Lista de Exercícios - Métodos de Otimização - PNL (Irrestrita e Restrita)
2023.Q2 - UFABC

1. Dada função $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, quais são as condições necessárias e suficientes para $x^\star$ ser um mínimo local da função f? Explique como as condições necessárias podem ser obtidas.

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

2. Sejam $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ uma função convexa e $x^\star$ um ponto mínimo local da f. Prove que $x^\star$ é o mínimo global da f. Escreva as condições necessárias para $x^\star$.

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

3. Encontre um mínimo local das funções abaixo (se houver) usando as condições necessárias e suficientes.

1) $f(x,\ y) = x^2 + 4y^2 + 3xy$

2) $f(x,\ y) = x^3 + 3y^2 + 2xy$

3) $f(x,\ y) = x^3 - 3xy^2 + 4xy$

4) $f(x,\ y) = x^3 + 3xy^2 + 4xy$

5) $f(x,\ y) = 5xy + x^2y + xy^2 + 5x^2 + 5y^2$

Gabarito:

1. Ponto mínimo: $(0,0)$
2. Ponto de sela: $(0,0)$ e ponto mínimo: $\frac{1}{9}(2,-\frac{2}{3})$
3. Ponto de sela: $(0,0),(0,\frac{4}{3})$, ponto mínimo: Não tem!
4. Ponto de sela: $(0,0), \frac{1}{3}(0,-4)$, ponto mínimo: $\frac{1}{3}(2,-2)$, ponto máximo: $\frac{1}{3}(-2,-2)$
5. Ponto de sela: $5(-1,2)$, ponto mínimo: , $(0,0)$

---

4. Sejam $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ uma função, $x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ um ponto qualquer, e $\alpha \in \mathrm{R}^+$ um número real suficiente pequeno. Qual condição na direção do vetor $\mathbf{d} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ garanta que a direção é decrescente no ponto x, ou seja $f(x + \alpha\mathbf{d}) < f(x)$? Justifique sua resposta.

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

5. Descreva os métodos de gradientes; 1- método de descida mais íngreme e 2- método de Newton. Escreva um ponto bom e um ponto ruim sobre cada método.

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

6. Descreva duas stratégias para calcular o tamanho do passo nos métodos de gradientes.

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

7. Quais matrizes dadas abaixo são definida positiva?

$$1)\ \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix} \qquad 2)\ \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad 3)\ \begin{bmatrix}-5 & -4\\ -4 & -2\end{bmatrix} \qquad 4)\ \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$5)\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad 6)\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad 7)\ \begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad 8)\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Gabarito: Sim - Não - Não - Sim - Não - Não - Não - Sim

---

8. Faça uma iteração dos métodos de gradiente; 1- método da descida mais íngreme e 2- método de Newton, para os problemas dados na questão 3 usando a solução inicial e o tamanho do passo dados abaixo para cada problema. Se isso não for possível (houve um problema), explique o motivo e altere a solução inicial ou o tamanho do passo para resolver o problema e, em seguida, faça a iteração do método.

1. $(x_0, y_0) = (1, -1),\ \alpha = 1$
2. $(x_0, y_0) = (0, -\frac{2}{27}),\ \alpha = 0.1$
3. $(x_0, y_0) = (1, 1),\ \alpha = 0.2$
4. $(x_0, y_0) = \frac{2}{3}(-1, -1),\ \alpha = 0.1$
5. $(x_0, y_0) = (-5, 5),\ \alpha = 0.1$

Gabarito. 1. $\nabla f(x, y) = (2x + 3y, 8y + 3x)$ e $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ precisamos alterar α.

2. $\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2y, 6y + 2x)$ e $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix}6x & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ precisamos alterar a solução inicial para método de Newton pois a matriz hessiana não é definida positiva no ponto dado.

3-5 são parecidos.

9. Descreva o método de função de penalidade para o seguinte problema de ótimização.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ s.a \quad & g_j(x) \le 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, m \\ & h_j(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, p \\ & x \in \mathrm{R^n} \end{aligned}$$

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

10. Explique porque o multiplicador μ no método de função de penalidade deve ser suficiente grande mas no método de função de barreira deve ser suficiente pequeno. Também, explique porque μ não pode ser muito grande no primeiro caso ou muito pequeno no segundo caso? Como pode resolver estes problemas na prática?
Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

11. Descreva o método de função de barreira para o seguinte problema de ótimização.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ s.a \quad & g_j(x) \le 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, m \\ & x \in \mathrm{R^n} \end{aligned}$$

Gabarito: Veja isso nas notas de aula.

---

12. Determine a função de penalidade e a função de barreira para problemas a seguir. Se for necessário, pode desconsiderar algumas restrições para caso de função de barreira.

$$\begin{aligned} 1) \ \min \quad & x_1 + x_2^2 + 3x_3 \\ s.a \quad & x_1^2 - 3x_1x_2 \le 1 - x_3, \\ & -2x_1^2x_3 + 2x_2^2x_3 \ge 2, \\ & x_3^2 - 3x_2^2 + x_1x_3 = x_2, \\ & x_i \in \mathrm{R}, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ \min \quad & x_1^2 - x_2 + 3\ln(x_3 - 1) \\
s.a \quad & x_3\sqrt{x_1^2+1} - x_2^2 = 1 - x_3, \\
& x_3 \geq 2, \\
& 4x_1^2 - 3x_3^2 \geq x_1x_3 - x_2, \\
& x_i \in \mathrm{R},\ i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Gabarito: Não esqueça de reescrever o problema em forma padrão. Pode desconsiderar as restrições igualdades para caso de função de penalidade. O resto é direto (dá uma olhada nas notas de aulas e exemplos resolvidos).

---

13. Determine a função lagrangeana para problemas dados na questão 12.
Gabarito: Não esqueça de reescrever o problema em forma padrão. O resto é direto (dá uma olhada nas notas de aulas e exemplos resolvidos).

---

14. Para problemas a seguir, calcule a solução óptima recorrendo exclusivamente ás condições KKT.

$$\begin{aligned}
1)\ \min \quad & -3x_1 - x_2 \\
s.a \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\
& x_1 - x_2 \leq 1, \\
& x_i \in \mathrm{R},\ i = 1,2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ \min \quad & x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 5 \\
s.a \quad & 0 \leq x_1 \leq 2, \\
& 0 \leq x_2 \leq 1, \\
& x_i \in \mathrm{R},\ i = 1,2.
\end{aligned}$$

Gabarito: Primeira determine a função lagrangeana para o problema dada e depois verifique casos diferentes para ver qual casos tem solução ótima.

1. Hip $\lambda_1 = 0$ leva a dois valores diferentes para λ_2 que é impossível. Hip $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ leva a soluções para x_1 e x_2 que não satisfazem a segunda restrição. Hip $\lambda_1 \neq 0, < \lambda_2 \neq 0$ leva a duas soluções $x_1 = -1; x_2 = -2$ e $x_1 = 2; x_2 = 1$. A primeira solução leva a valor impossível para λ_1, mas a segunda solução vai satisfazer todas as condições KKT, e etnão é a solução ótima do problema.

2. Solução ótima: $(x_1^*, x_2^*) = (0, 1)$ e $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*) = (0, -2, -2, 0)$

---

15. Resolvi o problema dada na questão 14 pelo gráfico das restrições e a função objetiva.

---

16. Resolvi os seguintes problemas pelo métodos de função de penalidade e função de barreira.

$$
\begin{aligned}
1)\ \min \quad & 2x_1 + x_2^3 + x_3^2 \\
s.a \quad & x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 4, \\
& x_i \geq 0,\ x_i \in \mathrm{R},\ i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \min \quad & x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 \\
s.a \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\
& x_1 + 2x_2 \geq 10, \\
& x_i \in \mathrm{R},\ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

---

17. Resolvi o PNL a seguir usando o método de direção factível usando $x^0 = (0, 0)$ na primeira e $x^0 = (3, 4)$ na segunda.

$$
\begin{aligned}
1)\ \min \quad & 2x_1^2 - 4x_1 - 2x_1x_2 - 6x_2 + x_2^2 \\
s.a \quad & x_1 + x_2 \leq 8, \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\
& x_i \geq 0,\ x_i \in \mathrm{R},\ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \min \quad & x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 \\
s.a \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\
& x_1 + 2x_2 \geq 10, \\
& x_i \in \mathrm{R},\ i = 1, 2.
\end{aligned}
$$