

Além disso, não existem mais soluções. Para mostramos esta afirmação, seja $U(t)$ uma qualquer solução e calculemos a derivada de $(U(t) - T_m)e^{kt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((U(t) - T_m)e^{kt}) &= U'(t)e^{kt} + k(U(t) - T_m)e^{kt} \\ &= -k(U(t) - T_m)e^{kt} + k(U(t) - T_m)e^{kt} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $(U(t) - T_m)e^{kt}$ é uma constante C e, portanto, $U(t) = T_m + Ce^{-kt}$. Isto prova a nossa afirmação.

Neste modelo é importante caracterizar a constante C relativamente às condições do problema no instante inicial, que vamos escolher como sendo $t = 0$: designando por T_0 a temperatura do objeto nesse instante inicial, temos que

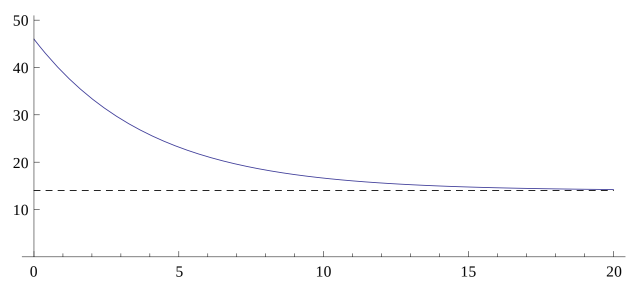
$$T(0) = T_m + C = T_0,$$

ou seja, a constante C é igual à diferença entre as temperaturas, $C = T_0 - T_m$. Podemos então concluir que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

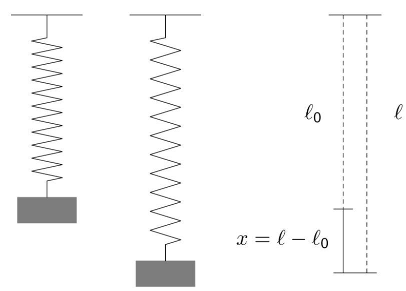
é a função que satisfaz a lei de arrefecimento de Newton, quando a temperatura inicial é T_0.

Considerando uma situação em que a temperatura ambiente é igual a $T_m = 14$, a temperatura inicial do corpo é igual a $T_0 = 46$ e um meio caracterizado por um valor da constante $k = 0.25$, teremos uma evolução temporal da temperatura do corpo representada pelo seguinte gráfico:



Como podemos observar pelo gráfico, a variação da temperatura corresponde à ideia que o corpo vai arrefecer até atingir o equilíbrio térmico com o ambiente que o rodeia. Mas agora temos um modelo que descreve exatamente, em cada instante, essa variação. Vejamos um segundo exemplo, encontrado, também empiricamente, por um contemporâneo de Newton. ■

Exemplo 1.2. Robert Hooke $(1638 - 1703)$ foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola: a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento ℓ da mola e a sua posição de equilíbrio ℓ_0. A constante de proporcionalidade é hoje chamada constante de Hooke da mola. Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade (ver figura). Naturalmente que a presença do corpo vai esticar um pouco a nossa mola até atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento que vamos designar por ℓ_0.



De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento ℓ da mola. A lei de Hooke estabelece que a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio, portanto, que

$$F = -k(\ell - \ell_0) = -kx.$$

O sinal no lado direito da igualdade reflete a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

A segunda lei do movimento de Newton diz-nos então que a posição do corpo, relativamente à posição de quilíbrio, vai evoluir de acordo com a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Habitualmente escreve-se esta igualdade da seguinte forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{3}$$

com $\omega^2 = k/m$ uma constante do sistema, dependente da constante de Hooke da mola e da massa do corpo nela pendurado. Assim sendo, esta vai ser uma equação diferencial que descreve a evolução temporal da posição de um qualquer corpo de massa m, neste caso, como todos sabemos, um movimento oscilatório, para cima e para baixo, pendurado numa mola de constante de Hooke k.

Comparando a equação (3) com a equação (1) do exemplo anterior, não é difícil prever que encontrar uma função que satisfaça a equação (3) será porventura uma tarefa mais difícil, uma vez que nela encontramos a segunda derivada da função. Contudo, uma vez mais, os nossos conhecimentos das funções elementares vão conduzir-nos facilmente a uma função que satisfaz a igualdade (3).

Como sabemos do estudo das funções elementares, existem duas funções cujas segundas derivadas são proporcionais aos seus simétricos: são as funções trigonométricas seno e cosseno. Deste modo, pelas propriedades da derivada de uma função, é possível antecipar que a função

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

com A, B e ω constantes arbitrárias, terá igualmente essa característica. Vejamos que isso é realmente verdade, calculando a sua segunda derivada. Como sabemos,

$$f'(t) = \omega A\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega B\cos(\omega t),$$

a partir da qual encontramos que

$$f''(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Ora, reescrevendo o lado direito da igualdade anterior,

$$f''(t) = -\omega^2 (A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)),$$

podemos concluir facilmente que a função f apresentada satisfaz a igualdade

$$f''(t) = -\omega^2 f(t),$$

ou seja, que essa função satisfaz a equação diferencial

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Ora, comparando esta equação com (3), podemos concluir que

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

com $\omega^2 = k/m$, descreve a posição, relativamente ao repouso, de um corpo de massa m suspenso numa mola de constante de Hooke k. Qual será a interpretação possível para as duas constantes A e B? A resposta é dada, tal como no exemplo anterior, relativamente ao tempo inicial, isto é, ao valor $t = 0$: de fato, escolhendo $t = 0$ na expressão acima, obtemos que a posição inicial do corpo, que vamos designar por x_0, é dada por

$$x(0) = x_0 = A \cos(\omega \cdot 0) + B \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) = A.$$

Podemos assim concluir que a primeira das constantes é igual à posição inicial do corpo. Por outro lado, recuperando a expressão para a primeira derivada da função, e escolhendo também $t = 0$, encontramos que a velocidade inicial do corpo, que vamos designar por v_0, é dada por

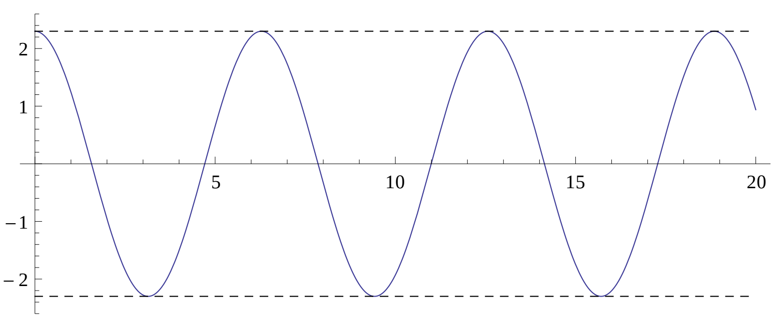
$$x'(0) = v_0 = -\omega A \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) + \omega B \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) = \omega B,$$

ou seja, que a constante B é proporcional à velocidade inicial do corpo. Concluindo, podemos escrever que a posição do corpo ao longo do tempo é descrita pela função

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t),$$

com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

Escolhendo uma situação com a massa do corpo $m = 1$, a constante de Hooke da mola $k = 1$, a posição inicial do corpo $x_0 = 2.3$ e a velocidade inicial do corpo nula, $v_0 = 0$, a variação da posição do corpo ao longo do tempo será representada pelo seguinte gráfico:



onde se pode constatar a oscilação, para cima e para baixo, em torno da sua posição de equilíbrio, da posição do corpo. As linhas tracejadas pretendem sublinhar o fato do corpo ter um movimento periódico, como aliás se poderia constatar estudando a função x. ■

Nestas notas vamos considerar situações em que temos uma única variável independente. Portanto, a variável dependente vai ser função apenas dessa variável e assim todas as suas derivadas serão relativamente a ela. Por isso se chamam equações diferenciais **ordinárias**, no sentido de envolverem as derivadas usuais. As equações em que temos mais do que uma variável independente são chamadas equações diferenciais com derivadas **parciais**.

Para simplificar a escrita das equações diferenciais ordinárias tornou-se habitual a seguinte notação: dada uma função $y(x)$, vamos escrever as derivadas de y, de diferentes ordens, relativamente a x como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y(x) &= \frac{dy}{dx} = y'(x) \\ \frac{d^2}{dx^2}y(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dx^n}y(x) &= \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Vejamos então a definição deste tipo de equações.

Definição 1.3. *Chama-se* **equação diferencial ordinária de ordem** n *relativamente a* $y(x)$ *a toda a igualdade*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{4}$$

em que F *é uma função real definida num aberto* U *de* $\mathbb{R}^{n+2}$*. Uma vez que nessa equação a derivada de maior ordem presente na equação é a derivada de ordem* n *da variável* y*, dizemos que se trata de uma equação diferencial ordinária de ordem* n*.*

Estabelecido o que entendemos por equação diferencial de ordem n, temos, naturalmente, que perceber bem o que significa resolver uma dessas equações, isto é, o que é uma solução de uma equação diferencial.

Definição 1.4. *Uma* **solução da equação diferencial ordinária** *(4) é uma função* $y : I \to \mathbb{R}$*, em que* I *é um intervalo aberto da reta real, tal que* y *e todas as suas derivadas até à ordem* n *existem e são contínuas em* I *e tal que ao substituirmos* y *e as suas derivadas na equação (4), a igualdade é válida, qualquer que seja* $x \in I$*.*

Exemplo 1.5. Consideremos a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \cos x. \tag{5}$$

Vamos mostrar que a função

$$y(x) = \frac{1}{2}(3xe^x - \operatorname{sen} x)$$

é solução desta equação diferencial em toda a reta real. Tal como nos indica a definição de solução de uma equação diferencial, devemos começar por mostrar que tanto a função y como a sua primeira e segunda derivadas, y' e y'', são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Ora, a continuidade de y conclui-se facilmente pois esta é uma soma de funções contínuas. Calculemos então y' e y''. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{1}{2}(3e^x + 3xe^x - \cos x)$$

e que

$$y''(x) = \frac{1}{2}(6e^x + 3xe^x + \operatorname{sen} x).$$

As expressões obtidas permitem-nos concluir igualmente que as funções y' e y'' são contínuas. Vejamos agora que estas funções satisfazem a igualdade (5):

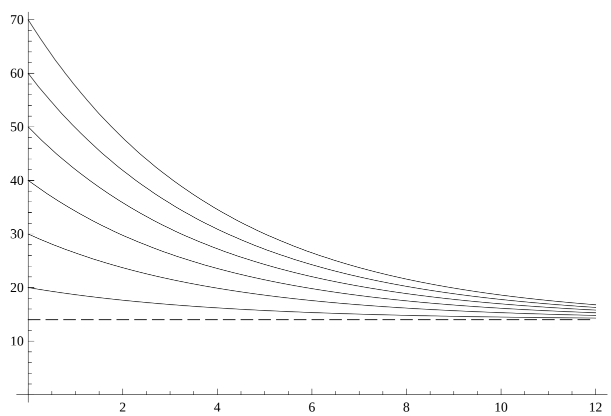
$$y''(x)-2y'(x)+y(x) = \frac{1}{2}(6e^x+3xe^x+\operatorname{sen} x)-(3e^x+3xe^x-\cos x)+\frac{1}{2}(3xe^x-\operatorname{sen} x) = \cos x.$$

■

Se recordarmos o Exemplo 1.1 e o Exemplo 1.2, veremos que as soluções aí apresentadas para as equações diferenciais se escreviam em termos de umas constantes arbitrárias, isto é, constantes cujos valores podíamos escolher, a saber, a constante T_0 na solução do Exemplo 1.1, e as duas constantes x_0 e v_0 na solução do Exemplo 1.2.

Nesses casos dizemos que estamos perante famílias de soluções, no sentido que a cada escolha das constantes corresponde uma solução diferente da equação diferencial. Pode ser muito interessante desenhar algumas curvas-solução de uma equação diferencial, para deste modo percebermos de que modo o comportamento da solução depende da escolha das constantes arbitrárias. Por exemplo, se relativamente à família de soluções do Exemplo 1.1,

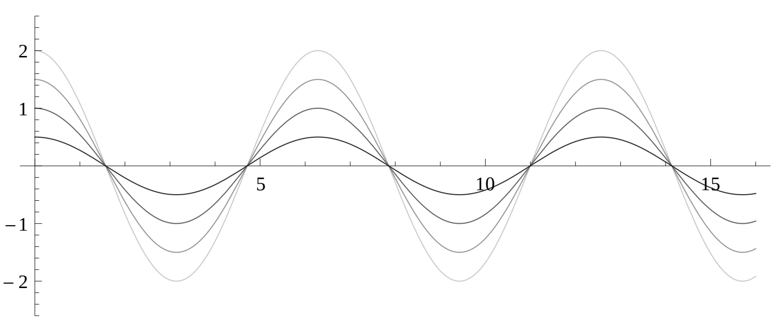
$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt},$$



escolhermos diferentes valores para a temperatura inicial do corpo, T_0, obteremos curvas-solução com idêntico comportamento, ilustrando o fato da temperatura do corpo tender, mais depressa ou mais devagar, para o equilíbrio com a temperatura do meio.

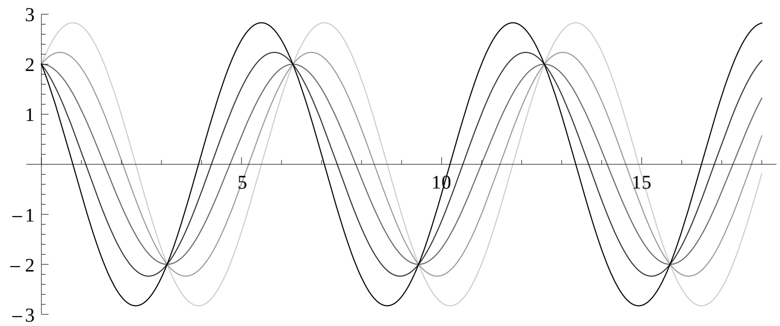
Notamos que, para considerarmos diferentes soluções a partir de diferentes escolhas da constante T_0, definimos a família de soluções como uma função dependendo não só da variável independente, o tempo t, mas dependendo também de um segundo parâmetro, da temperatura inicial do corpo T_0.

O estudo da família de soluções apresentada no Exemplo 1.2 é um pouco mais complicado, pois desta vez temos duas constantes, os valores iniciais da posição e da velocidade do corpo suspenso na mola. Talvez o melhor seja fixar um valor para a velocidade inicial do corpo, por exemplo $v_0 = 0$ e então desenhar as curvas-solução correspondentes a diferentes escolhas da posição inicial.



Como podemos constatar, apenas a amplitude máxima do movimento do corpo suspenso varia com a sua posição inicial; o período do movimento depende apenas da constante ω, isto é, da constante de Hooke da mola e da massa do corpo.

Na segunda parte do estudo, podemos fixar um valor para a posição inicial do corpo, $x_0 = 2$, e escolher então diferentes valores para a constante v_0. As correspondentes curvas-solução apresentam as seguintes formas:



Uma vez mais, pela análise das diferentes curvas-solução, podemos observar que o período do movimento do corpo não depende da sua velocidade inicial, mas, mais importante, que a amplitude máxima do movimento depende apenas do módulo dessa velocidade inicial, isto é, que movimentos iniciados com velocidades com valores simétricos têm idênticas amplitudes máximas.

O número de constantes arbitrárias presentes nas expressões das equações diferenciais nestes dois exemplos é diferente, acompanhando a ordem da equação diferencial em causa. Essa constatação pode ser generalizada: assim, podemos dizer que, em geral, uma equação diferencial de ordem n tem uma família de soluções que depende de n constantes arbitrárias.

Definição 1.6. *A* **solução (geral) de uma equação diferencial ordinária de ordem** n *é uma família de soluções, dependente de* n *constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores às constantes.*

2 Equações diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$

2.1 Problemas básicos

Atendendo à definição apresentada anteriormente, as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6}$$

onde F é uma função definida num aberto U de $\mathbb{R}^3$. Nesta secção iremos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$y' = f(x, y), \tag{7}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Chamamos a Ω o domínio da equação diferencial.

Nota 2.1. *Suponhamos que a função F em (6) é de classe $\mathcal{C}^1$ e admite, num dado ponto, derivada parcial não nula em ordem à última variável. Nesse caso o Teorema da Função Implícita garante-nos que, numa vizinhança desse ponto, a equação $F(x, y, y') = 0$ é equivalente a uma equação do tipo $y' = f(x, y)$.*

Definição 2.2. *Uma* **solução de uma equação do tipo** $y' = f(x, y)$ *é uma função $y : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo aberto da reta real, tal que*

$$\forall x \in I, \quad (x, y(x)) \in \Omega \quad \text{e} \quad y'(x) = f(x, y(x)). \tag{8}$$

Diremos que a solução y passa por um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

Definição 2.3. *Uma solução $y : I \to \mathbb{R}$ de uma equação diferencial do tipo $y' = f(x, y)$ diz-se* **maximal** *se não for prolongável a uma outra solução definida num intervalo aberto contendo propriamente I.*

Exemplo 2.4. Para todo $c \in \mathbb{R}$ as funções,

$$\begin{array}{rccc} y_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_2: & (-c,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_3: & (-\infty,-c) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial $y' = -y^2$. ■

Exemplo 2.5. As funções

$$\begin{array}{rccc} y_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

são duas soluções maximais (com o mesmo domínio) da equação diferencial $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, que passam no ponto $(0,0)$. ■

No estudo de uma equação diferencial do tipo $y' = f(x,y)$ surgem três problemas básicos:

1. Determinação das soluções da equação.

   Apesar de, em certas condições, existirem resultados de existência e unicidade para equações deste tipo, não se espera conseguir encontrar, mesmo em casos simples, as soluções das equações de um modo explícito. Nos casos que vamos tratar daremos métodos que nos permitem encontrar a solução y pretendida como uma solução *implícita* de uma equação do tipo $F(x,y) = 0$. Nestes casos, a derivada parcial de F em ordem a y será diferente de 0, o que nos garante que a equação $F(x,y) = 0$ define localmente y como função de x. Hipoteticamente, a equação $F(x,y) = 0$ pode ser resolvida *explicitamente* em ordem a y.

   Muitas vezes as equações diferenciais poderão ter a forma $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$, em que $P(x,y)$, $Q(x,y)$ são funções contínuas definidas num mesmo aberto V de $\mathbb{R}^2$. É claro que, no aberto $\{(x,y) \in V : Q(x,y) \neq 0\}$, esta equação é equivalente,

   $$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

   Por outro lado uma equação do tipo $y' = f(x,y)$ pode ser sempre escrita na forma $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$, basta tomar $P(x,y) = -f(x,y)$ e $Q(x,y) = 1$.

Nota 2.6. *O domínio das equações diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$ será sempre o maior possível, de modo a que "f tenha sentido".*

Analogamente, sempre que nos referirmos a uma equação diferencial do tipo $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, estaremos a assumir que o domínio (comum) das funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ é o maior possível de tal modo que $Q(x, y)$ nunca se anula.

2. Determinação da solução maximal que passa num dado ponto (x_0, y_0) do domínio.

   Veremos na próxima secção que, sob certas condições, existe uma e uma só solução da equação $y' = f(x, y)$ que passa num dado ponto (x_0, y_0).

   Exemplo 2.7. Vamos determinar a solução maximal da equação $\dfrac{dy}{dt} = e^{3t}$ que passa no ponto $(1/3, e/3)$.

   A equação
$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$
   pode ser resolvida por integração direta obtendo-se:
$$y(t) = \int e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{3} + C, \ \ C \in \mathbb{R}$$
   que é a solução da equação diferencial. Substituindo $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada, obtem-se $C = 0$. Assim, a solução maximal da equação dada que passa no ponto $(1/3, e/3)$ é:
$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{3t}}{3} \end{array}$$
   ■

3. Teoria qualitativa.

   Em muitos problemas de aplicações não é necessário conhecer-se a expressão algébrica das soluções da equação diferencial. É suficiente conhecer-se as propriedades das soluções, como por exemplo, o seu comportamento quando x se aproxima de um valor pré-definido. Com isto em vista, é interessante e importante estudar-se propriedades geométricas da família das soluções da equação diferencial. Este problema básico no estudo das equações diferenciais pertence à chamada *teoria qualitativa*.

2.2 Interpretação geométrica da equação $y' = f(x, y)$

Para melhor compreendermos os problemas referidos na secção anterior é importante compreender o significado geométrico da equação diferencial

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano.

A função f atribui a cada ponto de Ω um número real $f(x, y)$; a equação diferencial diz que a solução que passa por esse ponto deve ter inclinação igual a esse número real:

$$\text{tg } \theta = f(x, y),$$

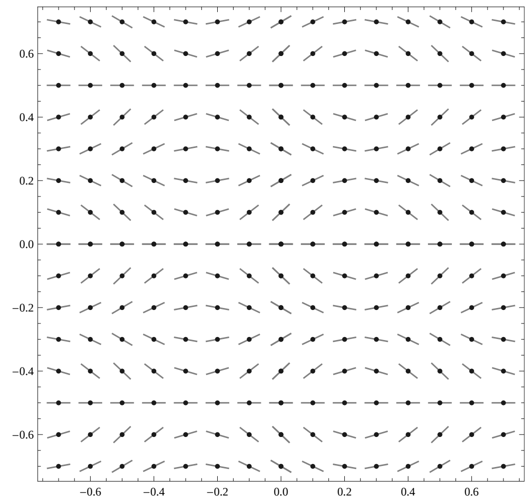
onde θ é o ângulo da tangente T à solução com o eixo horizontal. Esta interpretação pode tornar-se ainda mais geométrica se imaginarmos o seguinte. Em cada ponto $(x, y) \in \Omega$, consideramos o vetor $v(x, y) = (1, f(x, y))$ que determina a tangente T. Assim, temos um campo de vetores definido em Ω. As soluções da equação $y' = f(x, y)$ são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto (x, y) são os vetores $v(x, y)$.

Definição 2.8. *O* **campo de direções tangentes** *de uma equação do tipo $y' = f(x, y)$, onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano, é a representação gráfica das retas tangentes às soluções da equação em cada ponto $(x, y) \in \Omega$.*

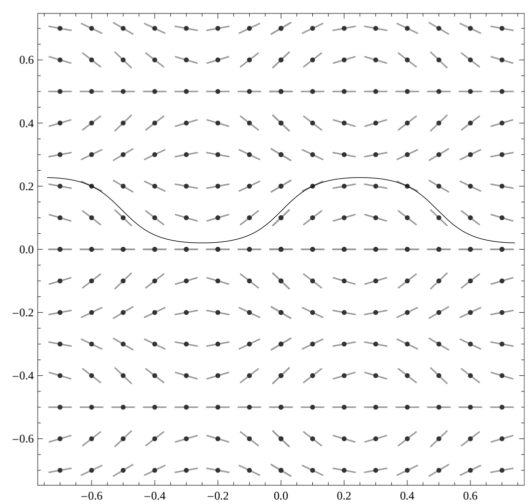
Exemplo 2.9. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \cos(2\pi x) \operatorname{sen}(4\pi y).$$

Se, em cada ponto (x_0, y_0), desenharmos um pequeno segmento de reta de declive exatamente igual ao valor da função f nesse ponto, obteremos a seguinte figura:



O significado destas direções, definidas em cada ponto, é muito fácil de apreender: se desenharmos a solução da equação diferencial, y, que passa pelo ponto $(0.1, 0.2)$, podemos observar que essa solução, apresentada a tracejado, passa por mais dois destes pontos da figura, nos quais é visível que as direções neles desenhadas correspondem extamente às retas tangentes a y.



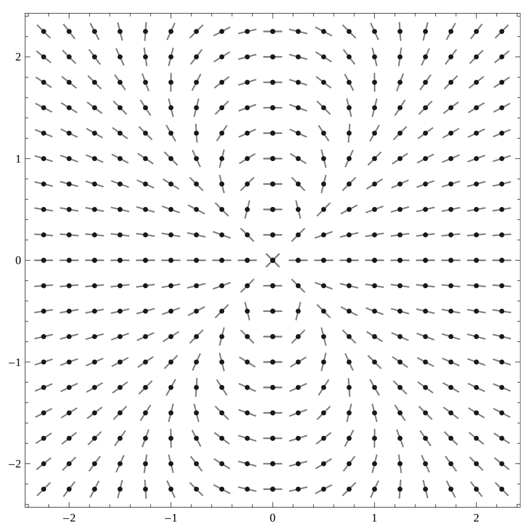
■

É esta a interpretação geométrica dos segmentos de reta definidos em cada ponto com a direção de $f(x, y)$: são as direções das retas tangentes à solução da equação diferencial que passa por esse ponto. Com o exemplo seguinte procuraremos sublinhar um outro aspeto importante desta interpretação geométrica.

Exemplo 2.10. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem que descreve as linhas de força de um pequeno magneto, aqui considerado como pontual, ou seja, cujas dimensões são consideradas muito menores que as distâncias em causa:

$$y' = f(x,y) = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

Se, uma vez mais, desenharmos em cada ponto um pequeno segmento de reta de declive exatamente igual ao valor da função f nesse ponto, obteremos a seguinte figura:



Desta vez decidimos considerar mais pontos (x_0, y_0), de modo que agora o desenho dos segmentos de reta quase que, escolhido um determinado ponto, permitem deduzir o gráfico da solução y que por ele passa. Mas é exatamente isto que significa resolver uma equação diferencial do tipo $y' = f(x,y)$: encontrar uma função y tal que, para cada x_0, a sua reta tangente tenha como declive a direção assinalada no ponto (x_0, y_0), com $y_0 = y(x_0)$. ■

2.3 Teorema de existência e unicidade de solução

Estamos agora em condições de enunciar um dos mais importantes resultados nesta área da matemática, o chamado Teorema Fundamental das Equações Diferenciais do tipo $y' = f(x,y)$. Não será feita a sua demonstração uma vez que, para o fazer, seriam necessários conceitos ainda não conhecidos dos alunos: o teorema do ponto fixo, o princípio da boa ordenação, etc.

Teorema 2.11. (Fundamental das Equações Diferenciais do tipo $y' = f(x,y)$) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a derivada parcial de f com relação à segunda variável é contínua. Consideremos a equação diferencial $y' = f(x,y)$.*

Então, se $(x_0, y_0) \in \Omega$:

1. *existe uma e uma só solução maximal que passa por (x_0, y_0);*
2. *toda a solução pode ser prolongada a uma solução maximal;*
3. *se $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são duas soluções da equação diferencial que passam em (x_0, y_0) então ${y_1}_{|I_1 \cap I_2} = {y_2}_{|I_1 \cap I_2}$.*

A última alínea deste teorema é uma consequência simples das outras duas alíneas.

Exemplo 2.12. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = f(x,y) = \frac{2x(1+y)}{1+x^2} \tag{10}$$

definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Como facilmente se verifica, tanto f como a sua derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{1+x^2}$$

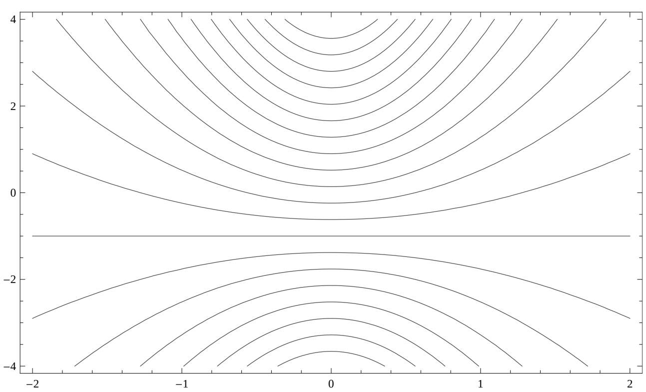
são funções contínuas em todo o plano, pelo que o teorema anterior garante a existência de uma única solução maximal y que passa num dado ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Desenhando algumas curvas-solução teremos uma ideia do que isso significa. Mas, primeiro, verifiquemos que a família de funções, definidas implicitamente por

$$G(x, y) = \frac{1+y}{1+x^2} = k$$

com k uma constante arbitrária, satisfazem a equação diferencial (10):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{1+x^2}\right) = -\frac{2x(1+y)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Rearranjando os termos do lado esquerdo da última igualdade, chegamos facilmente à igualdade (10), como queríamos mostrar. Usando o comando ContourPlot do Mathematica é agora possível desenhar várias curvas-solução, correspondentes a diferentes escolhas para k.



■

Este exemplo mostra um desenho característico das curvas-solução de uma equação diferencial de primeira ordem que satisfaz as condições do teorem de existência e unicidade de solução. De seguida, vamos estudar tipos muito particulares de equações diferenciais de primeira ordem, relativamente aos quais existem procedimentos para se obter as respetivas soluções.

2.4 Equações diferenciais lineares

Este tipo de equações diferenciais não é o mais simples de resolver, mas tem a vantagem de nos conduzir diretamente à sua solução explícita.

Definição 2.13. *Uma* **equação diferencial linear de primeira ordem** *é uma equação que pode ser escrita na forma*

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \tag{11}$$

onde P e Q são funções contínuas definidas num aberto I da reta real.

O método para encontrar a solução deste tipo de equações diferenciais inicia-se pela multiplicação, por razões que serão entendidas *a posteriori*, de ambos os membros da igualdade por uma função, que é habitual designar por fator integrante e denotar por μ. Assim sendo, a igualdade anterior apresenta-se como

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = \mu(x)Q(x). \tag{12}$$

O ponto fundamental do método é o seguinte: será possível escolher a função μ de modo que o lado esquerdo da igualdade (12) seja igual à derivada do produto das funções y e μ, isto é, existirá uma função μ tal que

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = (y(x)\mu(x))'? \tag{13}$$

Como vamos mostrar de seguida, caso consigamos encontrar uma função μ com estas caraterísticas a resolução da equação diferencial ficará extremamente facilitada. Bom, para responder à questão levantada temos apenas que desenvolver a derivada que se apresenta no lado direito da igualdade (13) e ver que condição daí resulta para a função μ:

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = (y(x)\mu(x))' = y'(x)\mu(x) + y(x)\mu'(x)$$

ou seja,

$$P(x)\mu(x) = \mu'(x). \tag{14}$$

Esta igualdade diz-nos que a função μ é tal que a sua derivada é proporcional a si própria, propriedade que imediatamente nos permite identificar μ como uma função exponencial.

Neste caso, será uma função exponencial com uma função como expoente cuja derivada é igual à função P dada (notemos que a função P é contínua), ou seja,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{15}$$

Note-se que esta não é a única função μ que satisfaz a igualdade (14), mas isso não vai, como veremos mais tarde, implicar nenhuma particularização da nossa parte na solução da equação diferencial que estamos a resolver. Partindo do princípio que é possível encontrar uma função μ que satisfaz a igualdade (13), que dependa da nossa capacidade em calcular o integral envolvido em (15), vamos agora ver como se obtém a solução da equação diferencial.

A partir das igualdades (12) e (13), podemos escrever

$$(y(x)\mu(x))' = \mu(x)Q(x),$$

da qual imediatamente se retira que

$$y(x)\mu(x) = \int \mu(x)Q(x). \tag{16}$$

Como a função μ nunca se anula, temos que a solução procurada é,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)\,dx.$$

Concluímos assim o método para encontrar, de uma forma explícita, a solução de uma qualquer equação diferencial linear de primeira ordem.

Exemplo 2.14. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = -2y(x) + 50e^{-10x},$$

que facilmente se reconhece como sendo do tipo linear, com

$$P(x) = 2 \;\text{ e }\; Q(x) = 50e^{-10x}.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}.$$

Multiplicando a equação por μ obtemos

$$e^{2x}y'(x) + 2e^{2x}y(x) = 50e^{-8x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $e^{2x}y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y(x)) = 50e^{-8x}.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$e^{2x}y(x) = -\frac{25}{4}e^{-8x} + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x}$, com $C \in \mathbb{R}$.

Para cada $C \in \mathbb{R}$ a função,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x} \end{array}$$

é a solução maximal da equação diferencial.

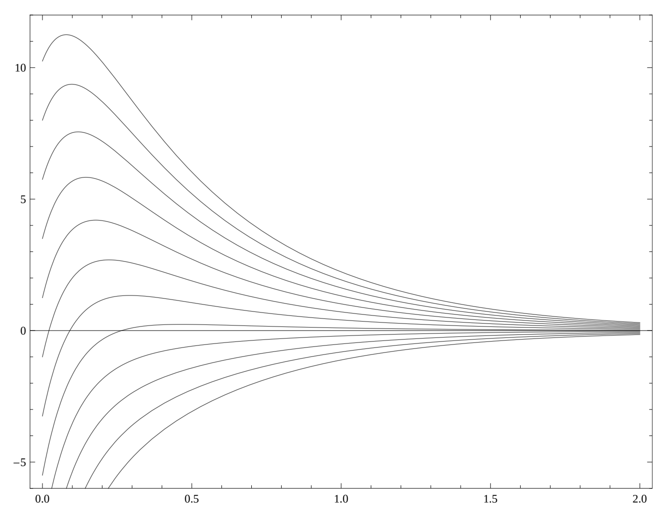


Figura 1: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x) = -2y(x) + 50e^{-10x}$.

$\blacksquare$

Exemplo 2.15. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = \frac{y}{x} - xe^x,$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = -\frac{1}{x} \text{ e } Q(x) = -xe^x.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Multiplicando a equação por μ obtemos

$$\frac{1}{|x|}y'(x) - \frac{y}{x|x|} = -\frac{x}{|x|}e^x.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $\frac{1}{|x|}y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|x|}y(x)\right) = -\frac{x}{|x|}e^x.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$\frac{1}{|x|}y(x) = -\frac{x}{|x|}e^x + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = -xe^x + C|x|.$$

A expressão geral da solução da equação é, portanto, $y(x) = -xe^x + C|x|$, $C \in \mathbb{R}$.

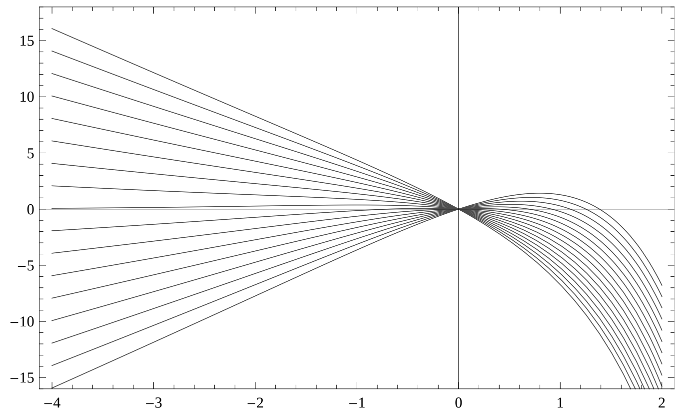


Figura 2: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x) = \frac{y}{x} - xe^x$.

Para todo o $C \in \mathbb{R}$ as funções,

$$\begin{array}{rcl} (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -xe^x + Cx \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} (-\infty,0) & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & -xe^x - Cx \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial. ■

Exemplo 2.16. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) + \frac{3y}{x} + 3x = 2,$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = \frac{3}{x} \;\text{ e }\; Q(x) = 2 - 3x.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{3\log|x|} = |x|^3.$$

Multiplicando a equação por μ obtemos

$$|x|^3 y'(x) + 3\frac{|x|}{x} y = 2|x|^3 - 3x|x|^3.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $|x|^3 y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(|x|^3 y(x)\right) = 2|x|^3 - 3x|x|^4.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$|x|^3 y(x) = |x|\frac{x^3}{2} - 3|x|\frac{x^4}{5} + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{|x|^3}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{|x|^3}$, com $C \in \mathbb{R}$.

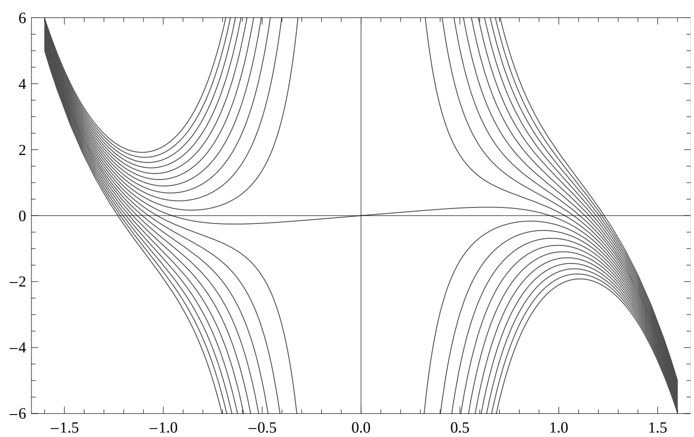


Figura 3: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x) + \frac{3y}{x} + 3x = 2$

Para todo o $C \in \mathbb{R}$ as funções

$$\begin{array}{rcl} (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{x^3} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} (-\infty,0) & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} - \frac{C}{x^3} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial. ■

Exemplo 2.17. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$x^2 y'(x) + xy = 1$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Vamos determinar a solução maximal da equação que passa no ponto $(1, 2)$.

A equação dada é equivalente a

$$y'(x) + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = \frac{1}{x} \text{ e } Q(x) = \frac{1}{x^2}.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\, dx} = e^{\log|x|} = |x| = x.$$

Multiplicando a equação por μ obtemos

$$xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $xy(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(xy(x)\right) = \frac{1}{x}.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$xy(x) = \frac{\log x}{x} + C$$

e, portanto,

$$y(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{C}{x}$, com $C \in \mathbb{R}$.

Encontrada a solução geral, temos agora de encontrar a solução que passa no ponto $(1, 2)$, isto é, temos de determinar para que escolha da constante C se obtém $y(1) = 2$. Temos que

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

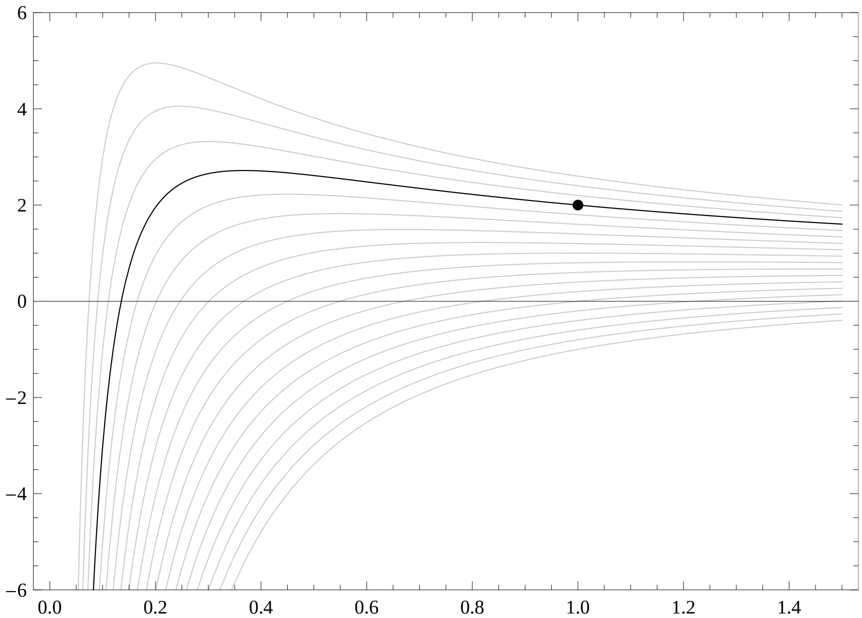


Figura 4: Curva-solução da equação diferencial $x^2y'(x) + xy = 1$ que passa no ponto $(1, 2)$.

Assim, a solução maximal que passa no ponto $(1, 2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \frac{\log x}{x} + \frac{2}{x} \end{array}$$

$\blacksquare$

2.5 Equações diferenciais separáveis

O segundo tipo de equações diferenciais que vamos estudar tem associado um método de resolução muito mais simples que as equações diferenciais lineares anteriormente estudadas. No entanto, como veremos já de seguida, tem o inconveniente de conduzir a soluções implícitas.

O procedimento para resolver este tipo de quação diferencial foi pela primeira vez apresentado por Gottfried Leibniz, em 1691. Contudo, somente John Bernoulli, em 1694, as classificou formalmente como equações diferenciais separáveis e considerou explicitamente a forma de as resolver.

Definição 2.18. *Chamamos* **equação separável** *a uma equação que se pode escrever na forma*

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

em que $f(x)$, $g(y)$ são funções contínuas.

Vamos ver como resolver uma equação separável. Começamos com uma observação:

- Suponhamos que y é uma função de x e que queríamos calcular uma primitiva de uma função do tipo $h(y(x))y'$. Um modo de o fazer é encontrar $H(y)$, uma primitiva de $h(y)$ em ordem a y, e considerar a função $x \mapsto H(y(x))$. Esta é uma consequência simples do Teorema da Derivação da Função Composta, uma vez que,

  $$(H \circ y)' = H'(y(x))y'(x) = h(y(x))y'(x).$$

  Deste modo, "calcular uma primitiva em ordem a x de $h(y(x))y'(x)$ equivale a encontrar uma primitiva em ordem a y de $h(y)$".

Consideremos uma equação separável $y'(x) = f(x)g(y)$, $x \in I$, $y \in J$.

1. **Determinação das soluções constantes**.

   As soluções constantes da equação são as funções $y : I \to \mathbb{R}$ dadas por $y(x) = \lambda$ onde $\lambda \in J$ é um zero de g.

   Exemplo 2.19. – A função $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é a única solução constante da equação $y' = xy^3$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

   – A equação $(1 + x^2)y' = 1/y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0, +\infty[$ não tem soluções constantes.

   – A equação $y' = x \cos^2(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tem uma infinidade de soluções não constantes: são as funções $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

■

2. **Determinação das soluções não constantes.**

   Se $y \in J \backslash \{y \in J : g(y) = 0\}$, a equação $y'(x) = f(x)g(y)$ é equivalente à equação

$$\frac{1}{g(y)} y'(x) = f(x).$$

   Sejam $A(x)$ uma primitiva de $f(x)$ e $B(y)$ uma primitiva de $\frac{1}{g(y)}$. Integrando em ordem a x e usando a observação acima,

$$\frac{1}{g(y)} y'(x) = f(x) \iff \exists c \in \mathbb{R} : B(y) - A(x) = c.$$

   Note-se que:

   - o valor de c pode ser encontrado usando a condição inicial $y(x_0) = y_0$. Assim $c = B(y_0) - A(x_0)$;
   - a equação $B(y) - A(x) = c$ define de facto y (implicitamente) como função de x uma vez que a derivada de $B(y) - A(x)$ em ordem a y é diferente de zero no ponto (x, y). Note-se que esse valor é $\dfrac{1}{g(y)}$.

Na prática, a resolução de uma equação separável pode fazer-se "separando as variáveis": denotemos a derivada do lado esquerdo da igualdade $y' = f(x)g(y)$ como um quociente de diferenciais, isto é, consideremos a equação diferencial separável reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Deste modo, manipulando o quociente de diferenciais e as funções em causa, para valores de y tais que $g(y) \neq 0$, podemos facilmente obter uma igualdade entre duas quantidades envolvendo, em cada um dos lados, apenas uma das variáveis, isto é,

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx. \tag{17}$$

É desta forma de representar a equação diferencial que vem a sua designação, pois, como podemos constatar, foi possível isolar cada uma das variáveis em causa em diferentes lados da igualdade. A partir de (17) é possível obter uma igualdade entre duas funções se calcularmos o integral de ambos os lados,

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx. \tag{18}$$

Partindo do princípio que é possível calcular ambos os integrais, esta igualdade apresenta-nos uma relação entre uma função de $y(x)$, a solução da equação diferencial, e uma função da variável independente. Temos assim a solução procurada dada de uma forma implícita. Antes de ilustrar este método com alguns exemplos, talvez seja importante antecipar o seguinte ponto: como sabemos, das integrações envolvidas em (17) vamos ter duas constantes arbitrárias, que resulta numa diferença de constantes arbitrárias, ao passar uma delas para o outro lado da igualdade. Ora, como facilmente se constata, a diferença de duas constantes arbitrárias é apenas e só uma constante arbitrária, e como tal deve ser apresentada. Assim sendo, aquando da integração deste tipo de equação diferencial é habitual não considerar a constante arbitrária da integração do lado esquerdo de (17), vindo então a constante resultante da outra integração como aquela, única, que deve aparecer na expressão final.

Exemplo 2.20. Consideremos a equação $y' = e^{-y}\cos x$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Esta equação é separável. Note-se que e^{-y} nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$e^y y' = \cos x.$$

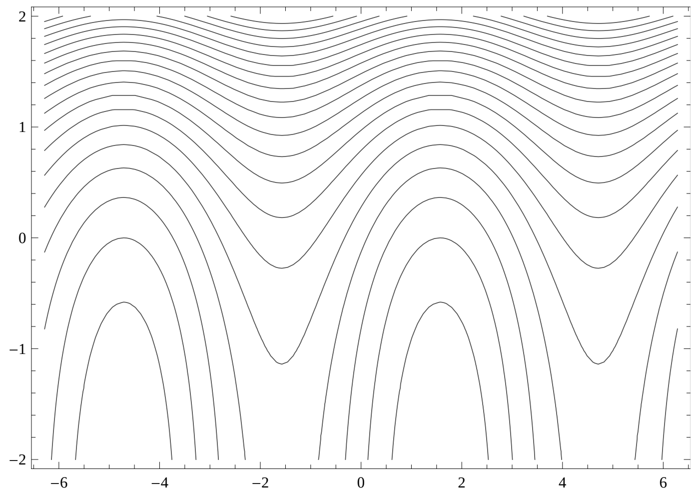
Separando as variáveis obtemos

$$e^y\, dy = \cos x\, dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$e^y = \operatorname{sen} x + C \quad \text{para algum } \; C \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

A partir da relação (19) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução:



■

Exemplo 2.21. Consideremos a equação $y' = x \cos x/(1 + \text{sen}^2(y))$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Esta equação é separável com $f(x) = x \cos x$ e $g(y) = 1/(1 + \text{sen}^2(y))$. Note-se que a função g nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$(1 + \text{sen}^2(y))y' = x \cos x.$$

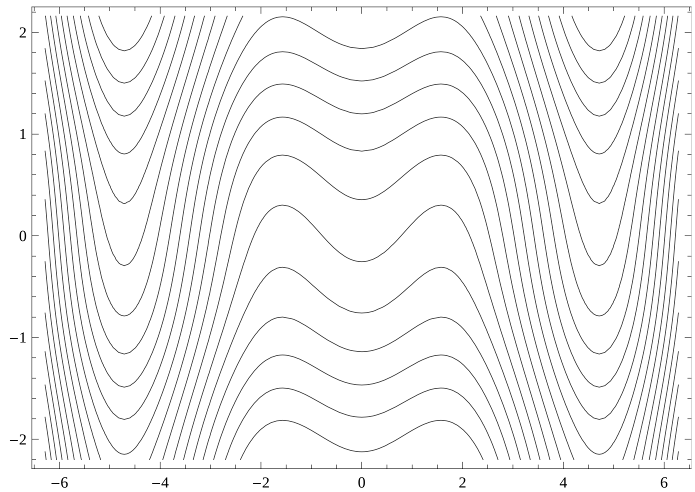
Separando as variáveis obtemos

$$(1 + \text{sen}^2(y))\, dy = x \cos x\, dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$\frac{3y}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2y) = \cos x + x \,\text{sen}\, x + C \quad \text{para algum} \quad C \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

A partir da relação (20) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução:



■

Exemplo 2.22. Consideremos a equação $y' = 2\,\mathrm{sen}(4x)e^{-x}\dfrac{1+y^2}{4y}$ de domínio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Esta equação é separável com $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(4x)e^{-x}$ e $g(y) = \frac{1+y^2}{4y}$. Note-se que a função g nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$\frac{4y}{1+y^2}y' = 2\,\mathrm{sen}(4x)e^{-x}.$$

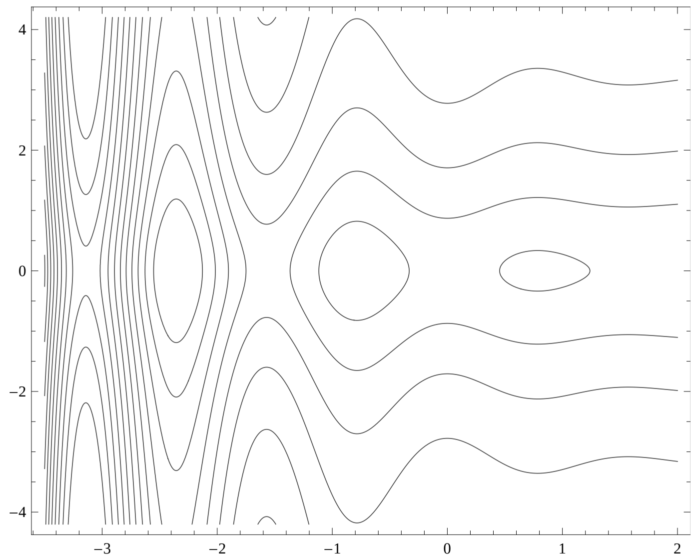
Separando as variáveis obtemos

$$\frac{4y}{1+y^2}\,dy = 2\,\mathrm{sen}(4x)e^{-x}\,dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$2\log(1+y^2) = -\frac{2}{17}e^{-x}(4\cos(4x)+\mathrm{sen}(4x)) + C \quad \text{para algum } C\in\mathbb{R}. \qquad (21)$$

A partir da relação (21) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução:



Observe-se que não existe solução válida numa vizinhança de qualquer um dos pontos da reta $y = 0$ (expressa pelo fato da reta tangente às curvas-solução em pontos $(x_0, 0)$ ser uma reta vertical). ■

Exemplo 2.23. Consideremos a equação $y' = 6xy$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Vamos determinar a solução maximal desta equação que passa no ponto $(0, -2)$. Esta equação é separável com $f(x) = 6x$ e $g(y) = y$.

- A função g anula-se quando $y = 0$. Consequentemente, a função nula é solução da equação diferencial. Mas a solução nula não passa no ponto $(0, -2)$.

- Se $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então a equação original é equivalente à equação

$$\frac{1}{y} y' = 6x.$$

Separando as variáveis obtemos

$$\frac{1}{y}\, dy = 6x\, dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

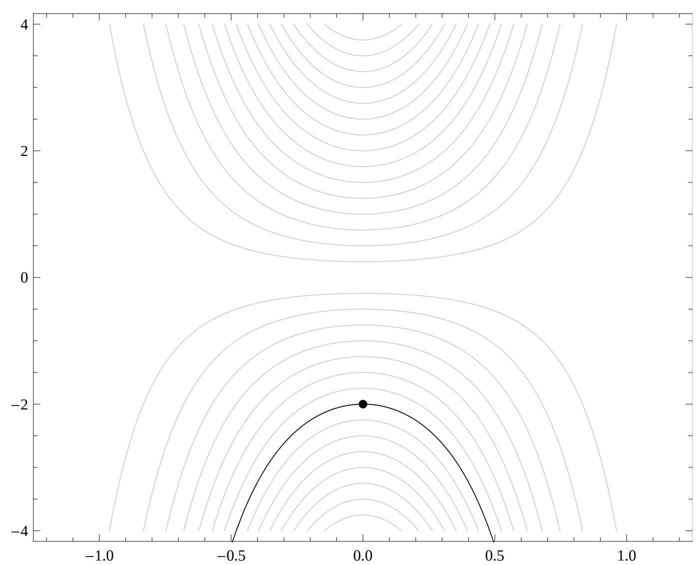
$$\log |y| = 3x^2 + C \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}.$$

A solução explícita da equação é, então:

$$|y| = e^C e^{3x^2} = Ae^{3x^2}.$$

Como, $y(0) = -2$, obtemos que $A = -2$. Consequentemente, a solução maximal que passa no ponto $(0, -2)$ é a função

$$\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & -2e^{3x^2} \end{array}$$



■

2.6 Substituições em equações diferenciais de primeira ordem

Vamos estudar algumas equações diferenciais de primeira ordem que podem ser transformadas em equações já estudadas anteriormente.

2.6.1 Equações homogéneas de primeira ordem

Definição 2.24. *Uma equação diferencial diz-se* **homogénea** *se for da forma* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Por exemplo, a equação $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ é uma equação homogénea.

As equações homogéneas podem ser resolvidas do seguinte modo: consideremos uma equação homogénea

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

e façamos a mudança de variável dependente

$$y = xz.$$

Obtemos assim,

$$y' = z + xz'.$$

Substituindo, obtemos,

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow z + xz' = f(z) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}[f(z) - z].$$

Ficamos assim na presença de uma equação de variáveis separáveis, cujo método de resolução já foi descrito.

Exemplo 2.25. O domínio da equação diferencial homogénea $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{2ty}$ é $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Comecemos por notar que a equação dada pode ser escrita na forma

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{t}\right).$$

Façamos a mudança de variável dependente

$$y = tz.$$

Obtemos assim,

$$y' = z + tz'.$$

Substituindo na equação obtemos,

$$z + tz' = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2},$$

isto é,

$$z' = \frac{1-z^2}{2z}\frac{1}{t}. \tag{22}$$

1. <u>Determinação das soluções constantes da equação (22)</u>

   Os zeros da função $g(z) = \frac{1-z^2}{2z}$ são $z = -1$ e $z = 1$. Consequentemente, as funções constantes $z = -1$ e $z = 1$ são soluções constantes da equação (22).

   Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que as funções $y(t) = -t$ e $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções da equação homogénea dada.

2. <u>Determinação das soluções não constantes da equação (22)</u>

   Se $z \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, a equação (22) é equivalente a

   $$\frac{2z}{1-z^2}z' = \frac{1}{t}.$$

   Separando as variáveis, temos que

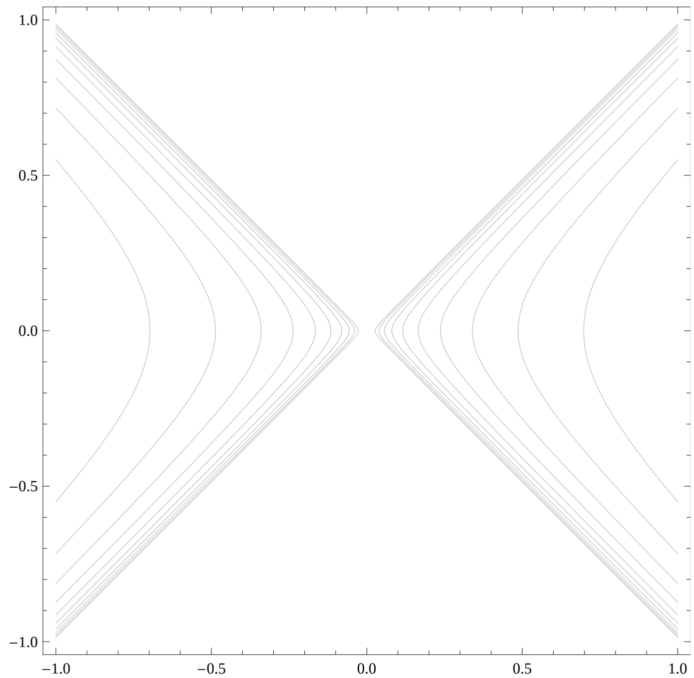
   $$\frac{2z}{1-z^2}dz = \frac{1}{t}dt.$$

   Integrando ambos os membros, obtemos

   $$-\log|1-z^2| = \log|t| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

   Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos

   $$-\log\left|1 - \frac{y^2}{t^2}\right| = \log|t| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$



■

2.6.2 Equações de Bernoulli

Definição 2.26. *As chamadas equações de Bernoulli são equações da forma*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

em que $n \in \mathbb{R}$.

Método de Resolução:

- Se $n \in \{0, 1\}$, as equações são lineares.
- Suponhamos então que $n \notin \{0, 1\}$. Fazendo a mudança de variável $z = y^{1-n}$ (em vizinhanças de pontos onde esta igualdade defina de facto uma mudança de variável), obtemos

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = q(x)y^n \quad &\Longleftrightarrow \quad y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x). \end{aligned}$$

Ficamos assim reduzidos ao estudo de uma equação linear de primeira ordem.

Exemplo 2.27. Determinemos a solução maximal da equação $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3$ que passa no ponto $P = (1, \frac{1}{2})$.

A equação é de Bernoulli com $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = -\frac{5}{2}x^2$, e $n = 3$. O domínio da equação é $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$.

1. A função constante $y = 0$ é solução da equação mas não passa no ponto $P = (1, \frac{1}{2})$!

2. Se $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, façamos a mudança de variável

$$z = y^{-2}.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned} y' - \tfrac{y}{x} = -\tfrac{5}{2}x^2y^3 \quad &\Longleftrightarrow \quad y^{-3}y' - \tfrac{1}{x}y^{-2} = -\tfrac{5}{2}x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{z'}{-2} - \tfrac{1}{x}z = -\tfrac{5}{2}x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z' + \tfrac{2}{x}z = 5x^2 \end{aligned}$$

Esta equação é linear com

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = 5x^2.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\log|x|} = |x|^2 = x^2.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$z'x^2 + 2xz = 5x^4. \tag{23}$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $x^2z(x)$. Logo a equação (23) é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(x^2z(x)\right) = 5x^4.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$x^2 z(x) = x^5 + C, \ C \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$z(x) = x^3 + Cx^{-2}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Fazemos a seguinte observação: o ponto $(1, \frac{1}{2})$ nas variáveis (x, y) corresponde ao ponto $(1, 4)$ nas variáveis (x, z).

Consequentemente, a constante C que corresponde à solução pedida pode ser obtida notando que

$$z(1) = 4 \ \Leftrightarrow \ 4 = 1 + C \ \Leftrightarrow \ C = 3.$$

Temos então que uma expressão geral da solução pedida na variável z é:

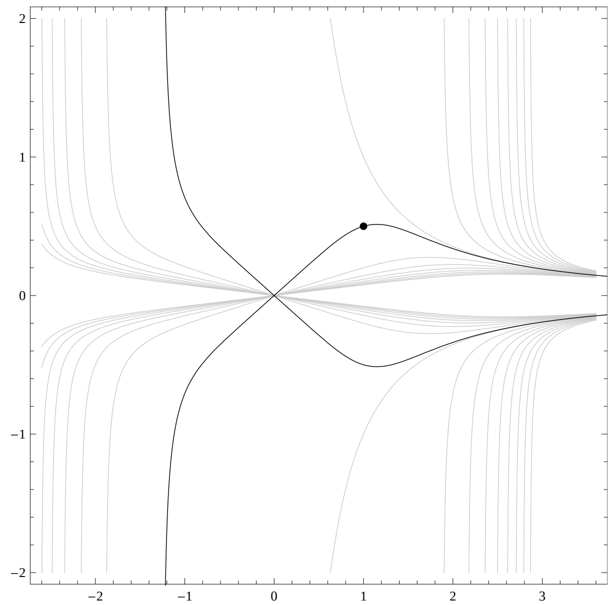
$$z(x) = x^3 + 3x^{-2}.$$

Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^5 + 3}}.$$

Assim, a solução maximal que passa no ponto $(1, \frac{1}{2})$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{x^2}{x^5+3}} \end{array}$$



■

Exemplo 2.28. A equação $y' + y = y^{-1}$ tem domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{0\}$. A equação é de Bernoulli com $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, e $n = -1$. Façamos a mudança de variável

$$z = y^2.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned} y' + y = y^{-1} &\iff yy' + y^2 = 1 \\ &\iff \tfrac{1}{2}z' + z = 1 \\ &\iff z' + 2z = 2. \end{aligned}$$

Esta equação é linear com

$$P(x) = 2 \ \text{ e } \ Q(x) = 2.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$e^{2x}z' + 2e^{2x}z = 2e^{2x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $e^{2x}z(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}z(x)\right) = 2e^{2x}.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

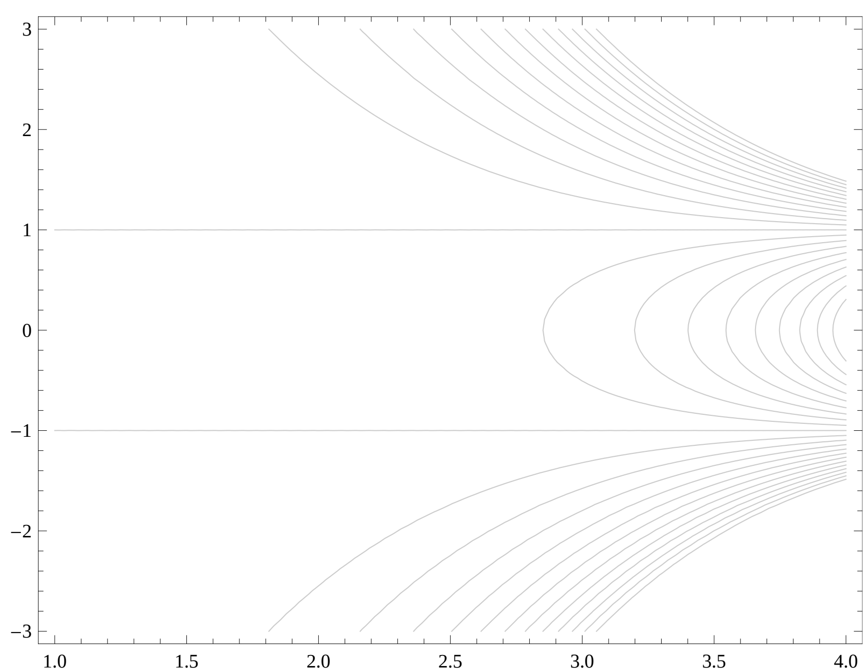
$$e^{2x}z(x) = e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$z(x) = 1 + Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que

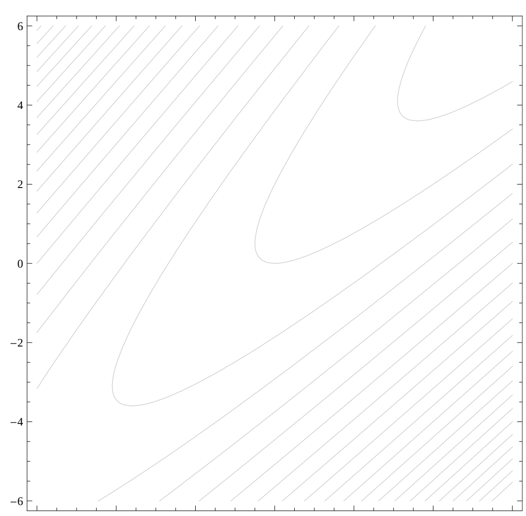
$$y^2(x) = 1 + Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$



■

2.6.3 Outras substituições

Consideremos a equação
$$y' = \frac{y-x}{y-x-1}.$$
Vamos resolvê-la usando a mudança de variável dependente $y = z+x$. Temos que $y' = z'+1$. Substituindo na equação obtemos,
$$z' + 1 = \frac{z}{z-1}$$
isto é,
$$z' = \frac{1}{z-1}.$$
Então, $(z-1)z' = 1$, que é uma equação separável cuja solução é
$$\frac{z^2}{2} - z = x + C, \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}.$$
Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que a expressão geral da solução da equação é dada implicitamente por
$$\frac{(y-x)^2}{2} - y = C, \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}.$$



3 Equações diferenciais lineares de ordem superior

3.1 Conceitos e resultados básicos

Definição 3.1. *Uma* **equação diferencial linear de ordem** n *é uma equação que pode ser escrita na forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

em que $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *e* f *são funções contínuas num aberto* U *e* $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in U$. *Se* $f \equiv 0$, *a equação toma a forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{24}$$

e é nesse caso chamada **equação linear homogénea de ordem** n.

Exemplo 3.2.

1. A equação $e^x y'' + y' + y = x^2$ é uma equação diferencial linear de ordem 2.
2. A equação $xy' + y = x$ é uma equação diferencial linear de ordem 1.

■

Vamos começar por enunciar o teorema fundamental das equações diferenciais lineares. A sua demonstração na vai ser feita porque "precisa" de alguns resultados que não são do conhecimento dos alunos.

Teorema 3.3. *Consideremos a equação diferencial*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

em que $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *e* f *são funções contínuas num aberto* I *da reta real e* $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Então, dado $x_0 \in I$ *e* $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$ **existe uma e um só solução** y *da equação diferencial tal que*

$$\begin{cases} y(x_0) & = & z_0 \\ y'(x_0) & = & z_1 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & z_{n-1}. \end{cases}$$

Em seguida vamos apresentar alguns conceitos e resultados que usaremos para resolver uma equação diferencial linear de ordem n.

Definição 3.4. *Se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são m funções reais definidas no aberto I da reta real e $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, então a função*

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_m\, y_m$$

é chamada uma **combinação linear** *de $y_1, y_2, \ldots, y_m$.*

Facilmente se prova o seguinte:

Teorema 3.5. *Qualquer combinação linear de soluções da equação diferencial linear homogénea (24) é também solução da equação (24).*

Exemplo 3.6. Consideremos a equação diferencial linear homogénea de segunda ordem

$$y''(x) - 5\, y'(x) + 6\, y(x) = 0\,.$$

Facilmente se prova que as funções $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, são soluções da equação. O teorema anterior estabelece que qualquer combinação linear

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x}$$

é também solução da equação, quaisquer que sejam as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$y_p = 5e^{2x} - 4e^{3x}$$

é uma solução particular da equação. ■

Definição 3.7. *As funções $y_1, y_2, \ldots, y_m$ definidas no aberto I da reta real são* **linearmente independentes** *se a relação*

$$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots c_m\, y_m(x) = 0$$

para todo o $x \in I$ implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

As funções $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são **linearmente dependentes** *se não são linearmente independentes.*

Exemplo 3.8. As funções

$$y_1(x) = e^{3x}, \;\; y_2(x) = e^{-x} \;\text{ e }\; y_3(x) = e^{-4x}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

são linearmente independentes. Com efeito,

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-4x} = 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

se e só se $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. ■

Exemplo 3.9. As funções

$$y_1(x) = x, \;\; y_2(x) = 3x \;\text{ e }\; y_3(x) = x^2, \;\; x \in \mathbb{R},$$

são linearmente dependentes. Com efeito, podemos ter

$$c_1\, x + c_2\, 3x + c_3\, x^2 = 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

sem que as constantes c_1, c_2, c_3 sejam todas nulas. Por exemplo, tomando $c_1 = 3$, $c_2 = -1$ e $c_3 = 0$, obtemos que $3y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 = 0$. ■

O teorema seguinte estabelece que a equação linear homogénea de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

tem um conjunto de n soluções linearmente independentes. Além disso, qualquer solução da equação pode ser escrita como combinação linear dessas n soluções linearmente independentes.

Teorema 3.10. *A equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

tem n soluções linearmente independentes. Além disso, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções linearmente independentes da equação, então toda a solução da equação pode ser escrita como uma combinação linear

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n$$

destas n soluções linearmente independentes com a escolha adequada das constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Definição 3.11. *Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são n soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

em I, então o conjunto

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

é chamado um **conjunto fundamental de soluções** *da equação. A* **solução geral da equação em I** *é*

$$y_h(x) = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n,\;\; x \in I,\;\; c_1, c_2, \cdots c_n \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.12. Consideremos a equação

$$y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0.$$

Facilmente se mostra que as funções

$$y_1(x) = e^{3x},\;\; y_2(x) = e^{-x} \text{ e } y_3(x) = e^{-4x},\;\; x \in \mathbb{R},$$

são soluções da equação. Além disso, já mostrámos que são funções linearmente independentes. Logo, a solução geral da equação, em $\mathbb{R}$, é:

$$y_h(x) = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-x} + c_3\, e^{-4x},\;\; x \in \mathbb{R},\;\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Vamos agora apresentar um critério simples para averiguar se um conjunto de n soluções são ou não linearmente independentes.

Definição 3.13. *Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n funções reais deriváveis até à ordem $n-1$ no intervalo I. O determinante*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \mathit{det} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

é chamado o **Wronskiano** *destas n funções.*

Nota 3.14. *Observemos que $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ é também uma função real definida em I. O seu valor no ponto x é representado por*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x) \quad \mathit{ou} \quad W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)](x).$$

Teorema 3.15. *As n soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

são linearmente independentes em I se e só se o Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é diferente de zero para algum $x \in I$.

Exemplo 3.16. As soluções

$$y_1(x) = e^{3x}, \;\; y_2(x) = e^{-x} \text{ e } y_3(x) = e^{-4x}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

da equação diferencial linear homogénea $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0$ são linearmente independentes pois

$$W(e^{3x}, e^{-x}, e^{-4x}) = \det \begin{bmatrix} e^{3x} & e^{-x} & e^{-4x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} & -4e^{-4x} \\ 9e^{3x} & e^{-x} & 16e^{-4x} \end{bmatrix} = -84e^{-2x} \neq 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

3.2 Equações diferenciais lineares homogéneas com coeficientes constantes

Vamos agora considerar o caso especial das equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n com coeficientes constantes, isto é, equações que estão ou podem ser escritas na forma

$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes e $a_n \neq 0$.

Definição 3.17. *Consideremos a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes*

$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes e $a_n \neq 0$. A equação

$$a_n\, m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \cdots + a_1\, m + a_0 = 0$$

é chamada **equação característica** *da equação diferencial homogénea.*

O próximo teorema permite obter a solução geral de uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes a partir das raízes da equação característica associada.

Teorema 3.18. *Consideremos a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes*

$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{25}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes e $a_n \neq 0$. Consideremos a equação característica

$$a_n\, m^n + a_{n-1}\, m^{n-1} + \cdots + a_1\, m + a_0 = 0 \tag{26}$$

1. **Caso de raízes reais distintas**

   Se a equação característica (26) tem n raízes raízes reais e distintas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, então a solução geral da equação (25) é

   $$y(x) = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x} + \cdots + c_n\, e^{m_n x}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; c_1, c_2, \cdots c_n \in \mathbb{R}.$$

2. **Caso de raízes reais repetidas**

   Se a equação característica (26) tem uma raiz real m de multiplicidade k ($k > 1$) então a "parte" da solução geral de (25) que "corresponde" a esta raiz múltipla é

$$(c_1 + c_2\, x + \cdots + c_k\, x^{k-1})\, e^{mx}.$$

3. **Caso de raízes complexas distintas**

   Se a equação característica (26) tem as raízes $a+bi$ e $a-bi$, nenhuma repetida, então a correspondente "parte" da solução geral de (25) pode ser escrita na forma

$$e^{ax}\,(c_1\, \text{sen}(bx) + c_2 \cos(bx)).$$

4. **Caso de raízes complexas repetidas**

   Se a equação característica (26) tem raízes $a+bi$ e $a-bi$ de multiplicidade k ($k > 1$), então a correspondente "parte" na solução geral de (25) é

$$e^{ax}\,[(c_1 + c_2\, x + \cdots + c_k\, x^{k-1})\ \text{sen}(bx) + (c_1 + c_2\, x + \cdots + c_k\, x^{k-1})\ \cos(bx)].$$

Exemplo 3.19. Vamos considerar cada uma das quatro situações descritas no teorema anterior.

1. **Caso de raízes reais distintas**

   Consideremos a equação diferencial

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0.$$

   A equação característica é

$$m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0.$$

   Observemos que $m = 1$ é raiz da equação. Temos então que

$$m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2 - 2m - 3) = 0,$$

   obtendo-se de seguida as outras duas raízes $m = -1$ e $m = 3$. Então, a solução geral da equação, em $\mathbb{R}$, é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. **Caso de raízes reais repetidas**

   Consideremos a equação diferencial

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0.$$

   A equação característica

$$m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0$$

   tem a raiz $m = 1$ de multiplicidade 2 e a raiz $m = 3$ simples. Então, a solução geral da equação, em $\mathbb{R}$, é

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{3x}, \; x \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3. **Caso de raízes complexas distintas**

   Consideremos a equação diferencial

$$y''' + 4y' = 0.$$

   A equação característica é

$$m^3 + 4m = 0,$$

   isto é,

$$m(m^2 + 4) = 0,$$

   com raízes 0, $2i$ e $-2i$. Então, a solução geral da equação, em $\mathbb{R}$, é

$$y(x) = c_1 e^{0x} + e^{0x}(c_2 \operatorname{sen}(2x) + c_3 \cos(2x)), \; x \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

   ou

$$y(x) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2x) + c_3 \cos(2x), \; x \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

4. **Caso de raízes complexas repetidas**

   Consideremos a equação diferencial

$$y^{(iv)} + 2y'' + y = 0.$$

   A equação característica

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

tem as raízes i e $-i$ de multiplicidade 2. Então, a solução geral da equação, em $\mathbb{R}$, é

$$y(x) = e^{0x}((c_1 + c_2 x)\,\text{sen}\,x + (c_3 + c_4 x)\cos x),\ \ x \in \mathbb{R},\ \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

ou

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\,\text{sen}\,x + (c_3 + c_4 x)\cos x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

■

3.3 Equações diferenciais lineares não homogéneas com coeficientes constantes

Vamos agora considerar a equação diferencial linear (não homogénea) de ordem n e coeficientes constantes

$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x) \tag{27}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e f são funções contínuas no aberto U e $a_n \neq 0$.

Teorema 3.20. *Sejam*

- y_p *uma solução particular da equação diferencial linear não homogénea (27) e*
- $y_h = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n$ *a solução geral da correspondente equação homogénea.*

Então, toda a solução da equação não homogénea (27) pode ser escrita na forma

$$y_h + y_p$$

isto é, $c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n + y_p,\ \ c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$.

Na secção anterior vimos como determinar a solução geral da equação homogénea. Vamos agora ver como calcular uma solução particular da equação não homogénea. O método que vamos descrever chama-se **método dos coeficientes indeterminados** e é muito simples. Tem a desvantagem de se aplicar apenas quando a função f pertence a uma certa classe de funções. No entanto, esta classe de funções tem uma importância considerável no que diz respeito às aplicações. Vamos começar por apresentar alguns conceitos preliminares.

Definição 3.21. *Dá-se o nome de* **função CI (de coeficiente indeterminado)** *a uma função que é definida por uma das seguintes expressões:*

1. x^n, *sendo* n *um inteiro não negativo,*

2. e^{ax}, *sendo* a *uma constante não nula,*

3. $\text{sen}(bx+c)$, *sendo* b *e* c *constantes e* $b \neq 0$,

4. $\cos(bx+c)$, *sendo* b *e* c *constantes e* $b \neq 0$,

ou definida como produto finito de duas ou mais funções destes quatro tipos.

Exemplo 3.22. As funções definidas pelas seguintes expressões

$$x^4,\ \ e^{-3x},\ \ \text{sen}(5x),\ \ \cos(3x+\pi/2),$$

$$x^3e^{2x},\ \ x\,\text{sen}(3x),\ \ e^{2x}\cos(4x),\ \ x^3e^{2x}\,\text{sen}(5x),$$

são funções CI. ∎

O método dos coeficientes indeterminados aplica-se quando a função f na equação não homogénea (27) é uma combinação linear de funções CI. Observemos que, dada uma função CI, f, cada derivada de f é ela própria ou um múltiplo constante de uma função CI ou uma combinação linear de funções CI.

Exemplo 3.23. A função $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, é uma função CI. Calculemos as derivadas de f:

$$f'(x) = 3x^2,\ \ f''(x) = 6x,\ \ f'''(x) = 6,\ \ f^{(n)}(x) = 0,\ n > 3.$$

As derivadas de f são múltiplos constantes das seguintes funções CI linearmente independentes:

$$x^2,\ \ x,\ \ 1.$$

∎

Definição 3.24. *Seja f uma função CI. O conjunto de funções consistindo na própria função f e em todas as funções CI linearmente independentes das quais as derivadas sucessivas de f são múltiplos constantes ou combinações lineares é chamado o* **conjunto CI** *da função f.*

Exemplo 3.25. O conjunto CI da função $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, é $S = \{x^3, x^2, x, 1\}$. ■

Exemplo 3.26. Outros exemplos são os seguintes:

- o conjunto CI da função $f(x) = x^n$ é $S = \{x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1\}$,
- o conjunto CI da função $f(x) = e^{ax}$ é $S = \{e^{ax}\}$,
- o conjunto CI da função $f(x) = \text{sen}(bx + c)$ é $S = \{\text{sen}(bx + c), \cos(bx + c)\}$,
- o conjunto CI da função $f(x) = \cos(bx + c)$ é $S = \{\text{sen}(bx + c), \cos(bx + c)\}$.

■

Observamos que se f e g são funções CI e S_f e S_g são os conjuntos CI a elas associados, então o conjunto S (conjunto CI) associado à função CI F definida por

$$F(x) = f(x)g(x),$$

é o conjunto de todos os produtos obtidos multiplicado os vários elementos de S_f pelos vários elementos de S_g.

Vamos agora descrever o **método dos coeficientes indeterminados** para determinar uma solução particular da equação linear não homogénea de coeficientes constantes de ordem n

$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x),$$

quando f é uma combinação linear finita

$$f = A_1 g_1 + A_2 g_2 + \cdots + A_m g_m$$

de funções CI $g_1, g_2, \cdots, g_m$ e $A_1, A_2, \cdots, A_m$ são constantes conhecidas. Assumimos que a solução geral da equação homogénea foi já determinada.

Os passos do procedimento são os seguintes:

1. Formar o conjunto CI associado a cada uma das funções CI $g_1, g_2, \cdots, g_m$ obtendo
$$S_1, S_2, \cdots, S_m.$$
2. Eliminar entre estes os que eventualmente sejam subconjunto de algum outro.
3. Multiplicar todos os elementos de qualquer dos conjuntos restantes que contenha alguma solução da equação homogénea correspondente por uma potência de x, a menor, de modo a que, no conjunto obtido não fique nenhuma solução daquela mesma equação.
4. Formar a combinação linear dos conjuntos resultantes com coeficientes desconhecidos.
5. Determinar esses coeficientes desconhecidos obrigando a função definida pela combinação linear formada em 4. a satisfazer identicamente a equação dada, isto é, obrigando-a a ser uma solução particular da equação
$$a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x).$$

Vamos ilustrar o procedimento com um exemplo.

Exemplo 3.27. Consideremos a equação diferencial linear de segunda ordem não homogénea de coeficientes constantes
$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}.$$
A solução geral da equação pode ser escrita na forma
$$y = y_h + y_p,$$
sendo y_h a solução geral da correspondente equação homogénea
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
e y_p uma solução particular da equação não homogénea. Comecemos por calcular y_h. A equação característica é
$$m^2 - 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Consequentemente, a solução geral da equação homogénea, em $\mathbb{R}$, é:

$$y_h(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^x, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora calcular uma solução particular y_p da equação não homogénea, usando o método dos coeficientes indeterminados:

1. A função $f(x) = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$ é a combinação linear das funções CI:

   $$g_1(x) = x^2, \;\; g_2(x) = e^x, \;\; g_3(x) = xe^x, \;\; g_4(x) = e^{3x}.$$

   Os conjuntos CI destas funções são, respetivamente,

   $$S_1(x) = \{x^2, x, 1\}, \;\; S_2(x) = \{e^x\}, \;\; S_3(x) = \{xe^x, e^x\}, \;\; S_4(x) = \{e^{3x}\}.$$

2. Reparemos que $S_2 \subset S_3$. Consequentemente, S_2 será omitido ficando apenas os conjuntos

   $$S_1(x) = \{x^2, x, 1\}, \;\; S_3(x) = \{xe^x, e^x\}, \;\; S_4(x) = \{e^{3x}\}.$$

3. Observemos agora que $S_3(x) = \{xe^x, e^x\}$ inclui a função e^x, a qual é uma solução da equação homogénea. Então multipliquemos todos os elementos de S_3 por x para obter o conjunto

   $$S_3'(x) = \{x^2 e^x, xe^x\}.$$

   Ficamos assim com os conjuntos

   $$S_1(x) = \{x^2, x, 1\}, \;\; S_3'(x) = \{x^2 e^x, xe^x\}, \;\; S_4(x) = \{e^{3x}\},$$

   que não incluem qualquer solução da equação homogénea.

4. Formemos agora a combinação linear

   $$A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + A_4 e^{3x} + A_5 x^2 e^x + A_6 xe^x$$

   de $x^2, x, 1, x^2e^x, xe^x$ e e^{3x} com coeficientes a determinar A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.

5. Definindo

   $$y_p = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + A_4 e^{3x} + A_5 x^2 e^x + A_6 xe^x,$$

determinemos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 de modo a que y_p seja uma solução particular da equação dada. Temos que

$$y_p'(x) = 2A_1x + A_2 + 3A_4e^{3x} + 2xA_5e^x + A_5x^2e^x + A_6e^x + A_6xe^x,$$

$$y_p''(x) = 2A_1x + 9A_4e^{3x} + 4xA_5e^x + 2A_5e^x + A_5x^2e^x + 2A_6e^x + A_6xe^x.$$

Substituindo na equação dada obtemos que:

$$(2A_1-3A_2+2A_3)+2A_4e^{3x}-2A_5xe^x+(2A_5-A_6)e^x+(2A_2-6A_1)x+2A_1x^2 = 2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}.$$

Consequentemente,

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2A_1 - 3A_2 + 2A_3 & = & 0 \\ 2A_4 & = & 4 \\ -2A_5 & = & 2 \\ 2A_5 - A_6 & = & 0 \\ 2A_2 - 6A_1 & = & 0 \\ 2A_1 & = & 2, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} A_3 & = & 7/2 \\ A_4 & = & 2 \\ A_5 & = & -1 \\ A_6 & = & -3 \\ A_2 & = & 3 \\ A_1 & = & 1 \end{array}\right.$$

Então,

$$y_p(x) = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x$$

é uma solução particular da equação dada.

A solução geral da equação é, em $\mathbb{R}$,

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Parte II

Sistemas dinâmicos discretos

4 Sistemas dinâmicos discretos: noções básicas

Um **sistema dinâmico discreto** é constituído por um conjunto não-vazio X e por uma transformação de X. Uma transformação de X é simplesmente uma função $f : X \to X$. As **iteradas** da transformação f são as transformações $f^n : X \to X$ definidas indutivamente por

$$f^0 = \mathrm{id} \quad \text{e} \quad f^n = f \circ f^{n-1} \text{ se } n \in \mathbb{N}.$$

Se f é invertível, é possível definir $f^n : X \longrightarrow X$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$:

$$f^{-n} = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1} \quad (n \text{ vezes}, \ n \in \mathbb{N}).$$

Porque $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, estas iteradas formam um grupo se f é invertível, e um semigrupo caso contrário.

Em geral, estamos interessados no comportamento assimptótico da "história" de um ponto $x_0 \in X$, isto é, a sequência de pontos

$$x_0 \ \mapsto \ x_1 = f(x_0) \ \mapsto \ x_2 = f^2(x_0) \ \mapsto \ x_3 = f^3(x_0) \ \mapsto \ldots$$

A ideia é que, se X é o espaço dos estados de um sistema físico, e se o sistema está no estado x_0 no tempo 0, então o sistema estará no estado $f(x_0)$ no tempo 1, no estado $f^2(x_0) = f(f(x_0))$ no tempo 2, etc...

Tais sistemas dinâmicos surgem muito naturalmente pensando em X como o **espaço de fase** e f como a **lei de evolução** de um sistema físico que especifica o estado do sistema no próximo "momento de tempo" sabendo que o sistema está no estado x_0 neste "momento de tempo".

A **órbita positiva** de x_0 é o conjunto de todos os estados da "história" futura do ponto x_0:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

4.1 Questões básicas

Em geral assumimos que o espaço de fase e a transformação f são conhecidos em algum sentido e que o problema é descrever a evolução de certas condições iniciais, i.e. "prever" o comportamento assimptótico do sistema:

Qual é a estrutura da órbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ de alguma condição inicial x_0?

Se esta questão for respondida para uma particular condição inicial x_0 é então natural perguntar até que ponto é que é **robusta**:

Será que as órbitas de condições iniciais próximas têm estruturas similares?

É também natural perguntar até que ponto é que a estrutura da órbita de uma dada condição inicial é em algum sentido representativa ou **típica** das estruturas das órbitas da maioria das outras condições iniciais:

Qual é a estrutura da órbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ para condições iniciais típicas x_0?

Isto fornece-nos uma descrição mais global do sistema dinâmico e imediatamente coloca-nos a questão do quanto robusta é esta estrutura global, i.e. o que acontece se substituirmos f por outra transformação g que esteja "próxima" de f:

Será que as órbitas típicas de transformações g próximas têm estruturas similares?

Nem todas estas questões podem ser sempre respondidas mas elas podem ser pensadas como a principal motivação da teoria dos Sistemas Dinâmicos. A primeira observação é que é claro que as próprias questões tal como enunciadas são ainda bastante vagas: o que queremos dizer por *estrutura* da órbita? O que qeremos dizer com condição inicial *típica*? O que queremos dizer quando afirmamos que duas transformações f e g estão próximas? Como comparamos as estruturas das órbitas de duas transformações f e g?

Parte da beleza e da riqueza da teoria é o fato de que dar significado a estas noções joga um papel tão importante como responder às questões. Com efeito existem frequentemente diferentes formas de definir estas noções e esta variedade contribui imenso para a nossa compreensão da dinâmica de muitos pontos de vista diferentes. O primeiro passo está necessariamente relacionado com o facto de trabalharmos com alguma estrutura adicional no conjunto X. Por exemplo se X for um espaço métrico então podemos falar de distâncias entre pontos e pelo menos tentar descerever a estrutura de $\mathcal{O}^+(x_0)$ em termos métricos. Se X for um espaço de medida então podemos não conseguir descrever as órbitas em termos métricos mas podemos falar sobre a sua estrutura estatística, por exemplo a quantidade média de tempo que passam em certos conjuntos. Se X for uma variedade Riemanniana então temos estruturas métrica, de medida e até diferenciáveis que nos podem ajudar a descrever as órbitas de mais e mais pontos de vista.

Nestas notas, por simplicidade, vamos assumir que $X \subset \mathbb{R}^n$ e que $f : X \to X$ é uma transformação contínua.

4.2 Trajetórias e órbitas

Dado qualquer ponto ou **condição inicial** $x_0 \in X$ podemos considerar a sua imagem

$$x_1 = f(x_0)$$

e aplicar a transformação f uma vez mais a esta imagem para obter a segunda imagem

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0).$$

Continuando desta forma obtemos a **órbita positiva** de x_0:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

onde $x_n = f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) = f(x_{n-1})$.

À sequência de pontos $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \cdots, x_n = f^n(x_0), \cdots$, isto é, à sequência $(x_n)_n$ chamamos **trajetória** de x_0. Por outras, chamamos trajetória de x_0 à função que dada a condição inicial x_0 associa a cada tempo $n \geq 0$ o estado do sistema $x_n = f^n(x_0)$ no tempo n.

Se f é bijectiva então f é invertível e considerando a inversa f^{-1} podemos escrever

$$x_{-1} = f^{-1}(x_0)$$

e, mais geralmente,

$$x_{-n} = f^{-n}(x_0) = f^{-1}(f^{-(n-1)(x_0)}) = f^{-1}(x_{-(n-1)}).$$

Podemos, então, definir a **órbita completa** de x_0 como

$$\mathcal{O}^{+}(x_0) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Se f não é invertível podemos ainda definir a pré-imagem de um ponto x_0 por

$$f^{-1}(x_0) = \{y : f(y) = x_0\}$$

e, de modo análogo, a pré-imagem de um conjunto $A \subset X$ por

$$f^{-1}(A) = \{y : f(y) \in A\}\,.$$

Iteração Gráfica

Um estudo geométrico das trajetórias pode fazer-se seguindo a história de um ponto x_0 traçando os segmentos verticais e horizontais

$$(x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_1) \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2) \mapsto (x_2, x_3) \mapsto \ldots$$

usando a ajuda do gráfico da função identidade.

4.3 Pontos fixos

A estrutura mais simples para a órbita de uma dada condição inicial $x_0 \in X$ é obtida no caso em que x_0 é um **ponto fixo** de f, isto é,

$$f(x_0) = x_0.$$

Neste caso,

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$$

e, em geral,

$$f^n(x_0) = x.$$

Portanto,

$$\mathcal{O}^{+}(x_0) = \{x_0\}.$$

Vamos denotar o conjunto dos pontos fixos de f por Fix(f).

Exemplo 4.1. O conjunto dos pontos fixos da transformação $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$ é o conjunto $\mathrm{Fix}(f) = \{-1, 0, 1\}$. ■

Um dos critérios mais simples para encontrar pontos fixos é uma consequência imediata do importante Teorema de Bolzano-Cauchy (ou Teorema do Valor Intermédio):

Teorema 4.2. (de Bolzano-Cauchy): Seja $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. então $f([a,b])$ contém o intervalo fechado de extremos $f(a)$ e $f(b)$.

O Teorema do Valor Intermédio estabelece que se f é uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$ então todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ são atingidos.

Corolário 4.3. *Seja* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e suponhamos que* $f(a)f(b) < 0$. *Então existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Este corolário estebelece que uma função contínua definida num intervalo fechado e limitado não muda de sinal sem se anular.

Uma consequência imediata do Teorema do Valor Intermédio é o seguinte resultado que numa linguagem sugestiva, diz que se uma transformação contínua restringe ou estica um intervalo $[a,b]$, então fixa pelo menos um ponto deste intervalo.

Teorema 4.4. (do Ponto Fixo):

1. Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma transformação contínua. Então f tem um ponto fixo.

2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma transformação contínua tal que $f([a,b]) \supseteq [a,b]$. Então f tem um ponto fixo.

4.4 Pontos periódicos

Dizemos que $x_0 \in X$ é um **ponto periódico** se é um ponto fixo de alguma iterada de f, isto é, se existe um tempo $k \geq 1$ tal que

$$f^k(x_0) = x_0.$$

O menor dos tempos $k \geq 1$ para o qual $f^k(x_0) = x_0$ é chamado o **período** de x_0. Os pontos fixos são portanto casos especiais de pontos periódicos de período $k = 1$. A órbita

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$$

é chamada uma **órbita periódica de período** k ou um k-**ciclo**.

Um ponto x_0 pode ter órbita finita sem ser periódico: pode acontecer que exista $k \geq 1$ tal que $f^k(x_0)$ é um ponto periódico. Tais pontos, que "caem" numa órbita periódica decorrido um tempo positivo, são chamados *pré-periódicos*.

4.5 Conjuntos invariantes

Um subconjunto $\Lambda \subset X$ diz-se **(positivamente) invariante** (sob a transformação f) se

$$f(\Lambda) \subseteq \Lambda.$$

De modo claro, pontos fixos e órbitas periódicas são conjuntos invariantes.

4.6 Bacia de atração

Se a trajetória de x_0 é uma sucessão convergente para $p \in X$ então p é um ponto fixo de f. Com efeito, se $f^n(x_0) \to p$, a continuidade de f implica que

$$f(p) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

Seja p um ponto fixo de f. A **bacia de atracção** ou **conjunto estável** de p é o conjunto dos pontos cuja trajetória é assimptótica a p, isto é,

$$W^s(p) = \left\{ x \in X : \lim_{n \to \infty} f^n(x) = p \right\}.$$

A unicidade do limite de uma sucesão convergente implica que os conjuntos estáveis de dois pontos fixos diferentes são disjuntos.

Exemplo 4.5. Consideremos a transformação $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$. Os pontos fixos de f são os pontos -1, 0 e 1. Os conjuntos estáveis dos pontos fixos são $W^s(0) =]-1, 1[$, $W^s(1) = \{1\}$ e $W^s(-1) = \{-1\}$. ■

4.7 Conjuntos limite (comportamento assimptótico das órbitas infinitas)

O comportamento assimptótico mais simples que pode ocorrer é a trajetória de um dado $x_0 \in X$ ser convergente para um certo $p \in X$. Neste caso, p é um ponto fixo de f. As trajetórias podem não ser convergentes mas pelo menos ter subsucessões convergentes.

Dizemos que $y \in X$ é um ponto $\omega-$**limite** de x_0 se existe uma subsucesão de tempos $n_k \to \infty$ tal que $x_{n_k} \to y$ quando $k \to \infty$. Definimos o **conjunto** ω-**limite** de x_0 por

$$\omega(x_0) = \{\text{pontos } \omega - \text{limite de } x_0\}.$$

Se f é invertível, então podemos definir o **conjunto** α-**limite** de x_0, $\alpha(x_0)$, exatamente da mesma forma mas tomando $n_k \to -\infty$.

Exemplo 4.6. Consideremos a transformação $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) = \varnothing$. ■

4.8 Pontos recorrentes

Uma primeira aplicação da noção de ponto ω-limite é a seguinte generalização da noção de ponto periódico.

Dizemos que x_0 é **recorrente** se

$$x_0 \in \omega(x_0).$$

Isto significa que, apesar da órbita do ponto x_0 poder não ser periódica, ela "passa" arbitrariamente perto de x_0. Observemos que, x_0 é recorrente se, dada uma vizinhança arbitrária $\mathcal{U}$ de x_0, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x_0) \in \mathcal{U}$, ou seja, se a trajetória de x_0 volta a visitar toda a vizinhança de x_0. Isto implica que a trajetória de x_0 passa infinitas vezes numa vizinhança arbitrária de x_0.

4.9 Pontos não-errantes

A noção de recorrência enfraquece a noção de periodicidade mas, em certas situações, é ainda demasiado forte. Uma noção ainda mais fraca é a seguinte:

Dizemos que x_0 é **não-errante** se para qualquer vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 existe um $n \geq 1$ tal que

$$f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing.$$

Isto significa que apesar do ponto x_0 poder não voltar a passar arbitrariamente perto dele próprio, algum ponto arbitrariamente perto de x_0 o fará.

A ideia informal é que o conjunto dos pontos não-errantes é onde acontece a dinâmica interessante, enquanto que o conjunto dos pontos errantes (um ponto x_0 diz-se errante se não for não-errante) é o conjunto dos pontos que a dinâmica esquece.

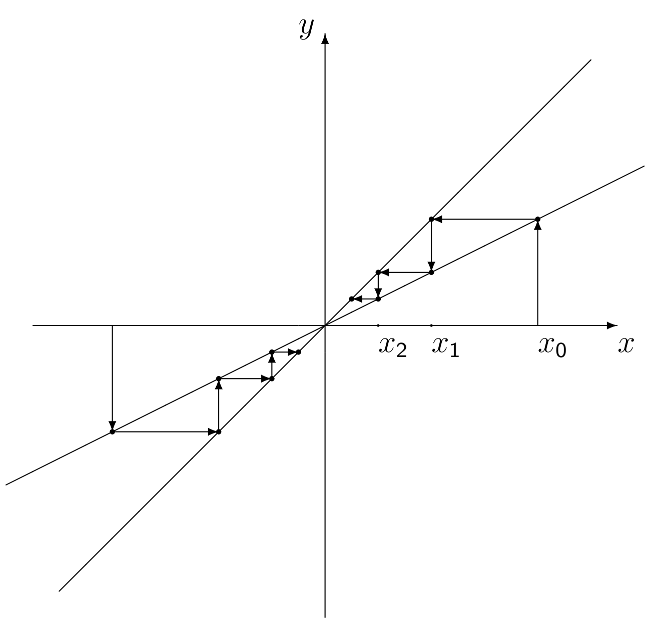
5 Sistemas com comportamento assimptótico simples

5.1 Transformações lineares

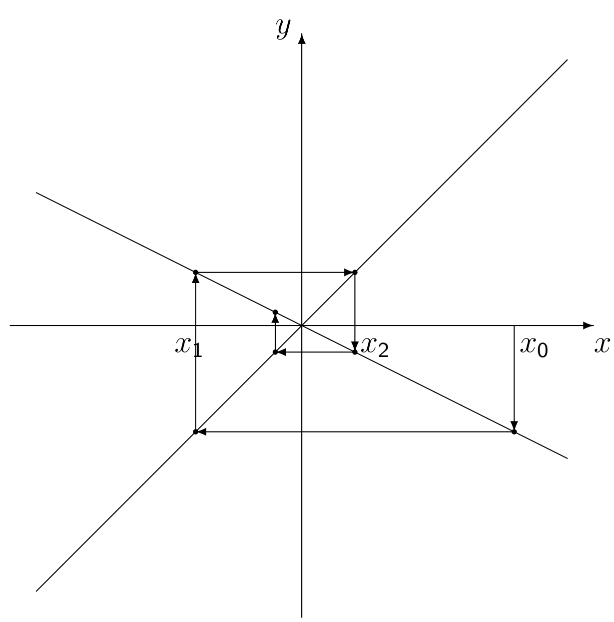
O modelo populacional de tempo discreto $x_{i+1} = f(x_i) = \lambda\, x_i$ tem uma dinâmica simples: se começarmos com qualquer estado inicial $x_0 \neq 0$, a trajetória $(x_n)_n$ diverge se $\lambda > 1$ e converge para zero se $\lambda < 1$. Parte da simplicidade é devida ao comportamento assimptótico ser independente da condição inicial. Além disso, todos os comportamentos assimptóticos permitidos são simples.

As figuras seguintes ilustram o comportamento de sequências x_0, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, em função do valor do parâmetro λ, da lei de evolução linear $f(x) = \lambda x$ (com $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$).

- **1º Caso:** $-1 < \lambda < 1$

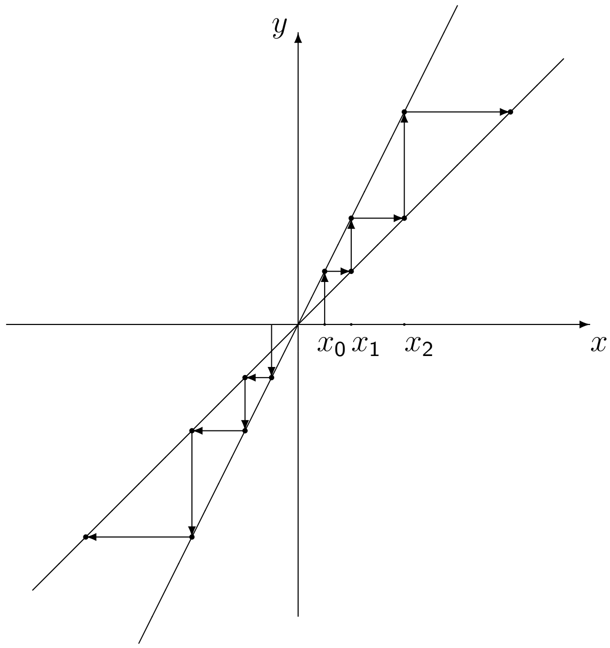


$0 < \lambda < 1$

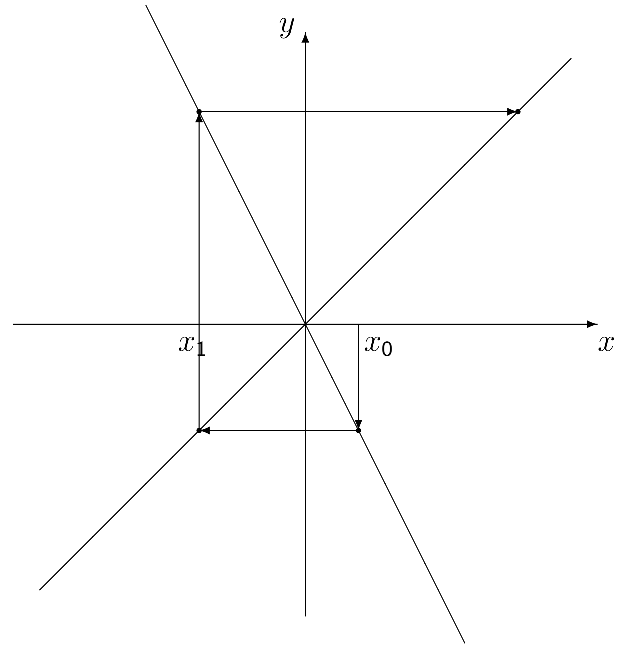


$-1 < \lambda < 0$

- **2º Caso:** $|\lambda| > 1$



$\lambda > 1$



$\lambda < -1$

Se substituirmos $f(x) = \lambda x$ por $g(x) = \lambda x + b \quad (\lambda \neq 1)$, a dinâmica muda pouco. Com efeito, a mudança de variável $y = x - (b/1 - \lambda)$ conduz à lei recursiva $y_{i+1} = \lambda\, y_i$.

5.2 Contrações

O comportamento assimptótico estável mais simples que podemos imaginar corresponde à convergência das trajetórias para um determinado ponto, o ponto de equilíbrio. Existe uma importante classe de transformações nas quais este tipo de comportamento está presente: as contrações. Vamos começar por definir contração relativamente à distância Euclideana d:

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ (x, y) & \mapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \end{array}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$.

Definição 5.1. *Uma transformação* $f : X \to X$ *é uma* **contração** *se existe* $0 \le \lambda < 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

A dinâmica das contrações é simples e é descrita pelo

Teorema 5.2. (Princípio das contrações): *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *fechado e* $f : X \to X$ *uma* λ*-contração. Então*

1. f *tem um único ponto* $\tilde{x}$ *e*

2. $d(x_n, \tilde{x}) \le \lambda^n d(x_0, \tilde{x})$, *para todo o* $x_0 \in X$, *isto é,*

a trajetória de todo o ponto converge exponencialmente para o único ponto fixo de f.

O Princípio das contrações afirma a existência e a unicidade do ponto fixo, nenhuma das quais é imediatamente óbvia e ainda, notavelmente, o fato de que a trajetória de todo o ponto converge exponencialmente.

Prova. (*do Princípio das contrações*): Seja x_0 um ponto arbitrário e $(x_n)_n$ a sua trajetória, isto é, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Iterando a contractividade de f temos que

$$d(x_{k+1}, x_k) \le \lambda^k \, d(x_1, x_0).$$

Afirmação 1: $(x_n)_n$ é uma sucessão de Cauchy.

Com efeito, usando k vezes a desigualdade triangular e depois a convergência da série geométrica de razão λ temos que

$$d(x_{n+k}, x_n) \le \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n+j} \le d(x_1, x_0)\lambda^n \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$$

e $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$. Consequentemente existe $\tilde{x} = \lim_n x_n$ (porque as sucessões de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ são convergentes) e $\tilde{x} \in X$ porque X é fechado.

Afirmação 2: $\tilde{x}$ é um ponto fixo de f.

Porque f é contínua temos que

$$f(\tilde{x}) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \tilde{x}.$$

Afirmação 3: $\tilde{x}$ é o único ponto fixo de f.

A unicidade do ponto fixo é evidente, pois se $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ são dois pontos fixos de f, então

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(f(\tilde{x}), f(\tilde{y}) \leq \lambda d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

com $\lambda < 1$. Consequentemente, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, o que é absurdo.

Afirmação 4: a trajetória de todo o ponto converge exponencialmente.

A contractividade de f também nos permite concluir que

$$d(x_n, \tilde{x}) \leq \lambda^n d(x_0, \tilde{x}),$$

ou seja, que a convergência $x_n \to \tilde{x}$ é exponencial.

□

Nota 5.3. *O enunciado e a prova do Princípio das contrações são válidos em qualquer espaço métrico (X, d) assumindo apenas que X é completo, isto é, toda a sucessão de Cauchy em X é convergente para um ponto de X. (No nosso contexto, X é claramente completo, uma vez que é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, o qual é completo).*

Exemplo 5.4. Ao contemplar os seus coelhos, Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci, propôs um modelo de acordo com o qual o número de par de coelhos no enésimo mês é dado pelo número b_n, definido pela equação recursiva $b_0 = b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ para $n \geq 2$. Esperando que o crescimento do número de pares de coelhos seja exponencial, gostaríamos de ver quão rápido estes números crescem encontrando o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Para tal fim vamos usar o Princípio das contrações. Uma vez que

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1} + b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_{n+1}/b_n} + 1 = \frac{1}{a_n} + 1,$$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é a trajetória de 1 sob iteração da transformação $g(x) = (1/x) + 1$. Uma vez que $g(1) = 2$, estamos a considerar a trajetória de 2 sob a transformação g. Como $g'(x) = -x^{-2}$, g não é uma contração em $]0, \infty[$. Precisamos de encontrar um adequado intervalo I fechado onde g seja uma contração tal que $g(I) \subset I$. Porque $g' < 0$, g é decrescente em $]0, \infty[$. Consequentemente $g([3/2, 2]) \subset [3/2, 2]$ porque $3/2 < g(3/2) = 5/3 < 2$ e $g(2) = 3/2$. Além disso, $|g'(x)| = 1/x^2 \leq 4/9 < 1$ em $[3/2, 2]$ e, portanto, g é uma contração em $[3/2, 2]$. Pelo Princípio das contrações, a trajetória de 2, e portanto a de 1, converge para o único ponto fixo x de g em $[3/2, 2]$. Concluímos deste modo que o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ existe. Para determinar o limite resolvemos a equação $x = g(x) = 1 + 1/x = (x+1)/x$, que é equivalente a $x^2 - x - 1 = 0$. Existe apenas uma solução positiva: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

5.3 Transformações crescentes do intervalo

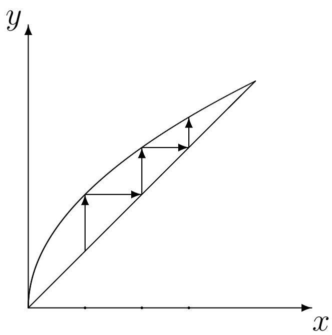
Vamos agora estudar sistemas em em que a dinâmica é parecida com a de uma contração mas para a qual não existe garantia de convergência exponencial para um ponto fixo.

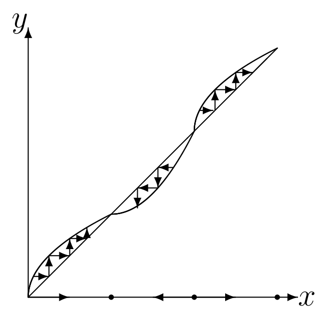
Seja $f : I \to I$ uma transformação contínua e crescente de um intervalo I da reta real. Então toda a trajetória $(x_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ é monótona, crescente ou decrescente. A sucessão monótona $(x_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ só pode fazer duas coisas: ser convergente, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, para algum ponto fixo p, se é limitada, ou ser divergente, no sentido em que $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, se não é limitada. Em particular, se o intervalo I é compacto, a segunda possibilidade é impossível, logo toda a trajetória é convergente.

Lema 5.5. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ uma transformação contínua e crescente sem pontos fixos em $]a, b[$. Então um dos extremos de $[a, b]$ é um ponto fixo e a trajetória de todo o ponto de $[a, b]$ converge para esse ponto fixo, com a possível exceção do outro extremo do intervalo caso este seja também um ponto fixo.*

O próximo comportamento mais simples corresponde à convergência de qualquer trajetória para um ponto fixo, mas com a possibilidade de que diferentes trajetórias sejam convergentes para pontos fixos diferentes.

Lema 5.6. *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma transformação contínua e crescente. Então a trajetória de cada ponto de $[a,b]$ converge para um ponto fixo.*





5.4 Propriedades dinâmicas da derivada

Uma vez estabelecida a existência de pontos fixos uma questão natural é a seguinte:

Questão: Qual é a natureza dos pontos fixos, isto é, qual é o comportamento das trajetórias de pontos próximos dos pontos fixos?

No caso de um ponto fixo cuja existência decorra do Princípio das contrações, já observámos que a trajetória de todo o ponto converge para esse ponto fixo.

Se f for uma transformação linear do tipo $f(x) = \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$ já observamos que as trajetórias aproximam-se de 0 se λ é inferior a 1, e afastam-se de 0 se λ é superior a 1. Estes dois tipos de comportamento nas trajetórias de pontos próximos de um dado ponto fixo motivam as seguintes definições.

Definição 5.7. *Dizemos que $p \in X$ é um* **ponto fixo atrativo** *se existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de p tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p,$$

para todo o $x \in \mathcal{B}$.

Definição 5.8. *Dizemos que $p \in X$ é um* **ponto fixo repulsivo** *se existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de p tal que, para todo o $x \in \mathcal{B}\backslash\{p\}$, existe um tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \notin \mathcal{B}$.*

Isto significa que a trajetória de todo o ponto $x \in \mathcal{B}$ sai da vizinhança em tempo finito.

Os próximos resultados fornecem-nos um primeiro exemplo de como as propriedades da derivada podem ser usadas para obter resultados dinâmicos.

Teorema 5.9. (condição suficiente para um ponto fixo ser atrativo): *Sejam $f : V \to V$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $V \subset \mathbf{R}^n$ e $p \in V$ um ponto fixo de f. Se $|f'(p)| < 1$ então p é um ponto fixo atrativo.*

Prova. Dois passos simples:

Passo 1: Porque f é C^1 a derivada é contínua e portanto existem $\lambda < 1$ e uma bola aberta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\epsilon(p)$ centrada em p tais que

$$|f'(x)| < \lambda,$$

para todo o $x \in \mathcal{B}$.

Passo 2: O Teorema do Valor Médio implica que $f(\overline{\mathcal{B}}) \subset \overline{\mathcal{B}}$, pois se $d(x,p) \leq \epsilon$ então

$$d(f(x), p) \leq \lambda d(x,p) < \epsilon,$$

e que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

se $x, y \in \overline{\mathcal{B}}$. Portanto $f|_{\overline{\mathcal{B}}} : \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$ é uma contração e o Princípio das contrações afirma que a trajetória de todo o ponto de $\overline{\mathcal{B}}$ converge para p. O resultado é que $\mathcal{B} \subset W^s(p)$, isto é, a bacia de atração de p é uma vizinhança de p. $\square$

Exercício: Sejam $f : I \to I$ uma transformação de classe $\mathcal{C}^1$ definida num intervalo aberto I da reta real e $p \in I$ um ponto fixo. Mostre que se $|f'(p)| > 1$, então p é um ponto fixo repulsivo.

Dizemos que a órbita de um ponto periódico p de período n é **atrativa** se p é um ponto fixo atrativo de f^n. Pelo teorema anterior sabemos que se $|(f^n)'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo atrativo de f^n. Além disso, pela regra da cadeia,

$$(f^n)'(p) = f'(p).f'(f(p)).\cdots.f'(f^{n-1}).$$

Portanto, se $\{p, f(p), \cdots, f^{p-1}\}$ é uma órbita periódica de período n, a derivada de f^n é a mesma em todos os pontos da órbita. Em particular a definição acima faz sentido.

6 Sistemas com comportamento das órbitas complicado

6.1 Transitividade topológica e caos

Definição 6.1. *Um homeomorfismo $f : X \to X$ diz-se* **topologicamente transitivo** *se existe um ponto $x \in X$ tal que a sua órbita (completa) $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa em X. Uma transformação contínua não-invertível $f : X \to X$ diz-se* **topologicamente transitiva** *se existe um ponto $x \in X$ tal que a sua órbita (positiva) $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é densa em X.*

Este conceito captura a ideia da dinâmica ser "indivisível".

Proposição 6.2. (Um critério para a transitividade topológica): *Seja X um espaço métrico completo, separável, sem pontos isolados. Se $f : X \to X$ é uma transformação contínua, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é topologicamente transitiva, isto é, f tem uma órbita densa.*
2. *f tem uma órbita positiva densa.*
3. *Se $\varnothing \neq U, V \subset X$, então existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \varnothing$.*
4. *Se $\varnothing \neq U, V \subset X$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \varnothing$.*

É claro que, $(4) \Rightarrow (3)$ e $(2) \Rightarrow (1)$. Para mostrar que hipóteses são necessárias para as implicações restantes, observamos que:

Lema 6.3. *Seja X um espaço métrico e $f : X \to X$ uma transformação contínua. Então:*

1. $1. \Rightarrow 3.$
2. *Se X não tem pontos isolados, então* $1. \Rightarrow 4.$
3. *Se X é separável, então* $3. \Rightarrow 1.$ *e* $4. \Rightarrow 2.$

Definição 6.4. *Uma transformação contínua $f : X \to X$ diz-se* **caótica** *se for topologicamente transitiva e se o conjunto dos pontos periódicos for denso em X.*

Definição 6.5. *Uma transformação $f : X \to X$ tem* **dependência sensível das condições iniciais** *se existe $\Delta > 0$, chamada a constante de sensibilidade, tal que para todo o $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existem $y \in X$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $d(x, y) < \epsilon$ e $d(f^n(x), f^N(y)) \geq \Delta$.*

Possuir dependência sensível das condições iniciais significa que o menor erro (ϵ) na condição inicial (x) pode conduzir a uma discrepância macroscópica (Δ) na evolução da dinâmica. A quantidade Δ diz-nos a que escala estes erros aparecem. Notemos que Δ não depende nem de x, nem de ϵ, mas apenas do sistema. O mais *pequeno* erro em *qualquer lugar* pode conduzir eventualmente a discrepâncias de tamanho Δ.

O metereologista Edward Lorenz descreveu este efeito como: "o efeito borboleta". Ficou célebre a frase de Lorenz:

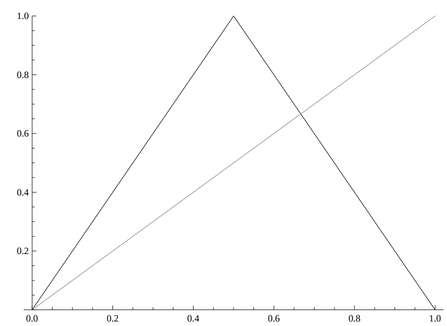
O bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas

Teorema 6.6. *As transformações caóticas exibem dependência sensível das condições iniciais excepto quando todo o espaço é constituído por uma única órbita periódica.*

6.2 Transformação tenda

Nesta secção vamos apresentar um exemplo simples de uma transformação caótica: a **transformação tenda**. A transformação tenda é a transformação definida por:

$$
\begin{aligned}
f : [0,1] &\to [0,1] \\
x &\mapsto \begin{cases} 2x & \text{se } \; x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se } \; x > 1/2 \end{cases}
\end{aligned}
$$



Exercício:

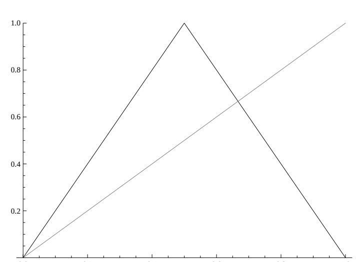
1. Procure os pontos periódicos de T e mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$ a transformação tenda tem 2^n pontos fixos.

2. Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

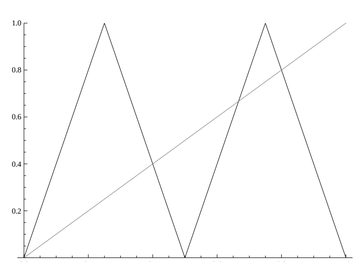
3. Mostre que T é topologicamente transitiva.

4. A transformação T é caótica?

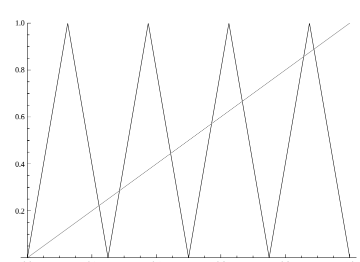
1. Os gráficos das três primeiras iteradas de T são os seguintes:



T



T^2



T^3

Consideremos os intervalos

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$$

com $k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$.

Em cada intervalo $I_{k,n}$, a transformação T^n é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Além disso, $T^n(I_{k,n}) = [0, 1]$. Consequentemente, $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$ (para cada $n \in \mathbb{N}$, existem 2^n intervalos do tipo $I_{k,n}$, com $k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$).

2. Todo o aberto não vazio $U \subset [0, 1]$ contém um dos intervalos $I_{k,n}$ se n é suficientemente grande. Logo, temos a garantia que existe algum ponto periódico de T em U. Consequentemente, o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0, 1]$.

3. Recordemos que, para a transformação tenda, as seguintes afirmações são equivalentes:

   - T é topologicamente transitiva, isto é, T tem uma órbita densa
   - se $\varnothing \neq U, V \subset [0, 1]$, U, V abertos, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(U) \cap V \neq \varnothing$.

   Todo o aberto não vazio $U \subset [0, 1]$ contém um dos intervalos $I_{k,N}$ com N suficientemente grande. Consequentemente, $T^N(U) = [0, 1]$. Logo, para todo o aberto não vazio $V \subset [0, 1]$ temos que $T^N(U) \cap V \neq \varnothing$.

4. Recordemos que a transformação tenda é caótica se for topologicamente transitiva e se o conjunto dos pontos periódicos for denso em $[0, 1]$. Assim, pelas alíneas anteriores concluímos que a transformação tenda é caótica.

6.3 Transformação shift

Nesta secção vamos apresentar um outro exemplo interessante de uma transformção caótica: a **transformação shift**.

O espaço das sequências de dois símbolos é o conjunto

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) : \, s_j = 0 \text{ ou } 1\}.$$

O conjunto Σ_2 é, portanto, constituído por todas as sequências possíveis de $0's$ e $1's$. Por exemplo, $(0000\cdots)$, $(0101\cdots)$, $(1010\cdots)$ e $(1111\cdots)$ são elementos distintos de Σ_2.

Dadas duas sequências de símbolos em Σ_2, $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \cdots)$ definimos a métrica d em Σ_2 por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Verifique que d é uma métrica em Σ_2.

Exemplo 6.7. Sejam $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$, $t = (1111\cdots) = (\overline{1})$ e $u = (0101\cdots) = (\overline{01})$. Então

1. $d(s,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-1/2} = 2.$

2. $d(t,u) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{1-1/4} = 4/3.$

3. $d(s,u) = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = 2/3.$ ■

Reparemos que a série que define $d(s,t)$ é sempre convergente. com efeito, s_i e t_i são ou 0 ou 1, portanto $|s_i - t_i| = 0$ ou 1. Consequentemente, esta série é dominada pela série geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$, que é convergente e tem soma 2. Então o máximo afastamento entre dois quaisquer pontos em Σ_2 é 2.

A métrica d permite-nos decidir quando é que duas sequências estão próximas. Facilmente se prova o seguinte resultado:

Teorema 6.8. (da Proximidade): *Sejam $s, t \in \Sigma_2$ e suponhamos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Então $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$. Reciprocamente, se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ então $s_i = t_i$ para $i \leq n$.*

Prova. Se $s_i = t_i$ para $i \leq n$, então

$$\begin{aligned} d(s,t) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $s_j \neq t_j$ para $j \leq n$, então devemos ter

$$d(s,t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Consequentemente, se $d(s,t) \leq 1/2^n$ então $s_i = t_i$ para $i \leq n$. $\square$

Agora que já temos o espaço (Σ_2, d) é altura de introduzirmos a transformação shift de Bernoulli.

Definição 6.9. *A* **transformação shift** $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *é definida por*

$$\sigma(s) = \sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots).$$

Exemplo 6.10.

1. $\sigma(010101\cdots) = (101010\cdots)$
2. $\sigma(101010\cdots) = (010101\cdots)$
3. $\sigma(01111\cdots) = (1111\cdots)$ ■

Proposição 6.11. *A transformação $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ é contínua relativamente à métrica d.*

Prova. Precisamos de mostrar que para todo o $s \in \Sigma_2$ e para todo o $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(s, \epsilon) > 0$ tal que $d(\sigma(s), \sigma(t)) < \epsilon$ sempre que $d(s,t) < \delta$. Tomemos então $s \in \Sigma_2$ e $\epsilon > 0$. Reparemos que

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 2d(s,t), \ \ \forall s, t \in \Sigma_2.$$

Então podemos simplesmente tomar $\delta = \epsilon/2$, o qual vale para todo o s. □

Reparemos que é muito fácil iterar a transformação shift - simplesmente em cada iteração continuamos a eliminar a primeira entrada, isto é,

$$\sigma^2(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \;=\; (s_2\, s_3\, s_4\, \cdots)$$

e, em geral, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma^n(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \;=\; (s_n\, s_{n+1}\, s_{n+2}\, \cdots).$$

Consequentemente, é muito fácil encontrar pontos periódicos de σ: se s for uma sequência que se repete da forma

$$s \;=\; (s_0\, s_1\, \cdots s_{n-1}\, s_0\, s_1\, \cdots s_{n-1}\, \cdots) \;=\; (\overline{s_0\, s_1\, \cdots s_{n-1}}),$$

então

$$\sigma^n(s) \;=\; s.$$

Reciprocamente, qualquer ponto periódico de σ deve ser uma sequência que se repete da forma anterior. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem exatamente 2^n pontos fixos de σ^n, cada um correspondendo a cada uma das 2^n sequências de comprimento n de $0'$s e $1'$s.

Exemplo 6.12. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2. Recordemos que o conjunto dos pontos periódicos de σ ser denso em Σ_2 significa que para todo o $s \in \Sigma_2$ e para todo o $\epsilon > 0$ existe um ponto t periódico tal que $d(s,t) < \epsilon$.

Isto é equivalente à seguinte afirmação: para todo $s \in \Sigma_2$ existe uma sequência de pontos $(s^{(n)})$, $s^{(n)}$ ponto periódico para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $s^{(n)} \to s$ quando $n \to \infty$, isto é, $d(s, s^{(n)}) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Dado $s \in \Sigma_2$ tal que $s = (s_0\, s_1 \cdots)$, definamos

$$s^{(n)} \;=\; (s_0\, \cdots\, s_n\, s_0\, \cdots\, s_n\, \cdots).$$

Então, pelo Teorema da Proximidade,

$$d(s, s^{(n)}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Portanto,

$$d(s, s^{(n)}) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

■

Exemplo 6.13. Vamos mostrar que existe um ponto s^* cuja órbita é densa em Σ_2. Consideremos o ponto

$$s^* = 01\,00011011\,000001010011100101110111\cdots$$

obtido listando sucessivamente todas as palavras finitas de $0'$s e $1'$s de comprimento 1, de comprimento 2, de comprimento 3, etc.

De modo claro, para algum inteiro r, a iterada de ordem r, σ^r, aplicada a s^* origina uma sequência que coincide com uma qualquer sequência dada num número arbitrariamente grande de dígitos iniciais. ■

Recordemos que a transformação shift é caótica se for topologicamente transitiva e se o conjunto dos pontos periódicos for denso em Σ_2. Pelas dois exemplos anteriores podemos concluir que a transformação shift é caótica.

7 Bifurcações

Para além do interesse que o estudo de um determinado sistema dinâmico possa suscitar, é igualmente muito interessante estudar famílias inteiras de sistemas dinâmicos, isto é, considerar sistemas dinâmicos dependendo de um ou mais parâmetros e questionar como variam as suas propriedades quando se modificam os parâmetros. Atentemos no tipo de questões que um estudo deste tipo pode suscintar.

Sabemos já que o sistema dinâmico tenda, $T(x)$, é caótico no intervalo $[0,1]$. Mas olhemos agora para esta dinâmica como um elemento da seguinte família de sistemas dinâmicos no intervalo [0, 1],

$$T_a(x) = \begin{cases} a\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2; \\ a - a\,x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{28}$$

onde a é um parâmetro que pode ser escolhido no intervalo $(0,2]$. Como vemos facilmente, a dinâmica $T(x)$ anteriormente estudada é um elemento desta família, pois surge como uma escolha particular, $a = 2$, para o parâmetro.

Se desenharmos os gráficos de algumas dinâmicas desta família vemos que à variação do parâmetro a corresponde apenas um levantar de uma tenda, isto é, que todas elas evidenciam a mesma forma, de tenda, distinguindo-se unicamente pela sua altura, igual a $a/2$. Vemos assim que, variando o parâmetro a no intervalo (0, 2], estamos a considerar dinâmicas todas elas muito parecidas entre si. Contudo, como uma análise rápida nos permite concluir, o sistema dinâmico, $T_{1/2}(x)$, que se obtém escolhendo $a = 1/2$, é extremamente simples, no sentido em que admite apenas um ponto fixo que atrai todas as dinâmicas iniciadas em qualquer ponto do intervalo. Sendo assim, a questão que se coloca é a seguinte: como é posível que, apenas pela modificação de uma forma suave de um parâmetro num intervalo, se consiga passar de um sistema dinâmico absolutamente trivial, que admite apenas um ponto fixo, para um outro extraordinariamente complicado, que admite pontos periódicos de todos os períodos e cujo conjunto de pontos periódicos é denso no intervalo! A resposta a esta questão fala-nos de modificações nas dinâmicas admitidas pelos sistemas $T_a(x)$ à medida que fazemos variar o parâmetro a, sendo esse o objectivo da chamada **Teoria das Bifurcações**, o estudo das modificações que podem ocorrer quando consideramos famílias parametrizadas de sistemas dinâmicos.

Exemplo 7.1. Seja $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a família parametrizada dos sistemas dinâmicos lineares tais que a origem $x = 0$ é um ponto fixo (obviamente que se trata da família das retas que passam pela origem),

$$f_a(x) \,=\, a\,x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Calculando $|f_a'(0)|$ percebemos que a estabilidade do ponto fixo vai variar com o parâmetro a. Assim, temos que o ponto fixo $x = 0$ é atrativo sempre que $a \in (-1, 1)$, sendo repulsivo caso $|a| > 1$. Vemos assim que, fazendo variar o parâmetro a, a natureza do único ponto fixo das dinâmicas se vai alterar. ■

Este exemplo ilustra um dos objectivos do estudo de famílias parametrizadas de sistemas dinâmicos, a saber, como a estabilidade de um ponto fixo pode variar com a modificação do valor do parâmetro. Contudo, também é possível observar modificações mais dramáticas.

Exemplo 7.2. Seja $p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a família parametrizada dos sistemas dinâmicos quadráticos com concavidade voltada para baixo e tendo a origem $x = 0$ como extremo (neste caso estamos perante a família das parábolas voltadas para cima com vértice na origem),

$$p_a(x) \,=\, a + x^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

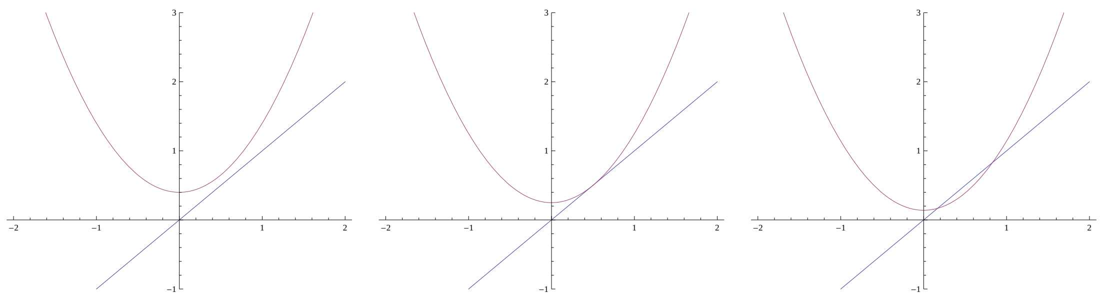
Calculando os pontos fixos de $p_a(x)$, chegamos à igualdade algébrica:

$$x^2 - x + a \,=\, 0\,,$$

cujas soluções são

$$x_{1,2} \,=\, \frac{1}{2}\,(1 \pm \sqrt{1 - 4a}).$$

Deste modo, podemos afirmar que a família de sistemas em causa tem dois pontos fixos, um ponto fixo ou ainda nenhum ponto fixo, dependendo da escolha do valor do parâmetro a. O conjunto de gráficos que se apresenta, fixados valores do parâmetro, mostra claramente por que existe uma modificação do número de pontos fixos das dinâmicas:



Se prosseguíssemos o nosso estudo da família de sistemas dinâmicos $p_a(x)$, iríamos perceber que, para a primeira das situções evocadas, a existência de dois pontos fixos, um desses pontos tem estabilidade distinta quando o parâmetro toma valores no intervalo $(-\infty, 1/4)$. ■

Os dois exemplos sugeridos mostram modificações relativas apenas aos pontos fixos das dinâmicas. Contudo, se o objectivo passar por estudar todas as modificações que ocorrem com as famílias indicadas, o estudo em causa deve, naturalmente, ser estendido às órbitas periódicas.

Por razões históricas, é hoje habitual designar qualquer modificação de uma propriedade de um sistema dinâmico através da variação de um ou mais parâmetros como uma **bifurcação**. Atente-se que a identificação de uma bifurcação passa necessariamente, para além de uma descrção da modificação em causa, pela indicação dos valores dos parâmetros para os quais se regista essa modificação.

O resultado mais importante no estudo das bifurcações que ocorrem numa família parametrizada de sistemas dinâmicos diferenciáveis diz-nos para que valores dos parâmetros não existe qualquer bifurcação. Para a sua demonstração ver [4].

Teorema 7.3. *Seja $f_a : I \to I$ uma família parametrizada de sistemas dinâmicos e sejam $x_p \in I$ e a_0 um valor do parâmetro tais que $f_{a_0}(x_p) = x_p$ (por outras palavras, x_p é um ponto fixo de $f_{a_0}(x)$). Admitamos ainda que $f'_{a_0}(x_p) \neq 1$. Então, existe um intervalo aberto U, a que x_p pertence, um intervalo aberto V, a que a_0 pertence, e uma função diferenciável $\phi : V \to U$ satisfazendo $f_a(\phi(a)) = \phi(a)$, para todo $a \in V$. Para além disso, $f_a(x)$ não tem quaisquer outros pontos fixos no intervalo U.*

Os detalhes técnicos deste resultado podem complicar um pouco a conclusão que nos interessa neste texto: aquilo que é afirmado significa que sempre que um sistema dinâmico

$f_{a_0}(x)$ tem um ponto fixo x_p tal que

$$|f'_{a_0}(x_p)| \neq 1,$$

então, não existe qualquer modificação, quer do número, quer da estabilidade, do ponto fixo, para valores do parâmetro em redor de a_0. Por outras palavras, se queremos procurar valores do parâmetro para os quais possam ocorrer modificações relativamente aos pontos fixos de uma família de sistemas dinâmicos, esses valores terão necessariamente que satisfazer

$$|f'_{a_0}(x_p)| = 1.$$

Este resultado, aqui escrito relativamente aos pontos fixos de uma família parametrizada de sistemas dinâmicos, pode ser generalizado para qualquer ponto periódico de período p.

O estudo das bifurcações de uma família parametrizada de sistemas dinâmicos pode ser apresentado através do que se habitualmente se chama de diagrama de bifurcação. No caso mais simples, aquele que nos vai interessar, de uma família de sistemas dinâmicos parametrizada por um único parâmetro, trata-se de um gráfico no plano (a, x) onde se desenha os pontos fixos e os pontos periódicos das dinâmicas como função do parâmetro. Para que seja também visível as mudanças de estabilidade dos pontos fixos e das órbitas periódicas, convencionou-se desenhar a tracejado os pontos repulsivos e a cheio os pontos atractivos.

Exemplo 7.4. Consideremos a família parametrizada de sistemas dinâmicos na recta real $f_a(x) = x^2 + x + a\,x$, com o parâmetro a tomando valores em $\mathbb{R}$ e estudemos as suas bifurcações relativamente aos seus pontos fixos.

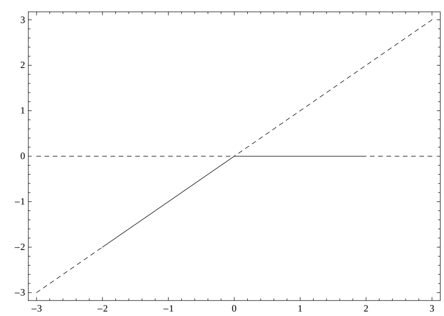
Um cálculo simples mostra-nos que $f_a(x)$ admite dois pontos fixos $p_1 = 0$ e $p_2 = a$ (para $a = 0$ temos apenas um ponto fixo, uma vez que $p_1 = p_2$). Vejamos então se existe alguma variação da sua natureza.

Como para o primeiro ponto fixo se tem

$$|f'_a(p_1)| = |1 - a|,$$

podemos concluir que, a existir alguma bifurcação, esta só acontecerá para $a = 0$ ou $a = 2$. Uma análise dos valores de $|f'_a(p_1)|$ permite-nos concluir que o ponto fixo p_1 é atrativo para valores do parâmetro no intervalo $(0, 1, 2)$ e repulsivo para $a < 0$ e $a > 2$. Repetindo a mesma análise, mas agora para o segundo ponto fixo, temos que

$$|f'_a(p_2)| = |1 + a|,$$



e assim que este ponto fixo sofre alteração da sua estabilidade para $a = -2$ e $a = 0$, a saber, é um ponto fixo atrativo para $a \in (-2, 0)$ e repulsivo para $a < -2$ e $a > 0$. Como se pretende, o diagrama de bifurcação apresentado na figura resume este estudo.

■

Vejamos com o seguinte exemplo, como o diagrama de bifurcação nos consegue igualmente mostrar uma alteração no número de pontos fixos de uma família de sistemas dinâmicos.

Exemplo 7.5. Retomemos a família parametrizada de sistemas dinâmicos na recta real $f_a(x) = x^2 + a$, com o parâmetro a tomando valores em $\mathbb{R}$ e estudemos as suas bifurcações relativamente aos seus pontos fixos. Como vimos anteriormente, as duas soluções da equação algébrica $f_(x) = x$ são dadas por

$$x_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\,(1 \pm \sqrt{1-4a}).$$

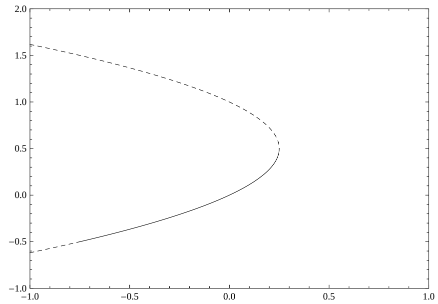
Deste modo, facilmente se conclui que as dinâmicas admitem dois pontos fixos para valores do parâmetro $a < 1/4$ e nenhum ponto fixo caso $a > 1/4$ (para $a = 1/4$ as duas soluções coincidem, tendo-se então uma dinâmica com um único onto fixo). Uma vez que

$$|f_a'(x_1)| \;=\; |1 + \sqrt{1-4a}|,$$

podemos concluir de imediato que x_1 é um ponto fixo repulsivo, para todos os valores do parâmetro (isto é, para $a < 1/4$). Por outro lado, a partir de

$$|f_a'(x_2)| \;=\; |1 - \sqrt{1-4a}|,$$

tem-se que existe mudança na natureza de x_2 para $a = -3/4$, a saber, x_2 é um ponto fixo atrativo para valores do parâmetro pertencentes ao intervalo $(-3/4, 1/4)$ e repulsivo para $a < -3/4$. Desta vez o diagrama de bifurcações mostra-nos a seguinte figura:



Como podemos perceber facilmente analisando o diagrama de bifurcações acima, existem valores do parâmetro para os quais as dinâmicas correspondentes não admitem qualquer ponto fixo. ■

.

Parte III

Exercícios propostos

1. **Lei do arrefecimento de Newton** (1643-1727). É habital chamar-se lei do arrefecimento de Newton à seguinte afirmação: a taxa de variação da diferença de temperatura entre um determinado objeto e o meio onde está inserido é proporcional a essa diferença de temperatura.

   A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que consideramos as seguintes hipóteses:

   - a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;
   - a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
   - o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

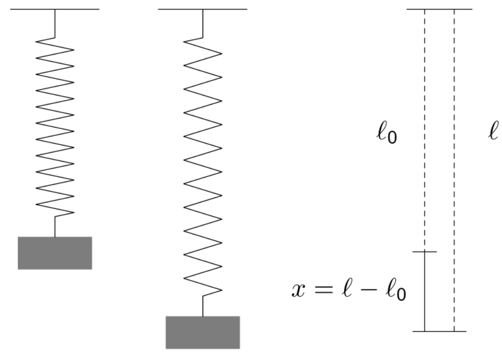
     $$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m),$$

     onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

   Justifique que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, sendo T_0 a temperatura inicial do corpo.

2. Robert Hooke (1638−1703) foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola: a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento ℓ da mola e a sua posição de equilíbrio ℓ_0. A constante de proporcionalidade é hoje chamada constante de Hooke da mola. Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade (ver figura). Naturalmente que a presença do corpo vai esticar um pouco a nossa mola até atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento que vamos designar por ℓ_0.

   De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento ℓ da mola. A



lei de Hooke estabelece que a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio, portanto, que

$$F = -k(\ell - \ell_0) = -kx.$$

O sinal no lado direito da igualdade reflete a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

A segunda lei do movimento de Newton diz-nos então que a posição do corpo, relativamente à posição de quilíbrio, vai evoluir de acordo com a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Habitualmente escreve-se esta igualdade da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

com $\omega^2 = k/m$ uma constante do sistema, dependente da constante de Hooke da mola e da massa do corpo nela pendurado. Assim sendo, esta vai ser uma equação diferencial que descreve a evolução temporal da posição de um qualquer corpo de massa m, neste caso, como todos sabemos, um movimento oscilatório, para cima e para baixo, pendurado numa mola de constante de Hooke k.

Mostre que a posição do corpo ao longo do tempo é descrita pela função

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathsf{sen}(\omega t),$$

com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

3. Determine uma função f e uma função g que verifiquem, respectivamente:

$$\begin{cases} f'(t) = t \\ \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(t) = -\dfrac{1}{t} \\ \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

   Desenhe os gráficos das funções obtidas. Qual a relação entre a tangente ao gráfico de f e a tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1)$?

4. Suponha-se que a aceleração de um automóvel é dada, em m/s^2, pela seguinte função de tempo

$$a(t) = 2t.$$

   Se no instante $t = 0$ o automóvel inicia a sua marcha, determine a distância percorrida pelo automóvel em 5 segundos.

5. Existe alguma função y tal que $y' = y$? E tal que $y' = ky$, com k constante?

6. Existe alguma função y tal que $y'' = -y$? E tal que $y'' = -ky$, com k uma constante positiva?

7. Determine se a função y indicada é solução da equação diferencial em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

   (a) $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}, \qquad y'' + 2y' + y = 0$

   (b) $y(t) = 1, \qquad y'' + 2y' + y = 0$

   (c) $y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad y''' + y'' + y' + y = 0.$

8. Verifique se a função $f(x) = \log x$, $x \in \mathbb{R}^+$ é uma solução maximal da equação

$$xy'' + y' = 0$$

Pode indicar uma solução de tal equação no intervalo $]-\infty, 0[$?

9. **Tempo de semi-vida**. Os materiais radioativos desintegram-se proporcionalmente à quantidade de massa presente, segundo uma constante de desintegração $k > 0$ que depende do material. Se $m(t)$ representa a massa no tempo t (t em anos), m verifica então:

$$m'(t) = -km(t).$$

   (a) Justifique que $m(t) = c_0 e^{-kt}$ sendo c_0 a massa inicial do material radioativo.

   (b) Verifique que o tempo $t_{1/2}$ necessário para o material se reduzir à metade do material inicial é exatamente

$$t_{1/2} = \left(\frac{1}{k}\right) \log 2.$$

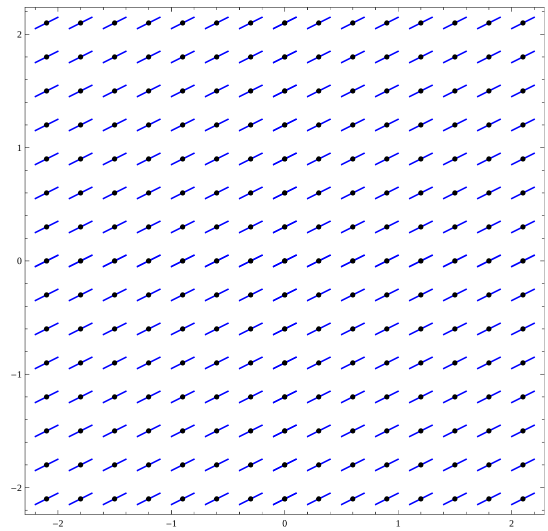
   Este tempo é chamado *tempo de semi-vida*.

   (c) Calcule o tempo de semi-vida do rádio sabendo que a constante de desintegração do rádio é $4,28 \times 10^{-4}$ por ano.

10. Esboce aproximadamente o campo de direções das seguintes equações:

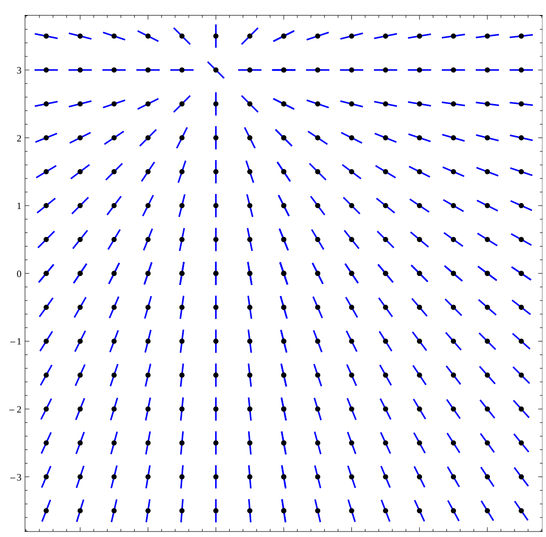
(a) $y' = 4$ (b) $y' = y$ (c) $y' = -x$ (d) $y' = -y$.

11. (a) O campo de direções tangentes



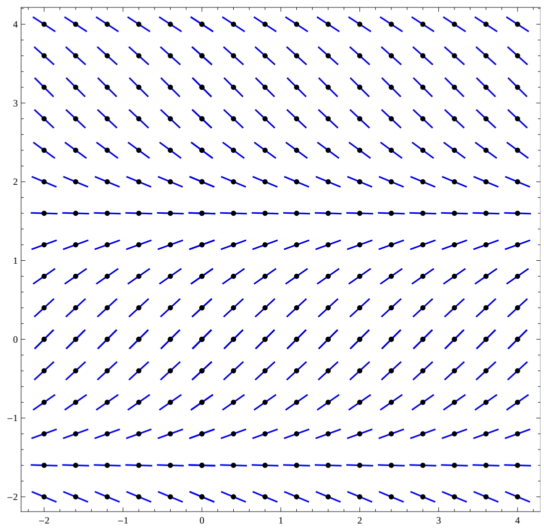
corresponde à equação: ☐ $y' = -1/2$ ☐ $y' = 1/2$ ☐ $y' = 2$

(b) O campo de direções tangentes



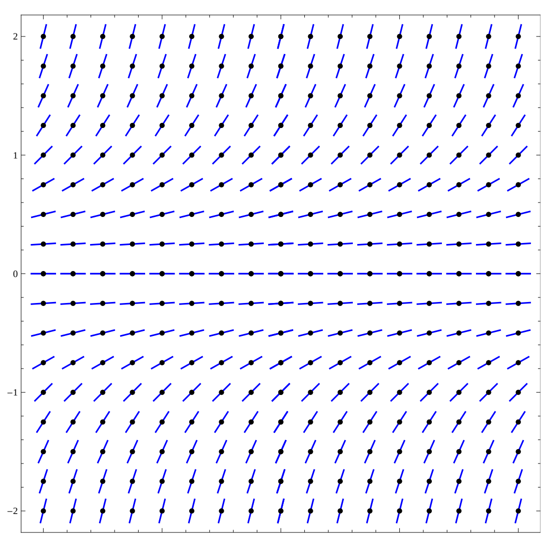
corresponde à equação: ☐ $y' = \dfrac{y-3}{t+1}$ ☐ $y' = 4$ ☐ $y' = t$

(c) O campo de direções tangentes



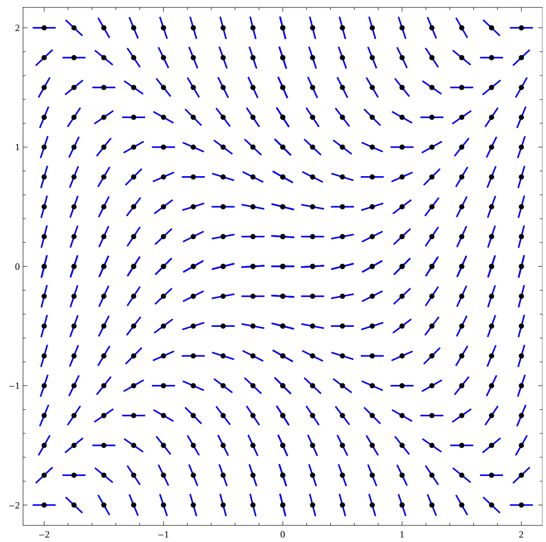
corresponde à equação: ☐ $y' = \cos y$ ☐ $y' = \operatorname{sen} y$ ☐ $y' = 1$

(d) O campo de direções tangentes



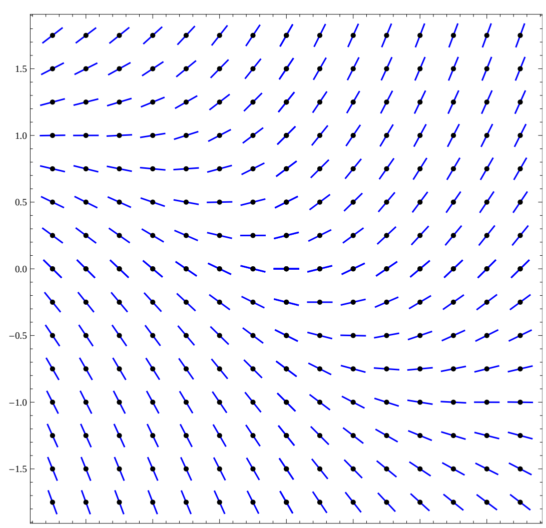
corresponde à equação: ☐ $y' = t$ ☐ $y' = y^2$ ☐ $y' = 0$

(e) O campo de direções tangentes



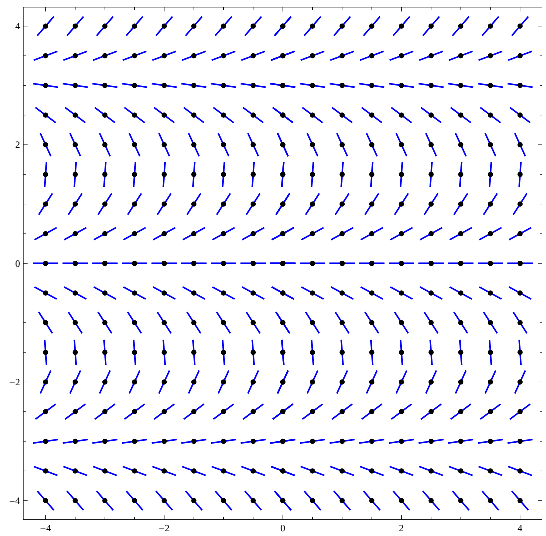
corresponde à equação: ☐ $y' = -y^2$ ☐ $y' = x^2 + y^2$ ☐ $y' = x^2 - y^2$

(f) O campo de direções tangentes



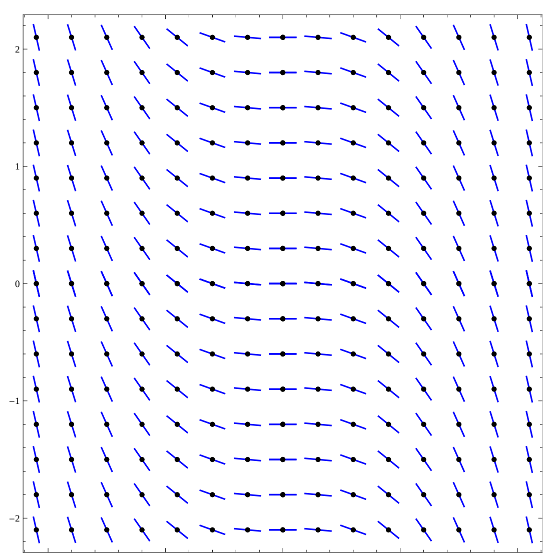
corresponde à equação: ☐ $y' = y - \text{sen}\, x$ ☐ $y' = y + \cos x$ ☐ $y' = y + \text{sen}\, x$

(g) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: $\square$ $y' = \text{tg } y$ $\square$ $y' = -\text{tg } y$ $\square$ $y' = \text{tg } t$

(h) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: $\square$ $y' = -y^2$ $\square$ $y' = -x^2$ $\square$ $y' = x^2$

Equações Diferencias do tipo $y' = f(x, y)$

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem, indicando o intervalo de definição da solução maximal:

   (a) $y' = -2y + 50\, e^{-10x}$

   (b) $y' = \dfrac{y}{x} - xe^{x}$

   (c) $y' + \dfrac{3y}{x} + 3x = 2$

   (d) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$

   (e) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$

   (f) $y' - \dfrac{4}{x}y = x^5 e^{x}$

2. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $x^2 y' + xy = 1, \quad P = (1, 2)$

   (b) $y' = \cos(x + 1)y, \quad P = (-1, 2)$

   (c) $y' + (1 - 2x)y = x\, e^{-x}, \quad P = (0, 2)$

   (d) $y' + 3t^2 y = e^{-t^3 + t}, \quad P = (0, 2)$

   (e) $y' - \cos(t)y = t\, e^{t^2 + \operatorname{sen}(t)}, \quad P = (0, 2)$

3. Determine as soluções maximais das seguintes equações separáveis:

   (a) $y' = -y^2$

   (b) $y' = y(1 - y)$

   (c) $x - yy' = 0$

   (d) $y' = \sqrt{x}y$

   (e) $y' = 2x^2 \operatorname{sen}(x)y$

4. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $y' = 6xy, \quad P = (0, -2)$

   (b) $x' = 2\,t\,(1 + x), \quad P = (0, 0)$

   (c) $y' = -4\,e^y \cos(t), \quad P = (0, 1)$

   (d) $y' = \cos(x + 1)\,y, \quad P = (-1, 2)$

5. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações separáveis:

   (a) $y' = \cos x\, e^{-y}$

   (b) $y' = \dfrac{x\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$

   (c) $y' = 2\operatorname{sen}(4x)e^{-x}\dfrac{1 + y^2}{4y}$

   (d) $y' = \dfrac{4x}{1 + y^2}$

   (e) $y' = \dfrac{x\cos(2x)}{1 + y}$

6. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações homogéneas:

   (a) $y' = \dfrac{y + t}{t}$ (b) $y' = \dfrac{2y^4 + t^4}{ty^3}$

   (c) $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{2ty}$ (d) $y' = \dfrac{3y^2 - t^2}{2ty}$

7. Determine a solução maximal da equação $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ que pasa no ponto $(2, -\sqrt{2})$.

8. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações de Bernoulli:

   (a) $y' + y = y^{-1}$

   (b) $y' + \dfrac{1}{x}y = \log(x)y^2$

   (c) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^3}$

9. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $y' + \text{sen}(x)y = \text{sen}(x)y^{-2}, \quad P = (\pi/2, 1)$

   (b) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3, \quad P = (1, \frac{1}{2})$

10. Mostre que a mudança de variável dependente $z = y^2 + t$ transforma a equação diferencial

$$y' = \frac{ty^2 + t^2 - 1}{2y}$$

numa equação separável.

11. Considere a equação diferencial $y' = \cos(x + y)$.

   (a) Mostre que a mudança de variável $y = z - x$ transforma a equação dada numa equação separável.
   (Sugestão: recorde que $\cos(x) + 1 = 2\cos^2(\frac{x}{2})$).

   (b) Determine a solução maximal da equação que passa no ponto $(0, \pi/2)$.

12. Considere a equação diferencial $y' - ty = -ty^3$. Determine a solução maximal da equação que passa no ponto $(0, -2)$.

    (Sugestão: multiplique a equação por y^{-3} e efetue a mudança de variável $z = y^{-2}$)

13. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações:

    (a) $y' - y = e^{3x}$

    (b) $y' = \dfrac{1}{xy^3}$

    (c) $y \ \mathrm{sen}(x) e^{\cos(x)} + y^{-1} y' = 0$

    (d) $(xy + y^2) - x^2 y' = 0$

    (e) $y \ \mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) + x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - x \ \mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) y' = 0$

Equações Diferencias Lineares de Ordem n

1. Considere a equação diferencial linear homogénea de segunda ordem

$$y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0\,.$$

   (a) Mostre que $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, são soluções linearmente independentes da equação.

   (b) Determine a solução maximal que passa no ponto $(0, 2)$ e que satisfaz $y'(0) = 3$.

2. Para as equações diferenciais que se apresentam de seguida, mostre que as funções correspondentes formam um conjunto fundamental de soluções:

   (a) $y'''(x) + 2\,y''(x) - 11\,y'(x) - 12\,y(x) \;=\; 0\,, \qquad \{\, \mathrm{e}^{3x},\, \mathrm{e}^{-x},\, \mathrm{e}^{-4x} \,\}$

   (b) $y'''(x) - y''(x) + 4\,y'(x) - 4\,y(x) \;=\; 0\,, \qquad \{\, \mathrm{e}^{3x},\, \operatorname{sen} x,\, \cos x \,\}$

   (c) $x^3\,y'''(x) - 3x^2\,y''(x) + 6x\,y'(x) - 6\,y(x) \;=\; 0\,, \quad x > 0\,, \qquad \{\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$

   (d) $y^{(4)}(x) - y(x) \;=\; 0\,, \qquad \{\, \mathrm{e}^{x},\, \mathrm{e}^{-x},\, \operatorname{sen} x,\, \cos x \,\}$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares homogéneas:

   (a) $y''(x) - 2\,y'(x) - 3\,y(x) = 0$
   (b) $y'''(x) - 3\,y''(x) - y'(x) + 3\,y(x) = 0$
   (c) $y''(x) - 8\,y'(x) + 16\,y(x) = 0$
   (d) $y'''(x) - 6\,y''(x) + 12\,y'(x) - 8\,y(x) = 0$
   (e) $y''(x) - 4\,y'(x) + 13\,y(x) = 0$
   (f) $y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$
   (g) $y^{(iv)} + y(x) = 0$
   (h) $y^{(iv)} + 2\,y''(x) + y(x) = 0$

4. Sabendo que $y(x) = \text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0\,,$$

resolva a equação.

5. Determine a solução maximal da equação $y''(x) - y'(x) - 12\,y(x) = 0$ que passa no ponto $(0,3)$ e que satisfaz $y'(0) = 5$.

6. Determine a solução maximal da equação $y''(x) - 4\,y'(x) + 29\,y(x) = 0$ que passa no ponto $(0,0)$ e que satisfaz $y'(0) = 5$.

7. Determine a solução maximal da equação $y''(x) = y'(x)$ que passa no ponto $(1,1)$ e que satisfaz $y'(0) + y(0) = 0$.

8. Resolva a equação diferencial $y'' - 3\,y' + 2\,y = f(x)$, quando:

   (a) $f(x) = 4x^2$ (b) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ (c) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ (d) $f(x) = 2x^2 + \mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x + 4x\,\mathrm{e}^{3x}$

9. Determine a solução maximal da equação $y'' - 2\,y' - 3\,y = 2\,\mathrm{e}^x - 10\,\text{sen}\,x$ que passa no ponto $(0,2)$ e que satisfaz $y'(0) = 4$.

10. Determine a solução maximal da equação $y'' + y = 3x^2 - 4\,\text{sen}\,x$ que passa no ponto $(0,0)$ e que satisfaz $y'(0) = 1$.

11. Resolva as seguintes equações diferenciais:

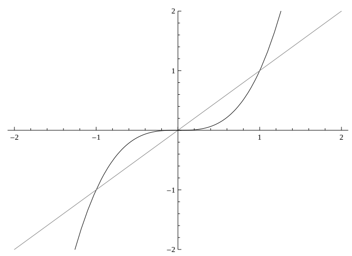
    (a) $y'' - 3\,y' + 2\,y = \text{sen}\,(2x) + \mathrm{e}^{2x}$ (b) $y''' - 4\,y' = 3x + \mathrm{e}^x$

    (c) $y'' - y' + 2\,y = 2x - 1 - 3\,\mathrm{e}^x$ (d) $y''' - 2\,y'' - 5\,y' + 6y = \mathrm{e}^x + x^2$

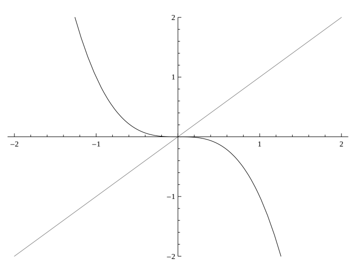
    (e) $y''' + y'' - 2y = x\,\mathrm{e}^x + 1$

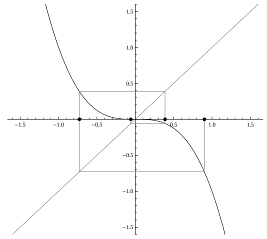
1. Em cada alínea estude a dinâmica do sistema dinâmico $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Utilize o Maxima para prever a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

(a) $f(x) = x^3$

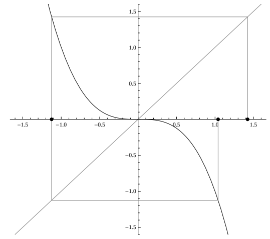


(b) $f(x) = -x^3$

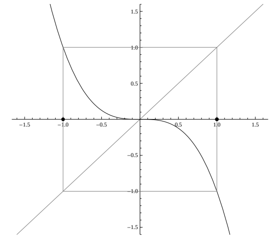




$x_0 = 0.9$

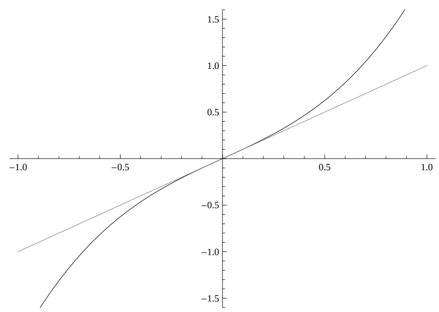


$x_0 = 1.1$

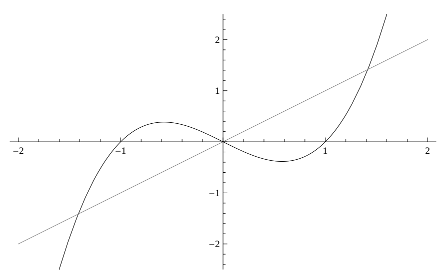


$x_0 = 1$

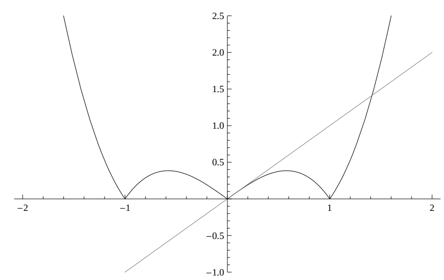
(c) $f(x) = x^3 + x$



(d) $f(x) = x^3 - x$

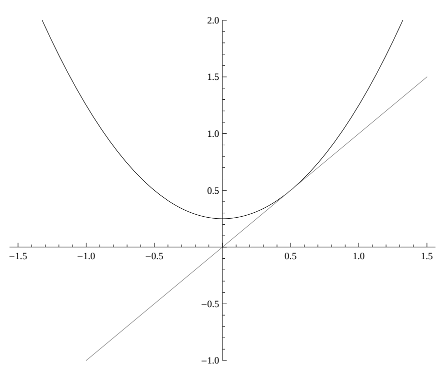


f

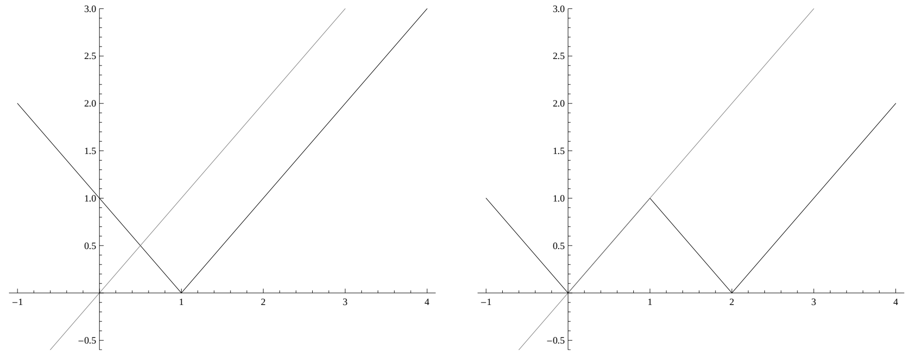


$|f|$

(e) $f(x) = x^2 + 1/4$

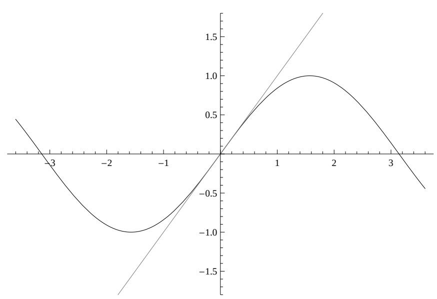


(f) $f(x) = |x - 1|$

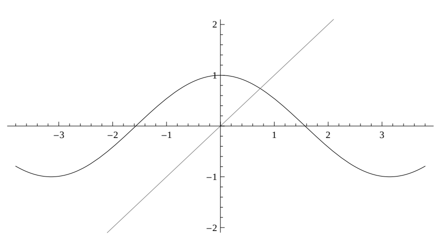


f $\qquad$ f^2

(g) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(h) $f(x) = \cos x$



2. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

   (a) Um sistema dinâmico $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que não tenha pontos fixos.

   (b) Um sistema dinâmico contínuo $f :]0,3[\longrightarrow]0,3[$ que não tenha pontos fixos.

   (c) Um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não tenha pontos fixos.

3. Em cada alínea, apresente um exemplo de um sistema dinâmico contínuo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

   (a) $W^s(0) =]-1,1[$.

   (b) $\omega(x) = \{1\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\omega(x) = \varnothing$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $\omega(2) = \{-2,2\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (e) O conjunto $[-1,1]$ não contém pontos periódicos.

   (f) $\sqrt{3}$ é um ponto periódico de período 2.

   (g) f tem um único ponto fixo x e $W^s(x) = \mathbb{R}$.

   (h) Todo o ponto da recta é periódico.

   (i) Todo o ponto da recta é recorrente.

   (j) Todo o ponto da recta é não-errante.

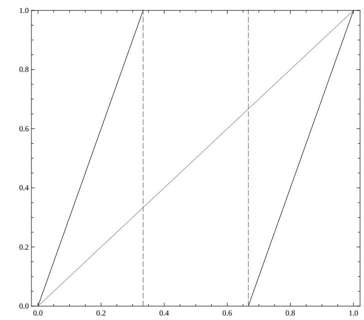
   (k) Nenhum ponto da recta é periódico.

   (l) Nenhum ponto da recta é recorrente.

   (m) O conjunto dos pontos recorrentes é $[0,2]$.

4. Apresente um exemplo de um sistema dinâmico $f : [0,1[\longrightarrow [0,1[$ que seja uma contracção sem pontos fixos.

5. Considere o sistema dinâmico $f(x) = 2x\,(\text{mod}\,1)$, $x \in [0, 1[$.

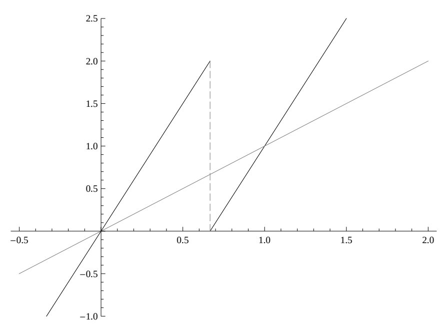


(a) Mostre que $f(x) = (.s_2 s_3 \cdots)_2$, para todo $x = (.s_1 s_2 s_3 \cdots)_2$.

(b) Encontre os pontos fixos (caso existam) e os pontos periódicos de período $p = 2$ e $p = 3$ (caso existam) de f.

(c) Apresente um exemplo de um ponto cuja órbita por f não seja periódica.

6. Considere o sistema dinâmico $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 2/3 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 2/3 \end{cases}$



(a) Caracterize o conjunto dos pontos do intervalo unitário cuja primeira iterada pertence ainda a esse intervalo.

(b) Caracterize o conjunto dos pontos do intervalo unitário cuja iterada n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pertence ainda a esse intervalo.

(c) Caracterize o conjunto invariante maximal de f.

7. Para cada uma dos seguintes sistemas dinâmicos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determine os pontos fixos e indique quais são atractivos e quais são repulsivos:

(a) $f(x) = x^2 - x/2$

(b) $f(x) = 4x - x^2$

(c) $f(x) = x^2 - 1$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(e) $f(x) = x + x^3$

(f) $f(x) = x - x^3$

(g) $f(x) = x + x^2$

(h) $f(x) = x - x^2$

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases}$

(j) $f(x) = e^x - 1$

8. Considere o sistema dinâmico $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Mostre que $W^s(1) = \mathbb{R}^+$.

9. Em cada alínea, apresente um exemplo de um sistema dinâmico contínuo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\sqrt{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

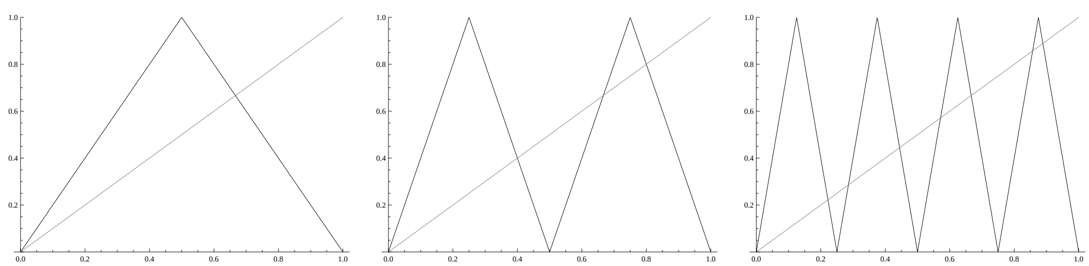
(b) $\sqrt{3}$ é um ponto fixo atractivo.

(c) π e $-\pi$ são pontos fixos repulsivos.

Sistemas Dinâmicos Caóticos

1. Considere o sistema dinâmico *tenda* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases} .$$



T $\qquad$ T^2 $\qquad$ T^3

   (a) Procure os pontos periódicos de T e mostre que $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$.

   (b) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

   (c) Mostre que a transformação T é topologicamente transitiva.

   (d) O sistema dinâmico tenda é caótico?

2. Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) : \ s_j = 0 \text{ ou } 1\}$ e $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ o sistema dinâmico shift definido por

$$(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \longmapsto (s_1\, s_2\, s_3\, \cdots)$$

   onde $(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por $d(s,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.

   (a) Em cada alínea determine $d(s,t)$ onde:

      i. $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (1111\cdots) = (\overline{1})$,

ii. $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$,

iii. $s = (011011011\cdots) = (\overline{011})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$.

(b) Mostre que $d(s,t) \leq 2$ para quaisquer $s, t \in \Sigma_2$.

(c) Dê um exemplo de um ponto periódico de período 4.

(d) Mostre que $|\text{Fix}(\sigma^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(e) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2.

(f) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(s)$ é densa em Σ_2.

(g) O sistema dinâmico σ é caótico?

Bifurcações

1. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 + x - 2ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

   (b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

2. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 + a$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

   (b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

3. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^3 - a\,x$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

   (b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

4. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = a\,x(1 - x)$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a > 0$.

   (a) Relativamente aos pontos fixos de f_a, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

   (b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_a.

   (c) Descreva a bifurcação, relativa aos pontos fixos e aos pontos periódicos de período dois, que ocorre para $a_\circ = 3$.

Referências

[1] Assis Azevedo, *Equações Diferenciais e Integração Múltipla*, Sebenta número cinco, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2005.

[2] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Salvatore Cosentino, *Sistemas Dinâmicos*, notas de apoio à unidade curricular "Sistemas Dinâmicos, Fractais e Caos Determinista", Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2003.

[4] Robert Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, Perseus Publishing Co., 1989.

[5] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

[6] Boris Hasselblatt and Anatole Katok, *A first course in dynamics, with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.

[7] Reginaldo J. Santos, *Introdução às Equações Diferenciais Aplicadas*, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

[8] Maria Joana Soares, *Equações Diferenciais*, notas de apoio à unidade curricular "Complementos de Análise Matemática", Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 1998.

[9] Maria Joana Torres, *Sistemas Dinâmicos*, notas de apoio à unidade curricular "Análise e Sistemas Dinâmicos: Aplicações e História" do Mestrado em Matemática - Formação Contínua de Professores, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2008.