



## **Aula 08: Dualidade**

### **Otimização Linear e Inteira**

---

**Túlio A. M. Toffolo**  
<http://www.toffolo.com.br>

# Dualidade

# Dualidade

- Seja o PL a seguir o PL primal:

$$\min c^t x = f(x)$$

$$s.a.: Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

# Dualidade

- Associado a este PL, existe um outro PL, chamado **PL dual**:

$$\max ub = f_D(x)$$

$$s.a.: A^t u^t \leq c$$

$$u \geq 0$$

$$\max \sum_{i=1}^m b_i u_i$$

$$s.a.: \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

# Dualidade

- O dual de um problema de maximização é um problema de minimização.
- As  $m$  restrições primais estão em correspondência com as  $m$  variáveis duais.
- As  $n$  restrições duais estão em correspondência com as  $n$  variáveis primais.
- O coeficiente de cada variável na FO, primal ou dual, aparece no outro problema como lado direito da restrição correspondente.
- A matriz de coeficientes do primal é transposta no dual.

# Dualidade

## PL Primal

$$\min c^t x = f(x)$$

$$s.a.: Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

## PL Dual

$$\max ub = f_D(x)$$

$$s.a.: A^t u^t \leq c$$

$$u \geq 0$$

# Transformação Primal x Dual

<b>MIN</b>	Restrição	$\leq$	$\leq$	Variável	<b>MAX</b>	
		$=$	qq.			
		$\geq$	$\geq$			
	Variável	$\leq$	$\geq$	Restrição		
		qq.	$=$			
		$\geq$	$\leq$			

## Exemplo:

Minimizar:  $-2,5x_2$

Sujeito a:

$$- \leq$$

Sujeito a:  $- 4x_2 \leq 2$

$$+ 6x_2 \geq 3\epsilon$$

Maximizar:  $\leq v$

$$x_2 \geq 0$$

## Exemplo:

- Encontre o PL Dual do modelo abaixo:

Maximizar:  $32u_1 + 36u_2$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 8u_1 + 6u_2 &\leq 3 \\ 4u_1 + 6u_2 &\leq 2,5 \\ u_1 &\geq 0 \\ u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Exercício:

### Exercício

- 1 Encontre o PL Dual do modelo a seguir:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & 300x_1 + 280x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 70x_1 + 50x_2 \geq 350 \\ & 50x_1 + 80x_2 \geq 400 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

# Dualidade

- É igualmente válido definir o primal como sendo um problema de minimização ou maximização

Primal:

$$\min z = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{S. a } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dual:

$$\max w = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{S. a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

# Dualidade: Teorema

*O dual do dual é o primal.*



# Dualidade: Teorema

## Teorema da dualidade fraca

- Se o primal for um PL de maximização que tem uma solução viável  $x$  com valor  $z$  e o seu dual tem solução viável  $y$  com valor  $w$ , então  $\mathbf{z} \leq w$ .
- Se o primal for um PL de minimização que tem uma solução viável  $x$  com valor  $z$  e o dual tem solução viável  $y$  com valor  $w$ , então  $\mathbf{z} \geq w$ .

# Dualidade: Teorema

## Teorema da dualidade forte

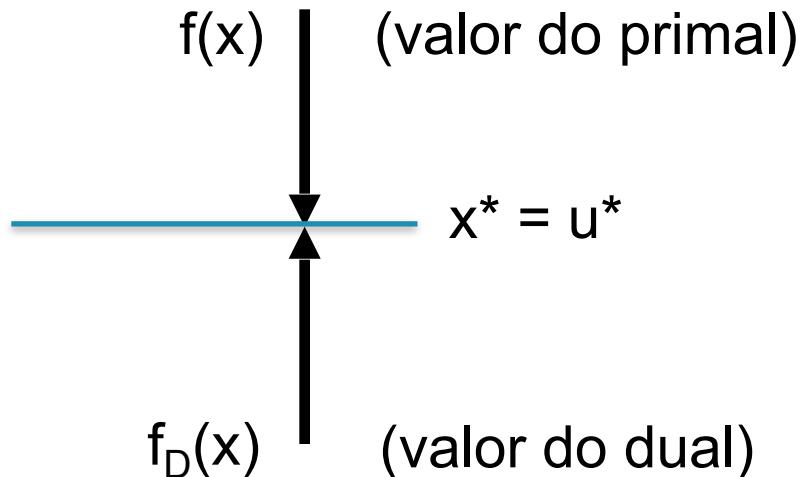
- Se o primal tem solução ótima  $x^*$  com valor  $z^*$ , então o dual tem solução ótima  $y^*$  com valor  $w^*$  e  $z^* = w^*$ .

## Consequência:

- Sempre é possível usar uma solução do dual para provar que uma solução ótima do primal realmente é ótima.

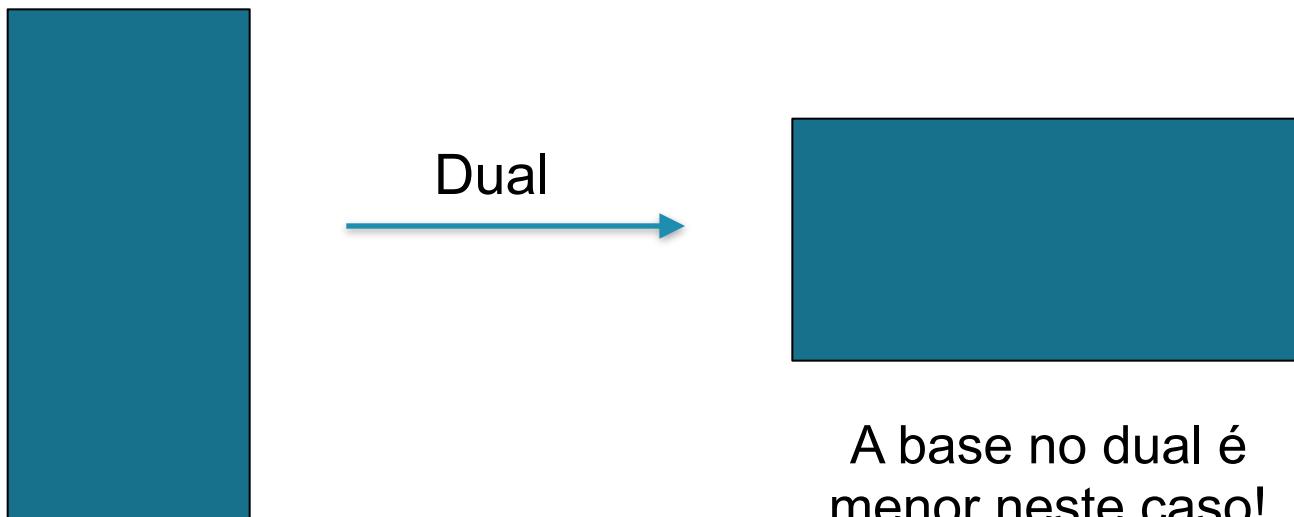
# Dualidade: Vantagens

- É possível “cercar” a solução ótima e/ou conferir se uma solução é de fato ótima (exemplo: um PL de minimização)



# Dualidade: Vantagens

- Situações na qual a matriz de coeficientes do primal tem mais linhas do que de colunas:



# Dualidade: Teorema

Pelo Teorema da dualidade fraca:

- Se o primal for ilimitado, o dual é inviável.
- Se o dual for ilimitado, o primal é inviável.
- Observação: é possível que tanto o primal quanto o dual sejam inviáveis.

# Dualidade

- Relações entre o primal e o dual:

	Ótimo	Ilimitado	Inviável
Ótimo	Possível	Nunca	Nunca
Ilimitado	Nunca	Nunca	Possível
Inviável	Nunca	Possível	Possível

# Dualidade Análise de Sensibilidade

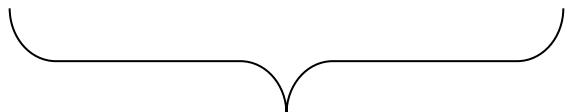
# Dualidade: Interpretação Econômica

- Sejam os dois PLs a seguir:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = f(x)$$

$$s.a: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

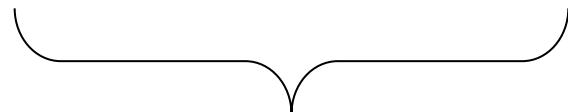


**PL Primal**

$$\min \sum_{i=1}^m b_i u_i = f_D(u)$$

$$s.a: \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$



**PL Dual**

# Dualidade: Interpretação Econômica

- Sejam  $x^*$  e  $u^*$  soluções ótimas dos PLs primal e dual, e seja  $B^*$  a base relativa a essas soluções.

$$f(x^*) = f_D(u^*) = u^* b = \sum_{i=1}^m b_i u_i^*$$

- Supondo  $b$  variável e derivando em relação a  $b$ :

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial b} = u^*$$

**u<sup>\*</sup> é a taxa de variação de f(x<sup>\*</sup>) com b.  
Como u<sup>\*</sup> ≥ 0, então f(x<sup>\*</sup>) cresce à medida que b<sub>i</sub> cresce**

# Dualidade: Interpretação Econômica

- Considere o primal um problema de alocação de recursos, com  $m$  recursos disponíveis nas quantidades  $b_1, b_2, \dots, b_m$  com os quais desejamos fabricar  $n$  produtos nas quantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a serem determinadas.
- Cada unidade do produto  $j$  consome  $a_{ij}$  unidades do recurso  $i$  trazendo um retorno de  $c_j$  unidades monetárias.
- Queremos determinar a quantidade a ser fabricada de cada produto de modo a maximizar o retorno.

# Dualidade: Interpretação Econômica

- Suponha, agora, aumentada em uma unidade a quantidade disponível do recurso  $k$ , isto é, temos  $(b_k + 1)$  unidades.
- Suponha que a base associada permaneça a mesma.
- Neste caso, a nova solução ótima  $u^{**}$  do dual permanece a mesma.
- A nova solução ótima  $x^{**}$  será:

# Dualidade: Interpretação Econômica

$$\begin{aligned} f(x^{**}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m b_i u_i^* + (b_k + 1) u_k^* \\ &= \sum_{i=1}^m b_i u_i^* + u_k^* = f(x^*) + u_k^* \end{aligned}$$

- $f(x^{**}) - f(x^*) = u_k^*$ , ou seja,  $u_k^*$  é o incremento no lucro trazido pelo aumento de uma unidade da matéria disponível  $k$ .
- $u_k^*$  é chamado **shadow price**, valor incremental, efficiency price, valor implícito, etc.

## Exemplos para aula prática:

### PL Primal

$$\text{min. } 3x_1 + 2,5x_2$$

$$\text{s.a. } 8x_1 + 4x_2 \geq 32$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 36$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

### PL Dual

$$\text{max. } 32u_1 + 36u_2$$

$$\text{s.a. } 8u_1 + 6u_2 \leq 3$$

$$4u_1 + 6u_2 \leq 2,5$$

$$u_1 \geq 0$$

$$u_2 \geq 0$$

## Ex. 1: Carteira de Investimentos

Uma empresa gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteiras de investimentos para diversos clientes, baseados em bonds de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

- Não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
- Um valor superior ou igual a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores que 10 anos;
- O total aplicado em títulos de alto risco deve ser, no máximo, de 45% do total investido.

Considerando a tabela de retorno, risco e maturidade (próximo slide), determine a estratégia ótima para o investidor de forma que a rentabilidade de sua aplicação seja máxima.

## Ex. 1: Carteira de Investimentos

Título	Retorno anual (%)	Maturidade (anos)	Risco
0	8,7	15	1 – Muito baixo
1	9,5	12	3 – Regular
2	12,0	8	4 – Alto
3	9,0	7	2 – Baixo
4	13,0	11	4 – Alto
5	20,0	5	5 – Muito alto

## Ex. 1: Carteira de Investimentos

$$\max. \quad \sum_{j \in \text{Titulos}} \frac{\text{retorno}_j}{100} x_j$$

$$s.a. \quad x_j \leq 25 \quad \forall j \in \text{Titulos}$$

$$\sum_{\substack{j \in \text{Titulos} \\ \text{maturidade}_j \geq 10}} x_j \geq 50$$

$$\sum_{\substack{j \in \text{Titulos} \\ \text{risco}_j \geq 4}} x_j \leq 45$$

$$\sum_{j \in \text{Titulos}} x_j = 100$$

## Ex. 1: Carteira de Investimentos

1. Qual o melhor retorno que se pode obter? Quanto se deve aplicar em cada título para que se tenha o retorno ótimo?
2. Em qual percentual aumentaria o retorno se fosse permitido aplicar 1% a mais no Título 1?
3. Quanto é a influência da limitação de aplicação em título de alto risco? Qual seria o retorno se esta limitação fosse de 49%?
4. Se fosse imposto limitar a aplicação em cada título em 24% para um dentre os títulos 1, 3 e 5, em qual título deveria ser feita a diminuição de aplicação? Justifique.
5. A partir de qual retorno a aplicação no Título 2 é vantajosa?

**Para a próxima aula...**

## Ex. 2: Produção de automóveis

- Uma empresa deve produzir **1000** automóveis. Ela tem quatro fábricas, as quais, devido a diferenças na mão-de-obra e avanços tecnológicos, diferem no custo de produção de cada carro. Elas também utilizam diferentes quantidades de matéria-prima e mão-de-obra. A tabela abaixo resume essas informações:

Fábrica	Custo (R\$ mil)	Mão-de-Obra	Mat. Prima
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

## Ex. 2: Produção de automóveis

- Um acordo trabalhista requer que pelo menos 400 carros sejam produzidos na Fábrica 3. Existem 3300 horas de mão-de-obra e 4000 unidades de material que podem ser alocas às 4 fábricas:

$$\min \sum_{j \in \text{Fabricas}} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} M\text{Obra}_j x_j \leq \text{TotM}\text{Obra}$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} \text{MatPrima}_j x_j \leq \text{TotMatPrima}$$

$$\sum_{j \in \text{Fabricas}} x_j = \text{Producao}$$

$$x_j \geq \text{Acordo}_j \quad \forall j \in \text{Fabricas} \mid \text{Acordo}_j \neq 0$$

## Ex. 2: Produção de automóveis

1. Quais são as quantias ótimas de produção? Qual o custo da produção?
2. Quanto custa produzir mais um veículo? Quanto economizamos produzindo um veículo a menos?
3. Como mudaria a solução se custasse somente R\$8.000,00 para produzir na fábrica 2? Como ficaria o custo?
4. Quanto o acordo está custando? Qual seria a variação no custo se o acordo fosse de 250 carros?
5. Até que custo ainda é vantajoso produzir na Fábrica 2?

# Exercício

# Exercício

## Exercício

- 1 Resolva o PL abaixo e seu dual utilizando o método Simplex:

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Perguntas?