artigo_Código

Tipo	
Materiais	
Revisado	☐

Abstrato. Consideramos representações econômicas para a informação de caminho em um grafo direcionado. Um grafo direcionado Gt é dito ser uma redução transitiva do grafo direcionado G desde que (i) Gt tenha um caminho direcionado do vértice u ao vértice t; se e somente se G tem um caminho direcionado do vértice u ao vértice v, e (ii) não existe grafo com menos arcos que Gt satisfazendo a condição (i). Embora grafos direcionados com ciclos possam ter mais de uma dessas representações, selecionamos um representante canônico natural como a redução transitiva para tais gráficos. É mostrado que a complexidade de tempo do melhor algoritmo para encontrar a redução transitiva
de um grafo é igual ao tempo para calcular o fechamento transitivo de um grafo ou para realizar a multiplicação de matrizes booleanas.

Palavras-chave e frases. Grafo direcionado, relação binária, representação mínima, transitivo

redução, algoritmo, fechamento transitivo, multiplicação de matrizes, complexidade computacional.

1. Introdução. Dado um grafo direcionado G, muitas vezes estamos interessados em saber se existe um caminho de um vértice a outro nesse grafo. Em muitos casos é possível representar esta informação por outro grafo direcionado que tenha menos arcos que o grafo dado. Informalmente, dizemos que um grafo Gt é uma redução transitiva do grafo direcionado G sempre que as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(i) existe um caminho direcionado do vértice u ao vértice v em Gt se e somente se existe um caminho direcionado de u até v em G, e
(ii) não existe grafo com menos arcos que Gt satisfazendo a condição (i) .
Tais representações mínimas para grafos são de particular interesse para a execução eficiente de certos algoritmos de computador, como os algoritmos de sequenciamento restritos de precedência de [1] e [2], cuja operação é parcialmente determinada por uma relação transitiva especificada pela entrada. Em particular, essas representações mínimas podem exigir menos memória do computador para armazenamento e, dependendo da natureza precisa do algoritmo, também podem levar a um tempo de execução reduzido.
Neste artigo, caracterizamos matematicamente a redução transitiva e

fornecer um algoritmo eficiente para calcular a redução transitiva de qualquer gráfico direcionado. Além disso, mostramos que a complexidade computacional de calcular uma redução transitiva é equivalente à complexidade computacional de calcular um fechamento transitivo ou realizar uma multiplicação de matriz booleana.

Em [3], o equivalente mínimo de um grafo direcionado G é definido como o menor subgrafo G' de G tal que existe um caminho do vértice u ao vértice v em G' sempre que

existe um caminho de u para v em G. Nossa noção de redução transitiva é semelhante, mas com a importante exceção de que não exigimos que uma redução transitiva seja um subgrafo do grafo original. As duas noções dão origem à mesma representação reduzida quando o grafo original é acíclico. No entanto, o transitivo

a redução de um gráfico G com ciclos pode ser menor e muito mais fácil de encontrar do que um gráfico mínimo equivalente para G,

2. Definições e resultados básicos. Um grafo direcionado G no conjunto de vértices V = {VI,V2,...,vn} é um subconjunto de V x V, sendo os membros de G chamados arcos. Um caminho direcionado em G do vértice u ao vértice v é uma sequência de arcos distintos ,oe pl, tal que existe uma sequência correspondente de vértices

, v satisfazendo para 0 k S p — 1. A

ciclo é um caminho direcionado começando e terminando no mesmo vértice que passa por pelo menos um outro vértice. Um ciclo simples é um ciclo que não passa por nenhum vértice mais de uma vez. Um loop é um arco da forma (v, v). Um grafo será chamado de acíclico se e somente se não contiver ciclos. Observe que isso difere um pouco do uso convencional, pois permitimos que um gráfico acíclico contenha loops.

Um grafo G é dito transitivo se, para todo par de vértices u e v, não necessariamente distintos, (u, v) e G sempre que houver um caminho direcionado em G de u para v.

O fechamento transitivo GT de G é o menor subconjunto de V x V que contém G e

é

transitivo.

TEOREMA 1. Para qualquer grafo direcionado acíclico finito G, existe um único grafo Gt com a propriedade de que (GT)T = GT e todo subconjunto próprio H de Gt satisfaz HT

!= GT

O gráfico Gt é dado por notação

Prova. A prova do Teorema 1 segue dos dois lemas seguintes. (Observe que o Lema 1 é, na verdade, uma consequência direta do Teorema 1 em [3].)

LEMA 1. Sejam Gl e G2 quaisquer dois grafos dirigidos acíclicos finitos (no mesmo conjunto de vértices) satisfazendo Gtl = Gt2. Se existe um arco alfa pertencente a Gl tal que alfa != G2,

então (Gl — {alfa})T = Gt1 = Gt2.

Prova. Seja (u, v) como descrito na hipótese do lema. Como GIT G2 e G2, (32 deve conter um caminho de u até v passando por algum outro vértice, digamos w. Então Gl deve conter um caminho direcionado de u para w e um caminho direcionado de w para v. Se o caminho de u para w em Gl inclui arco cc, então Gl contém um caminho de v para w. Mas, como Gl também contém um caminho de w para v, isso contradiz Gl sendo acíclico. Se o caminho de w para v em Gl inclui arco, então Gl contém um caminho de w até u. Mas, como Gl contém um caminho de u para w, isso também contradiz Gl sendo acíclico. Assim, Gl contém um caminho direcionado de u para w e de w para v, que não inclui arco Portanto, Gl — {alfa} contém um caminho de u para v, então (G1 - {alfa})t = Gt1 = Gt2 .

Mas a última equação simplesmente diz que (G1 n G2)T GIT z: n G2)e S(G). Como S(G) é um conjunto finito, o Teorema 1 é obtido como uma aplicação direta do Lema 2.

O Teorema 1 mostra que a definição intuitiva de redução transitiva realmente produz um gráfico único para qualquer gráfico direcionado acíclico finito. Além disso, a redução transitiva de qualquer gráfico G pode ser obtida examinando sucessivamente os arcos de G, em qualquer ordem, e excluindo os arcos que são "redundantes", onde um arco = (u, v) é redundante se o gráfico contém um caminho direcionado de u para v que não inclui x. Agora estendemos esta análise a grafos que contêm ciclos.

Considere o gráfico G = {V1, V2), (v2, v3), (V3, v2), (v2,v1)} da Fig. l(a). Se H é qualquer subconjunto próprio de G, então HT # GT. Assim, G é seu próprio grafo mínimo equivalente. Entretanto, o grafo Gl {(v1, v2), (v2,v3), (v3, V1)} da Fig. l(b) contém apenas três arcos e tem o mesmo fechamento transitivo de G, assim como o grafo G2 = {(v1,v3),(v3, v2), (v2, V1)} da Fig. l(c). Nenhum outro grafo com três ou menos arcos tem o mesmo fechamento transitivo que G. Desde G 1 # (72 , vemos que para grafos com ciclos pode não haver um único grafo, com menos arcos, tendo o mesmo fechamento transitivo que um dado gráfico. Assim, o Teorema I não pode ser simplesmente estendido para abranger todos os grafos direcionados finitos. Este exemplo também mostra que os lemas não podem ser estendidos de forma semelhante. Além disso, como nem Gl nem (72 é um subconjunto de G, também pode ser possível que nenhum tal grafo mínimo pode ser construído removendo certos arcos do grafo dado, como foi o caso de grafos acíclicos. No entanto, devemos mostrar que todos esses grafos mínimos, para qualquer grafo dado específico, devem ter estrutura semelhante, e com base neste resultado escolhemos um único representante para ser a única redução transitiva.

Dois vértices u e v de um grafo direcionado G serão chamados equivalentes se u = v ou

G contém um ciclo que é incidente tanto com u como com v. Dado qualquer grafo direcionado finito G, dizemos que Gl é o grafo acíclico equivalente para G quando os vértices de Gl são as classes de equivalência de vértices de G, denotadas por Ek, e o arcos de Gl satisfazem : (Ei, E j) E Gl se e somente se existe um arco (u, v) e Gl tal que ue Ei e v E Ej. Se Gl é o grafo acíclico equivalente para G, e G2 é um subconjunto de G: ,então o grafo G3 é uma expansão cíclica de G2 se e somente
se: (i) G3 tem os mesmos vértices de
G; (ii) G2 é o gráfico acíclico equivalente para
G3; (iii) para cada classe de equivalência de vértices multimembro Ei de G, G3 contém um incidente de ciclo simples com todos os vértices em Ei e (-73 não contém outros arcos entre os
membros de Ei; e (iv) para cada arco (Ei, Ej)e G2, Ei Ej, existe exatamente um arco (u, v) e G3 satisfazendo ue Ei e ve E].
Uma expansão cíclica simplesmente substitui o loop e o vértice correspondente a uma classe de equivalência multimembro por um ciclo simples através dos membros dessa classe de equivalência, com cada arco entre diferentes classes de equivalência transformado em um único arco similarmente direcionado entre alguns pares de vértices, um de cada das duas classes de equivalência.

TEOREMA 2. Dado qualquer grafo direcionado finito G, seja Gl seu grafo acíclico equivalente e (71 seja a única "redução transitiva" de Gl dada pelo Teorema 1. Então o grafo direcionado H satisfaz HT = GT e tem o menor número de arcos de qualquer tal gráfico se e somente se H é uma expansão cíclica de Gt1.
Prova. A prova segue diretamente dos seguintes lemas, onde G, Gl e Gtl são definidos como acima.

LEMA 3. Se H 1 é o grafo acíclico equivalente para um grafo direcionado H satisfazendo HT = GT, então = GT Prova, Como HT = GT, H contém um caminho de u para v se e somente se G contém um caminho de u para v. Então H e G devem ter as mesmas classes de equivalência de vértices, então H1 e Gl estão em conjuntos de vértices idênticos. Se H{ contiver um arco (Ei, E)) não contido

em GTI, então Hl contém um caminho de Ei para Ej e Gl não contém tal caminho. Mas então H contém um caminho de algum ue Ei para algum v € Ej e G não contém tal caminho, uma contradição. Similarmente, todo arco de GIT é um arco de Ht1 = Gt1 então HT1.

LEMA 4. Se H tem gráfico acíclico equivalente 111 satisfazendo HIT G}, então H é uma expansão cíclica de Gtl ou H contém mais arcos do que qualquer expansão cíclica de Gt1.

Prova. Se HIT = sabemos pelo Teorema 1 que Hl deve conter (71 .
Então H deve conter pelo menos um arco para cada arco de Hl , ou seja, se (Ei, E)) e 111 , lá existem ue Ei e ve Ej tais que (u, v) e H. Além disso, H também deve conter o suficiente

arcos para garantir que cada par de vértices pertencentes à mesma classe de equivalência esteja em um ciclo em H. Mas isso requer pelo menos tantos arcos quantos membros da classe de equivalência, exceto para classes de membro único, e um número mínimo de arcs é usado se e somente se os únicos arcos entre os membros da classe de equivalência formam um único ciclo incluindo exatamente todos os membros da classe. A definição de expansão cíclica foi escolhida justamente para incluir todos e apenas aqueles grafos que usam um número mínimo de arcos. Assim, H deve ser uma expansão cíclica de Gtl ou deve ter mais arcos do que qualquer expansão cíclica de Gtl.

LEMA 5. Toda expansão cíclica de Gtl tem o mesmo número de arcos.
Prova. O número de arcos em qualquer expansão cíclica de Gtl é exatamente igual ao número de arcos em Gtl mais o número de vértices de G que pertencem a classes de equivalência de vértices multimembro, menos o número de classes de equivalência de vértices multimembro em G.

LEMA 6. Se H é uma expansão cíclica de Gtl , então HT = GT
Prova. Se (u, v) e GT, G contém um caminho de u até v. Se u e v pertencem à mesma classe de equivalência de vértice, H deve conter um caminho de u até v então (u, v) e HT

Se uev pertencem a diferentes classes de equivalência, ue Ei, ve Ej, Gl contém um caminho de Ei para Ej. Mas então Gtl contém um caminho de Ei para Ej, então H contém um caminho de u para v e (u, v) e H T. Da mesma forma, se (u, v) $ G r, G não contém nenhum caminho de u para v , Além disso, u e v pertencem a diferentes classes de equivalência de vértices, ue Ei, ve E) e Gl não contém nenhum caminho de Ei para Ej Mas então (71 não contém nenhum caminho de Ei para E j, e H não pode conter um caminho de u to
v, so (u, v) HT Isso completa a prova do Teorema 2.
O Teorema 2 nos diz que se Gl é o grafo acíclico equivalente para G, então toda expansão cíclica do grafo Gtl dada pelo Teorema I satisfará nossa definição intuitiva original para uma redução transitiva de G. De fato, para a maioria dos algoritmos que requerem tal transitivamente grafo reduzido, a representação mais útil será simplesmente (71 junto com as classes de equivalência de vértice correspondentes de G. No entanto, também escolhemos selecionar um representante único das várias expansões cíclicas de GG para ser definido como a
redução transitiva de G.
Sejam os vértices de G arbitrariamente ordenados atribuindo-lhes índices como VI,V2,•••, vn.
Se Gl é o gráfico acíclico equivalente para G e Gtl é a "redução transitiva" de Gl dada pelo Teorema l, então a expansão cíclica canônica de Gt1 é a única expansão cíclica G2 de Gt1, satisfazendo:

(i) Se (vi, Vj) E G2, vi E Ek, e Vi # vj, então j > i e nenhum de, Vi+l, ..., vj-l está em Ek ou Vi tem o maior índice em Ek e vj tem o menor índice em Ek; e

(ii) Para cada arco (Ei, Ej)e Gtl , Ei # Ej, há um arco em G2 do menor índice membro de Ei ao menor membro de índice de Ej.

A expansão cíclica canônica apenas expande cada loop e vértice correspondente a uma classe de equivalência multimembro em um ciclo simples ordenado, com todos os arcos entre classes de equivalência transformados em arcos entre os menores membros das classes de equivalência.

Definimos então a redução transitiva de um grafo direcionado finito G como sendo o único grafo Gt que satisfaz: (i)

(Gt)T = GT, (ii)

Se HT = GT, então H contém pelo menos tantos arcos quanto Gt ; e (iii)

Se G não é acíclico, então Gt é a expansão cíclica canônica da redução transitiva do grafo acíclico equivalente para G.

A existência e a unicidade de Gt decorrem dos resultados anteriores.

Não tentamos uma definição de redução transitiva para grafos com conjuntos de vértices infinitos. No entanto, ressaltamos que surgem complicações adicionais para grafos infinitos. Algumas dessas dificuldades são ilustradas tentando uma definição razoável de redução transitiva para (i) o grafo infinito contável com arcos em ambas as direções entre cada par de vértices, e (ii) o grafo infinito tendo um vértice para cada número real com um arco de i para j se e somente se i < j. Em nenhum dos casos existe um grafo, tendo o mesmo fechamento transitivo que o grafo dado, de modo que nenhum subconjunto próprio desse grafo também tenha essa propriedade.

1. Complexidade computacional da operação de redução transitiva. Agora nos voltamos para a questão de quão rapidamente a redução transitiva de um gráfico pode ser computada. A seguir, assumimos que um grafo G é representado por sua matriz de adjacência, a matriz com 1 na linha i e na coluna j se houver um arco do i-ésimo vértice ao j-ésimo vértice e um 0 ali, caso contrário, nossos resultados claramente aplicam-se a qualquer outra representação gráfica que pode ser convertida em uma matriz de adjacência e voltar no tempo O(n2), e na qual a redução transitiva leva tempo O(n2). Prosseguimos para demonstrar que sob a hipótese acima, o número de passos de um computador de acesso aleatório (por exemplo, ver [4]) necessário para calcular a redução transitiva de um grafo com n vértices difere em no máximo um fator constante do tempo necessário para executar a multiplicação de matrizes booleanas ou para calcular o fechamento transitivo de um gráfico. Deve-se notar que foi mostrado em [5] que a multiplicação de nxn matrizes booleanas requer tempo, que é no máximo um fator constante maior que o tempo para calcular o fechamento transitivo de um grafo de n vértices, e o inverso foi mostrado em [6] , [7] •

TEOREMA 3. Se existe um algoritmo para calcular o fechamento transitivo de um grafo de n vértices no tempo O(n^a), então existe um algoritmo para calcular a redução transitiva no tempo O(n^a).

Prova. Podemos calcular a redução transitiva de um grafo G com n vértices como segue.

1. Encontrar Gl , o gráfico acíclico equivalente de G.
2. Seja G2 formado a partir de Gl excluindo loops.
3. Seja Ml, a matriz de incidência de G2, e seja a matriz de incidência de Gt2.
4. Calcule M 3 Ml M 2 e seja G3 o gráfico cuja matriz de incidência é M3.
5. Então é Gl - G3.
6. Seja Gt a expansão cíclica canônica de Gtl .

Deve ser evidente que as etapas 1, 2, 5 e 6 requerem tempo O(n2). (Veja [8], por exemplo, para o Passo 1.) O Passo 3 requer tempo O(nã) para calcular G}. O passo 4 requer tempo O(nZ) por Assim, todo o algoritmo requer tempo 00/), desde 2 (ver [4]).

Resta mostrar que (71 = Gl — G3. Pelo Teorema I, arco (u, v) está em Gtl se e somente se (u, v) e caminho Gl , e não há caminho de u a v que não inclua arco (u, v). Tal existe se e somente se houver algum w diferente de u ou v tal que existe um arco (u, w) e um caminho de w até em Gl .Estas são exatamente as condições sob as quais haverá um arco (u, v) em G3.

TEOREMA 4. Se a redução transitiva requer O(nã) passos, 2, em um grafo de n nós, então o fechamento transitivo requer O(n^a) passos.

Prova. Seja G um grafo de n vértices. Construa um grafo G' com nós u, u' e u" para cada vértice u de G. Os arcos de G' são os seguintes.

1. Se(u, v) está em G, está em G'.
2. (u', u) e (u, u") estão em G' para cada vértice u de G.
3. (u', v") e G' para todos os vértices u e v de G. G' é mostrado na Fig. 2.

   Observamos que (u', v") está em (G')t se e somente se (u, v) não está em Gl. Ou seja, como nenhum arco entra em u' ou sai de v", tanto u' como v " estão em classes próprias de equivalência de vértices. Pelos Teoremas 1 e 2, (u', v") está em qualquer redução transitiva de G' se e somente se não houver caminho de comprimento maior que um de u' a v" Mas tal caminho é visto como existindo se e somente se houver um caminho de u para v em G.

   Assim, podemos calcular Gl pelo seguinte algoritmo.

4. Construa G'.
5. Calcule (G')t.

6. Digamos que (u, v) está em GT se e somente se (u', v") não está em (G')t.

Os passos 1 e 3 claramente levam tempo O(n2) e o passo 2 requer tempo O(nã). Assim, todo o algoritmo requer O(nl) passos.

Os teoremas 3 e 4 reduzem o problema de encontrar um bom algoritmo para redução transitiva ao problema de encontrar um bom algoritmo para fechamento transitivo. O método de [6], [7] é baseado no algoritmo de multiplicação de matrizes de Strassen [9] e, portanto, leva O(n log2,7) passos. Este método é o mais conhecido para grandes n. Sob algumas condições, algoritmos de fechamento transitivos encontrados em podem ser preferidos.