

ESTRUTURA DE DADOS

Árvores

Profa. Dra. Jaqueline Brigladori Pugliesi

1

Introdução

- Uma árvore é uma estrutura de dados não linear frequentemente utilizada para rápido acesso aos dados.
- Nota-se que a recursão é utilizada como ferramenta de definição.
- Um árvore é uma estrutura sofisticada cuja definição por meio de recursão é elegante e eficaz.
- Uma árvore, com tipo T, pode ser definida recursivamente da seguinte forma:
 - Uma árvore (estrutura) vazia ou
 - Um nó do tipo T associado a um número finito de estruturas disjuntas de árvore do mesmo tipo T, denominadas subárvores

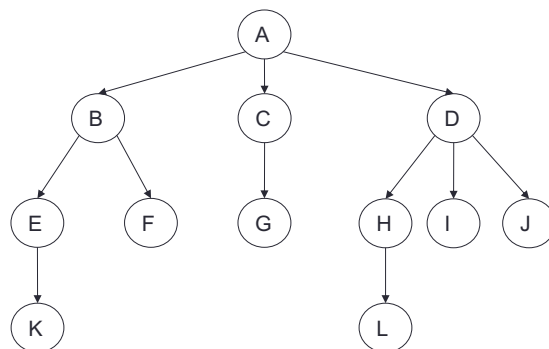
2

Definição

- Uma árvore é um conjunto finito T de um ou mais nós, tais que:
 - existe um nó especial, denominado raiz de T ;
 - os demais nós formam $m \geq 0$ conjuntos disjuntos T_1, \dots, T_m no qual cada um destes conjuntos é uma árvore;
 - T_1, \dots, T_m são denominadas subárvores.

3

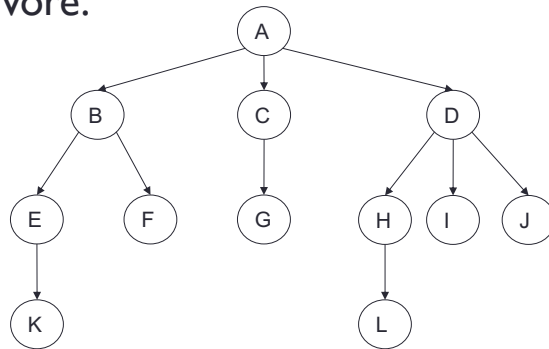
Definição (cont.)



4

Nós

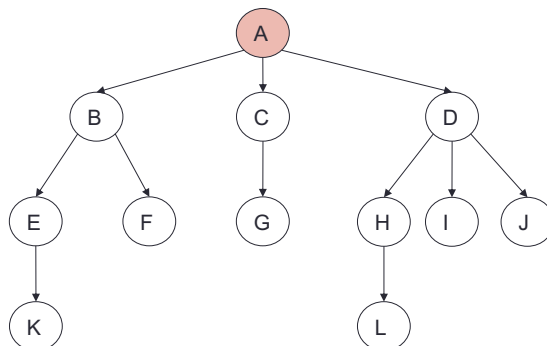
- Cada elemento de uma árvore é chamado nó da árvore.



5

Raiz

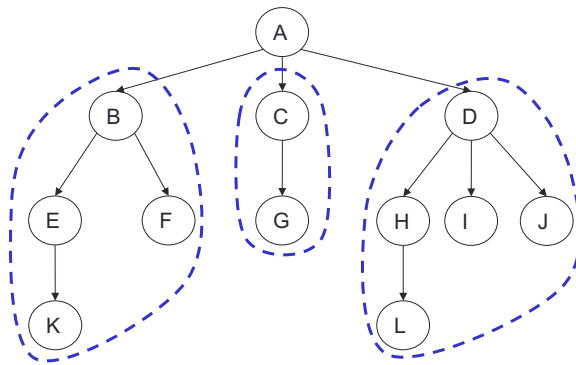
- Normalmente, as árvores são desenhadas com a raiz no topo.



6

Subárvores

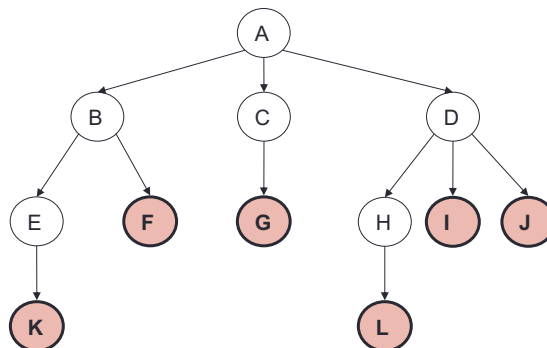
- No exemplo, o nó A possui três subárvores cujas raízes são B, C e D.



7

Folha

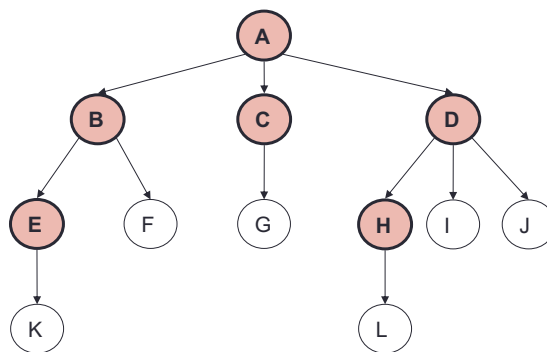
- Um nó sem filhos é chamado folha (ou terminal).



8

Não-Folha

- Um nó com filhos é denominado não-folha, não-terminal ou interior.



9

Pai, Filho, Ancestral, Descendente e Irmão

- Se um nó X é a raiz de uma árvore e um nó Y é a raiz de sua subárvore direita ou subárvore esquerda, então X é o pai de Y e Y é o filho de X .
- O nó X é um ancestral do nó Y (e Y é descendente de X) se X for o pai de Y ou então se X for o pai de algum ancestral de Y .
- Dois nós são irmãos se forem filhos do mesmo pai.

10

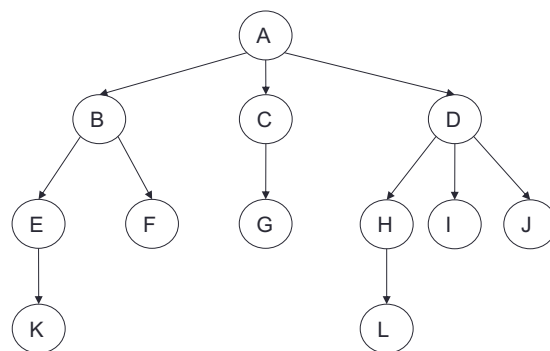
Grau

- O grau de um nó é determinado pelo número de filhos (imediatos) deste nó.
- Portanto, o grau de uma folha é zero.
- O grau de uma árvore é determinado pelo grau máximo entre todos os nós desta árvore.

11

Grau (cont.)

O grau da árvore é 3.

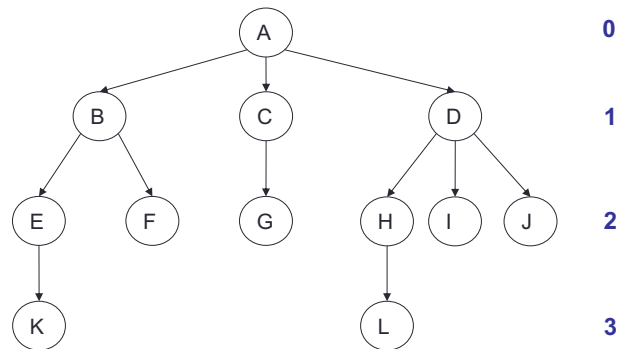


Nó	Grau
A	3
B	2
C	1
D	3
E	1
F	0
G	0
H	1
I	0
J	0
K	0
L	0

12

Nível

- O nível de um nó é definido como:
 - em geral, o nó raiz está no nível 0 (zero);
 - os outros nós possuem um nível a mais que o nível de seu nó pai.



13

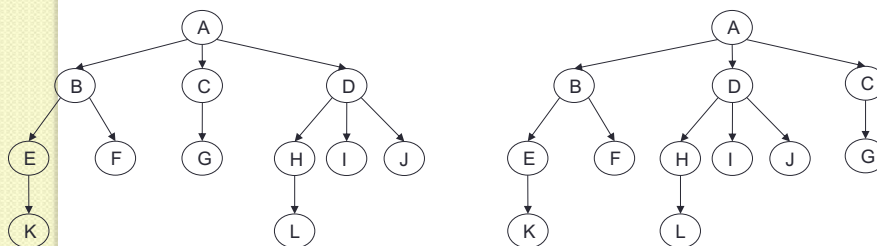
Profundidade

- A profundidade ou altura de uma árvore significa o nível máximo de qualquer folha na árvore, ou seja, o tamanho do percurso mais distante da raiz até qualquer folha.
- No exemplo, a árvore possui altura 3.

14

Árvore Ordenada

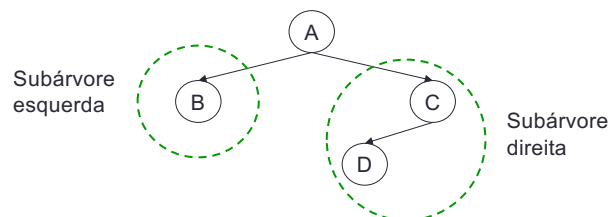
- Uma árvore ordenada é uma árvore na qual os ramos de cada nó são ordenados.
- Essas duas árvores ordenadas são distintas.



15

Árvores Binárias (AB)

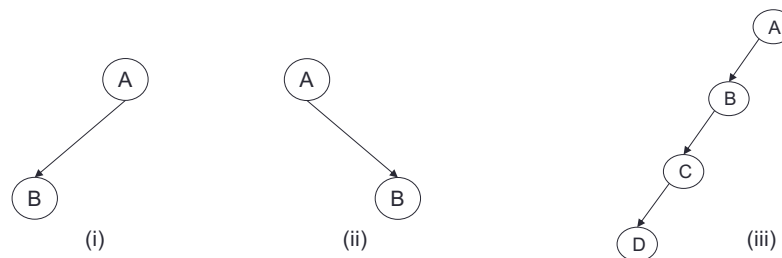
- Árvores binárias são árvores ordenadas de grau 2.
- Uma árvore binária é um conjunto finito de nós que:
 - ou é vazia;
 - ou consiste de uma raiz e duas árvores binárias disjuntas: subárvore esquerda e subárvore direita.



16

Árvores Binárias (cont.)

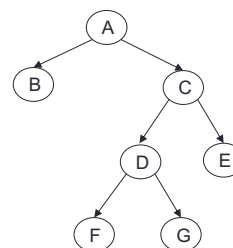
- As árvores binárias seguintes são distintas:
 - a primeira tem subárvore direita vazia;
 - a segunda tem subárvore esquerda vazia.
- A terceira é uma árvore degenerada.



17

Árvore Estritamente Binária

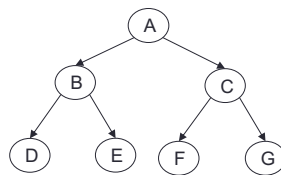
- Uma árvore estritamente binária é aquela que tem nós que possuem 0 ou dois filhos.
- Nós interiores (nós que não são folhas) possuem sempre 2 filhos.



18

Árvore Binária Completa

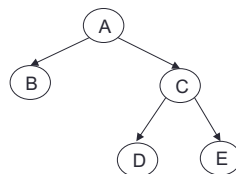
- Uma árvore binária completa é aquela que é estritamente binária de nível d e com todos os nós-folhas no mesmo nível d .



19

Árvore Binária Balanceada

- Uma árvore binária é dita balanceada se, para cada nó, as alturas de suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1.



20

Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- Uma árvore binária é perfeitamente balanceada se, para cada nó, os números de nós das suas duas subárvores diferem de, no máximo, 1.
- Toda árvore perfeitamente balanceada é balanceada, mas não vale o inverso.

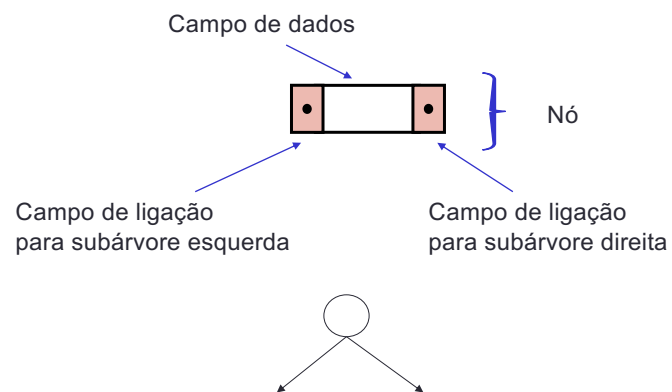
21

Representação de Árvores Binárias

- Implementação:
 - sequencial;
 - encadeada: alocação estática ou dinâmica.
- Cada nó em uma árvore binária possui um campo de dados, um ponteiro para a subárvore esquerda e um ponteiro para a subárvore direita.

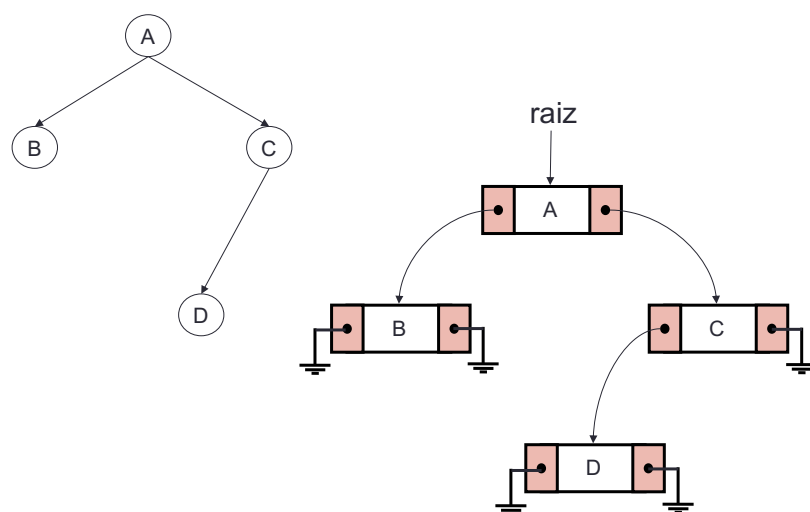
22

Representação do Nó para Árvores Binárias



23

Representação de Árvores Binárias

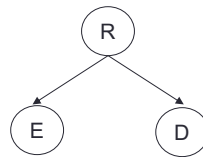


24

Percurso em Árvore Binária

- Os nós de uma AB podem ser visitados de três formas (varredura da árvore):

- Pré-ordem: R, E, D
- In-ordem: E, R, D
- Pós-ordem: E, D, R

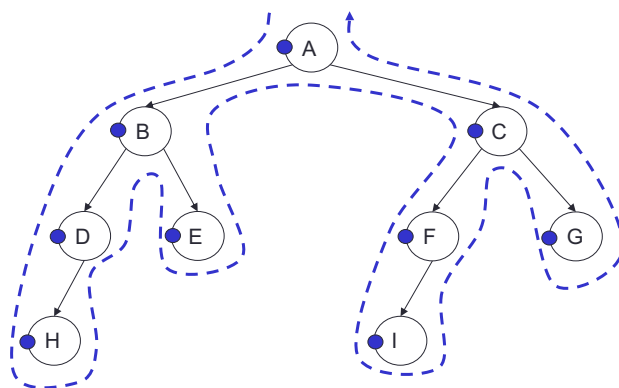


- Visitar um nó pode ser: imprimir o nó; buscar um nó; modificar o nó; remover o nó; etc.

25

Percurso em AB

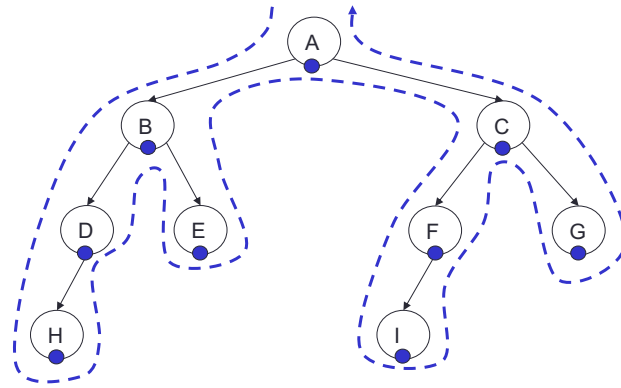
- Pré-ordem: A, B, D, H, E, C, F, I, G



26

Percurso em AB

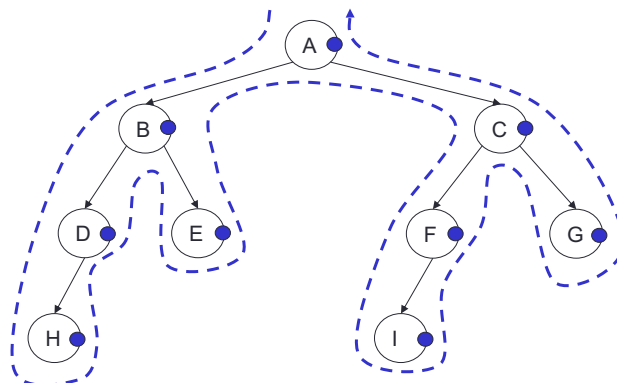
- In-ordem: H, D, B, E, A, I, F, C, G



27

Percurso em AB

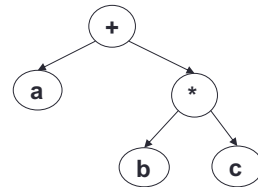
- Pós-ordem: H, D, E, B, I, F, G, C, A



28

Expressões – Percursos

- Pré-ordem: $+ a * b c$
- In-ordem: $a + (b * c)$
- Pós-ordem: $a b c * +$



29

Percurso Pré-ordem

- Se árvore vazia, fim.
- processar a raiz
- percorrer em pré-ordem a subárvore esquerda
- percorrer em pré-ordem a subárvore direita

30



Percurso In-ordem

- Se árvore vazia, fim.
- percorrer em in-ordem a subárvore esquerda
- processar a raiz
- percorrer em in-ordem a subárvore direita

31



Percurso Pós-ordem

- Se árvore vazia, fim.
- percorrer em pós-ordem a subárvore esquerda
- percorrer em pós-ordem a subárvore direita
- processar a raiz

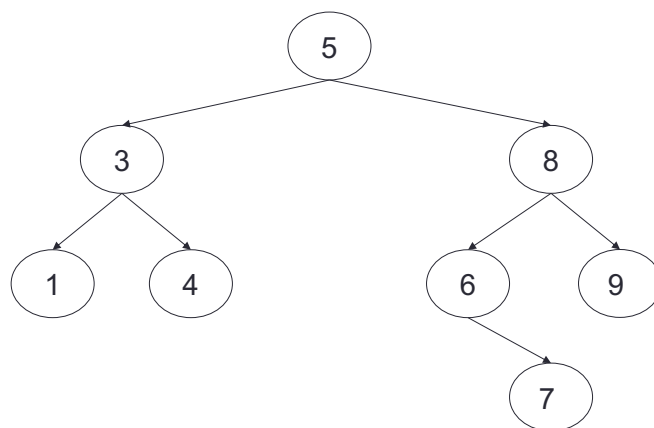
32

Árvore de Busca Binária

- Uma árvore de busca binária é ou vazia ou seu nó raiz contém uma chave e:
 - todas as chaves da subárvore esquerda são menores que a chave da raiz;
 - todas as chaves da subárvore direita são maiores que a chave da raiz;
 - as subárvores esquerda e direita também são árvores de busca binárias.
- Vantagem: é suficiente realizar a busca em, no máximo, uma das subárvores.

33

Árvore Binária de Pesquisa



34

Exercícios

- Desenhe as árvores que representam as seguintes expressões aritméticas:

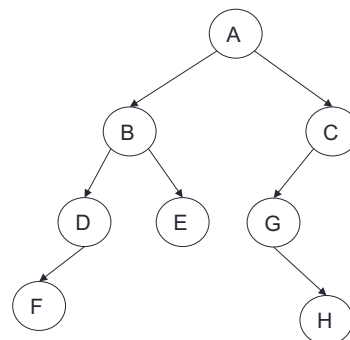
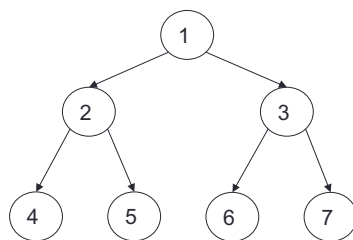
a) $2 * (a - b / c)$

b) $a + b + c * d$

35

Exercícios

- Sejam as árvores binárias, listar os nós em:
 - pré-ordem, in-ordem, pós-ordem
- Dizer se as árvores são balanceadas, perfeitamente balanceadas ou nenhum dos casos. Para cada uma delas, dê sua altura e liste os nós folhas.



36

Exercícios

- Inserir os seguintes elementos em uma Árvore de Busca Binária e mostrar a árvore resultante:

5 7 3 1 9 4 6 2 8

37

FIM

38