TRANSFORMAÇÕES COMPOSTAS

Prof. Dr. Bianchi Serique Meiguins
Prof. Dr. Carlos Gustavo Resque dos Santos

Introdução Coordenada Homogêneas

- Coordenadas Homogêneas são uma representação dos pontos, vetores e matrizes para facilitar a generalização das operações entre esses tipos de objetos.

- Para computação gráfica em 2D, e também para 3D, um ponto (x, y) passa a ser representado por (x, y, h), com h assumindo o valor da unidade. Pontos são representados por $(x, y, 1)$.

Introdução Coordenada Homogêneas

- Ao expressarmos posições em coordenadas homogêneas, as equações de transformações geométricas ficam reduzidas a multiplicação de matrizes 3x3 elementos.
- As coordenadas são representadas vetores-colunas.
- Operações de transformação são matrizes com 3x3 elementos.

Translação

$P' = T(tx, ty).P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$$

Rotação

$P' = R(\theta).P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$$

Escala

$$P' = S(Sx, Sy).P \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}$$

- As transformações inversas são dadas por $T(-tx, -ty)$, $R(-\theta)$ e $S(1/Sx, 1/Sy)$, respectivamente.

- Outras transformações especiais (reflexão ou mudança de sistema de referência) podem ser facilmente formalizadas em coordenadas homogêneas.

Transformações compostas em coordenadas homogêneas

- Chamamos as composições de transformações de “concatenações”, por serem feitas de forma sequencial.

- Podem ser agrupadas em uma única matriz de transformação, obtida pelo produto das transformações que a compõem.

Concatenação de Translações

- Se duas translações sucessivas são aplicadas a uma posição P, a posição final

$$P' = T(tx1, ty1).\{T(tx2, ty2).P\}$$
$$P' = \{T(tx1, ty1).T(tx2.ty2)\}.P$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & Tx_2\\0 & 1 & Ty_2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & Tx_1\\0 & 1 & Ty_1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & Tx_2+Tx_1\\0 & 1 & Ty_2+Tx_1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Concatenação de Rotações

- Se duas rotações sucessivas aplicadas a uma posição P, a posição final P´ é dada por

$$P' = R(\theta_1).\{R(\theta_2).P\}$$
$$P' = \{R(\theta_1).R(\theta_2).\}P$$

- Intuitivamente, rotações consecutivas também devem se comportar de forma aditiva. Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -sen(\theta_1) & 0 \\ sen(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -sen(\theta_2) & 0 \\ sen(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Concatenação de Rotações

- Mas lembrando que:

- $\cos(\theta + \alpha) = \cos\theta . \cos\alpha - sen\theta . sen\,\alpha$
- $sen\,(\theta + \alpha) = sen\,\theta . \cos\alpha + sen\,\alpha . \cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -sen(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ sen(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concatenação de Escalas

- Se duas transformações de escalas sucessivas são aplicadas a uma posição P, a posição final P´ é dada por

$$P' = S(sx2, sy2).\{S(sx1, sy1).P\}$$
$$P' = \{S(sx2, sy2).S(sx1, sy1)\}.P$$

$$\begin{bmatrix} Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Sx_1 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx_1 Sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy_1 Sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concatenação de Transformações Geométricas

- Uma transformação bidimensional genérica representando uma combinação de translação, rotação e escala pode ser expressa.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Tx \\ 0 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Cos } b & -\text{Sen } b & 0 \\ \text{Sen } b & \text{Cos } b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Concatenações

- Observe a ordem de multiplicação das matrizes

- A ordem de aplicação das transformações sempre começa pela matriz mais próxima da matriz de pontos em direção a transformação mais longe

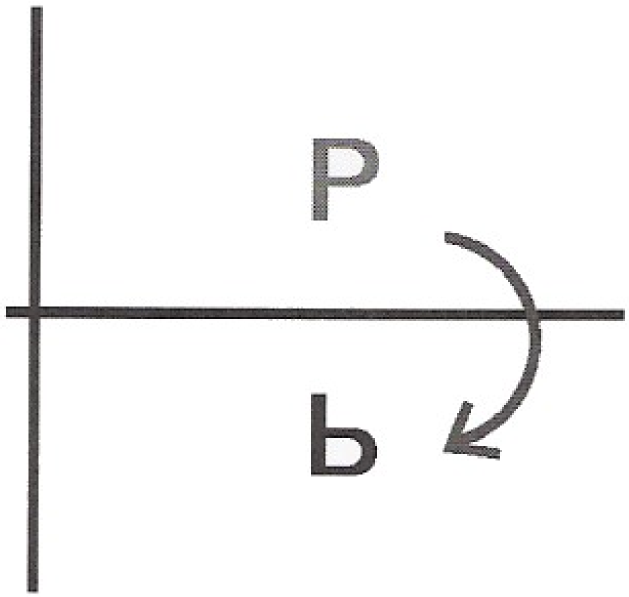
$$P' = R.T.E.P$$

TRANSFORMAÇÕES ESPECIAIS

Reflexão com relação ao eixo X

- As coordenadas X permanecem iguais, mas as coordenadas Y trocam de sinal. Matriz de Transformação:

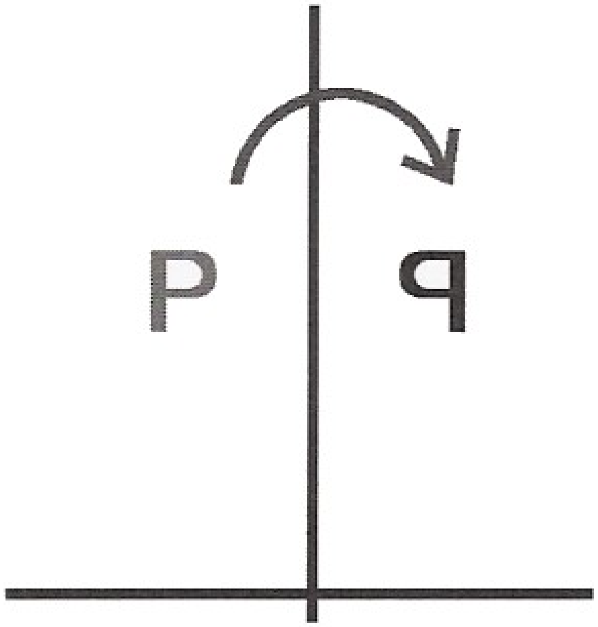
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação ao eixo Y

- As coordenadas Y permanecem iguais, mas as coordenadas X trocam de sinal. Matriz de transformação:

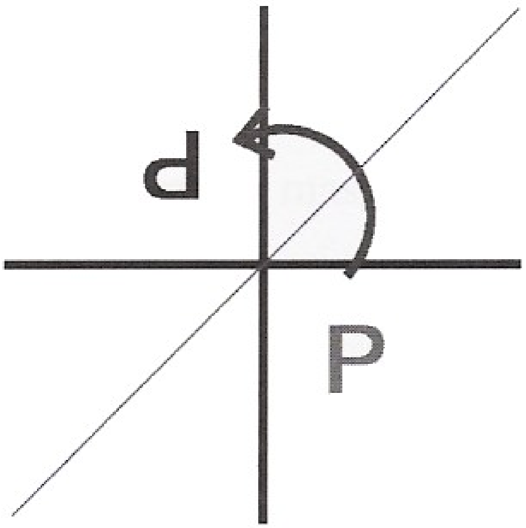
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à origem

- As coordenadas X e Y trocam de sinal.
  Matriz de transformação:

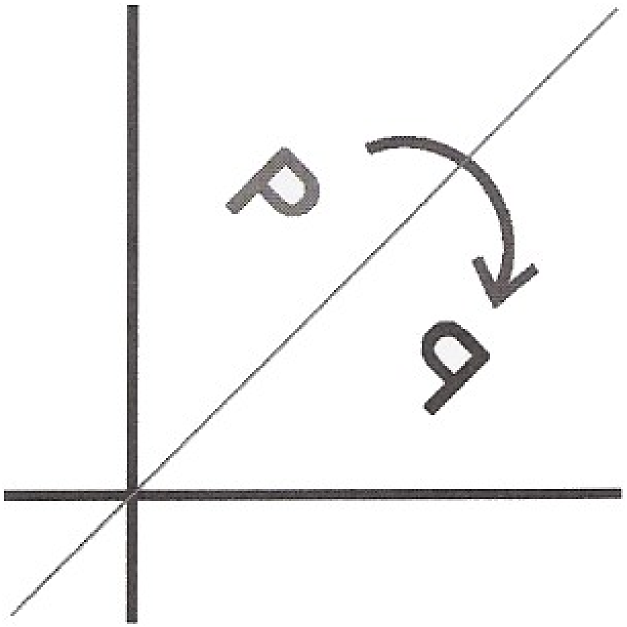
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à reta Y=X

- As coordenadas X e Y são invertidas. Matriz de transformação:

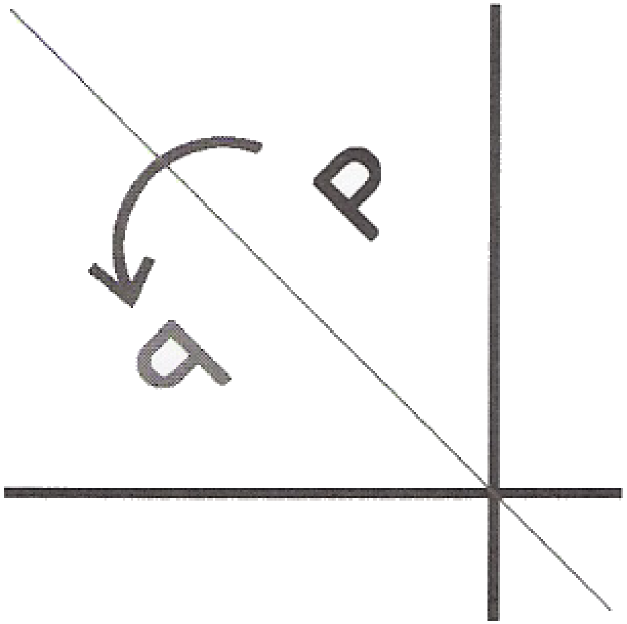
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à reta Y=-X

- As coordenadas X e Y são invertidas e trocam de sinal. Matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



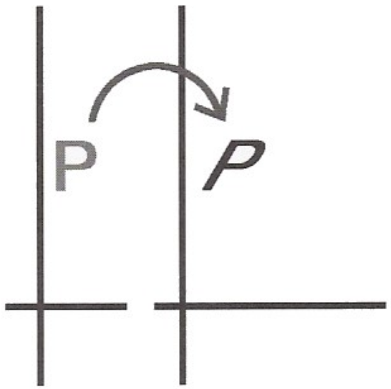
Distorção angulares em uma única direção: Shears

- As distorções do tipo shear resultam numa inclinação do objeto numa dada direção. Uma de suas aplicações é a transformação de fontes de texto no estilo itálico

- As coordenadas Y não são alteradas, mas as coordenas X sofrem uma escala em função de Y:
  - $x' = x + ysh_x$
  - $y' = y$

Shears na direção X

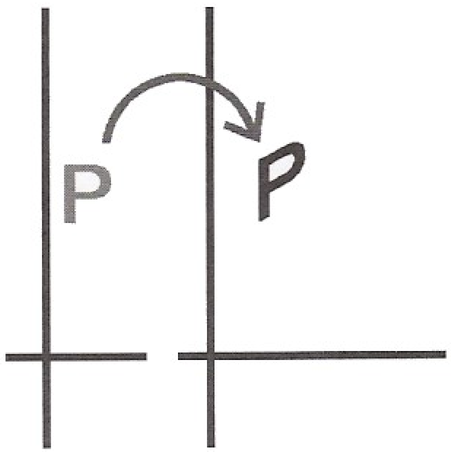
$$\begin{bmatrix} 1 & shx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Shears na direção Y

- As coordenadas X não são alteradas, mas as coordenadas Y sofrem uma escala que é função de X:
  - y´= y + shy.x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ shy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ordem das Transformações

- Quando se aplica uma sequência de transformações, a ordem das transformações elementares tem um papel fundamental sobre o resultado final.

- Aplicar uma rotação seguida de uma translação não tem o mesmo resultado de uma translação seguida de uma rotação.

Ordem das Transformações

- Para esclarecer esse fato devemos lembrar que matrizes em matrizes a ordem dos fatores altera o produto.

  - $C = A \cdot B$
  - $C^T = B^T \cdot A^T$

Exercício

- Determine a matriz de coordenadas homogêneas que equivale a seguinte sequência de transformações : translação(5,18), rotação (30^o) e escala (1.5,3)

- Mostre que reflexões sucessivas sobre os eixos equivalem a uma rotação simples, tendo a origem dos eixos como pivot.

Exercícios

- Faça uma rotina que, dados os parâmetros de translação (tx,ty), rotação (θ) e escala (sx, sy), monte uma matriz A[3x3] com a a transformação completa em coordenadas homogêneas.