

# ESTRUTURA DE DADOS

## Árvores AVL

Profa. Dra. Jaqueline Brigladori Pugliesi

1

## Introdução

- Árvores de altura balanceada ou de altura equilibrada foram introduzidas em 1962 por dois matemáticos russos, G. M. Adel'son-Vel'skii e E. M. Landis, também conhecidas como árvores AVL.

Para todo nó de uma árvore AVL, a diferença entre as alturas de suas subárvores não excede a uma unidade.

- Devido ao balanceamento da árvore, as operações de busca, inserção e remoção podem ser efetuadas em  $O(\log_2(n))$ , mesmo no pior caso.

2

## Árvore AVL

- Uma árvore AVL é definida como:
  - Uma árvore vazia é uma árvore AVL.
  - Sendo T uma árvore binária cujas subárvores esquerda e direita são E e D, respectivamente, T será uma árvore AVL contanto que:
    - E e D são árvores AVL.
    - $|h_e - h_d| \leq 1$ , onde  $h_e$  e  $h_d$  são as alturas das subárvores E e D, respectivamente.

3

## Fator de Balanceamento

- O fator de balanceamento ou fator de equilíbrio de um nó T em uma árvore binária é definido como sendo  $h_e - h_d$  onde  $h_e$  e  $h_d$  são as alturas das subárvores esquerda e direita de T, respectivamente.
- Para qualquer nó T numa árvore AVL, o fator de balanceamento assume o valor -1, 0 ou +1.

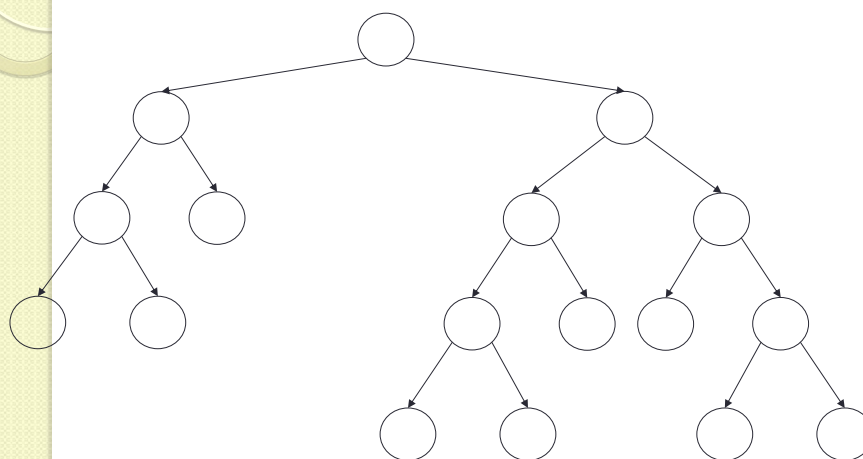
4

## Fator de Balanceamento (cont.)

- Para o rebalanceamento da árvore é necessário calcular o Fator de Balanceamento para verificar qual rotação deve ser efetuada afim de rebalanceá-la.
- Se fator de balanceamento é positivo, as rotações são feitas à direita.
- Se fator de balanceamento é negativo, as rotações são feitas à esquerda.

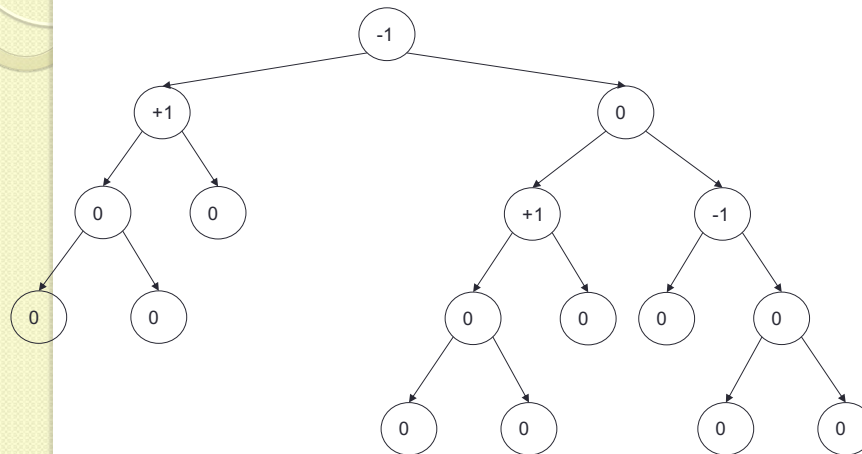
5

## Fator de Balanceamento (cont.)



6

## Fator de Balanceamento (cont.)



7

## Fator de Balanceamento (cont.)

- Há dois tipos de ocorrências nos casos de balanceamento:

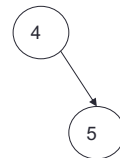
**Caso 1:** Nó raiz com FB 2 ou -2 com um filho (na direção de onde houve a inserção) com FB 1 ou -1 com o mesmo sinal, neste caso a solução é uma rotação simples.

**Caso 2:** Nó raiz com FB 2 ou -2 com um filho (na direção de onde houve a inserção) com FB -1 ou 1 os quais possuem sinais trocados, neste caso a solução é uma rotação dupla.

8

## Inserções

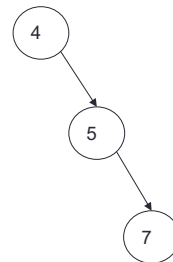
- Inserir  $x=7$



9

## Inserções (cont.)

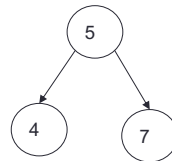
- Inserido  $x=7$
- A inserção produz uma árvore desbalanceada...



10

## Inserções (cont.)

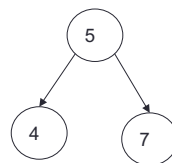
- Inserido  $x=7$
- A inserção produz uma árvore desbalanceada, cujo balanceamento envolve uma rotação esquerda



11

## Inserções (cont.)

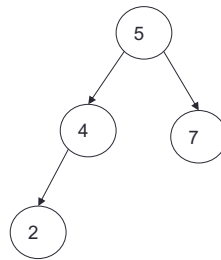
- Inserir  $x=2$



12

## Inserções (cont.)

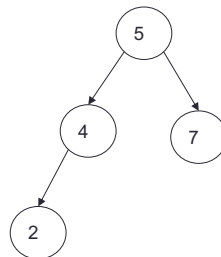
- Inserido  $x=2$



13

## Inserções (cont.)

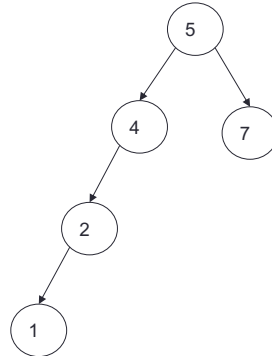
- Inserido  $x=2$
- Inserir  $x=1$



14

## Inserções (cont.)

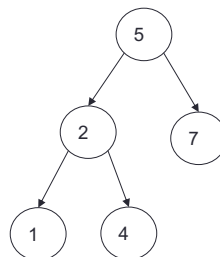
- Inserido  $x=2$
- Inserido  $x=1$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4...



15

## Inserções (cont.)

- Inserido  $x=2$
- Inserido  $x=1$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4, que é corrigido por uma rotação direita

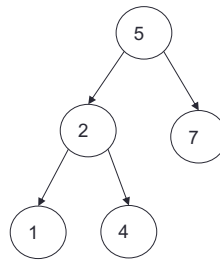


16



## Inserções (cont.)

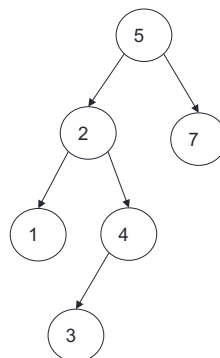
- Inserir  $x=3$



17

## Inserções (cont.)

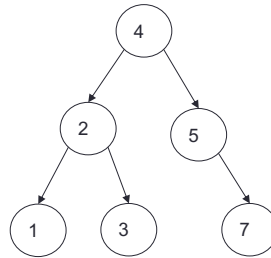
- Inserido  $x=3$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



18

## Inserções (cont.)

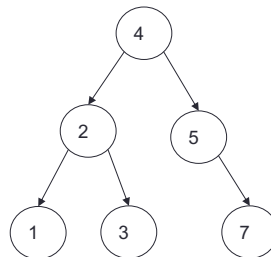
- Inserido  $x=3$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação dupla direita



19

## Inserções (cont.)

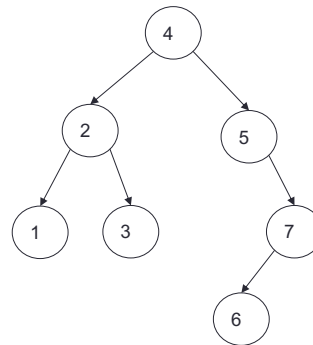
- Inserir  $x=6$



20

## Inserções (cont.)

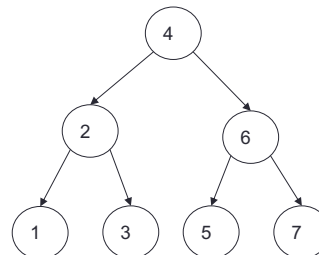
- Inserido  $x=6$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



21

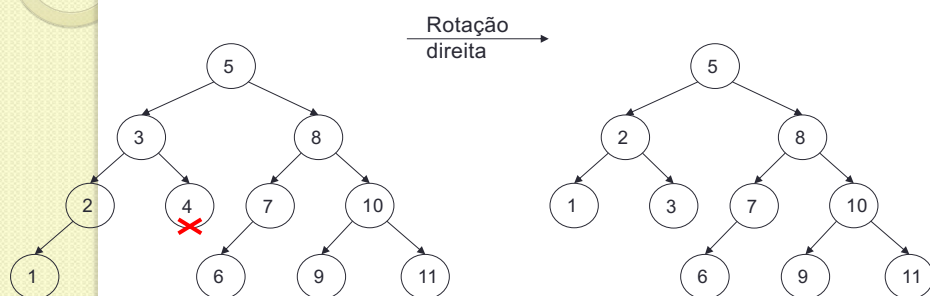
## Inserções (cont.)

- Inserido  $x=6$
- Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação dupla esquerda



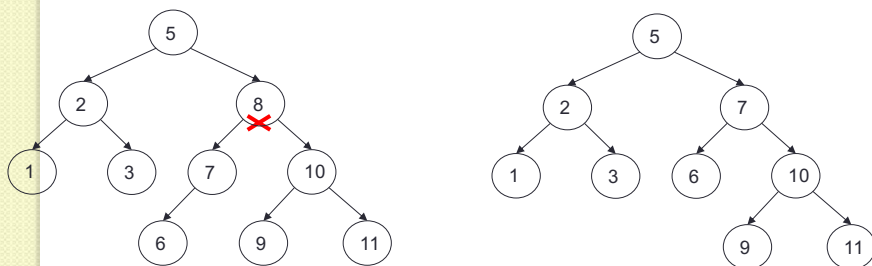
22

## Remoção



23

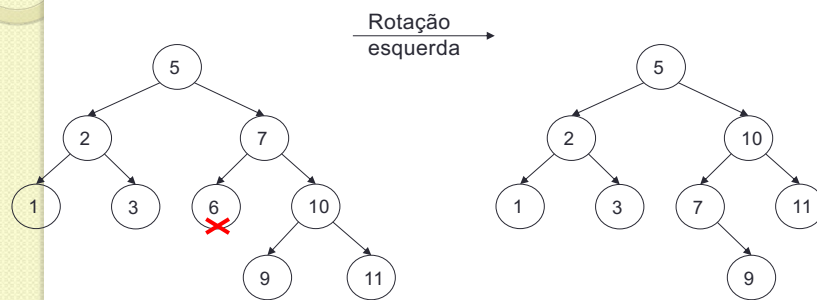
## Remoção (cont.)



Obs: foi utilizado o maior elemento da subárvore esquerda do nó sendo removido

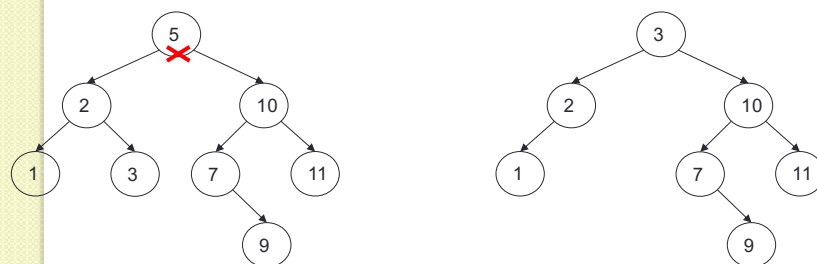
24

## Remoção (cont.)



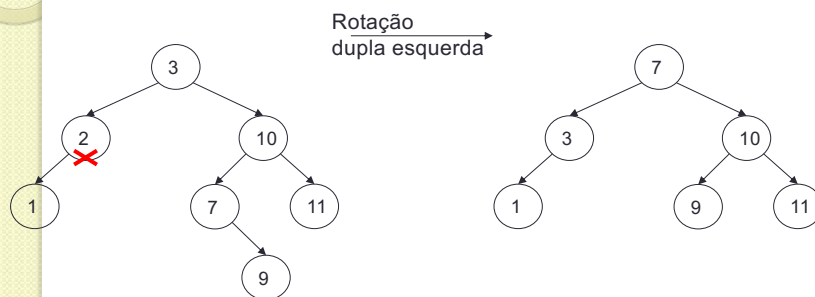
25

## Remoção (cont.)



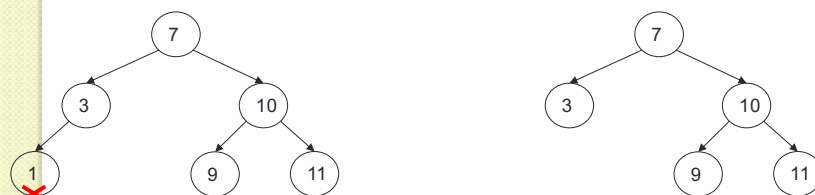
26

## Remoção (cont.)



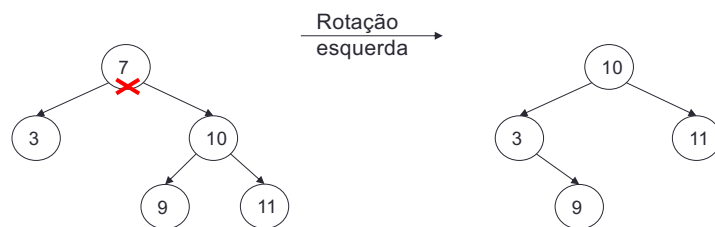
27

## Remoção (cont.)



28

## Remoção (cont.)



29

## Remoção (cont.)

- A remoção em árvores AVL é similar à de uma árvore binária de busca.
- Todavia, é preciso verificar o balanceamento e, se necessário, aplicar algumas das rotações.

30

## Resumo

- Há um custo adicional para manter uma árvore balanceada, mesmo assim garantindo  $O(\log_2(n))$ , mesmo no pior caso, para todas as operações.
- Em testes empíricos:
  - Uma rotação é necessária a cada duas inserções.
  - Uma rotação é necessária a cada cinco remoções.
- A remoção em árvore balanceada é tão simples (ou tão complexa) quanto a inserção.

31

## Exemplos de Aplicação

- Redes de comunicação de dados
  - envio de pacotes ordenados e/ou redundantes
- Codificação de Huffman
  - compressão e descompressão de arquivos

32



## Exercício

1. Inserir os seguintes elementos em uma Árvore AVL:

50 40 30 45 47 55 56 | 2 3

2. e remover os seguintes elementos:

56 30 40 50 | 2

33

# FIM

34