2 - Lei de Gauss

2.1 - Fluxo de um campo eletroestático.

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral.

$$\phi = \frac{Q_{\mathrm{int}erior}}{\varepsilon_0}$$

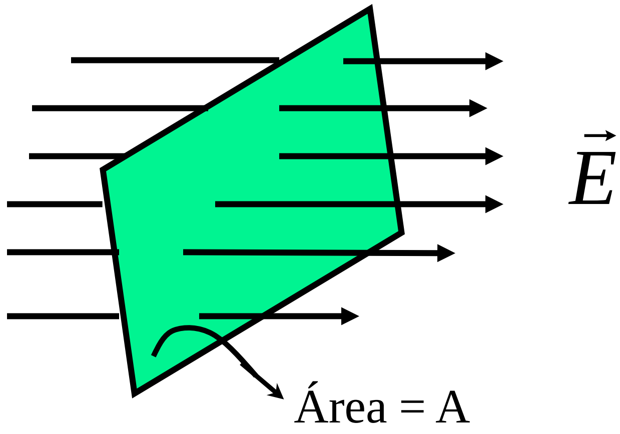
2 - Lei de Gauss da electroestática

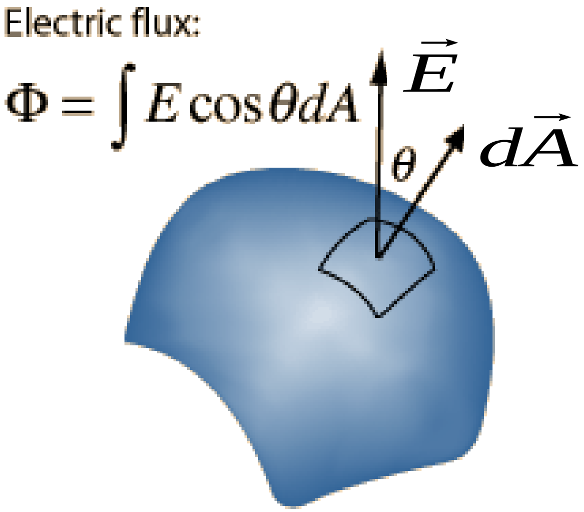
Pré-requisitos: produto escalar de dois vetores.

$$\phi = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| . \cos\theta$$

Fluxo de um campo elétrico

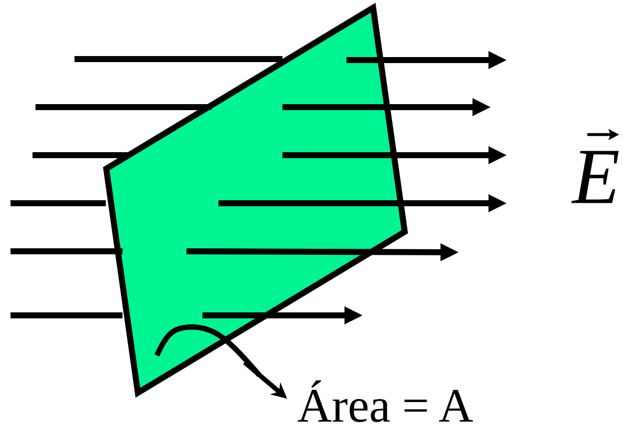
é uma medida do número de linhas do campo elétrico que atravessam uma determinada superfície.





2.1 - Fluxo de um campo eletroestático

→ Campo Eléctrico uniforme (em módulo e direcção), área A ⊥ ao campo



O número de linhas por unidade de área é proporcional ao módulo do campo elétrico.

$$\boxed{\Phi = E.A_{\perp}}$$

$(N.m^2/C)$

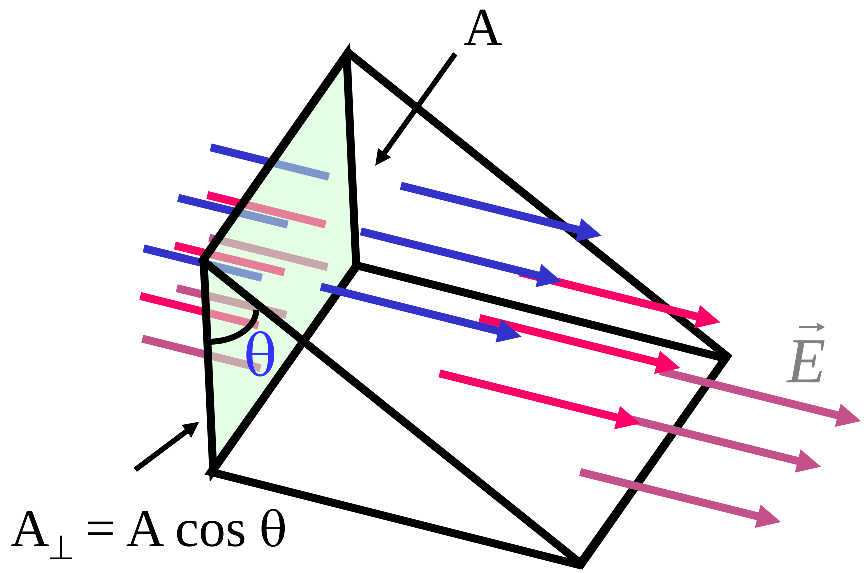
Fluxo Eléctrico

Módulo do Campo

Área da superfície ⊥ ao campo

2.1 - Fluxo de um campo eletroestático

- Se a superfície não for $\perp$ ao campo $\Rightarrow$ o número de linhas (ou o fluxo) através de cada unidade de área deve ser menor.



θ : ângulo entre a normal à superfície, A, e o campo eléctrico uniforme.

número de linhas que atravessam A = número de linhas que atravessam a área projectada $A_\perp$ (perpendicular a $\vec{E}$)

2.1 - Fluxo de um campo eletroestático

$$\boxed{\Phi = E.A.\cos\theta \; = E.A_{\perp}}$$

Fluxo através de uma superfície de área fixa, tem:

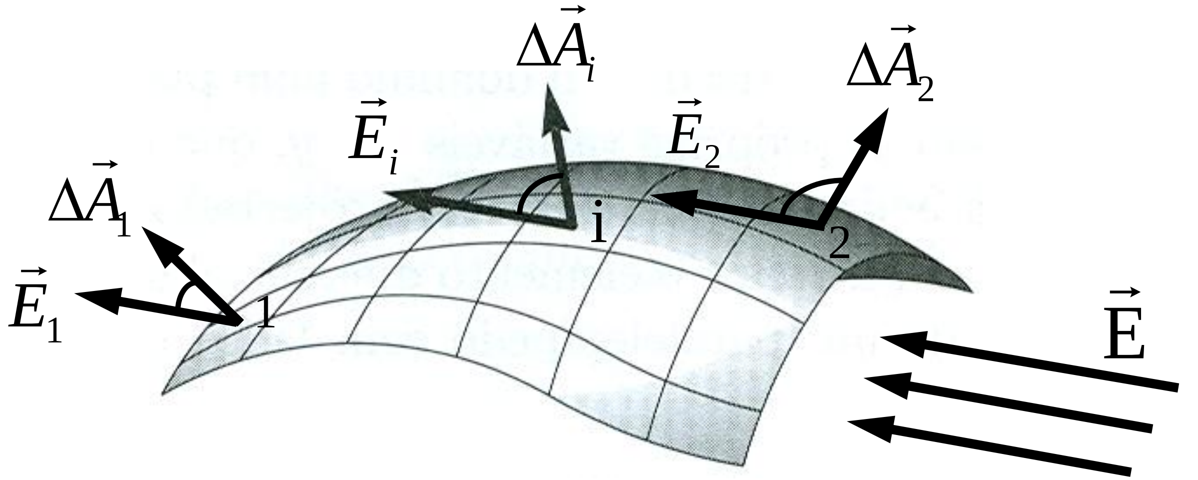
(*) **Valor máximo**, $E \cdot A$, quando a superfície é **perpendicular** ao campo ($\cos 0^{o}=1$)

(*) **Valor nulo** quando a superfície é **paralela** ao campo ($\cos 90^{o} = 0$)

$\Rightarrow$ Em situações mais gerais, o campo eléctrico pode variar sobre a superfície considerada.

2.1 - Fluxo de um campo eletroestático

Exemplo:



$\Delta\vec{A}_i$ cujo módulo é a área do i-ésimo elemento e cuja direcção é a da normal à superfície ($\Delta\vec{E} = 0$ em $\Delta\vec{A}_i$)

$$\Delta\phi_i = E_i . \Delta A_i . \cos\theta = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

2.1 - Fluxo de um campo eletroestático

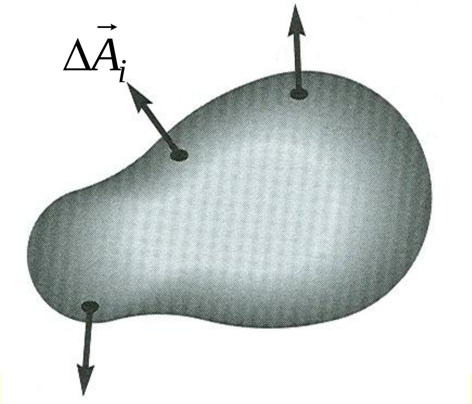
$$\boxed{\phi \equiv \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i = \int_{Sup.} \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Definição geral do fluxo eléctrico

- Integral sobre uma superfície hipotética
- Em geral o valor de ϕ depende da configuração do campo e da superfície que se tiver escolhido.

Usualmente: calcula-se o fluxo através de uma superfície fechada (superfície que divide o espaço em uma região interior e uma exterior); ex: uma esfera

$\Delta \vec{A}_i$ são normais à superfície (apontam "para fora").



☞ $\vec{E}$ está para fora e $\theta < 90^o \Rightarrow \Delta\phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} > 0$

☞ $\vec{E}$ está para o interior e $\theta > 90^o \Rightarrow \Delta\phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} < 0$

O fluxo total ou líquido, através da superfície, é proporcional ao número líquido de linhas que atravessam a superfície.

nº de linhas que saem – nº de linhas que entram

Saem > entram $\Rightarrow$ fluxo líquido positivo

Entram > saem $\Rightarrow$ fluxo líquido negativo

Fluxo líquido: $$\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

Superfície fechada

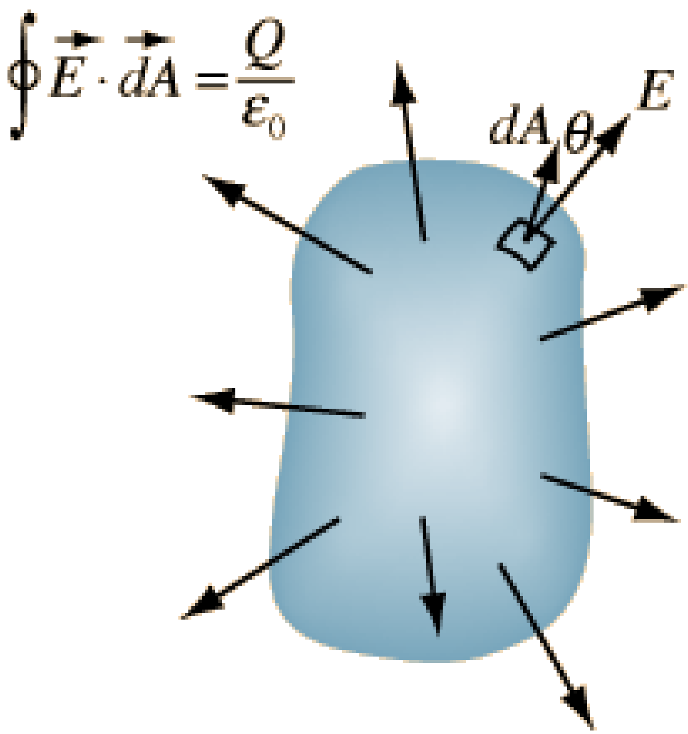
Integral sobre uma superfície fechada

Componente do campo eléctrico $\perp$ à superfície

O cálculo do fluxo líquido através de uma superfície fechada pode ser muito trabalhoso…

Porém, se o campo **E** $\perp$ à superfície, em cada ponto, e tiver módulo constante $\Rightarrow$ cálculo directo.

2 - Lei de Gauss da electroestática

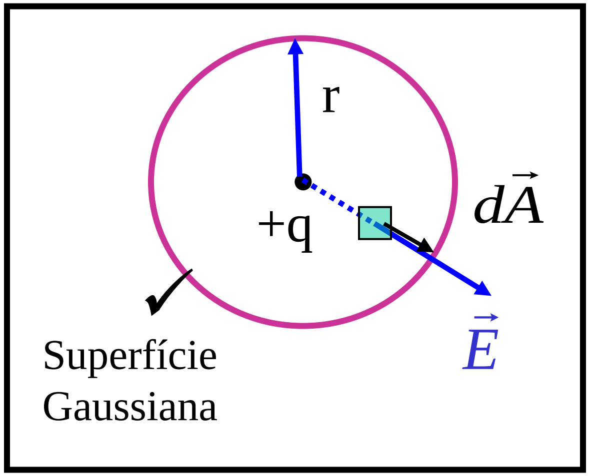


O fluxo elétrico total através de uma <u>superfície fechada</u> é igual à carga total no interior da superfície dividida por ε_0.

$$\phi = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

Relação geral entre o fluxo elétrico líquido através de uma superfície fechada (superfície Gaussiana) e a carga no interior da superfície.

Carga $+q$ no centro de uma esfera de raio r:



$$E = k\frac{q}{r^2}$$ na superfície Gaussiana.

$$\vec{E} \text{ radial} \Rightarrow \quad \vec{E}_i \ // \ \Delta\vec{A}_i \ , \ \forall i$$

$$\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_n . \Delta A_i \cdot \cos 0^{o} = E . \Delta A_i$$

$$\phi_c = \oint E_n dA = \oint E dA = E\oint dA = k\frac{q}{r^2}\oint dA$$

E = cte. na superfície

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

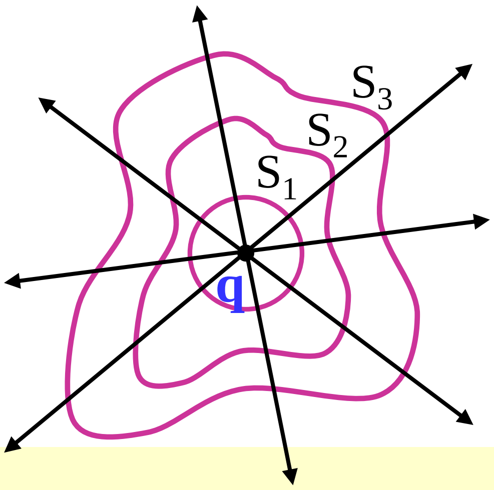
- Superfície Gaussiana Esférica $\Rightarrow \quad \oint dA = A = 4\pi r^2$

$$\boxed{\phi_c = \frac{kq}{r^2}\left(4\pi r^2\right) = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

- **Independente de r.**

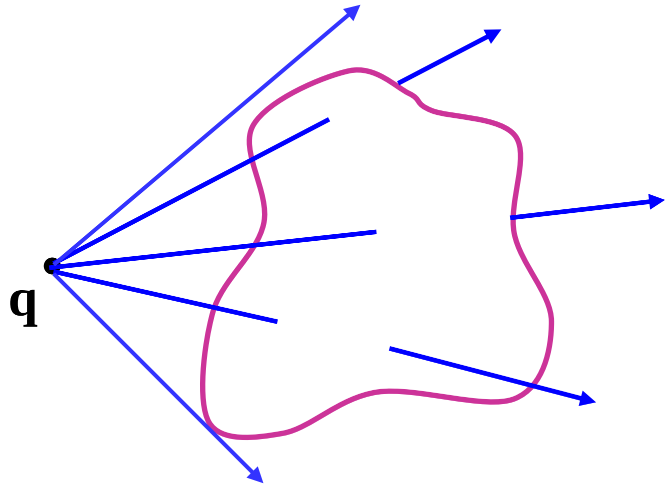
- O fluxo líquido através duma superfície Gaussiana esférica e proporcional à carga, **q**, **no interior da superfície**.



- $\phi \propto$ ao número de linhas que atravessam a superfície.
- O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga pontual q é dado por q/ε_0

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

- Carga pontual no exterior de uma superfície fechada.



$$\boxed{\text{nº de linhas que saem = nº de linhas que entram}}$$

Logo:

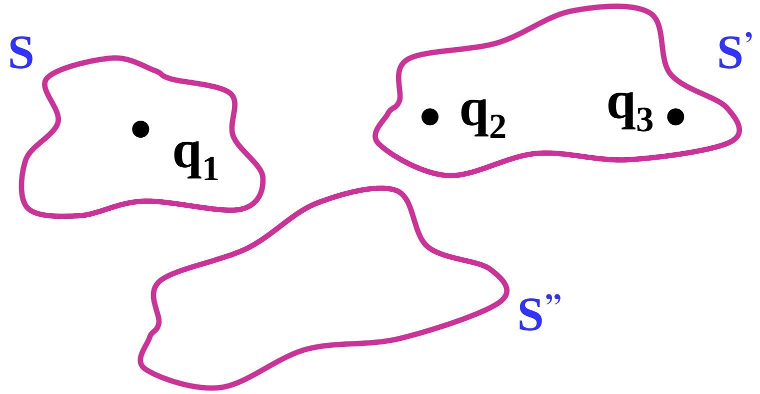
- O fluxo líquido através de uma superfície fechada que não envolve nenhuma carga ou cargas cuja soma seja nula, é nulo.

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

- Caso geral de muitas cargas pontuais, ou de uma distribuição continua de cargas.

- Princípio de sobreposição: o campo eléctrico de muitas cargas é igual à soma vectorial dos campos eléctricos provocados pelas cargas individuais.

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \ldots\right)\cdot d\vec{A}}$$



$$\phi_s = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_{s'} = \left(\frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\phi_{s''} = 0$$

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

- Lei de Gauss:

$$\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Carga líquida no interior da superfície

Campo elétrico em qualquer ponto da superfície Gaussiana

O fluxo elétrico líquido, através de qualquer Superfície Gaussiana fechada, é igual à carga líquida no interior da superfície, dividida por ε_0.

q_{in} : carga elétrica líquida no interior da Superfície Gaussiana.

$\vec{E}$: campo elétrico total (contribuições das cargas no interior e no exterior da Superfície Gaussiana).

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

- Na prática, a Lei de Gauss só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana, por exemplo).

- A Superfície Gaussiana é uma superfície matemática.

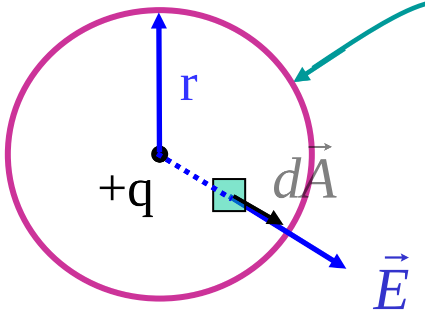
- Se a Superfície Gaussiana é cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral do fluxo será fácil de calcular.

2.2 - Lei de Gauss da eletroestática na forma integral

Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores carregados.

- Cálculo do campo elétrico, $\vec{E}$, de uma dada distribuição de cargas.
- A Lei de Gauss é útil quando há um elevado grau de simetria na distribuição de cargas: esferas, cilindros compridos ou chapas planas, todas uniformemente carregadas.
- A superfície deve ser sempre escolhida de modo que tenha a mesma simetria da distribuição de carga.

a) Campo elétrico de uma carga pontual.



Superfície Gaussiana esférica, raio r

Campo radial, para fora

$$\vec{E} \perp \grave{a} \text{ superfície } \forall P_{\text{sup.}}$$

$$\vec{E} \,//\, d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos 0^{\circ} = E \cdot dA$$

Lei de Gauss:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

E = cte na superfície

Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores carregados

$\Rightarrow$ Módulo do campo

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\,\frac{q}{r^2}}$$

$\Rightarrow$ Força eletrostática sobre uma segunda carga pontual q_0

Módulo $\Rightarrow$

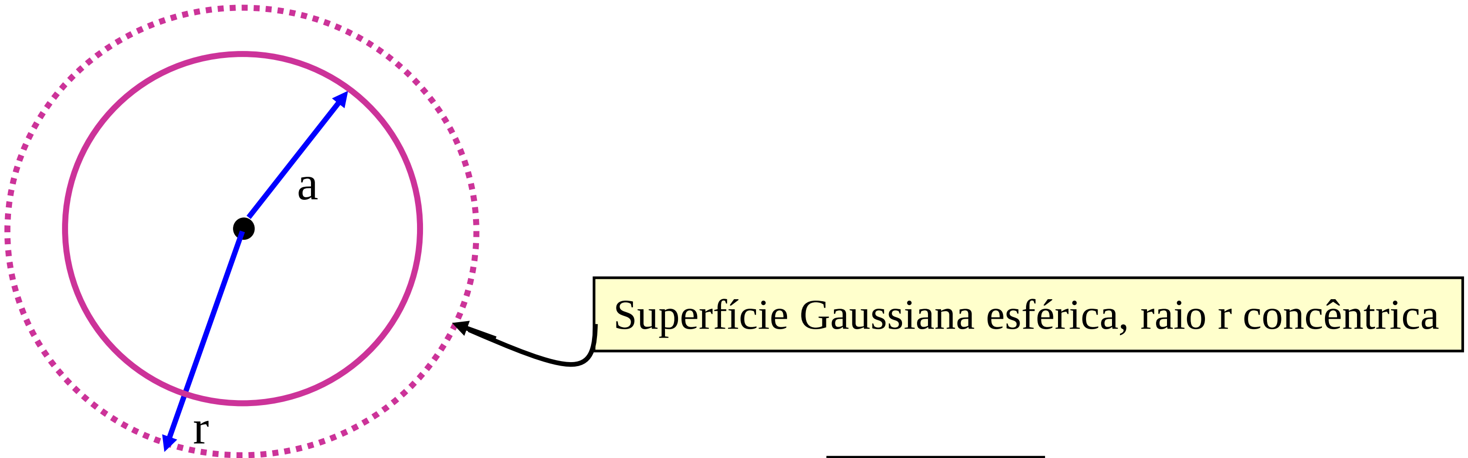
$$\boxed{F = q_0 E = k\,\frac{q q_0}{r^2}}$$

Lei de Coulomb

b) Distribuição de carga num isolador com simetria esférica

Esfera isoladora; raio a; densidade de carga ρ uniforme; ***+Q*** carga total.

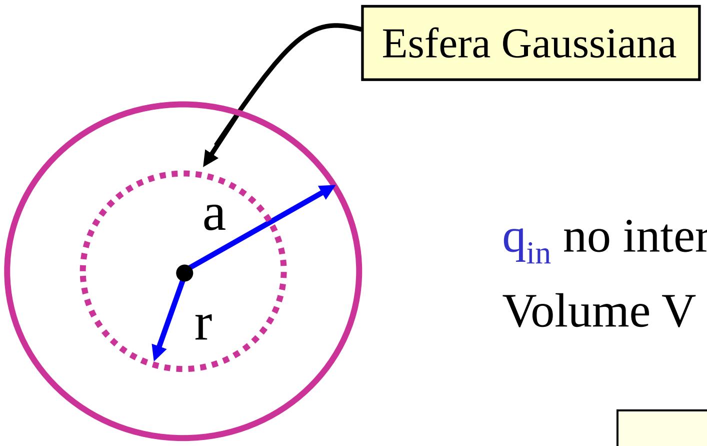
1) Intensidade do campo num ponto externo, $r > a$.



Exemplo a) $\Rightarrow$ $\boxed{E = k\frac{Q}{r^2}}$

Resultado idêntico ao que foi obtido para uma carga pontual $\Rightarrow$ equivalente!!!

2) Intensidade do campo num ponto no interior da esfera (r < a).



q_{in} no interior da Superfície Gaussiana de Volume V é < Q

$$q_{in} = \rho \int dV = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Exemplo a) $\Rightarrow$ $E = cte;\ \vec{E} \perp\ Sup.\ Gauss. \forall\ P_{sup}$

Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores carregados

Lei de Gauss r < a

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{in}}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)} = \frac{\rho \, {}^4\!/\!{}_3 \, \pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$Como \;\; \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}$$ (Def.)

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r$$

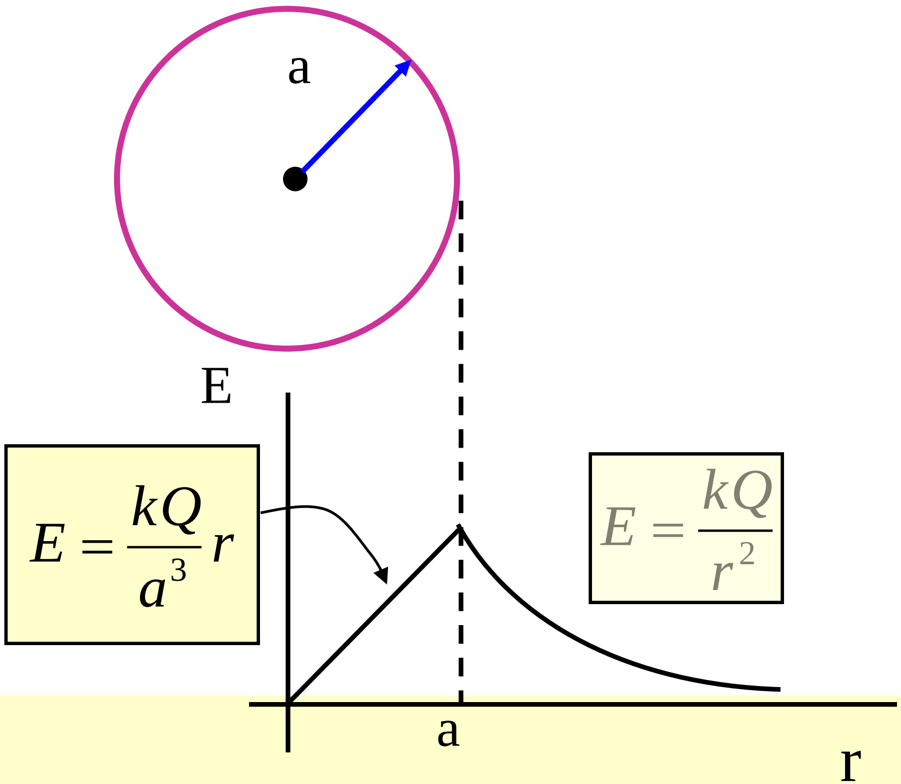
r < a

Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores carregados

- E $\Rightarrow$ 0 quando r $\Rightarrow$ 0 (simetria)

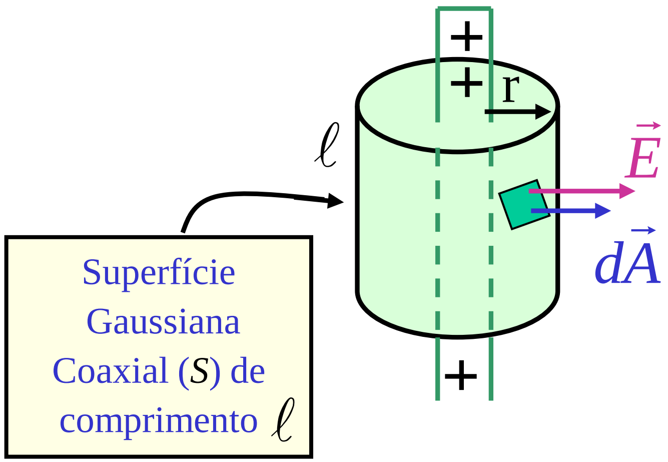
$$\boxed{Quando: E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow E = \infty \ em \ r = 0!!}$$

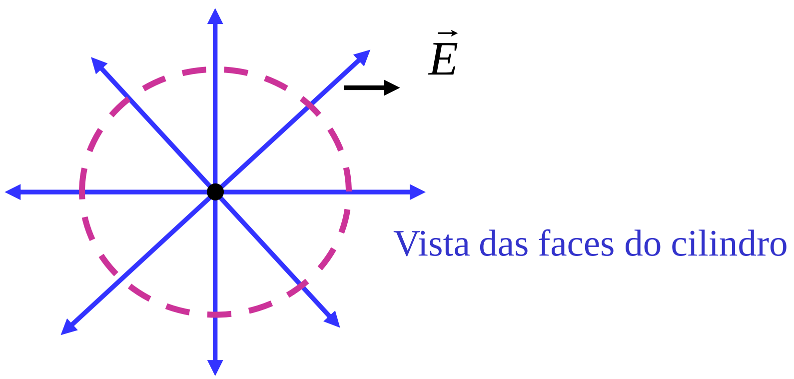
(fisicamente impossível)



c) Distribuição de cargas num isolador com simetria cilíndrica.

- Achar $\vec{E}$ à distância r de uma reta uniformemente carregada, com carga $+q$, com comprimento ∞ e densidade de carga linear constante (**$\lambda = q/\ell$ = cte**.)
- Simetria : $\vec{E}$ ⊥ recta e tem direcção radial.





Sobre a Superfície Gaussiana S: $E = cte,\ \vec{E} \perp S\ \forall P_{sup}\ \left(\vec{E} \,//\, d\vec{A}\right)$

Fluxo nas partes terminais do cilindro Gaussiano é nulo.

$$\left(\vec{E} \,//\, faces;\ \vec{E} \perp d\vec{A}\right) \qquad q_{in} = \lambda.\ell$$

Aplicações da Lei de Gauss a Isoladores carregados

Lei de Gauss

$$\boxed{\phi_c = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}}$$

$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\pi}\,\boldsymbol{r}\ell$ (área da superfície cilíndrica) $\Rightarrow$

$$E\oint dA = E(2\pi\, rl) = \frac{\lambda\,\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}}$$ (1)

- $E \propto \dfrac{1}{r}$
- Cálculo mais trabalhoso pela Lei de Coulomb.
- Segmento de reta$\Rightarrow$ E $\neq$ (1)

$$E \neq cte;\ \vec{E} \not\perp Sup.\ \ \forall P_{\text{sup}}$$

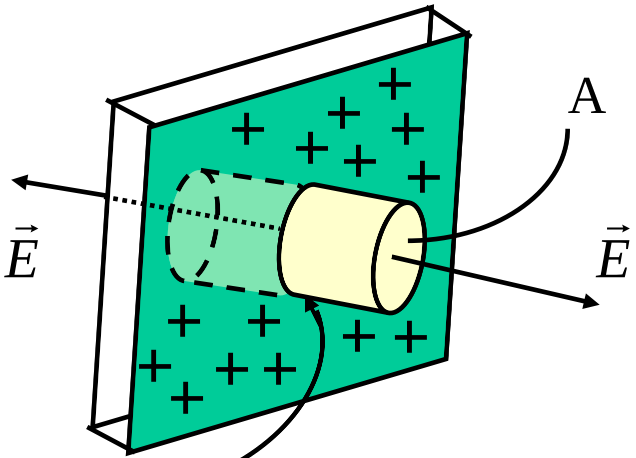
Lei de Gauss não tem utilidade para o cálculo de um segmento de reta carregado.

Pontos vizinhos do segmento de reta e afastados das extremidades $\Rightarrow$ (1) boa estimativa do valor real do campo.

Pouca simetria na distribuição de carga $\Rightarrow$ é necessário calcular mediante a Lei de Coulomb

d) Folha Plana não Condutora Electricamente Carregada.

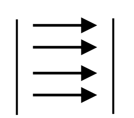
- Densidade de carga σ por unidade de área uniforme



Superfície Gaussiana (S)

$$\boxed{\phi_c = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0}}$$

- $\vec{E}$ $\perp$ plano folha, direcção $\vec{E}$ oposta em cada face.
- Cilindro recto equidistante do plano.
- $\vec{E}$ // superfície cilíndrica $S \Rightarrow \phi_{sup} = 0$
- ϕ para fora, de cada base do cilindro = EA $\left(\vec{E} \perp base\right)$
- Fluxo total = 2EA
- E ≠ E(r) (a qualquer distância do plano o campo é uniforme)
- 

  $\Rightarrow$ $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, entre os planos

  E = 0 , outros pontos

2 - Lei de Gauss da electroestática

2.4 - Condutores em equilíbrio eletroestático

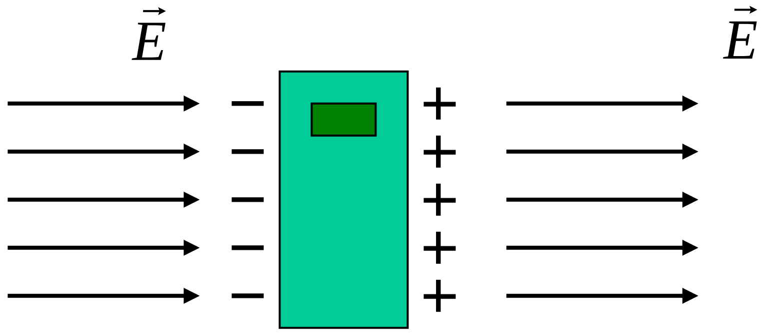
- Um bom condutor elétrico (ex: cobre) contém cargas (e^-) que não estão ligadas a nenhum átomo e podem deslocar-se no seu interior.
- Condutor em equilíbrio eletrostático: quando não há um movimento líquido no interior do metal.

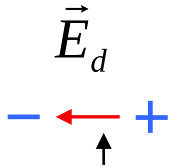
Propriedades de um condutor em equilíbrio electrostático:

1. O campo elétrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.
2. Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar necessária e inteiramente na superfície do condutor.
3. O campo elétrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a σ/ε_0, onde σ é a carga por unidade de área no ponto da superfície.
4. Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é elevado, isto é, onde a superfície é pontiaguda.

2.4 - Condutores em equilíbrio eletroestático

1. Placa condutora num campo eléctrico, $\vec{E}$.





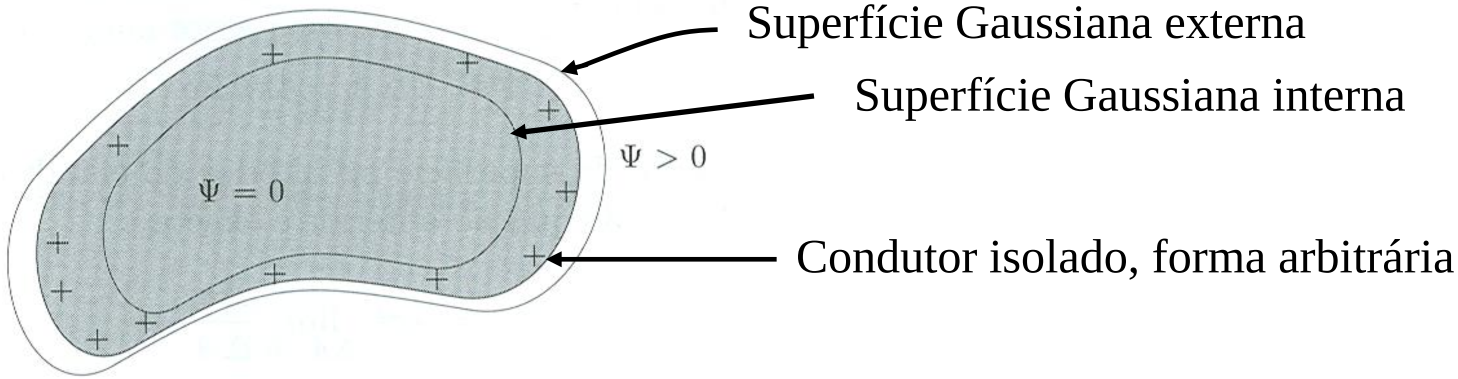
O campo opõe-se ao campo externo

$\boxed{\vec{E}+\vec{E}_d=\vec{0}}$ ⟵ No interior do condutor

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

¡! Se $\vec{E}\neq\vec{0}\Rightarrow$ as cargas livres seriam aceleradas.

2. e 3. Lei de Gauss



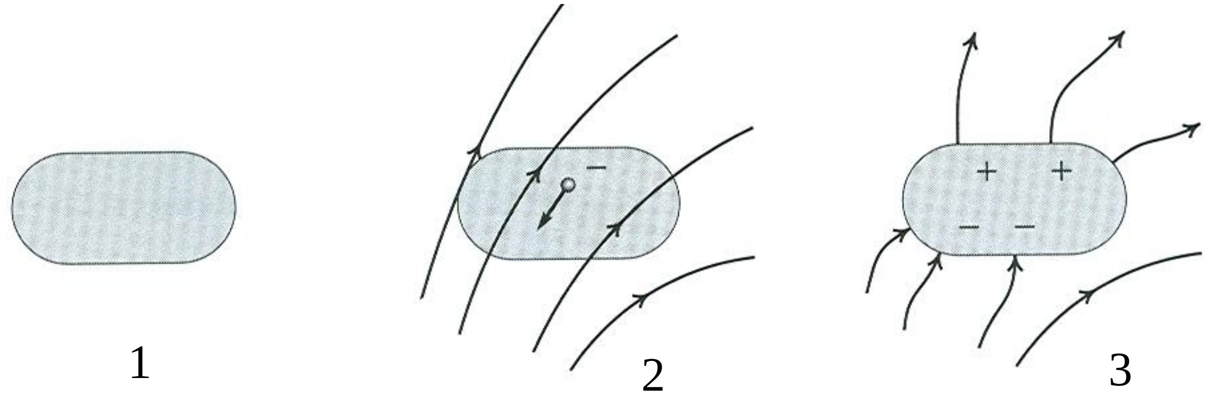
- (1.) $\vec{E} = \vec{0}$ em todos os pontos do interior do condutor
- $\vec{E} = \vec{0}$ em qualquer ponto da Superfície Gaussiana interna $\Rightarrow \phi_c = 0$
- Lei de Gauss $\Rightarrow q_{in} = 0$

Como não pode haver carga líquida no interior da Superfície Gaussiana que está arbitrariamente próxima da superfície do Condutor $\Rightarrow$ qualquer excesso de carga, num condutor, deve estar na superfície do condutor.

A Lei de Gauss não nos diz como o excesso de carga se distribui sobre a superfície (será provado mais a frente).

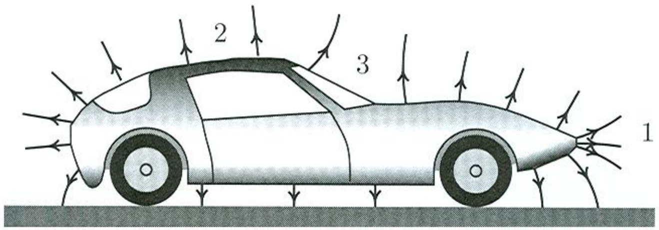
2.4 - Condutores em equilíbrio eletroestático

Lei de Gauss $\Rightarrow$ relacionar o campo eléctrico sobre a face externa da superfície de um condutor em equilíbrio com a distribuição de carga no condutor.



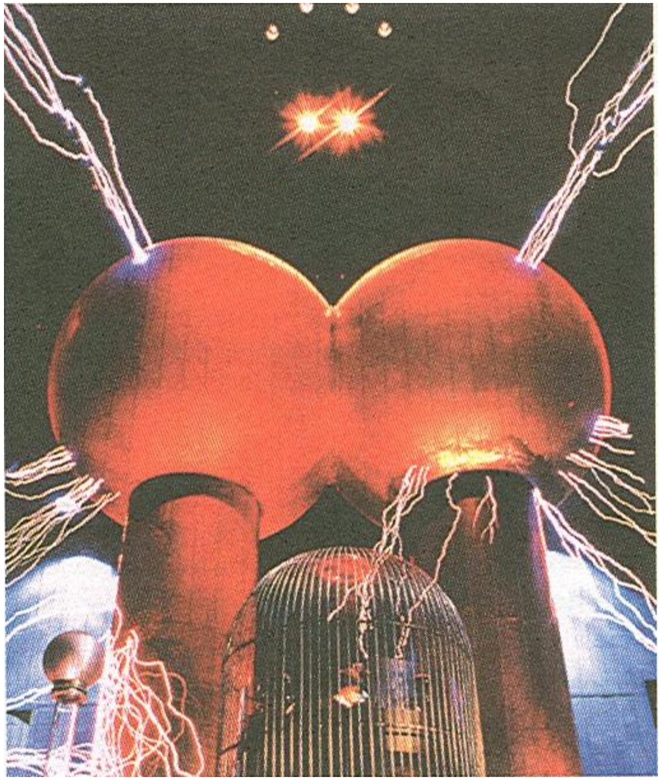
A introdução de um campo externo num condutor sem carga (1) produz deslocamento dos electrões livres (2) de modo a que a carga induzida na superfície anule o campo no interior do condutor (3)

- $\vec{E}$ interior $\Rightarrow$ $\phi = 0$ através da superfície gaussiana interior.

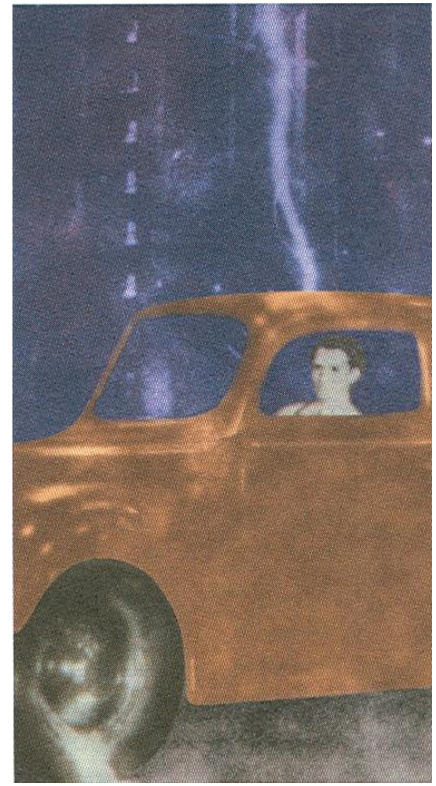


- $\vec{E}$ perpendicular á superfície (se $\vec{E}$ tivesse uma componente tangencial, as cargas livres deslocar-se-iam sobre a superfície, criariam correntes, e o condutor não estaria em equilíbrio).

2.4 - Condutores em equilíbrio eletroestático



Gaiola de Faraday. Os corpos dentro da gaiola estão protegidos dos raios externos. Este fenómeno é chamado de blindagem electrostática.



Os passageiros de automóveis e aviões ficam protegidos dos raios em dias de tempestade.