

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

DANIEL CORDEIRO PEREIRA

**QUANDO É ÓTIMO SAIR DE UMA ESTRATÉGIA DE
INVESTIMENTO?**

SÃO PAULO

2021

DANIEL CORDEIRO PEREIRA

QUANDO É ÓTIMO SAIR DE UMA ESTRATÉGIA DE INVESTIMENTO?

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional da Escola de Economia
de São Paulo da Fundação Getulio Vargas,
como requisito para a obtenção do título de
Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Orientador:
Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO

2021

Pereira, Daniel Cordeiro.

Quando é ótimo sair de uma estratégia de investimentos? / Daniel Cordeiro
Pereira. - 2021.

70 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto.

Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Fundação Getulio Vargas, Escola
de Economia de São Paulo.

1. Engenharia Financeira 2. Investimentos - Análise 3. Administração de risco.
4. Mercado de capitais 5. Modelos matemáticos. I. Pinto, Afonso de Campos. II.
Dissertação (mestrado profissional MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. III.
Fundação Getulio Vargas. IV. Título.

CDU 336.76

DANIEL CORDEIRO PEREIRA

QUANDO É ÓTIMO SAIR DE UMA ESTRATÉGIA DE INVESTIMENTO?

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Engenharia Financeira.

Data da Aprovação: 28/10/2021

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
EESP-FGV

Prof. Dr. Roberto Barbosa Cintra
(Co-orientador)
EESP-FGV

Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer
OctaPlus Financial Analytics

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais por sempre terem me apoiado, incentivado e financiado meus estudos.

Ao professor Roberto Cintra, por toda a ajuda, paciência e disposição durante as discussões para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e ex colegas de trabalho, Mauricio e Luiz que, juntos do professor Roberto, foram inspirações que me fizeram ter o desejo de buscar conhecimento e iniciar o mestrado.

Aos amigos Mathias e Willi por terem me ajudado sempre que precisei conciliar o trabalho e o mestrado.

A todos os colegas de sala pela colaboração em listas, trabalhos e estudos e por terem feito deste mestrado um processo mais leve.

RESUMO

Este trabalho visa encontrar pontos ótimos de saída de uma estratégia de investimentos (Stop-Loss e Stop-Gain) que maximizem a esperança de uma função de retorno descontada no tempo. São abordadas soluções para o caso de um ativo ou instrumento financeiro modelado como uma difusão de Itô, seja um processo Browniano geométrico, Ornstein-Uhlenbeck de reversão à média ou ainda um processo que envolva uma mistura de normais. Aplicamos a abordagem para dados de uma ação (PETR4) e de um par *Long Short* de ações (BBDC3 e BBDC4). Para ambos os casos são comparadas uma abordagem paramétrica, utilizando simulação de Monte Carlo, com uma abordagem não paramétrica (*model free*), que faz uso da técnica de bootstrapping para gerar as trajetórias.

Palavras-chave: Optimal Stopping, Stop Loss, Stop Gain, Dynkin, Monte Carlo, Bootstrapping.

ABSTRACT

The present dissertation is focused on finding optimal stop-loss and stop-gain parameters which maximize a given expected discounted return function, assuming a financial instrument governed by an Ito Diffusion, which can be a Geometric Brownian Motion, a Ornstein-Uhlenbeck process with mean-reversion or a process with Gaussian Mixtures. We apply this methodology for financial data of a single stock (PETR4) and for a Long and Short pair (BBDC3 and BBDC4). For each of them, we will compare a parametric approach based on Monte Carlo simulation and a non-parametric, model-free approach based on bootstrapping.

Keywords: Optimal Stopping, Stop Loss, Stop Gain, Dynkin, Monte Carlo, Bootstrapping.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Resumo da metodologia	26
Figura 2 – Simulação de Monte Carlo para instrumento modelado como Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.2, \sigma = 0.3$	28
Figura 3 – Simulação de Monte Carlo para instrumento com distribuição Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.1, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.5$	29
Figura 4 – Simulação de Monte Carlo para instrumento modelado como processo Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0, \kappa = 1, \sigma = 0.1$	30
Figura 5 – Geração de Trajetórias através da técnica de Bootstrapping	31
Figura 6 – Ilustração dos Pontos de Saída	35
Figura 7 – Função de desconto para diferentes valores de ρ	36
Figura 8 – Convergência do tempo para o processo ser encerrado	36
Figura 9 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.2, \rho = 4$	39
Figura 10 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.2, \rho = 1$	39
Figura 11 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.2, \rho = 4$	40
Figura 12 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.4, \rho = 4$	40
Figura 13 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.8 \rho = 4$	41
Figura 14 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.5 \rho = 4$	41
Figura 15 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.8 \rho = 4$	42
Figura 16 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.8 \rho = 1$	42
Figura 17 – Função de recompensa para OU com $m = 0, \kappa = 1, \sigma = 0.1, \rho = 4$. .	43
Figura 18 – Função de recompensa para OU com $m = 0, \kappa = 1, \sigma = 0.05, \rho = 4$. .	44
Figura 19 – Função de recompensa para OU com $m = 0, \kappa = 1, \sigma = 0.1, \rho = 1$. .	44
Figura 20 – Função de recompensa para OU com $m = 0, \kappa = 4, \sigma = 0.1, \rho = 4$. .	45
Figura 21 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.2, \rho = 4$ obtida por solução analítica	51
Figura 22 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2095, \sigma = 0.4168, \rho = 1$	53

Figura 23 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2095$, $\sigma = 0.4168$, $\rho = 4$	54
Figura 24 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = 0.3680$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2053$, $\sigma_2 = 0.5152$, $w_1 = 0.5$, $\rho = 1$	54
Figura 25 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = 0.3680$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2053$, $\sigma_2 = 0.5152$, $w_1 = 0.5$, $\rho = 4$	55
Figura 26 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 1$	55
Figura 27 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 4$	56
Figura 28 – Série temporal do Log Preço de BBDC3 e BBDC4 entre 02-Jan-2008 e 27-Ago-2021	57
Figura 29 – Regressão linear de Log(BBDC3) em Log(BBDC4) entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018	58
Figura 30 – Série do Log de BBDC3 - 0.96 * BBDC4 entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018	58
Figura 31 – Série do Log Retorno do par BBDC3 - 0.96 * BBDC4 entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018	59
Figura 32 – Função de recompensa para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.0741$, $\kappa = 4.3625$, $\sigma = 0.0589$, $\rho = 1$, $X_0 = -0.0241$	60
Figura 33 – Função de recompensa para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.0741$, $\kappa = 4.3625$, $\sigma = 0.0589$, $\rho = 4$, $X_0 = -0.0241$	60
Figura 34 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 1$	61
Figura 35 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 4$	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação entre $X_0 = 0$ e $X_0 = 0.05$	43
Tabela 2 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.1$	45
Tabela 3 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.2$	45
Tabela 4 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.3$	45
Tabela 5 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1, \sigma = 0.4$	46
Tabela 6 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2, \sigma = 0.1$	46
Tabela 7 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2, \sigma = 0.2$	46
Tabela 8 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2, \sigma = 0.3$	46
Tabela 9 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2, \sigma = 0.4$	46
Tabela 10 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.1$	46
Tabela 11 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.2$	47
Tabela 12 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.3$	47
Tabela 13 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3, \sigma = 0.4$	47
Tabela 14 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4, \sigma = 0.1$	47
Tabela 15 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4, \sigma = 0.2$	47
Tabela 16 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4, \sigma = 0.3$	47
Tabela 17 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4, \sigma = 0.4$	48
Tabela 18 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.2,$ $\sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.8$	48
Tabela 19 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.2,$ $\sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.5$	48
Tabela 20 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.3,$ $\sigma_2 = 0.6, w_1 = 0.8$	48
Tabela 21 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = 0.3,$ $\sigma_2 = 0.6, w_1 = 0.5$	48
Tabela 22 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2, \sigma_1 = 0.2,$ $\sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.8$	49
Tabela 23 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2, \sigma_1 = 0.2,$ $\sigma_2 = 0.4, w_1 = 0.5$	49
Tabela 24 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2, \sigma_1 = 0.3,$ $\sigma_2 = 0.6, w_1 = 0.8$	49
Tabela 25 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2, \sigma_1 = 0.3,$ $\sigma_2 = 0.6, w_1 = 0.5$	49
Tabela 26 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0, \kappa = 1, \rho = 4$	49
Tabela 27 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = -0.1, \sigma = 0.1, \rho = 4$	50
Tabela 28 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = -0.05, \sigma = 0.1, \rho = 4$	50

Tabela 29 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$	50
Tabela 30 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$. .	50
Tabela 31 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$. . .	51
Tabela 32 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0.1$	51
Tabela 33 – Resultado da calibração dos parâmetros para PETR4 - dados de 01/01/2003 a 30/12/2019	52
Tabela 34 – Resultado da calibração dos parâmetros da Mistura de Normais para PETR4 - dados de 01/01/2003 a 30/12/2019	52
Tabela 35 – Comparação dos resultados de diferentes modelos e abordagens aplicadas em PETR4	53
Tabela 36 – Resultado do teste de cointegração para o par Log(BBDC3 - BBDC4) com dados de 02-Jan-2008 a 27-Ago-2021	57
Tabela 37 – Resultado do teste de cointegração para o par Log(BBDC4 - BBDC3) com dados de 02-Jan-2008 a 27-Ago-2021	57
Tabela 38 – Resultado do teste de cointegração para o par Log(BBDC3 - BBDC4) com dados de 22-Jan-2014 a 27-Ago-2021	57
Tabela 39 – Resultado do teste de cointegração para o par Log(BBDC3 - BBDC4) com dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018	57
Tabela 40 – Resultado do teste de cointegração para o par Log(BBDC4 - BBDC3) com dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018	58
Tabela 41 – Resultado da calibração dos parâmetros para Log(BBDC3) - 0.96 Log(BBDC4) - dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018	59
Tabela 42 – Comparação dos resultados de diferentes modelos e abordagens aplicadas no par BBDC3/BBDC4	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
3.1	Stopping Time	18
3.2	Gerador de uma Difusão de Itô	19
3.3	Fórmula de Dynkin	19
3.4	Aplicação	20
3.5	Mistura de Normais	24
4	METODOLOGIA	26
4.1	Geração das Trajetórias	27
4.1.1	Abordagem Paramétrica - Simulação de Monte Carlo	27
4.1.2	Abordagem Não-Paramétrica - Bootstrapping	30
4.2	Calibração dos Parâmetros	31
4.2.1	Movimento Browniano Geométrico	31
4.2.2	Mistura de Normais	32
4.2.3	Processo Ornstein-Uhlenbeck	33
4.3	Obtenção dos pontos ótimos de saída	34
4.4	Dados	37
5	RESULTADOS	38
5.1	Otimização via Grid para combinações de parâmetros	38
5.2	Comparação com Solução Analítica	51
5.3	Resultados da aplicação em PETR4	52
5.4	Resultados da aplicação no par de ações BBDC3 e BBDC4	56
6	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICES	66
	APÊNDICE A CONCEITOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO	67
A.1	Movimento Browniano e a Existência de Variação Quadrática	67
A.2	Propriedade de Markov	67
A.3	Integrais Estocásticas	68
A.4	Equações Diferenciais Estocásticas	70

1 INTRODUÇÃO

A modelagem estocástica de ativos financeiros teve sua origem com a publicação da tese de doutorado de Louis Bachelier no começo do século passado, mas foi nas últimas décadas que a utilização de modelos quantitativos conquistou cada vez mais espaço em finanças, tornando-se imprescindível em áreas como a precificação de derivativos, gestão de riscos, construção de portfólios com a ideia de otimização média-variancia de Markowitz, factor investing, dentre outras aplicações. Contudo, um tópico do processo de tomada de decisões em estratégias de investimentos ainda relativamente pouco explorado é o de determinar os pontos ótimos de saída de um investimento. Uma máxima do mercado diz que se deve “comprar barato e vender caro”, porém este pensamento assume que é possível saber quando um ativo está caro ou barato. Partindo do pressuposto mais realista de que não temos certeza se o ativo irá valorizar ou desvalorizar no futuro, passa a ser interessante a obtenção desses pontos de saída a partir da modelagem estocástica do comportamento do ativo, de forma a maximizar a esperança de uma dada função do processo estocástico, por exemplo maximizar a esperança do retorno descontado no tempo por uma taxa de impaciência.

Este trabalho tem como objetivo determinar os pontos ótimos de *Stop-Loss* e *Stop-Gain* de uma estratégia de investimentos, buscando maximizar a esperança do retorno descontado no tempo por uma taxa que reflete a impaciência do investidor. O trabalho tem como base o artigo de Zhang (2001), que resolve o mesmo problema analiticamente para um ativo cujo comportamento é caracterizado por um Movimento Browniano Geométrico em conjunto com Cadeias de Markov, porém com algumas diferenças: i) No lugar de obter as soluções analiticamente, aproximamos a solução por métodos de simulação, explorando uma abordagem paramétrica (Monte Carlo) e outra não paramétrica (Bootstrapping) ii) Resolvemos o problema para um modelo caracterizado como um Movimento Browniano Geométrico (sem a abordagem de cadeias de Markov), um modelo que envolve Misturas de Normais e um processo com reversão à média (Ornstein-Uhlenbeck); iii) Aplicamos as abordagens a dados de ativos brasileiros, utilizando a modelagem de um Browniano Geométrico e da Mistura de Normais para ações preferenciais da Petrobras (PETR4) e o processo com reversão à média para um par de ativos *Long Short* composto por ações preferenciais e ordinárias de Bradesco (BBDC4 e BBDC3) e comparamos com a abordagem não paramétrica para ambos os casos (PETR4 e *Long Short* de BBDC3 e BBDC4).

Para chegar no objetivo do trabalho, seguiremos os seguintes passos: i) Calibrar os parâmetros dos respectivos processos estocásticos para o caso do ativo único (PETR4) e do par de ativos (BBDC3 e BBDC4); ii) Gerar as trajetórias através de simulações de

Monte Carlo utilizando os parâmetros calibrados e através da técnica de *bootstrapping* dos retornos; iii) A partir das trajetórias, encontrar para cada caso os pontos ótimos de saída que maximizem a função desejada.

Não encontramos na literatura trabalhos semelhantes que utilizem a abordagem não paramétrica para geração das trajetórias, nem a aplicação de um modelo com Mistura de Normais ou a aplicação destes conceitos a ativos brasileiros. Com a possibilidade de aplicar a técnica de *bootstrapping*, é possível utilizar as ideias deste trabalho sem ficar restrito a modelos específicos. Já a modelagem por Mistura de Normais é uma maneira simples de relaxar as hipóteses de normalidade e de *drift* e volatilidade constantes.

Importante ressaltar que esta dissertação limita-se a encontrar os pontos de saída da estratégia, não entrando no mérito de como fazer a seleção dos ativos que compõem um portfólio ou mesmo de obter o ponto de entrada ideal.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta um breve resumo da literatura de cálculo estocástico e dos trabalhos relacionados a esta dissertação; o capítulo 3 apresenta os principais conceitos necessários para a formulação e resolução do problema; o capítulo 4 apresenta os passos adotados para a obtenção dos resultados, desde as formas de gerar as trajetórias, passando pela estimação de parâmetros e pela obtenção dos pontos de saída desejados; o capítulo 5 apresenta os resultados tanto de forma genérica, para combinações de parâmetros em cada um dos processos utilizados na abordagem paramétrica, quanto da metodologia aplicada aos dados dos ativos PETR4 e BBDC3/BBDC4.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Quando o assunto envolve processos estocásticos, a história começa com a constatação, pelo botânico Robert Brown (1828), de que partículas microscópicas de grãos de pólen suspensos na água apresentavam um movimento irregular, descobrindo o que seria chamado de "Movimento Browniano".

Décadas mais tarde, Einstein (1905) explicou o fenômeno do Movimento Browniano em detalhes e apresentou uma formulação matemática para descrever o fenômeno. Um pouco antes, Bachelier (1900) chegou em resultados matemáticos semelhantes na tentativa de explicar o movimento de ativos financeiros.

As ideias de Bachelier tiveram pouca repercussão, até que em 1954 Leonard Savage, professor da Universidade de Chicago, encontrou uma cópia da tese de Bachelier na biblioteca da universidade e se interessou pela abordagem desenvolvida pelo matemático. Savage apresentou a tese de Bachelier para o economista Paul A. Samuelson, que passou a se interessar pelo tema de precificação de ativos e desenvolveu os argumentos econômicos de que a evolução do preços dos ativos deve ser um passeio aleatório. Samuelson (1965) apresenta pela primeira vez a caracterização do processo do preço de um ativo como um Movimento Browniano Geométrico. Posteriormente, Samuelson e Merton (1969) partiram de um problema de maximização da utilidade do investidor e mostraram que o preço de uma opção pode ser visto como um valor esperado descontado utilizando probabilidades ajustadas ao risco. Essa abordagem, acrescida do princípio de não arbitragem, culmina na fórmula de Black e Scholes (1973) para precificação de opções.

O redescobrimento do trabalho de Bachelier e os desenvolvimentos que culminaram na fórmula de Black & Scholes marcaram uma série de avanços no campo do cálculo estocástico e das finanças quantitativas, que possibilitam o estudo de outros tópicos como o tema deste trabalho, que é encontrar os pontos ótimos de saída de um investimento assumindo que o resultado da posição é governado por uma equação diferencial estocástica.

Evans (2012) faz uma boa introdução ao tema das equações diferenciais estocásticas, apresentando de forma bem organizada a evolução do raciocínio desde a construção do Movimento Browniano simples, passando pela definição da integral estocástica e pela solução de equações diferenciais estocásticas até chegar em problemas de *optimal stopping*. Primeiramente o autor apresenta a caracterização de Wiener (1923) do Movimento Browniano, no que viria a ser conhecido como Processo de Wiener. O processo de Wiener possui algumas propriedades relevantes: em primeiro lugar, dado um intervalo (t, s) , suas trajetórias apresentam variação quadrática finita de tamanho $(t-s)$, ou seja do tamanho do intervalo, portanto crescente no tempo. Além disso, as trajetórias possuem variação infinita

em intervalos de tempo pequenos, a distribuição dos incrementos nestes intervalos é uma normal com média igual a zero e variância igual ao tamanho do intervalo e os incrementos são independentes para intervalos sem sobreposição. Essas características fazem com que as trajetórias sejam contínuas mas não diferenciáveis em quase nenhum ponto, portanto era um desafio falar em um diferencial estocástico e definir uma integral estocástica.

O processo de Wiener é um caso específico da classe de processos de Markov de primeira ordem, que são processos estocásticos cujo estado futuro depende apenas do estado atual e é independente dos valores passados do processo - ou seja, para estimar os valores futuros só importa onde a trajetória está, não o caminho pelo qual ela chegou até ali - matematicamente, podemos escrever, por exemplo, $P(X_{t+1}|\{X_t, X_{t-1}, \dots, X_0\}) = P(X_{t+1}|X_t)$. No contexto da tentativa de estabelecer um diferencial a ser utilizado no estudo de processos markovianos, Itô (1951) constroi uma equação diferencial estocástica, a difusão de Itô, que conta com dois parâmetros: um coeficiente do *drift* e um coeficiente da difusão.

Itô (1951) dá sentido ao termo diferencial estocástico que aparece na difusão ao aproximar a integral estocástica por uma soma de Riemann com o valor da função avaliada no ponto mais a esquerda de cada intervalo. Dessa forma, consegue definir a integral estocástica para uma série de processos não-antecipativos, ou seja processos que dependem apenas da informação disponível até o momento, ponto relevante para a aplicação em finanças. Outro resultado importante no chamado cálculo de Itô é o lema de Itô, que é a versão estocástica da regra da cadeia e que difere do cálculo tradicional devido à existência de variação quadrática, de forma que o termo associado à segunda derivada da função não desaparece como no cálculo tradicional.

Com essas ferramentas, é possível resolver uma série de equações diferenciais que envolvam funções de processos modelados segundo uma difusão de Itô, o que é frequente em finanças. Daí seguiu a modelagem do movimento do preço de uma ação como um Movimento Browniano Geométrico (impedindo o preço da ação de ser negativo, diferente do modelo utilizado por Bachelier), e posteriormente a derivação do modelo de Black e Scholes (1973) partindo de um argumento de não arbitragem e fazendo uso da mudança de medida, da medida de probabilidade "real" para a medida "neutra ao risco", de forma que sob a nova medida de probabilidade o processo se torna um martingal, ou seja, o valor esperado futuro condicional ao tempo t é igual ao valor em t .

Por fim, o importante resultado que associa um operador diferencial parcial de segunda ordem a uma difusão de Itô, dada pelo gerador do processo estocástico, dá suporte à fórmula de Dynkin (1960), que estabelece a relação entre a solução de equações diferenciais parciais e processos estocásticos. No contexto de problemas que visam encontrar pontos ótimos de saída de uma região de forma a maximizar a esperança de uma função do processo estocástico para um *stopping time* τ , a fórmula de Dynkin dá que esta esperança

é a solução de uma equação diferencial, de forma que o problema pode ser resolvido tanto por uma aproximação da esperança através da geração de trajetórias para o processo estocástico, quanto (em alguns casos particulares) analiticamente através da solução da equação diferencial.

Øksendal (2003) apresenta o seguinte problema: dado que o preço de uma ação segue um Movimento Browniano Geométrico, e considerando um custo de transação a e uma taxa de desconto ρ , como encontrar o stopping time τ que maximize o valor esperado do lucro da venda descontado a valor presente? A solução passa por aplicar a fórmula de Dynkin para transformar o problema em uma equação diferencial ordinária e então encontrar o preço da ação que maximize a função descontada.

Similarmente, Zhang (2001) considera o mesmo problema, porém adicionando um limite de *stop-loss*, trabalhando então com duas barreiras: o limite de *stop-loss* pré definido, e o *stop-gain* ótimo. Além disso, trabalha com cadeias de Markov para considerar diferentes condições de mercado, sendo que o caso em que há apenas um estado equivale ao problema proposto por Øksendal. O autor calcula o resultado esperado do trade e as probabilidades de ganho e perda considerando diversas combinações dos parâmetros (taxa de desconto, coeficiente do drift e coeficiente de difusão, *stop loss* e *stop gain*). Outros que seguem abordagem semelhante são Elo et al. (2008), que considera o mesmo problema para uma classe de modelos de difusão gaussianos exponenciais com mudança de regime e com parâmetros que podem variar no tempo, e Dai, Zhang e Zhu (2010) que também utilizam cadeias de Markov e seguem a abordagem de programação dinâmica para encontrar os pontos ótimos.

Bertram (2010) considera um problema semelhante, porém para ativos com característica de reversão à média, procurando não apenas o ponto de saída (venda) ótimo, mas também o ponto ótimo de entrada (compra). Zhang e Zhang (2008) e Song e Zhang (2013) também consideram um processo de reversão à média, no qual a posição do investidor é sempre zerado ou comprado, e os pontos de entrada e saída são obtidos utilizando uma abordagem de programação dinâmica. Zeng e Lee (2014) também encontram pontos ótimos de entrada e saída para um processo com reversão à média e testam a estratégia para um caso de *pairs trading*. Suzuki (2018) acrescenta a possibilidade de ficar vendido no par de ativos e compara os resultados de uma simulação de monte carlo com uma simulação com dados históricos. Já Endres e Stübinger (2018) consideram o problema para processos Ornstein-Uhlenbeck com saltos de Levy.

Prado (2018) obtém solução numérica para encontrar pontos ótimos de entrada e saída para estratégias que seguem um processo Ornstein-Uhlenbeck. Fazendo o ajuste dos parâmetros através de dados históricos, o autor simula diversas trajetórias considerando o processo com reversão a média e encontra os pontos que maximizam o índice de Sharpe esperado.

Kong (2010) considera tanto o problema de reversão à média, considerando um processo Ornstein-Uhlenbeck, quanto o problema de *trend following* através de um processo com mudança de regime, utilizando para ambos a abordagem de programação dinâmica e comparando resultados de uma simulação de monte carlo e de simulação com dados históricos.

Fica claro que a ideia de *optimal stopping* tem aplicações em finanças e no processo de tomada de decisões em uma estratégia de investimentos, sendo várias as possíveis combinações de estudo: processos que seguem um Movimento Browniano Geométrico com ou sem mudanças de regime, processos com reversão à média para modelagem de pares de ativos, incluindo ou não saltos de Levy. E a solução pode ser obtida tanto analiticamente quanto numericamente, podendo ser comparada com o obtido através de dados históricos. Para este trabalho, consideraremos processos que seguem um Movimento Browniano Geométrico simples, processos cujo Browniano vem de uma Mistura de Normais e processos com reversão à média, comparando os resultados obtidos para cada caso com os resultados obtidos otimizando os parâmetros de saída utilizando dados históricos e *bootstrap*.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Stopping Time

Em um espaço filtrado $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, uma variável aleatória $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é um *stopping time* com relação à $\mathcal{F}(\cdot)$ se:

$$\tau \leq t \in \mathcal{F}(t) \text{ para todo } t \geq 0 \quad (3.1)$$

Em outras palavras, dado um evento $\omega \in \Omega$ que ocorre em um momento aleatório $\tau(\omega)$, o momento de ocorrência do evento τ é um stopping time se, em qualquer instante t é possível saber se o evento ocorreu ou não. Por exemplo, o primeiro instante no qual um processo estocástico "bate" em uma determinada região é um *stopping time*, pois é um evento $\mathcal{F}(t)$ -mensurável, enquanto a última vez que o processo bate em uma determinada região não é um *stopping time*, visto que o evento depende da história futura completa do processo.

Um exemplo de *stopping time* em finanças é a ocorrência de um *stop loss* ou *stop gain*, pois assim que o lucro ou prejuízo da estratégia bate em uma das barreiras é possível saber que o limite foi rompido. Por outro lado, a máxima que diz que um investidor deve "comprar na mínima e vender na máxima" não é um *stopping time*, pois só é possível saber se um ponto representa a mínima ou a máxima da série histórica se os preços em períodos de tempo no futuro forem conhecidos.

Dessa forma, o conceito de *stopping time* é importante para o estudo de eventos que ocorrem em momentos aleatórios, como o exemplo acima de ocorrência de *stop* de uma estratégia de investimentos ao bater em um limite de lucro ou prejuízo. Para isso podemos trabalhar com integrais estocásticas com limites de integração aleatórios, de forma que se τ é um stopping time e $\{G_t\}$ é um processo adaptado, então a Integral de Itô

$$E\left(\int_0^\tau G_t dW_t\right) = 0 \quad (3.2)$$

$$E\left(\left(\int_0^\tau G_t dW_t\right)^2\right) = E\left(\int_0^\tau G_t^2 dt\right) \quad (3.3)$$

Onde W_t é o processo de Wiener.

3.2 Gerador de uma Difusão de Itô

Considerando uma difusão do tipo

$$dX = b(X, t)dt + \sigma(X, t)dW \quad (3.4)$$

Pelo lema de Itô, temos que:

$$du(X, t) = u_t dt + u_x(bdt + \sigma dW) + \frac{1}{2}u_{xx}\sigma^2 dt \quad (3.5)$$

$$du(X, t) = u_t dt + bu_x dt + \sigma u_x dw + \frac{1}{2}u_{xx}\sigma^2 dt \quad (3.6)$$

Definindo o gerador L associado ao processo X , neste caso unidimensional, como o operador diferencial parcial

$$Lu := \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + bu_x \sigma \quad (3.7)$$

A forma integral de $du(X, t)$ pode ser escrita como:

$$u(X(t), t) - u(X(0), 0) = \int_0^t u_t + Luds + \int_0^t \sigma u_x dW \quad (3.8)$$

3.3 Fórmula de Dynkin

Para um *stopping time* $0 \leq \tau \leq T$:

$$u(X(\tau), \tau) - u(X(0), 0) = \int_0^\tau u_t + Luds + \int_0^\tau \sigma u_x dW \quad (3.9)$$

Tirando a esperança da equação acima, chegamos na fórmula de Dynkin, que nos fornece uma conexão entre equações diferenciais parciais e equações diferenciais estocásticas

$$E(u(X(\tau), \tau)) - E(u(X(0), 0)) = E\left(\int_0^\tau u_t + Luds\right) \quad (3.10)$$

3.4 Aplicação

Suponha que o processo X_t associado a uma estratégia de investimentos varie de acordo com uma equação diferencial estocástica, por exemplo

$$dX_t = b(X, t)dt + \sigma(X, t)dW_t, \quad X_0 = x > 0 \quad (3.11)$$

Qual o *stopping time* τ ideal para o investidor se desfazer da estratégia, de forma a maximizar uma determinada função associada a este processo (por exemplo, de retorno ajustado ao risco ou retorno descontado por uma taxa de impaciência):

$$\max_{\tau} E^{(s,x)}[g(\tau, X_{\tau})] \quad (3.12)$$

Onde $E^{(s,x)}[\cdot]$ é a esperança condicional no instante de tempo s e no ponto inicial x

Aplicando a fórmula de Dynkin, podemos mostrar que $E^{(s,x)}[g(\tau, X_{\tau})]$ é a solução de uma equação diferencial parcial e então, resolvendo essa equação e maximizando em x , chega-se nos preços ótimos de venda.

Por exemplo, considerando que o preço de uma ação é governado pela seguinte equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = s, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

S_t pode ser escrito como

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad (3.14)$$

Onde X_t é dado por:

$$X_t = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dw \quad (3.15)$$

Dado um par $(-z_1, z_2)$, que representam respectivamente barreiras de *stop loss* e *stop gain* expressas em termos de log-retorno, queremos encontrar um stopping time τ_0 , onde:

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t \notin (-z_1, z_2)\} \quad (3.16)$$

De forma a maximizar uma função $V(z_1, z_2)$, onde $g(X)$ é uma função de X (por exemplo o retorno) e ρ é uma taxa de desconto:

$$V(z_1, z_2) = E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}] \quad (3.17)$$

Portanto, nosso objetivo é encontrar o par $(-z_1, z_2)$ que maximize a esperança de uma função de recompensa descontada no tempo. Em outras palavras, dado que o preço do ativo é um processo estocástico, para um dado par $(-z_1, z_2)$ cada possível trajetória deste processo é encerrada no momento em que alcança ou rompe uma das barreiras. O termo de dentro da esperança do lado direito da equação 3.17 é o valor presente da função de recompensa para cada uma das trajetórias calculada no instante em que o processo foi encerrado. Queremos encontrar $(-z_1, z_2)$ que maximize a esperança desta função.

Considerando o processo de X_t na forma diferencial, sendo $r = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$

$$\begin{cases} dX_t = rdt + \sigma dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (3.18)$$

Dado a função valor

$$v(x) = E[g(X(\tau(x)))e^{-\rho\tau(x)}] \quad (3.19)$$

Temos que $\tau_0 = \tau(0)$ e $E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}] = v(0) = V(z_1, z_2)$

$v(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} rv_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \rho v = 0 \text{ em } U \\ v(x) = g(x) \text{ em } \partial U \\ U = \{x : x \in (-z_1, z_2)\} \end{cases} \quad (3.20)$$

Para ver isto, considere uma função do tipo

$$Y(X, t) = v(X_t)e^{-\rho t} : \quad (3.21)$$

Aplicando o lema de Itô, temos:

$$dY = (e^{-\rho t})dv + v d(e^{-\rho t}) + d(e^{-\rho t})dv \quad (3.22)$$

Como $d(e^{-\rho t})$ é de ordem de grandeza dt , o produto $d(e^{-\rho t})dv$ é nulo, restando:

$$dY = [(rv_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx})dt + \sigma v_x dw]e^{-\rho t} - \rho v e^{-\rho t} dt \quad (3.23)$$

$$dY = (rv_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \rho v)e^{-\rho t}dt + \sigma v_x e^{-\rho t}dw \quad (3.24)$$

Além disso, as derivadas parciais Y_x , Y_{xx} , Y_t são dadas por

$$Y_x = e^{-\rho t}v_x \quad (3.25)$$

$$Y_{xx} = e^{-\rho t}v_{xx} \quad (3.26)$$

$$Y_t = -\rho e^{-\rho t}v \quad (3.27)$$

Dessa forma, para o *stopping time* $\tau(x)$, aplicando a fórmula de Dynkin na função $Y(X, t)$, temos que

$$E[e^{-\rho\tau(x)}v(X(\tau(x)))] = E[v(X(0))] + E\left[\int_0^{\tau(x)} (rv_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \rho v)e^{-\rho s}ds\right] \quad (3.28)$$

Em U , temos que $rv_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \rho v = 0$, portanto

$$E[e^{-\rho\tau(x)}v(X(\tau(x)))] = E[v(X(0))] = v(x) \quad (3.29)$$

Em ∂U , $v(x) = g(x)$, portanto

$$v(x) = E[e^{-\rho\tau(x)}g(X(\tau(x)))] \quad (3.30)$$

Zhang (2001) mostra que a solução da equação diferencial é dada por:

$$v(x) = \left(\frac{e^{\eta_1 z_1 - \eta_2(z_1+z_2)}g(z_2) - e^{-\eta_1 z_1}g(-z_1)}{e^{(\eta_1 - \eta_2)(z_1+z_2)} - 1}\right)e^{\eta_1 x} + \left(\frac{-e^{-\eta_2 z_2}g(z_2) + e^{\eta_1 z_1 + z_2(\eta_1 - \eta_2)}g(-z_1)}{e^{(\eta_1 - \eta_2)(z_1+z_2)} - 1}\right)e^{\eta_2 x} \quad (3.31)$$

Sendo:

$$\eta_1 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (3.32)$$

$$\eta_2 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + 2\rho\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (3.33)$$

A partir da função, queremos encontrar o par $(-z_1, z_2)$ que maximize $v(0)$:

$$v(0) = \frac{(e^{\eta_1 z_1 + (\eta_1 - \eta_2) z_2} - e^{\eta_1 z_1})g(-z_1) + (e^{(\eta_1 - \eta_2) z_1 - \eta_2 z_2} - e^{-\eta_2 z_2})g(z_2)}{e^{(\eta_1 - \eta_2)(z_1 + z_2)} - 1} \quad (3.34)$$

Os pontos $(-z_1, z_2)$ que maximizam $v(0)$ para um dado conjunto de parâmetros podem ser facilmente obtidos a partir de um otimizador.

Analogamente, o mesmo passo a passo pode ser utilizado para encontrar os pontos ótimos de saída para uma estratégia governada por um processo estocástico Ohrstein - Uhlenbeck.

Suponha que para um par de ativos o log do spread seja governado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = \kappa(m - X_t)dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Queremos encontrar um stopping time τ_0 , onde:

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t \notin (-z_1, z_2)\} \quad (3.36)$$

De forma a maximizar uma função $V(z_1, z_2)$, onde $g(X)$ é uma função de X (por exemplo o retorno) e ρ é uma taxa de desconto:

$$V = E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}] \quad (3.37)$$

Dado a função valor

$$v(x) = E[g(X(\tau(x)))e^{-\rho\tau(x)}] \quad (3.38)$$

Temos que $\tau_0 = \tau(0)$ e $E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}] = v(0) = V(z_1, z_2)$

$v(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} \kappa(m - x)v_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \rho v = 0 \text{ em } U \\ v(x) = g(x) \text{ em } \partial U \\ U = \{x : x \in (-z_1, z_2)\} \end{cases} \quad (3.39)$$

Sendo que o gerador da SDE é dado por

$$L = \kappa(m - x)v_x + \frac{\sigma^2}{2}v_{xx} \quad (3.40)$$

É possível resolver a SDE dada em 3.39 analiticamente e maximizar sobre os pares $(-z_1, z_2)$ para encontrar os pontos ótimos de saída, no entanto não é necessário, pois podemos obter a aproximação da solução através da simulação de trajetórias, como esclareceremos mais à frente na seção de metodologia. Resolver o problema através de simulações tem a vantagem de funcionar para casos em que a solução analítica não é trivial ou não é possível de ser obtida.

3.5 Mistura de Normais

Seguindo notação adotada por Lemke (2006), uma variável aleatória X é uma Mistura de Normais se sua densidade de probabilidade pode ser escrita como:

$$p(x) = \sum_{b=1}^B \omega_b \phi(x; \mu_b, \sigma_b^2) \quad (3.41)$$

$$= \sum_{b=1}^B \omega_b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(x-\mu_b)^2}{2\sigma_b^2}} \quad (3.42)$$

Onde $b = 1, \dots, B$ são as componentes da mistura de normais e ω_b o peso associado a cada componente. Em outras palavras, é como se cada observação tivesse probabilidade ω_b de vir de uma distribuição normal com média μ_b e desvio padrão σ_b . Como cada ω_b é uma probabilidade, $0 \leq \omega_b \leq 1$ e $\sum_{b=1}^B \omega_b = 1$

Já a distribuição é dada por:

$$P(X \leq x) = \sum_{b=1}^B \omega_b N\left(\frac{x - \mu_b}{\sigma_b}\right) \quad (3.43)$$

Onde $N(x)$ é a distribuição acumulada de uma normal padrão. Ou seja, a distribuição acumulada da Mistura de Normais é dada pela soma ponderada da distribuição acumulada das normais que a compõem.

Lemke (2006) ressalta que uma variável aleatória possuir distribuição Mistura de Normais é diferente de ser uma soma de normais. Se fosse uma soma de normais, sua distribuição seria também normal, enquanto a distribuição de mistura de normais pode resultar em diversas distribuições a depender dos parâmetros - a variável aleatória pode possuir assimetria, kurtose ou até ser bimodal.

A média da distribuição é dada pela soma ponderada das médias das normais que compõem a mistura.

$$\mu = E(X) = \sum_{b=1}^B \omega_b \mu_b \quad (3.44)$$

A variância é dada pela soma ponderada das variâncias das componentes somadas à variância das médias das componentes

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{b=1}^B \omega_b [\sigma_b^2 + (\mu_b - \mu)^2] \quad (3.45)$$

Já o terceiro e quarto momentos são dados por:

$$E[(X - \mu)^3] = \sum_{b=1}^B \omega_b [3(\mu_b - \mu)\sigma_b^2 + (\mu_b - \mu)^3] \quad (3.46)$$

$$E[(X - \mu)^4] = \sum_{b=1}^B \omega_b [3\sigma_b^4 + 6(\mu_b - \mu)^2\sigma_b^2 + (\mu_b - \mu)^4] \quad (3.47)$$

Sendo que:

$$Assimetria(X) = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} \quad (3.48)$$

$$Kurtose(X) = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} - 3 \quad (3.49)$$

Quando todas as médias são iguais, ou seja $\mu_b = \mu$, os momentos são dados por:

$$E(X) = \mu \quad (3.50)$$

$$Var(X) = \sum_{b=1}^B \omega_b \sigma_b^2 \quad (3.51)$$

$$Assimetria(X) = 0 \quad (3.52)$$

$$Kurtose(X) = \frac{3 \sum_{b=1}^B \omega_b \sigma_b^4}{\sigma_b^4} - 3 \quad (3.53)$$

Sendo que o excesso de Kurtose neste caso é positivo, ou seja a cauda da distribuição é mais pesada que a da distribuição Normal.

4 METODOLOGIA

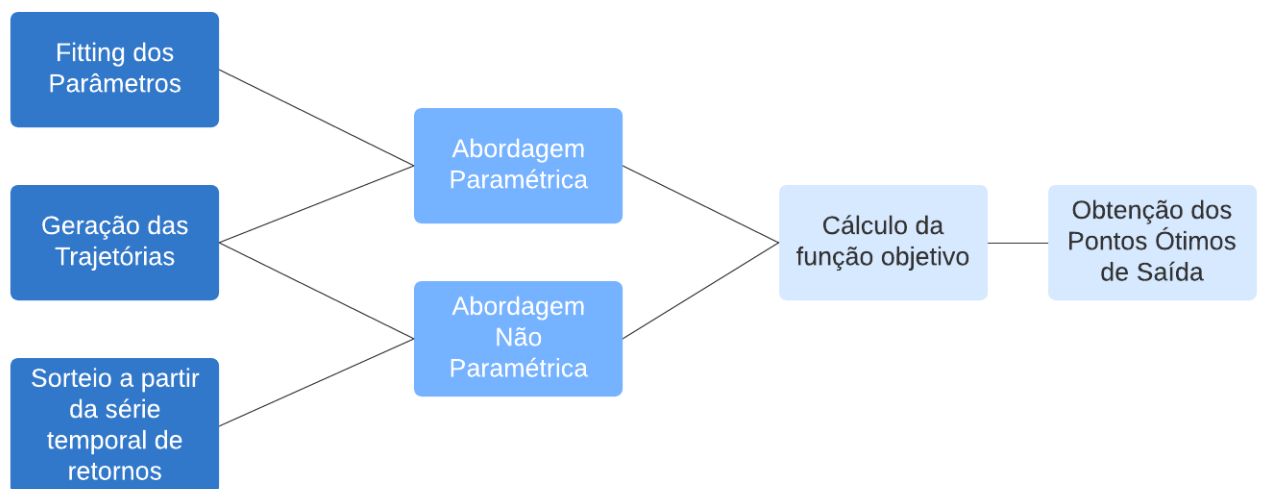
Na seção anterior definimos o nosso objetivo de encontrar os pontos ótimos de saída de uma estratégia de investimentos e mostramos, pela fórmula de Dynkin, que é possível transformar o problema em uma equação diferencial parcial e resolver a equação para encontrar os pontos ótimos de saída. Dessa forma, o problema pode ser resolvido tanto analiticamente em casos mais simples, quanto através de simulações, onde são geradas diversas trajetórias e se calcula a média da função objetivo em cada trajetória para obter o valor esperado.

Para simular as trajetórias utilizando uma abordagem paramétrica, é necessário fazer a calibração dos parâmetros do processo estocástico e então gerar a simulação de Monte-Carlo através da discretização do processo.

Alternativamente à abordagem paramétrica, na qual assumimos um modelo específico para o comportamento das ações, também utilizamos uma abordagem não-paramétrica através da técnica de *bootstrapping* e comparamos ambas as abordagens.

A seguir descreveremos a técnica da simulação de Monte Carlo para o processo modelado como um Movimento Browniano Geométrico, para um que envolva Mistura de Normais e para o processo Ornstein-Uhlenbeck, como fazer a calibração dos parâmetros, a técnica de *bootstrapping* e o método de obtenção dos pontos ótimos de saída.

Figura 1 – Resumo da metodologia



4.1 Geração das Trajetórias

4.1.1 Abordagem Paramétrica - Simulação de Monte Carlo

Considerando que o processo estocástico pode ser modelado como uma difusão de Itô:

$$dX_t = b(X, t)dt + \sigma(X, t)dW_t, \quad X_0 = x > 0 \quad (4.1)$$

Nosso objetivo é encontrar um *stopping time* τ_0 que maximize a função $V(z_1, z_2)$ dada por:

$$V = E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}] \quad (4.2)$$

Onde $\tau_0 = \tau_0(z_1, z_2)$ é dado por:

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 : X_t \notin (-z_1, z_2)\} \quad (4.3)$$

$$g(X(\tau_0)) = e_t^X - 1 \quad (4.4)$$

Para computar o termo $E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}]$, simulamos milhares de trajetórias através da simulação de Monte-Carlo, fazendo uso da discretização proposta por *Euler-Maruyama*, conforme descrita por Glasserman (2004):

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + b(\hat{X}(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma(\hat{X}(t_i))\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \quad (4.5)$$

Onde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, $\hat{X}(0) = X(0)$, z_1, z_2, \dots são normais padrão independentes e $t_i = ih$ para um determinado h , ou seja, trabalharemos com intervalos de tamanho fixo.

A partir desta discretização, são geradas n trajetórias com m períodos cada.

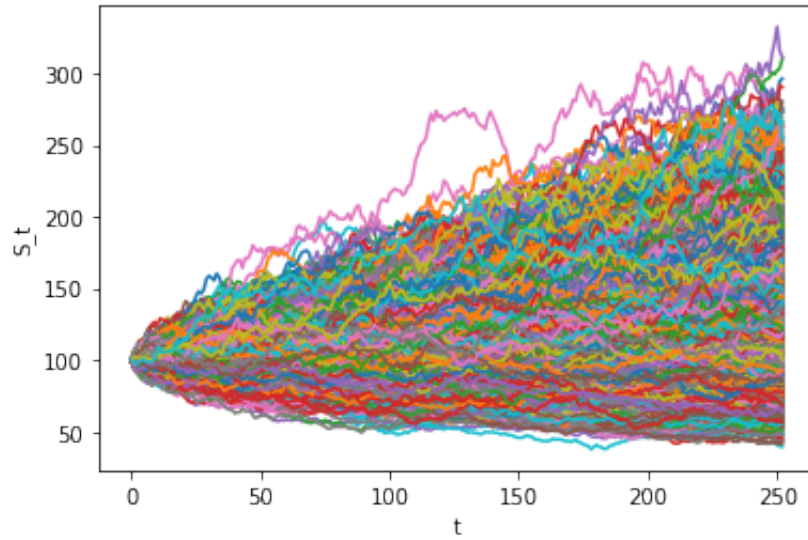
Para um ativo ou instrumento financeiro modelado como um Movimento Browniano Geométrico, temos que o comportamento do ativo em questão é dado por

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = s, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

A discretização é dada, portanto, por

$$\hat{S}(t_{i+1}) = \hat{S}(t_i) + \mu \hat{S}(t_i)[t_{i+1} - t_i] + \sigma \hat{S}(t_i)\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \quad (4.7)$$

Figura 2 – Simulação de Monte Carlo para instrumento modelado como Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$

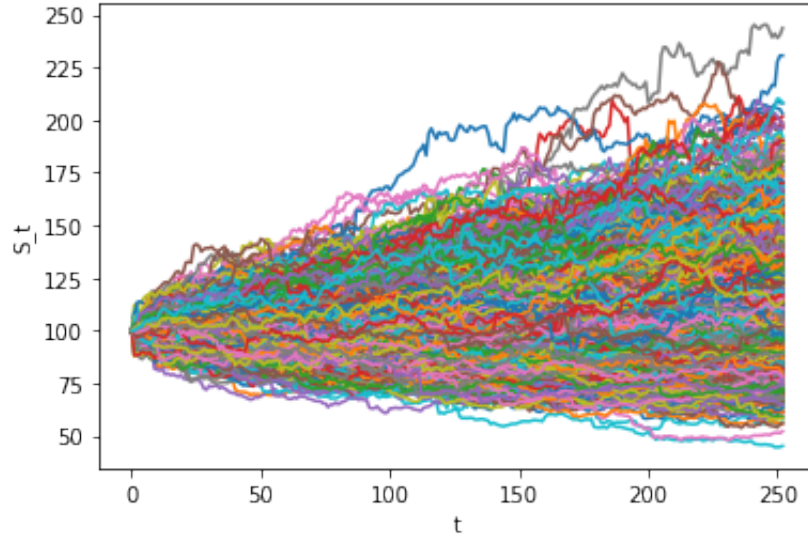


Já no caso em que a distribuição vem de uma mistura de normais, a equação diferencial estocástica é a mesma do Movimento Browniano Geométrico, exceto pelo termo dW que neste caso vem de uma mistura de normais.

O passo a passo para o caso de uma mistura de normais com dois componentes é dado por:

- A cada período dt , sorteia um número aleatório de uma Uniforme $u \sim U(0, 1)$
- Se $u \leq \omega_a$, sortear um número ϵ_t de uma normal $\sim N(\mu_a, \sigma_a)$
- Se $u > \omega_a$, sortear um número ϵ_t de uma normal $\sim N(\mu_b, \sigma_b)$
- O valor sorteado é utilizado para computar o termo $dw = \epsilon_t \sqrt{t_{i+1} - t_i}$

Figura 3 – Simulação de Monte Carlo para instrumento com distribuição Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.5$



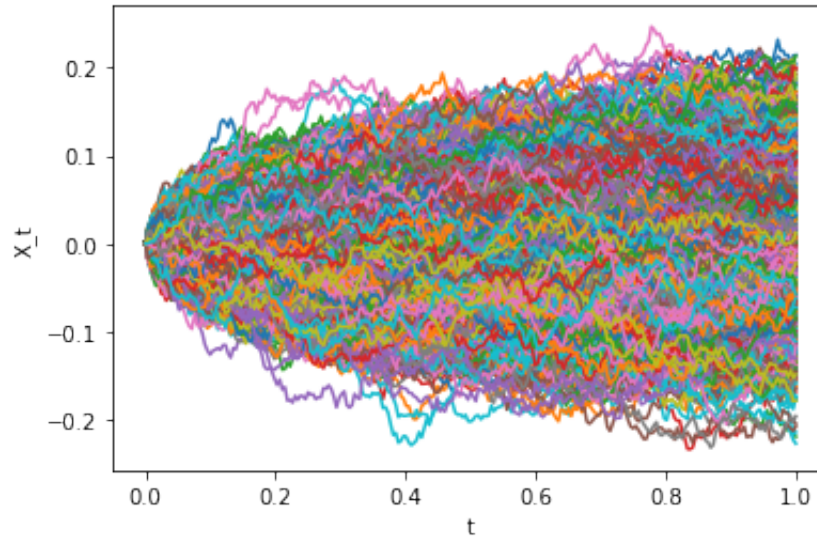
Por fim, no caso em que o ativo ou instrumento apresenta reversão à média e modelamos como um processo Ornstein-Uhlenbeck, temos que o comportamento do instrumento em questão é dado por

$$\begin{cases} dX_t = \kappa(m - X_t)dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

A discretização é dada, portanto, por

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + \kappa(m - \hat{X}(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \quad (4.9)$$

Figura 4 – Simulação de Monte Carlo para instrumento modelado como processo Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0.1$



4.1.2 Abordagem Não-Paramétrica - Bootstrapping

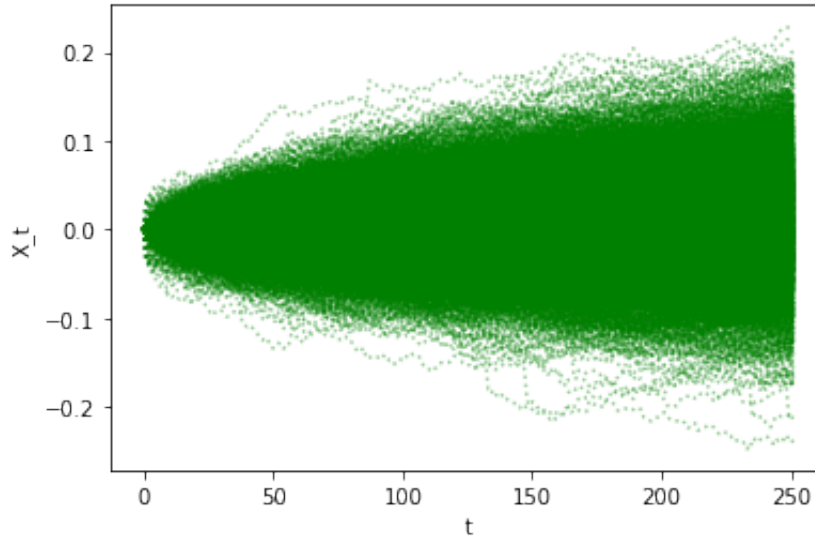
A abordagem paramétrica possui algumas desvantagens, pois depende de uma série de hipóteses (por exemplo, no caso log-normal e no processo Ornstein-Uhlenbeck assumimos volatilidade constante), além de ser necessário estimar uma série de parâmetros.

Uma alternativa é utilizar uma abordagem não-paramétrica, através da técnica de *bootstrapping*, que não depende de nenhum modelo, com a desvantagem de limitar os eventos aos que já ocorreram historicamente.

A técnica de *bootstrapping* consiste em sortear aleatoriamente retornos da série temporal de retornos. No caso da modelagem de um ativo, geramos a série histórica dos log-retornos do ativo e, para cada uma das n simulações, sorteamos com reposição m dados de log-retorno. Ao acumularmos os log-retornos sorteados dentro de uma mesma trajetória, temos uma trajetória do log-retorno acumulado do ativo.

No caso da modelagem de um par de ativos, o sorteio é feito sobre a série de log-retornos do par, ou seja, de $\log(\frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}})$ onde $X_{t_i} = z_{t_i} - y_{t_i}$.

Figura 5 – Geração de Trajetórias através da técnica de Bootstrapping



4.2 Calibração dos Parâmetros

No caso da abordagem paramétrica, para simular o comportamento de um ativo específico, é preciso fazer a calibração dos parâmetros do processo estocástico em questão. No caso do Movimento Browniano Geométrico, é preciso encontrar os coeficientes de drift e difusão μ e σ que melhor se ajustam ao comportamento do ativo ao longo do tempo. No caso que envolve uma Mistura de Normais, é necessário estimar, além dos parâmetros μ_1 , μ_2 , σ_1 e σ_2 , o peso w_1 . Já no caso do processo Ornstein–Uhlenbeck, é preciso estimar a média de longo prazo m , a velocidade de reversão à média κ e o coeficiente de difusão σ .

4.2.1 Movimento Browniano Geométrico

O comportamento de um ativo que segue um Movimento Browniano Geométrico é descrito por:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4.10)$$

Na forma logaritmica:

$$d\log(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t \quad (4.11)$$

De forma que podemos escrever

$$E\left[\log\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)[t_i - t_{i-1}] \quad (4.12)$$

$$\text{Var}[\log(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}})] = \sigma^2[t_i - t_{i-1}] \quad (4.13)$$

Portanto, partindo da série histórica de preços S_{t_i} de um determinado ativo, transformando a série em log-retorno

$$r_i = \log(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}) \quad (4.14)$$

Podemos estimar os parâmetros μ e σ através da média e da variância amostral dos log retornos, de forma que

$$\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{1}{n} \sum_1^n r_i \quad (4.15)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{[t_i - t_{i-1}]}} \quad (4.16)$$

Onde S é o desvio padrão amostral da série de log-retornos.

A partir destes parâmetros, podemos simular as trajetórias como descrito na seção anterior e encontrar os parâmetros ótimos de saída para o ativo.

4.2.2 Mistura de Normais

A distribuição Mistura de Normais com dois componentes, que será utilizada neste trabalho, possui 5 parâmetros a serem estimados: μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 e w_1 , onde w_1 é o peso do primeiro componente.

Para realizar a calibração dos parâmetros, seguimos os seguintes passos:

- A partir da série temporal de log-retorno diário do ativo, construímos uma distribuição empírica discreta com 51 *bins* da seguinte maneira:

O primeiro *bin*, que denotamos como bin_0 é dado pelo valor mínimo da série, enquanto o último, denotado como bin_{50} é dado pelo valor máximo. Para os *bins* intermediários, fizemos $bin_t = bin_{t-1} + (bin_{50} - bin_0)/50$.

Para cada *bin*, calculamos a probabilidade acumulada através da contagem de quantas observações são menores ou iguais ao valor daquele *bin* e dividindo pela quantidade total de pontos na amostra.

A partir da probabilidade acumulada em cada *bin*, estimamos a densidade diferenciando a probabilidade acumulada, ou seja $f(bin_t) = P(bin_t) - P(bin_{t1})$, onde $f()$ representa a densidade e $P()$ a probabilidade acumulada.

- Calculamos, para dado conjunto de parâmetros m_1, m_2, s_1, s_2, w_1 , onde m_i representa as médias de cada componente, s_i o desvio padrão e w_1 o peso do primeiro componente, a probabilidade acumulada paramétrica para cada *bin* assumindo uma distribuição de Mistura de Normais. Para isso, utilizamos a fórmula 3.43. Em seguida, calculamos a densidade para cada *bin* da mesma forma que construímos a densidade empírica, ou seja diferenciando a probabilidade acumulada.
- Utilizamos a ferramenta *Solver* do *MS Excel* para encontrar os parâmetros m_1, m_2, s_1, s_2, w_1 que minimizem a soma dos quadrados das diferenças entre a densidade empírica e a densidade paramétrica. A otimização deve respeitar as restrições $s_1, s_2 > 0, 0 \leq w_1 \leq 1$. Adicionalmente, acrescentamos as restrições $0.5 \leq w_1 \leq 1$ e $s_1 \leq s_2$, ou seja a componente de menor volatilidade ocorre em frequência igual ou maior que a de maior volatilidade - o objetivo destas restrições adicionais foi de garantir uma interpretação que faça sentido com a realidade de que há dois regimes de volatilidade distintas, um de menor volatilidade e outro de maior volatilidade porém menos frequente.
- A partir dos parâmetros estimados, encontramos os parâmetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, w_1$ considerando que $\mu_i = 252 * (m_i + 0.5 * s_i^2)$, $\sigma_i = s_i * \sqrt{252}$, $w_1 = w_1$

4.2.3 Processo Ornstein-Uhlenbeck

O primeiro passo para construir o *spread* a ser modelado é encontrar um par de ativos que cointegre. Para checar se o par cointegra, foi utilizado o teste de cointegração Engle-Granger. Dado duas séries não estacionárias $I(1)$ (no caso deste trabalho, as séries do log do preço de dois ativos), o teste Engle-Granger testa se o resíduo da regressão entre as séries é estacionário, ou seja:

$$z_t - y_t = u_t \quad (4.17)$$

Se u_t for estacionário, rejeita-se a hipótese nula de que não há relação de cointegração entre as séries.

Portanto, precisamos pegar a série histórica de preços de dois ativos, transformar os preços em log e realizar o teste de cointegração nas séries dos log dos preços. O pacote *stattools* da biblioteca *statsmodel* para Python realiza o teste de cointegração de Engle - Granger.

Deve ser feito o teste de cointegração de z em y e de y em z e escolher a que tiver o menor p-valor para determinar qual será a variável "independente".

Em seguida, calculamos o coeficiente da regressão do log-preço de um ativo no log-preço do outro e construímos a série histórica do spread como $X_t = z_t - y_t$

A partir da série histórica do spread, para encontrar os parâmetros do processo Ornstein–Uhlenbeck que melhor se ajustam aos dados, Avellaneda e Lee (2010) propôs descrever o processo como um AR(1), estimar os parâmetros da regressão do AR(1) e a partir daí encontrar os parâmetros do processo. O processo é dado por:

$$X_{t+\Delta_t} = e^{-\kappa\Delta_t} X_t + m(1 - e^{-\kappa\Delta_t}) + \sigma \int_t^{t+\Delta_t} e^{-\kappa(t-s)} dW_s \quad (4.18)$$

Portanto pode ser escrito como:

$$X_{t+\Delta_t} = aX_t + b + v_{n+1} \quad (4.19)$$

Sendo $v_n \sim N(0, \sigma^2(\frac{1-e^{-2\kappa\Delta_t}}{2\kappa})) i.i.d.$

Este é um processo AR(1), portanto podemos estimar os parâmetros a, b do AR(1) para encontrar os parâmetros da SDE que queremos simular:

$$\kappa = -\frac{1}{\Delta_t} \ln(a) \quad (4.20)$$

$$m = \frac{b}{1-a} \quad (4.21)$$

$$\sigma = \frac{\text{desviopadrão}(X_{n+1} - aX_n - b)}{\sqrt{1-a^2}} \sqrt{-2\frac{1}{\Delta_t} \ln(a)} \quad (4.22)$$

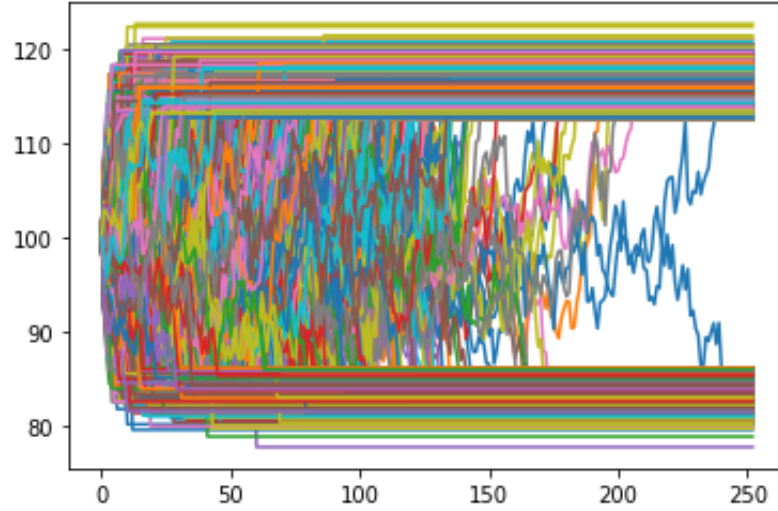
Para encontrar os parâmetros do AR(1), utilizamos o pacote *arima_model* da biblioteca *statsmodels* para *Python*, para fazer a regressão de X_{n+1} em X_n pelo método de máxima verossimilhança.

A partir destes parâmetros, podemos simular as trajetórias como descrito na seção anterior e encontrar os parâmetros ótimos de saída para o par de ativos em questão.

4.3 Obtenção dos pontos ótimos de saída

Uma vez geradas as trajetórias, seja através da abordagem paramétrica ou da abordagem não paramétrica, desejamos encontrar os pontos ótimos de saída da estratégia. A figura 6 ilustra o que representam esses pontos de saída - funcionam como "barreiras" que uma vez rompidas "encerram" o processo.

Figura 6 – Ilustração dos Pontos de Saída



Dado um par $(-z_1, z_2)$, para cada trajetória se verifica em cada período t_i se uma das barreiras foi rompida. Uma vez que uma das barreiras é rompida, a simulação daquela trajetória é interrompida e calculamos o valor da função valor no primeiro instante em que a barreira foi ultrapassada. Calculando a função $g(X_{\tau_0})e^{-\rho\tau_0}$ para cada uma das n trajetórias e calculando a média aritmética do valor em todas as trajetórias que foram encerradas, temos uma aproximação de $E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}]$.

Para implementação da simulação, a condição que indica se a trajetória foi interrompida no período t_i depende se foi simulado o preço do ativo, o log-preço ou o retorno acumulado. Como $(-z_1, z_2)$ são barreiras expressas em log-retorno, caso a simulação seja feita no preço do ativo, a condição é dada por $\hat{S}(t_i) \geq S_0 e^{z_2}$ ou $\hat{S}(t_i) \leq S_0 e^{-z_1}$. Se a simulação é sobre o log-preço do ativo, a condição que indica se a trajetória foi interrompida no período t_i é dada por $\hat{X}(t_i) \geq X_0 + z_2$ ou $\hat{X}(t_i) \leq X_0 - z_1$. Por fim, se a simulação é sobre o log-retorno acumulado, a condição é dada por $R_{t_i} \geq z_2$ ou $R_{t_i} \leq -z_1$.

Com relação à sensibilidade da função objetivo com relação ao parâmetro ρ , a figura 7 mostra o efeito de $e^{-\rho\tau_0}$ para diferentes valores de ρ com relação ao tempo. Outro ponto importante a se observar é a convergência do tempo que leva para as trajetórias baterem em uma das barreiras e serem encerradas. A figura 8 ilustra, para as trajetórias que já foram encerradas até cada período, a média e a mediana do tempo que levou para as trajetórias serem encerradas. Depois de um certo período de tempo, as métricas se estabilizam, indicando que a maior parte das trajetórias já foi encerrada.

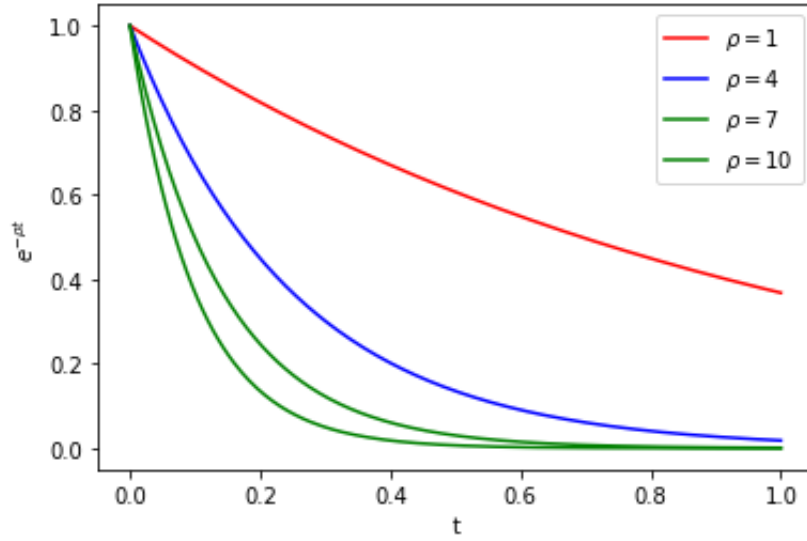
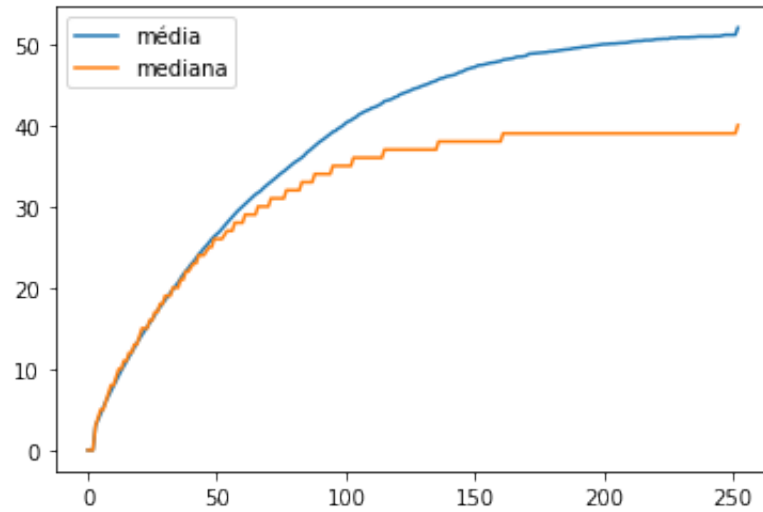
Figura 7 – Função de desconto para diferentes valores de ρ 

Figura 8 – Convergência do tempo para o processo ser encerrado



Para cada trajetória, computamos no *stopping time* τ_0 o valor da função $g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}$. Calculando a média aritmética deste valor em todas as trajetórias que foram encerradas, temos a aproximação de $E[g(X(\tau_0))e^{-\rho\tau_0}]$. Se a simulação é feita sobre o preço, $g(X_{\tau_0}) = \frac{S_t - S_0}{S_0}$. Se é feita sobre o log-preço, $g(X_{\tau_0}) = e^{X_t - X_0} - 1$. Se é feita sobre o log-retorno acumulado, $g(X_{\tau_0}) = e^{R_t} - 1$, onde R_t representa a série do log-retorno acumulado de uma trajetória.

Por fim, basta encontrar o par (z_1, z_2) que maximize o valor esperado da função objetivo. Para isso, podemos fazer tanto um grid de parâmetros ou utilizar um otimizador.

Podemos construir um grid $[0, a] \times [0, b]$, onde z_1 varie entre 0 e a e z_2 varie entre 0 e b . Após rodar a simulação para cada par de parâmetros dentro do grid, escolhemos o par que maximize o valor esperado da função valor.

Neste trabalho também utilizamos o otimizador "Dual Annealing" através da biblioteca *Scipy* em Python. Para tanto, construímos uma função que gera as trajetórias e guarda o negativo do valor esperado da função valor, onde os argumentos são as barreiras de saída, e o otimizador encontra o par (z_1, z_2) que minimiza o negativo da função (equivalente a encontrar o ponto máximo da função). O método do Grid e do otimizador chegam em resultados bastante semelhantes, porém o otimizador é consideravelmente mais lento.

4.4 Dados

Para este trabalho, utilizamos dados abertos obtidos através da plataforma *Yahoo Finance*, de onde extraímos a série histórica ajustada dos preços de fechamento de PETR4 entre 01/01/2003 e 30/12/2019 e de BBDC3 e BBDC4 entre 02-Jan-2008 e 27-Ago-2021.

A seguir apresentaremos os seguintes resultados: 1) Obtenção dos pontos ótimos de saída obtidos através da otimização via grid e via otimizador para diversas combinações de parâmetros no caso paramétrico. 2) Resultado da calibração dos parâmetros para a ação da Petrobras (PETR4) modelada como um Browniano Geométrico e através de uma Mistura de normais e para o par de ativos BBDC3/BBDC4 modelado como um processo com reversão à média Ornstein-Uhlenbeck. 3) Obtenção dos pontos ótimos de saída para a ação PETR4 e para o par BBDC3/BBDC4 através das duas abordagens (paramétrica e não-paramétrica), comparando os dois casos.

5 RESULTADOS

5.1 Otimização via Grid para combinações de parâmetros

Para ilustrar o caso paramétrico simulamos, para diversas combinações de parâmetros do Movimento Browniano Geométrico, do caso com Mistura de Normais e do Ornstein-Uhlenbeck, 5000 trajetórias de 252 períodos cada. Através de um grid de tamanho 15 x 20, onde o *Stop Loss* varia de 0.01 a 0.15 e o *Stop Gain* varia entre 0.01 e 0.20, encontramos os pontos ótimos de saída para cada combinação de parâmetros de cada processo.

Das tabelas 2 a 17 temos os resultados para o processo Browniano Geométrico, das tabelas 18 a 25 temos os resultados para as Misturas de Normais e das tabelas 26 a 32 temos os resultados para o Ornstein-Uhlenbeck.

Para os três processos, é notável que a barreira ótima de *stop-loss* é quase sempre no limite de 15%, enquanto o *stop-gain* tende a ser mais curto. Dentro de cada tabela é possível verificar o efeito da variação do parâmetro ρ , sendo que via de regra quanto maior o parâmetro ρ , mais curto o *stop-gain*, ou seja quanto mais impaciente for o investidor, maior a chance de embolsar rapidamente pequenos lucros, aumentando a probabilidade P_2^* do processo ser interrompido na barreira de alta e reduzindo o tempo esperado para o *stop* $E[\tau_0]$. Curiosamente, mesmo em casos em que $\rho = 10$, raramente o *stop-loss* ótimo é menor do que o limite de 15%.

No caso do Movimento Browniano Geométrico, podemos verificar o efeito da variação de cada parâmetro observando as tabelas 2 a 17. As tabelas 2 a 5 apresentam resultados para o parâmetro $\mu = 0.1$, enquanto as tabelas 6 a 9 trazem os resultados para $\mu = 0.2$, as tabelas 10 a 13 para $\mu = 0.3$ e as tabelas 14 a 17 para $\mu = 0.4$. Comparando as tabelas 2, 6, 10 e 14 ou as tabelas 3, 7, 11 e 15 e assim por diante, é possível ver o efeito da variação de μ mantendo os outros parâmetros constantes. É notável que, quanto maior o *drift* μ , maior o *stop-gain* ótimo e a probabilidade de encerrar o processo com ganho. Com relação ao parâmetro da volatilidade, é possível comparar as tabelas 2 a 5 ou 6 a 9 e assim por diante. Dentre as tabelas 2, 3, 4 e 5 o parâmetro que varia é a volatilidade σ , e é possível observar que maiores valores de σ estão associados a maior *stop-gain* ótimo e menor tempo esperado para romper uma das barreiras.

Comparando as figuras 9 e 10 é notável que a diminuição do parâmetro ρ de 4 para 1 causa um deslocamento do gráfico em direção a um valor de z_2 maior. Comparando as figuras 9 e 11 e 9 e 12 é possível ver os efeitos dos parâmetros μ e σ , respectivamente.

Figura 9 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\rho = 4$

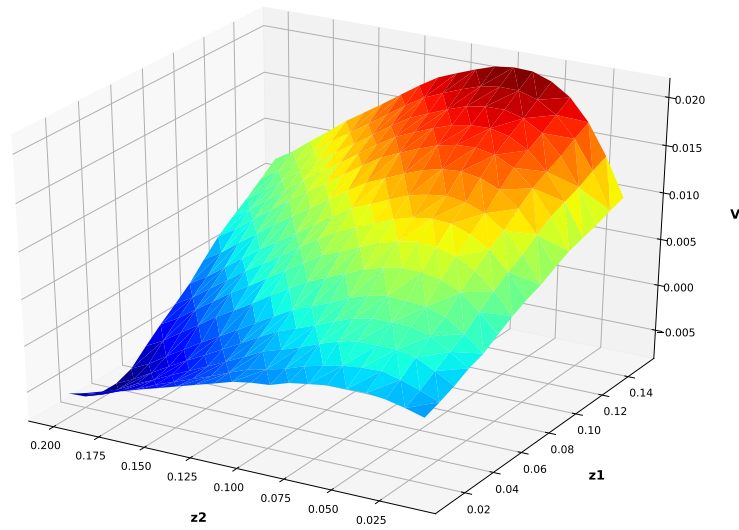


Figura 10 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\rho = 1$

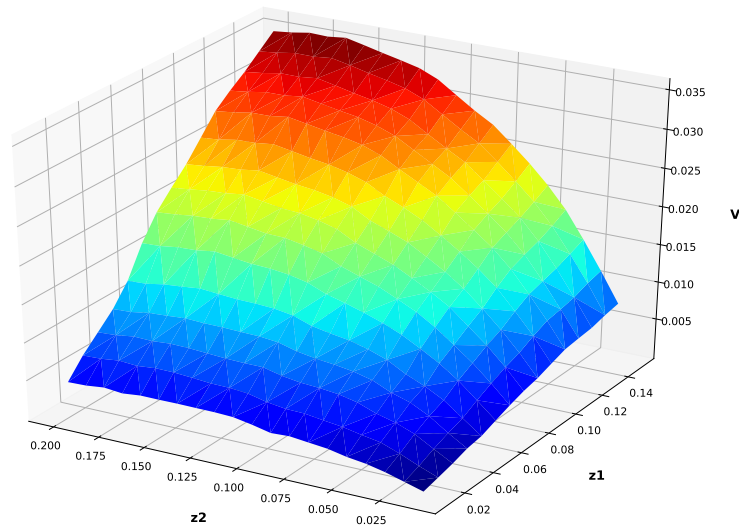


Figura 11 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.2$, $\rho = 4$

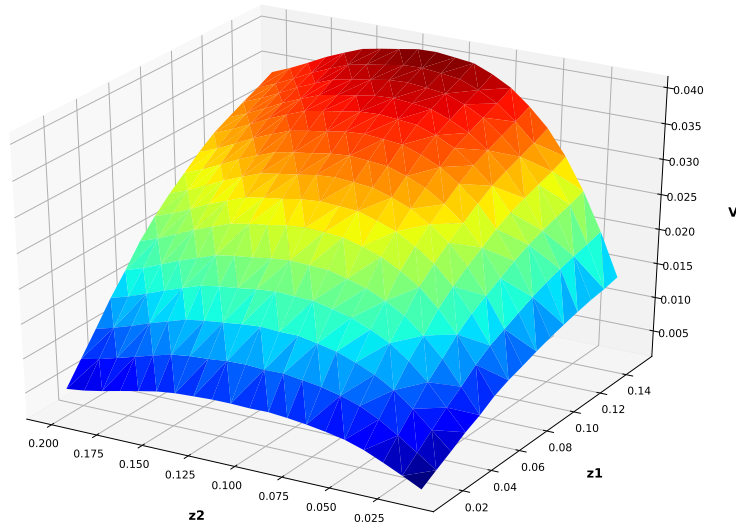
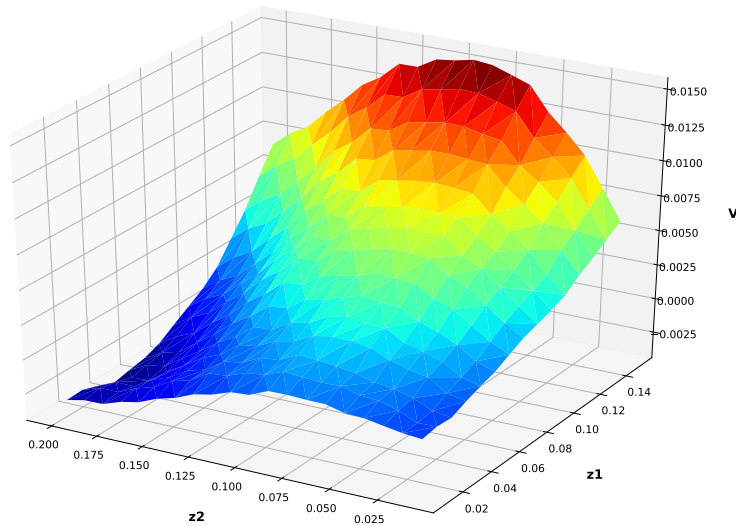


Figura 12 – Função de recompensa para Movimento Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $\rho = 4$



No caso em que a distribuição envolve uma Mistura de Normais, comparando as figuras 13 e 14, uma mudança em w_1 de 0.8 para 0.5, tornando os eventos de maior volatilidade mais frequentes, não parece ter grandes efeitos sobre o gráfico da função de recompensa. Comparando as figuras 13 e 15 fica evidente que maiores μ_1 e μ_2 causam um deslocamento do gráfico em direção a um valor de z_2 maior. Por fim, comparando as figuras 13 e 16 vemos o efeito da variação de ρ . As tabelas 18 a 21 apresentam casos em que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ enquanto as tabelas 22 a 25 apresentam o caso em que $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, evidenciando que maiores valores de μ_1, μ_2 estão associados a um stop gain maior.

Figura 13 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.8$ $\rho = 4$

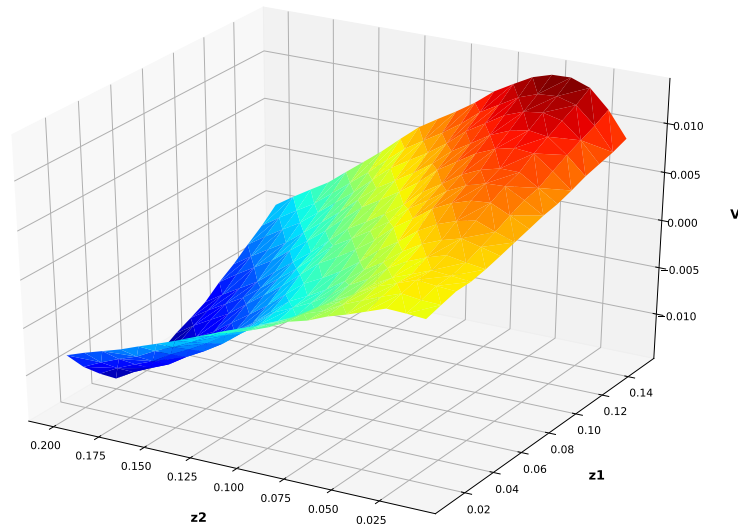


Figura 14 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.5$ $\rho = 4$

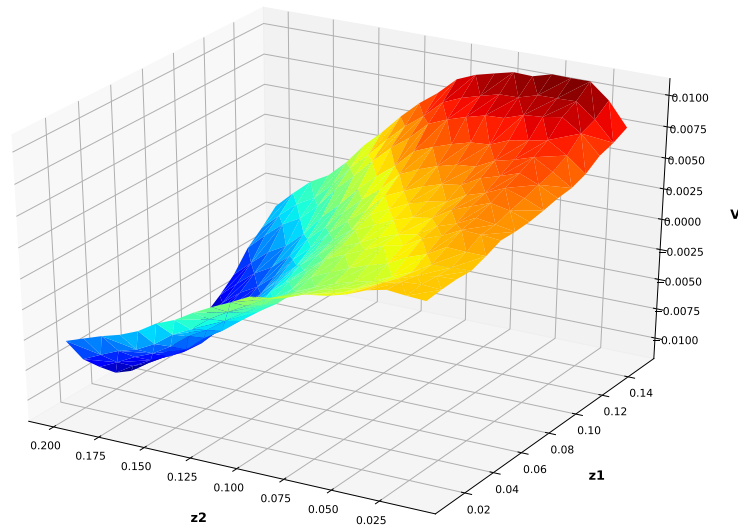


Figura 15 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.8$ $\rho = 4$

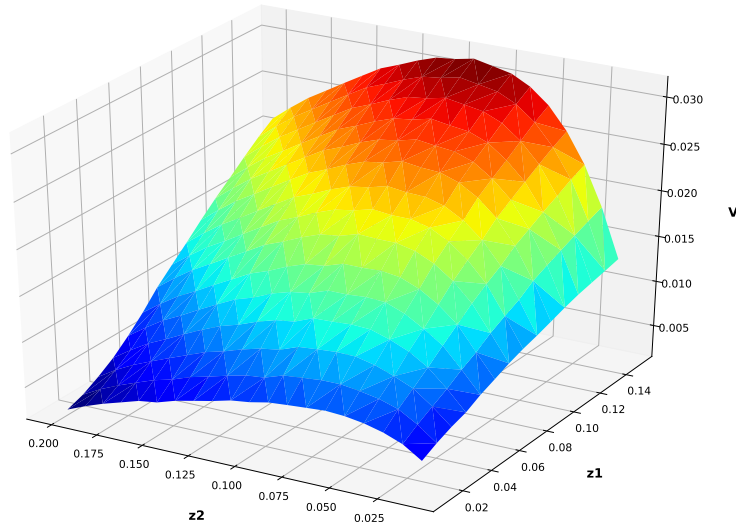
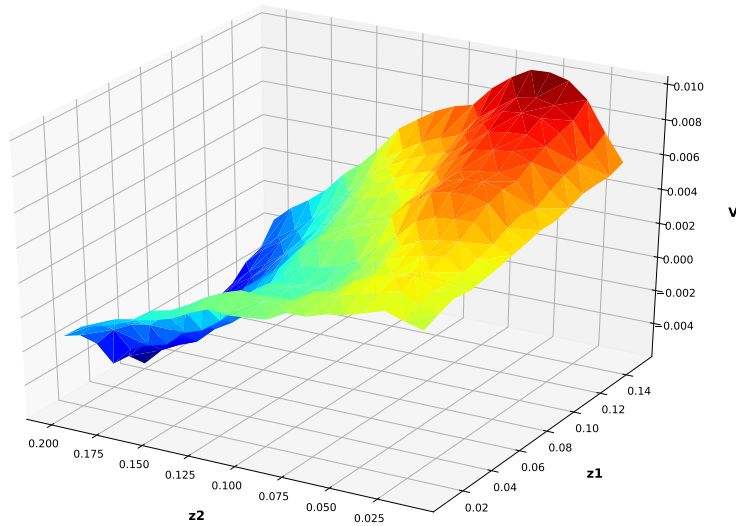


Figura 16 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.8$ $\rho = 1$



Já no caso do processo Ornstein–Uhlenbeck, a tabela 26 sugere que quanto maior σ , maior o *stop-gain* ótimo e menor o tempo esperado para encerrar o processo. As tabelas 27 a 32 sugerem que quanto maior a média de longo prazo m , maior o *stop-gain* ótimo e menor o *stop-loss* ótimo. Já um aumento no parâmetro de velocidade de reversão à média κ parece estar associado a diminuição do parâmetro de *stop-gain* ótimo e da probabilidade P_2^* de romper a barreira de alta nos casos em que a média do processo é negativa e aumento dos mesmos parâmetros no caso em que a média do processo é positiva.

Importante ressaltar que os resultados desta seção para o processo Ornstein–Uhlenbeck foram geradas a partir de trajetórias que partem do zero, ou seja com $X_0 = 0$. Isso não é um problema, pois basta transladarmos m no valor de X_0 para que as tabelas continuem fazendo sentido. Por exemplo, caso $X_0 = 0.05$, bastaria substituir $m = 0$ por $m = 0.05$ na tabela 26 que os resultados da tabela seriam válidos. Portanto, podemos pensar no parâmetro m apresentado nestas tabelas como sendo uma distância com relação ao ponto inicial X_0 . Para ilustrar este ponto, fizemos a otimização via grid para um processo com parâmetros $m = 0.1, \kappa = 1, \sigma = 0.05, \rho = 4$ partindo de $X_0 = 0$ e comparamos com um processo com parâmetros $m = 0.07, \kappa = 1, \sigma = 0.05, \rho = 4$ partindo de $X_0 = -0.03$, e o resultado é apresentado na tabela 1

X_0	m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.1	1	0.05	4	0.03	0.09	0.0122	0.32	0.97
-0.03	0.07	1	0.05	4	0.03	0.09	0.0122	0.32	0.97

Tabela 1 – Comparação entre $X_0 = 0$ e $X_0 = 0.05$

Figura 17 – Função de recompensa para OU com $m = 0, \kappa = 1, \sigma = 0.1, \rho = 4$

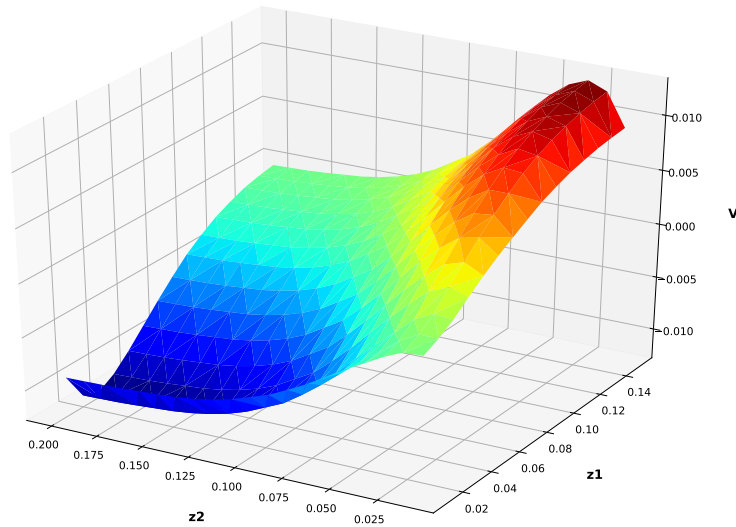


Figura 18 – Função de recompensa para OU com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0.05$, $\rho = 4$

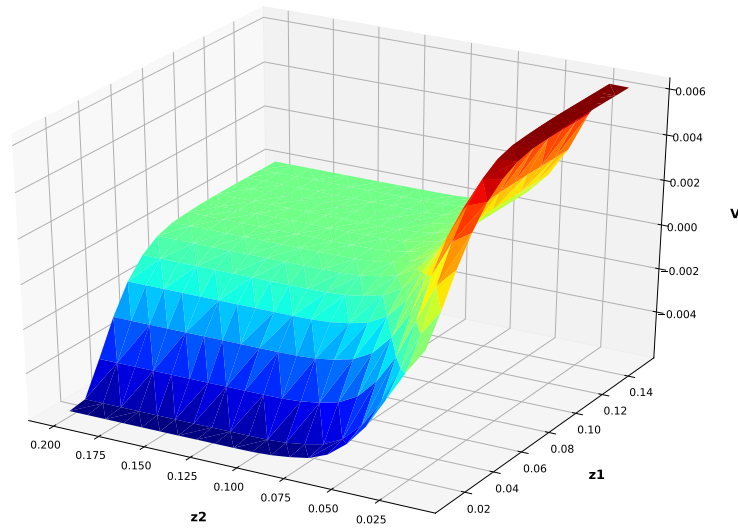


Figura 19 – Função de recompensa para OU com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 1$

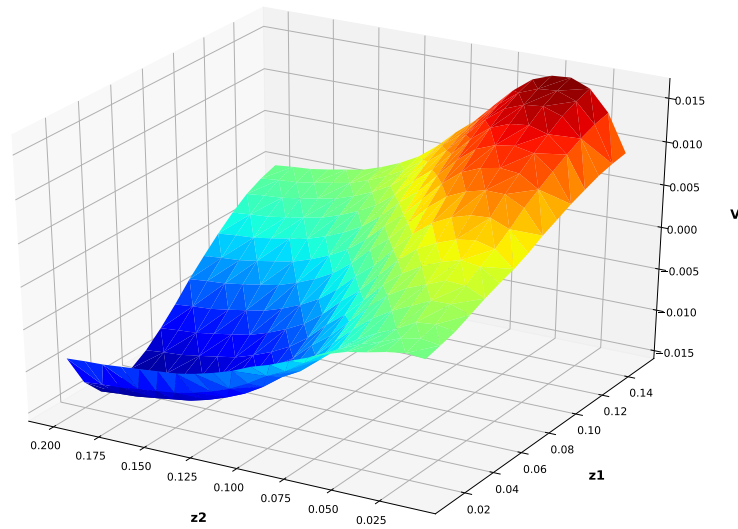
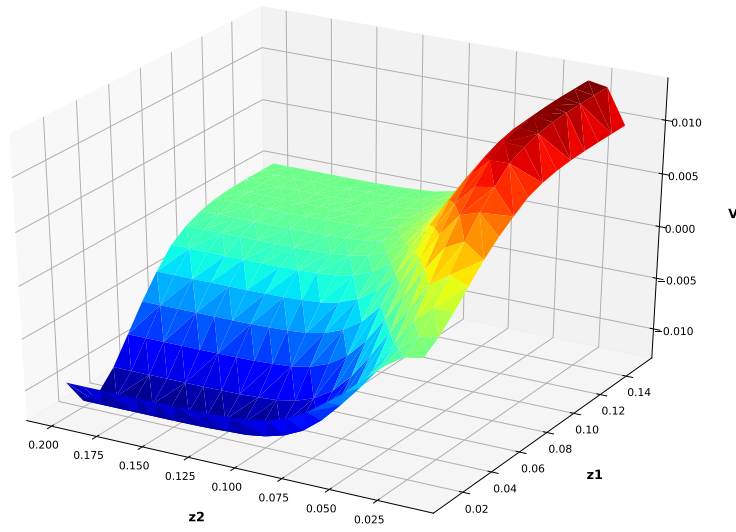


Figura 20 – Função de recompensa para OU com $m = 0$, $\kappa = 4$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$ 

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.1	0.1	1	0.14	0.15	0.04368	0.82	0.45
0.1	0.1	4	0.04	0.15	0.01820	0.34	0.89
0.1	0.1	7	0.03	0.15	0.01295	0.27	0.92
0.1	0.1	10	0.03	0.15	0.01022	0.27	0.92

Tabela 2 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.1$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.1	0.2	1	0.18	0.15	0.0354	0.59	0.48
0.1	0.2	4	0.06	0.15	0.0215	0.24	0.78
0.1	0.2	7	0.05	0.15	0.0182	0.21	0.81
0.1	0.2	10	0.04	0.15	0.0161	0.17	0.84

Tabela 3 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.1	0.3	1	0.2	0.15	0.025	0.36	0.47
0.1	0.3	4	0.08	0.15	0.0177	0.16	0.68
0.1	0.3	7	0.07	0.15	0.0168	0.14	0.7
0.1	0.3	10	0.05	0.15	0.0162	0.11	0.76

Tabela 4 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.1	0.4	1	0.2	0.15	0.016	0.22	0.44
0.1	0.4	4	0.09	0.15	0.0142	0.11	0.63
0.1	0.4	7	0.06	0.15	0.0147	0.08	0.7
0.1	0.4	10	0.06	0.15	0.0151	0.08	0.7

Tabela 5 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.1	1	0.2	0.15	0.0832	0.83	0.57
0.2	0.1	4	0.06	0.15	0.0257	0.31	0.97
0.2	0.1	7	0.04	0.15	0.0166	0.22	0.98
0.2	0.1	10	0.03	0.15	0.0129	0.16	0.99

Tabela 6 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.1$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.2	1	0.2	0.15	0.0728	0.6	0.6
0.2	0.2	4	0.09	0.15	0.031	0.31	0.82
0.2	0.2	7	0.06	0.15	0.0232	0.21	0.87
0.2	0.2	10	0.05	0.15	0.0192	0.18	0.88

Tabela 7 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.2$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.3	1	0.2	0.15	0.0517	0.37	0.56
0.2	0.3	4	0.09	0.15	0.0271	0.17	0.72
0.2	0.3	7	0.07	0.15	0.0225	0.14	0.76
0.2	0.3	10	0.06	0.15	0.0201	0.12	0.78

Tabela 8 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.4	1	0.2	0.15	0.0369	0.23	0.51
0.2	0.4	4	0.11	0.15	0.0228	0.13	0.63
0.2	0.4	7	0.09	0.15	0.0198	0.11	0.67
0.2	0.4	10	0.07	0.15	0.0188	0.09	0.71

Tabela 9 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.4$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.3	0.1	1	0.2	0.15	0.1155	0.66	0.87
0.3	0.1	4	0.09	0.15	0.034	0.31	0.99
0.3	0.1	7	0.05	0.15	0.0209	0.18	1
0.3	0.1	10	0.04	0.15	0.0158	0.15	1

Tabela 10 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.1$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.3	0.2	1	0.2	0.15	0.1067	0.55	0.76
0.3	0.2	4	0.11	0.15	0.0407	0.32	0.89
0.3	0.2	7	0.07	0.15	0.028	0.21	0.92
0.3	0.2	10	0.05	0.15	0.0223	0.15	0.94

Tabela 11 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.2$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.3	0.3	1	0.2	0.15	0.0777	0.35	0.65
0.3	0.3	4	0.12	0.15	0.0367	0.22	0.74
0.3	0.3	7	0.09	0.15	0.0283	0.16	0.78
0.3	0.3	10	0.07	0.15	0.0241	0.13	0.81

Tabela 12 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.3$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.3	0.4	1	0.2	0.15	0.0539	0.22	0.56
0.3	0.4	4	0.12	0.15	0.0306	0.13	0.66
0.3	0.4	7	0.09	0.15	0.025	0.11	0.7
0.3	0.4	10	0.09	0.15	0.0224	0.11	0.7

Tabela 13 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.4$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.4	0.1	1	0.2	0.11	0.137	0.51	0.99
0.4	0.1	4	0.11	0.11	0.0431	0.29	1
0.4	0.1	7	0.06	0.11	0.0256	0.16	1
0.4	0.1	10	0.05	0.11	0.0188	0.13	1

Tabela 14 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.1$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.4	0.2	1	0.2	0.15	0.1319	0.48	0.88
0.4	0.2	4	0.13	0.15	0.0504	0.32	0.94
0.4	0.2	7	0.08	0.15	0.0326	0.2	0.96
0.4	0.2	10	0.06	0.15	0.0254	0.15	0.97

Tabela 15 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.2$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.4	0.3	1	0.2	0.15	0.1017	0.34	0.74
0.4	0.3	4	0.14	0.15	0.0473	0.24	0.79
0.4	0.3	7	0.1	0.15	0.0338	0.17	0.82
0.4	0.3	10	0.07	0.15	0.0277	0.12	0.85

Tabela 16 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.3$

μ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.4	0.4	1	0.2	0.15	0.0711	0.22	0.62
0.4	0.4	4	0.18	0.15	0.0398	0.2	0.64
0.4	0.4	7	0.12	0.15	0.0308	0.13	0.7
0.4	0.4	10	0.09	0.15	0.0264	0.1	0.74

Tabela 17 – Resultados para Browniano Geométrico com $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.4$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.2	0	0.4	0.8	1	0.06	0.15	0.0098	0.17	0.7
0	0.2	0	0.4	0.8	4	0.04	0.15	0.0135	0.12	0.77
0	0.2	0	0.4	0.8	7	0.04	0.15	0.0148	0.12	0.77
0	0.2	0	0.4	0.8	10	0.03	0.15	0.015	0.1	0.82

Tabela 18 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.8$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.2	0	0.4	0.5	1	0.1	0.14	0.0093	0.17	0.58
0	0.2	0	0.4	0.5	4	0.05	0.15	0.0133	0.1	0.73
0	0.2	0	0.4	0.5	7	0.05	0.15	0.015	0.1	0.73
0	0.2	0	0.4	0.5	10	0.05	0.15	0.0155	0.1	0.73

Tabela 19 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.5$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.3	0	0.6	0.8	1	0.06	0.15	0.0111	0.09	0.7
0	0.3	0	0.6	0.8	4	0.06	0.15	0.014	0.09	0.7
0	0.3	0	0.6	0.8	7	0.06	0.15	0.0152	0.09	0.7
0	0.3	0	0.6	0.8	10	0.05	0.15	0.0159	0.07	0.74

Tabela 20 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.6$, $w_1 = 0.8$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.3	0	0.6	0.5	1	0.04	0.13	0.0102	0.04	0.74
0	0.3	0	0.6	0.5	4	0.04	0.15	0.0127	0.04	0.76
0	0.3	0	0.6	0.5	7	0.05	0.15	0.0145	0.05	0.72
0	0.3	0	0.6	0.5	10	0.05	0.15	0.0156	0.05	0.72

Tabela 21 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.6$, $w_1 = 0.5$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.2	0.2	0.4	0.8	1	0.2	0.15	0.0667	0.47	0.6
0.2	0.2	0.2	0.4	0.8	4	0.1	0.15	0.031	0.25	0.76
0.2	0.2	0.2	0.4	0.8	7	0.06	0.15	0.0245	0.15	0.83
0.2	0.2	0.2	0.4	0.8	10	0.05	0.15	0.0214	0.13	0.85

Tabela 22 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.8$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.2	0.2	0.4	0.5	1	0.2	0.15	0.0549	0.34	0.57
0.2	0.2	0.2	0.4	0.5	4	0.11	0.15	0.0297	0.19	0.7
0.2	0.2	0.2	0.4	0.5	7	0.07	0.15	0.0243	0.12	0.77
0.2	0.2	0.2	0.4	0.5	10	0.06	0.15	0.0223	0.11	0.79

Tabela 23 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.4$, $w_1 = 0.5$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.3	0.2	0.6	0.8	1	0.2	0.15	0.0467	0.26	0.54
0.2	0.3	0.2	0.6	0.8	4	0.11	0.15	0.0268	0.14	0.67
0.2	0.3	0.2	0.6	0.8	7	0.08	0.15	0.0235	0.11	0.72
0.2	0.3	0.2	0.6	0.8	10	0.06	0.15	0.0224	0.08	0.77

Tabela 24 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.6$, $w_1 = 0.8$

μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	w_1	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.2	0.3	0.2	0.6	0.5	1	0.2	0.15	0.0371	0.17	0.51
0.2	0.3	0.2	0.6	0.5	4	0.15	0.15	0.0242	0.13	0.57
0.2	0.3	0.2	0.6	0.5	7	0.08	0.15	0.022	0.07	0.69
0.2	0.3	0.2	0.6	0.5	10	0.07	0.15	0.0214	0.06	0.71

Tabela 25 – Resultados para Mistura de Normais com $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.6$, $w_1 = 0.5$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	1	0.05	4	0.02	0.12	0.0062	0.53	0.69
0	1	0.1	4	0.03	0.15	0.0128	0.41	0.78
0	1	0.15	4	0.04	0.15	0.0161	0.31	0.79
0	1	0.2	4	0.05	0.15	0.0164	0.24	0.76

Tabela 26 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
-0.1	0.5	0.1	4	0.02	0.15	0.0092	0.35	0.73
-0.1	1	0.1	4	0.02	0.15	0.0073	0.42	0.65
-0.1	1.5	0.1	4	0.01	0.15	0.0053	0.31	0.73
-0.1	2	0.1	4	0.01	0.15	0.004	0.36	0.66
-0.1	3	0.1	4	0.01	0.15	0.0016	0.46	0.51
-0.1	4	0.1	4	0.01	0.15	-0.0007	0.55	0.38
-0.1	5	0.1	4	0.01	0.15	-0.0026	0.62	0.27
-0.1	10	0.1	4	0.01	0.15	-0.0058	0.81	0.07

Tabela 27 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = -0.1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
-0.05	0.5	0.1	4	0.03	0.15	0.0108	0.44	0.7
-0.05	1	0.1	4	0.02	0.15	0.01	0.36	0.76
-0.05	1.5	0.1	4	0.02	0.15	0.0094	0.39	0.73
-0.05	2	0.1	4	0.02	0.15	0.0088	0.43	0.7
-0.05	3	0.1	4	0.02	0.15	0.0076	0.51	0.62
-0.05	4	0.1	4	0.01	0.15	0.0066	0.36	0.75
-0.05	5	0.1	4	0.01	0.15	0.006	0.41	0.7
-0.05	10	0.1	4	0.01	0.15	0.0029	0.68	0.38

Tabela 28 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = -0.05$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	0.5	0.1	4	0.03	0.15	0.0124	0.4	0.76
0	1	0.1	4	0.03	0.15	0.0128	0.41	0.78
0	1.5	0.1	4	0.03	0.15	0.013	0.41	0.8
0	2	0.1	4	0.03	0.15	0.0131	0.4	0.81
0	3	0.1	4	0.03	0.15	0.0133	0.39	0.84
0	4	0.1	4	0.03	0.15	0.0133	0.39	0.86
0	5	0.1	4	0.03	0.15	0.0132	0.39	0.87
0	10	0.1	4	0.02	0.11	0.0132	0.22	0.98

Tabela 29 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.05	0.5	0.1	4	0.03	0.15	0.0139	0.37	0.82
0.05	1	0.1	4	0.03	0.15	0.0154	0.32	0.88
0.05	1.5	0.1	4	0.04	0.15	0.0168	0.37	0.88
0.05	2	0.1	4	0.04	0.15	0.0181	0.34	0.92
0.05	3	0.1	4	0.04	0.15	0.0202	0.28	0.97
0.05	4	0.1	4	0.04	0.13	0.022	0.23	0.99
0.05	5	0.1	4	0.05	0.11	0.0238	0.27	0.99
0.05	10	0.1	4	0.05	0.07	0.0305	0.17	1

Tabela 30 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0.1	0.5	0.1	4	0.04	0.15	0.0154	0.42	0.81
0.1	1	0.1	4	0.04	0.15	0.0183	0.34	0.91
0.1	1.5	0.1	4	0.05	0.15	0.021	0.34	0.94
0.1	2	0.1	4	0.05	0.15	0.0237	0.28	0.98
0.1	3	0.1	4	0.06	0.12	0.0287	0.25	1
0.1	4	0.1	4	0.07	0.09	0.0329	0.25	1
0.1	5	0.1	4	0.07	0.08	0.0369	0.21	1
0.1	10	0.1	4	0.08	0.04	0.0512	0.14	1

Tabela 31 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = 4$

m	κ	σ	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
0	1	0.1	1	0.04	0.15	0.0164	0.51	0.69
0	1	0.1	4	0.03	0.15	0.0128	0.41	0.78
0	1	0.1	7	0.02	0.15	0.0099	0.29	0.86
0	1	0.1	10	0.02	0.15	0.0084	0.29	0.86

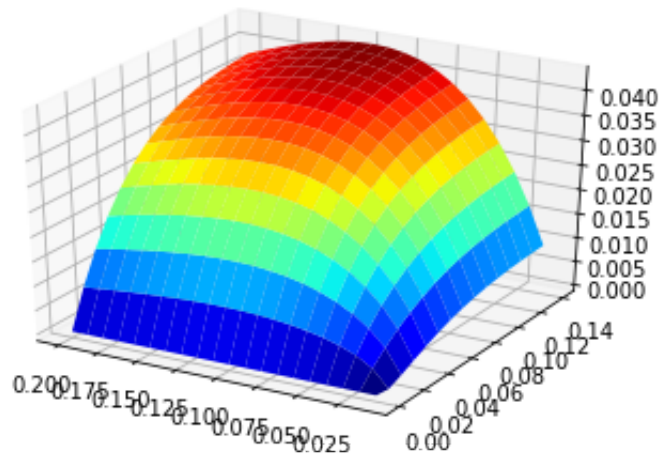
Tabela 32 – Resultados para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma = 0.1$

5.2 Comparação com Solução Analítica

Uma forma de validar a metodologia adotada neste trabalho é comparando a solução analítica para o Movimento Browniano Geométrico com as soluções obtidas na seção anterior.

Plotando o gráfico de 3.31 para uma dada combinação de parâmetros, por exemplo $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.2$ podemos comparar o gráfico obtido (figura 21) com a figura 11. Nota-se que ambas possuem um formato semelhante e que a abordagem de simulações é uma aproximação do resultado da solução analítica.

Figura 21 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.2$, $\rho = 4$ obtida por solução analítica



5.3 Resultados da aplicação em PETR4

Aplicamos em dados de ações de PETR4 a abordagem paramétrica para o Movimento Browniano Geométrico e para o caso que envolve uma Mistura de Normais. Também aplicamos a abordagem não-paramétrica e comparamos os resultados.

A partir da série temporal de preços de PETR4 entre 01/01/2003 e 30/12/2019, geramos a série de log-retornos do ativo. A partir da série de log-retornos, estimamos os parâmetros μ e σ conforme 4.12 a 4.16. O resultado da calibração dos parâmetros é apresentado na tabela 33

μ	σ
20.95 % a.a.	41.68 % a.a.

Tabela 33 – Resultado da calibração dos parâmetros para PETR4 - dados de 01/01/2003 a 30/12/2019

Alternativamente ao modelo com distribuição Log-Normal, também aplicamos a abordagem de Mistura de Normais conforme metodologia descrita na seção 3.5. Os parâmetros obtidos são dados na tabela 34.

μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	w_1
0.3680	0	0.2053	0.5152	0.5

Tabela 34 – Resultado da calibração dos parâmetros da Mistura de Normais para PETR4 - dados de 01/01/2003 a 30/12/2019

A partir destes parâmetros geramos as trajetórias para obtenção dos pontos ótimos conforme descrito na seção 4.3. Também aplicamos a abordagem não-paramétrica, por meio da técnica de *bootstrapping*. A tabela 35 apresenta o resultado da otimização feita em *Python* pelo método Dual Annealing.

As figuras 22 e 23 apresentam a função de recompensa para um grid $(-z_1, z_2) \in [0.01, 0.15] \times [0.01, 0.2]$ para dois valores diferentes de ρ no caso do Movimento Browniano Geométrico com os parâmetros conforme estimados na tabela 33. Já as figuras 24 e 25 apresentam a função de recompensa para a Mistura de Normais ajustada, enquanto as figuras 26 e 27 apresentam os gráficos para a abordagem não paramétrica.

Comparando os resultados das duas abordagens paramétricas e da abordagem não paramétrica, vemos que em todas o ponto ótimo de *stop loss* quando $\rho = 4$ é perto do limite de -0.15. O ponto ótimo de *stop-gain* é semelhante (aproximadamente 0.12) nos casos do Movimento Browniano Geométrico e da Mistura de Normais e um pouco menor no caso não paramétrico (aproximadamente 0.09). Já no caso em que $\rho = 1$, em todos os casos o *stop loss* ótimo é próximo do limite de 0.15 e o *stop gain* ótimo é próximo do limite de 0.20.

Método	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
Paramétrico: Browniano Geométrico	1	0.1968	0.1499	0.03474	0.2064	0.5138
Paramétrico: Browniano Geométrico	4	0.1185	0.1483	0.02214	0.1259	0.6182
Paramétrico: Mistura de Normais	1	0.2000	0.1500	0.00420	0.2340	0.5287
Paramétrico: Mistura de Normais	4	0.1238	0.1490	0.02390	0.1496	0.6166
Não Paramétrico	1	0.1810	0.1466	0.01120	0.1955	0.5220
Não Paramétrico	4	0.0891	0.1470	0.01338	0.1034	0.6606

Tabela 35 – Comparação dos resultados de diferentes modelos e abordagens aplicadas em PETR4

Figura 22 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2095$, $\sigma = 0.4168$, $\rho = 1$

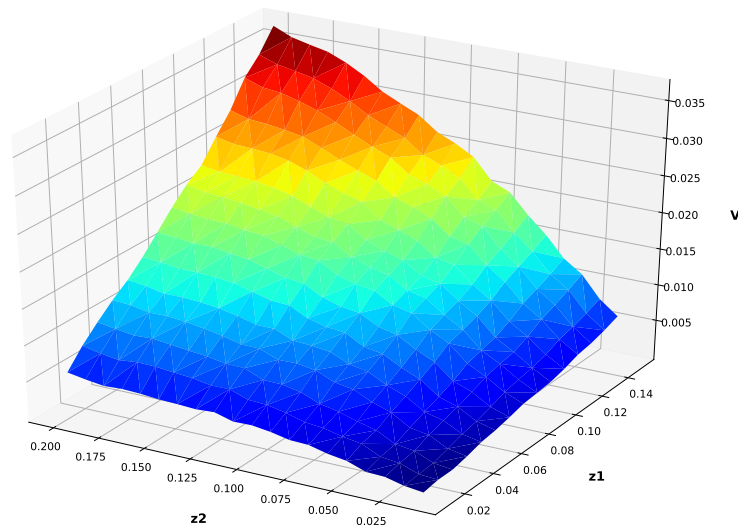


Figura 23 – Função de recompensa para Browniano Geométrico com $\mu = 0.2095$, $\sigma = 0.4168$, $\rho = 4$

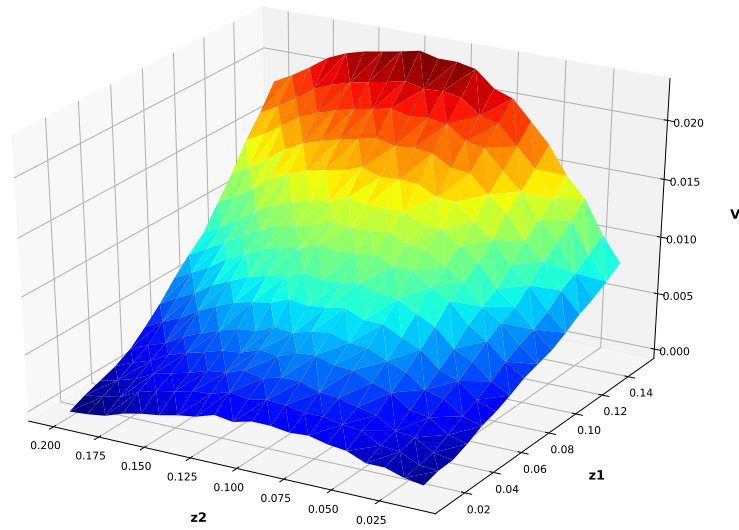


Figura 24 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = 0.3680$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2053$, $\sigma_2 = 0.5152$, $w_1 = 0.5$, $\rho = 1$

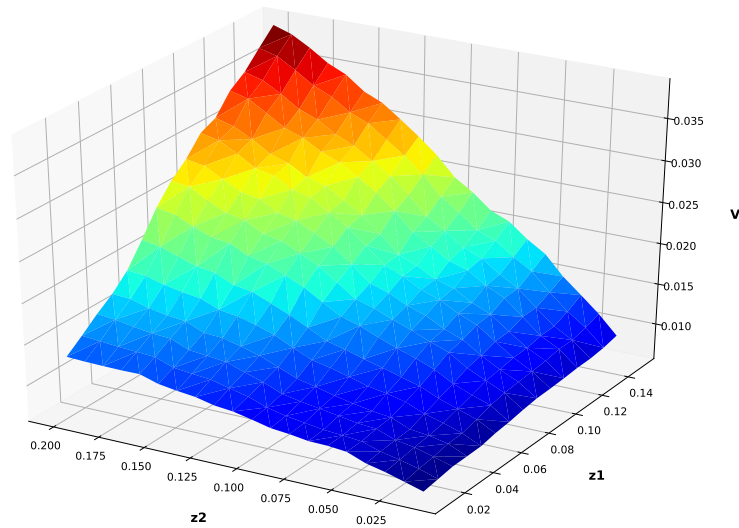


Figura 25 – Função de recompensa para Mistura de Normais com $\mu_1 = 0.3680$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.2053$, $\sigma_2 = 0.5152$, $w_1 = 0.5$, $\rho = 4$

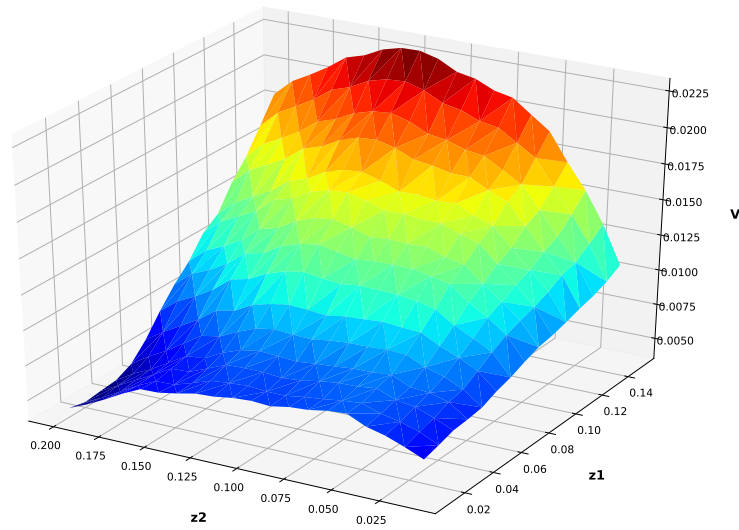


Figura 26 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 1$

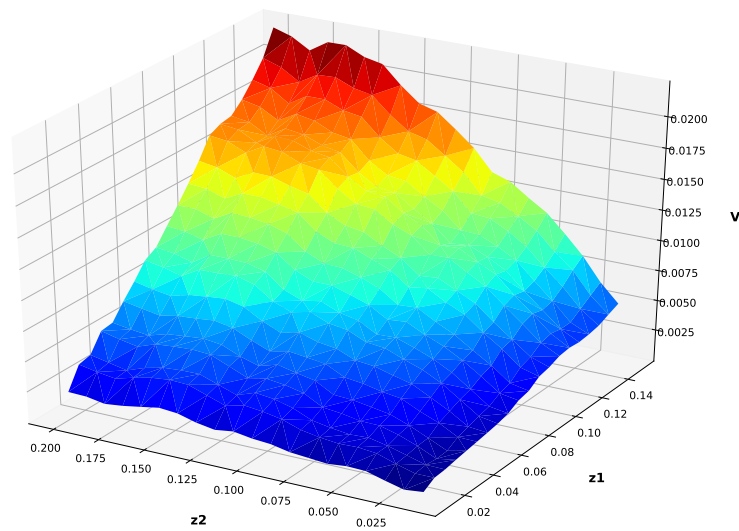
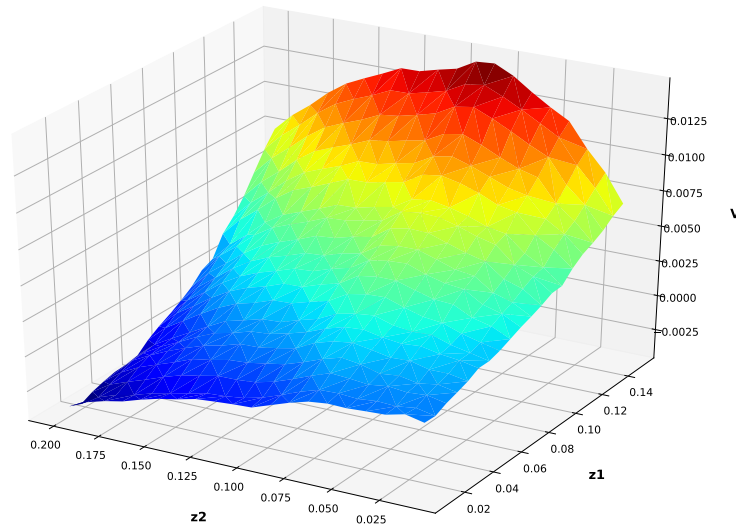


Figura 27 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 4$ 

5.4 Resultados da aplicação no par de ações BBDC3 e BBDC4

Para a aplicação do caso de um processo Ornstein-Uhlenbeck, utilizamos neste trabalho um par *long-short* de BBDC3 e BBDC4 (ações ON e PN do Banco Bradesco S.A.). Também realizamos a abordagem não-paramétrica para o par de ativos e comparamos com a abordagem paramétrica.

A figura 28 mostra a evolução do Log-Preço das duas ações no período entre 02-Jan-2008 e 27-Ago-2021.

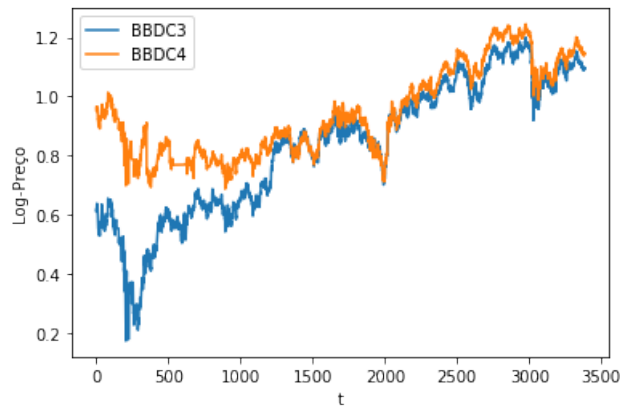
Uma abordagem para validarmos se as duas ações formam um par adequado para ser modelado como um processo com reversão à média é checar se ambas as séries cointegram. Dessa forma, realizamos o teste de cointegração de Engle-Granger, que mede se os resíduos de uma regressão linear entre as duas séries é estacionário. A hipótese nula é de que os resíduos possuem raiz unitária, ou seja que as séries não cointegram.

As tabelas 36 e 37 apresentam os resultados do teste de cointegração de Engle-Granger utilizando a amostra completa, respectivamente para a regressão de $\text{Log}(\text{BBDC3})$ em $\text{Log}(\text{BBDC4})$ e de $\text{Log}(\text{BBDC4})$ em $\text{Log}(\text{BBDC3})$. Os testes foram feitos em *Python* através da biblioteca *statsmodels*. Para ambos os casos, o p-valor foi superior a 0.4, portanto não é possível rejeitar a hipótese nula para níveis de significância de até 40%.

Pela figura 28, parece que o *spread* entre as duas séries tinha um comportamento diferente nos primeiros 1000 ou 1500 pontos. Portanto, descartamos os primeiros 1500 dados, de forma que foi possível rejeitar a hipótese nula para nível de significância maiores do que 1%, conforme resultado apresentado na tabela 38. Porém, pensando em futuros estudos que desenvolvam a ideia por trás deste trabalho e que envolvam a elaboração

de uma estratégia de *pairs-trading*, optamos por utilizar apenas 1200 pontos, ou seja de 22-Jan-2014 a 14-11-2018, mantendo os outros 684 pontos até 27-Ago-2021 para a base de testes Out-of-Sample caso optemos por realizar este estudo no futuro. As tabelas 39 e 40 mostram os resultados dos testes de cointegração para este período. É possível rejeitar a hipótese nula para níveis de significância de aproximadamente 10% para a regressão de $\text{Log}(\text{BBDC3})$ em $\text{Log}(\text{BBDC4})$, portanto o par que modelamos como um processo com reversão à média é dado por $\text{Log}(\text{BBDC3}) - \beta * \text{Log}(\text{BBDC4})$.

Figura 28 – Série temporal do Log Preço de BBDC3 e BBDC4 entre 02-Jan-2008 e 27-Ago-2021



y_0	y_1	Valor da Estatística	P-Valor
BBDC3	BBDC4	-2.14	0.45

Tabela 36 – Resultado do teste de cointegração para o par $\text{Log}(\text{BBDC3} - \text{BBDC4})$ com dados de 02-Jan-2008 a 27-Ago-2021

y_0	y_1	Valor da Estatística	P-Valor
BBDC4	BBDC3	-2.20	0.42

Tabela 37 – Resultado do teste de cointegração para o par $\text{Log}(\text{BBDC4} - \text{BBDC3})$ com dados de 02-Jan-2008 a 27-Ago-2021

y_0	y_1	Valor da Estatística	P-Valor
BBDC3	BBDC4	-3.79	0.01

Tabela 38 – Resultado do teste de cointegração para o par $\text{Log}(\text{BBDC3} - \text{BBDC4})$ com dados de 22-Jan-2014 a 27-Ago-2021

y_0	y_1	Valor da Estatística	P-Valor
BBDC3	BBDC4	-3.07	0.09

Tabela 39 – Resultado do teste de cointegração para o par $\text{Log}(\text{BBDC3} - \text{BBDC4})$ com dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018

y_0	y_1	Valor da Estatística	P-Valor
BBDC4	BBDC3	-2.94	0.13

Tabela 40 – Resultado do teste de cointegração para o par $\text{Log}(\text{BBDC4} - \text{BBDC3})$ com dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018

Figura 29 – Regressão linear de $\text{Log}(\text{BBDC3})$ em $\text{Log}(\text{BBDC4})$ entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018

Dep. Variable:	BBDC3	R-squared (uncentered):	1.000
Model:	OLS	Adj. R-squared (uncentered):	1.000
Method:	Least Squares	F-statistic:	2.854e+06
Date:	Mon, 11 Oct 2021	Prob (F-statistic):	0.00
Time:	18:41:43	Log-Likelihood:	3033.9
No. Observations:	1200	AIC:	-6066
Df Residuals:	1199	BIC:	-6061
Df Model:	1		
Covariance Type:	nonrobust		
	coef	std err	t P> t [0.025 0.975]
BBDC4	0.9621	0.001	1689.425 0.000 0.961 0.963
Omnibus:	19.269	Durbin-Watson:	0.035
Prob(Omnibus):	0.000	Jarque-Bera (JB):	18.845
Skew:	0.277	Prob(JB):	8.09e-05
Kurtosis:	2.736	Cond. No.	1.00

A figura 29 mostra a saída do programa em *Python* da regressão das séries. O Beta da regressão é de 0.96, portanto utilizamos a série histórica $\text{Log}(\text{BBDC3}) - 0.96 \text{Log}(\text{BBDC4})$ para fazer a calibração dos parâmetros.

Figura 30 – Série do Log de $\text{BBDC3} - 0.96 * \text{BBDC4}$ entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018

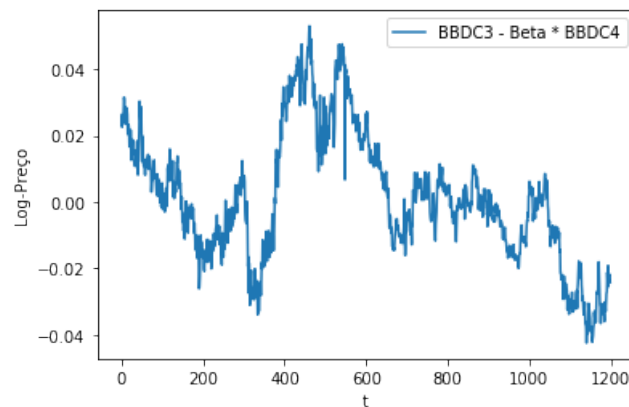
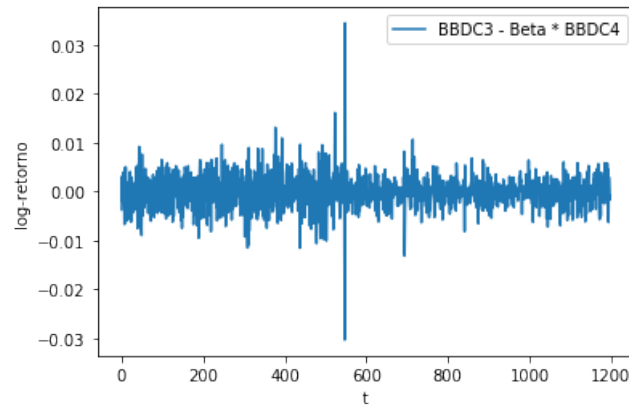


Figura 31 – Série do Log Retorno do par BBDC3 - 0.96 * BBDC4 entre 22-Jan-2014 e 14-Nov-2018



Seguindo a metodologia descrita em 4.18 a 4.22, foram obtidos os parâmetros apresentados na tabela 41

m	κ	σ
0.0741	4.3625	0.0589

Tabela 41 – Resultado da calibração dos parâmetros para $\text{Log}(\text{BBDC3}) - 0.96 \text{Log}(\text{BBDC4})$ - dados de 22-Jan-2014 a 14-Nov-2018

A partir destes parâmetros, geramos as trajetórias e buscamos os pontos ótimos de saída conforme descrito na seção 4.3. O ponto inicial X_0 utilizado foi de -0.0241, que é o valor do *spread* $\text{Log}(\text{BBDC3}) - 0.96\text{Log}(\text{BBDC4})$ em 14-Nov-2018. Alternativamente, testamos a abordagem não-paramétrica, realizando o bootstrapping dos retornos da série do *spread*.

A tabela 42 apresenta os resultados da otimização através da implementação do *Dual Annealing* no otimizador *Scipy* em Python para $\rho = 1$ e $\rho = 4$. Nota-se que, para ambos os valores de ρ , pela abordagem não paramétrica o ponto ótimo de stop-gain é menor do que pela abordagem paramétrica e a probabilidade de romper a barreira de ganho é menor. No caso em que $\rho = 4$, o *stop-loss* ótimo é maior na abordagem não paramétrica, ou seja para $\rho = 4$ pela abordagem não paramétrica o investidor embolsaria mais cedo os ganhos e toleraria perdas maiores antes de encerrar a estratégia. Já no caso em que $\rho = 1$ o *stop loss* de ambas as abordagens é semelhante, maior que 0.14. Como os resultados de ambas as abordagens diferiu significativamente, seria necessário realizar algum tipo de *backtest* para determinar qual das duas é a mais adequada, o que está fora do escopo deste trabalho.

As figuras 32 e 33 mostram o valor da função de recompensa para $(-z_1, z_2) \in [0.01, 0.15] \times [0.01, 0.2]$ para dois valores diferentes de ρ no caso paramétrico, enquanto as figuras 34 e 35 são referentes à abordagem não-paramétrica.

Método	ρ	z_2^*	$-z_1^*$	$E[e^{-\rho\tau}g(x)]$	$E[\tau_0]$	P_2^*
Paramétrico: Ornstein-Uhlenbeck	1	0.0733	0.1478	0.04738	0.2854	0.9994
Paramétrico: Ornstein-Uhlenbeck	4	0.0440	0.1055	0.01878	0.1348	1.0000
Não Paramétrico	1	0.0180	0.1407	0.00355	0.4936	0.6623
Não Paramétrico	4	0.0169	0.1460	0.00660	0.4699	0.6980

Tabela 42 – Comparação dos resultados de diferentes modelos e abordagens aplicadas no par BBDC3/BBDC4

Figura 32 – Função de recompensa para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.0741$, $\kappa = 4.3625$, $\sigma = 0.0589$, $\rho = 1$, $X_0 = -0.0241$

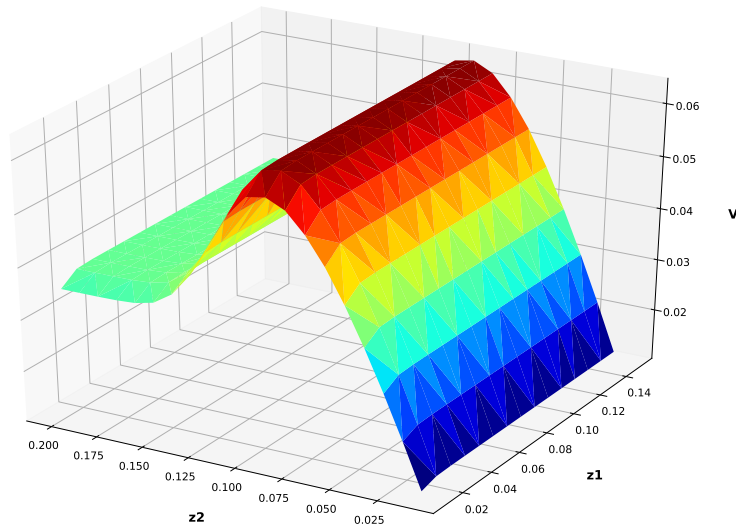


Figura 33 – Função de recompensa para Ornstein-Uhlenbeck com $m = 0.0741$, $\kappa = 4.3625$, $\sigma = 0.0589$, $\rho = 4$, $X_0 = -0.0241$

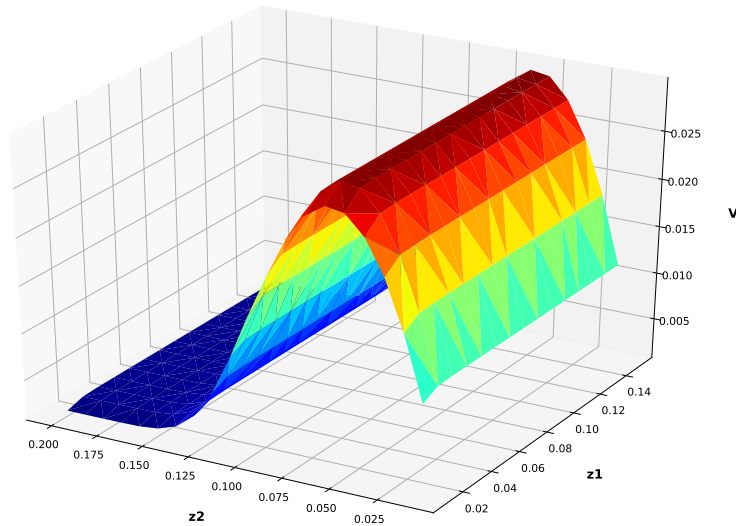
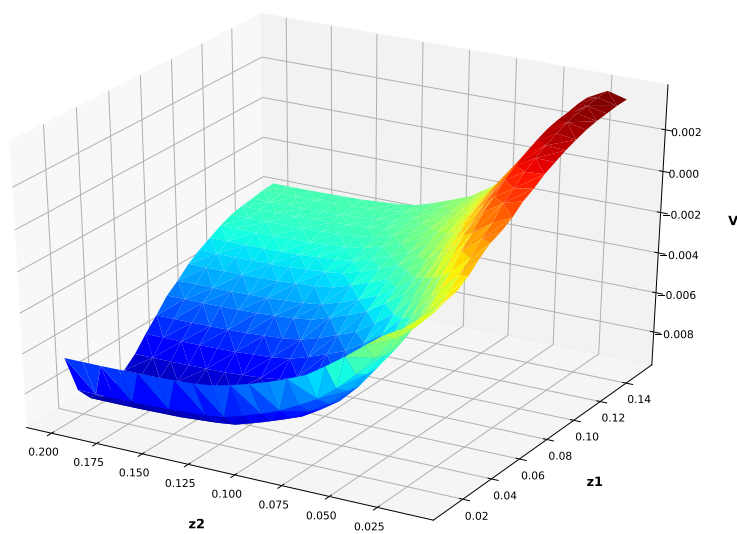
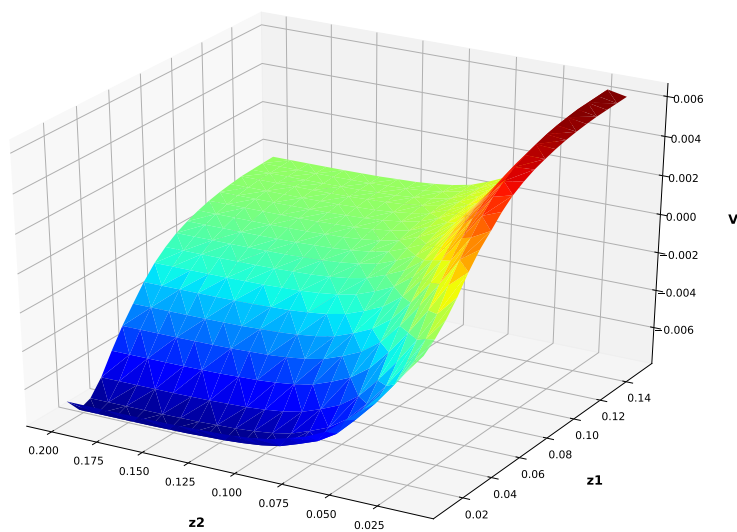


Figura 34 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 1$ Figura 35 – Função de recompensa para Bootstrapping com $\rho = 4$ 

6 CONCLUSÃO

O trabalho busca solucionar o problema de obtenção de pontos ótimos de *Stop Gain* e *Stop Loss* para uma estratégia de investimentos. A abordagem desenvolvida neste trabalho poderia ser utilizada por um gestor de portfólio de um fundo de investimentos que possui posição em uma ação ou outro instrumento financeiro e deseja saber o ponto ideal de se desfazer da posição. Com as técnicas exploradas nesta dissertação, o gestor pode se beneficiar de ter uma maneira sistematizada de encontrar os pontos de saída da estratégia, sem depender de parâmetros heurísticos ou, ainda pior, decidir encerrar a posição com base na emoção em um momento de nervosismo do mercado ou nunca vender nos momentos de euforia.

O gestor que decidir aplicar esta metodologia pode seguir tanto a abordagem paramétrica (simulação de Monte Carlo) quanto a abordagem não-paramétrica (*Bootstrapping*). Caso opte pela abordagem paramétrica, terá que realizar a calibração dos parâmetros aos dados, o que pode ser um empecilho, enquanto a abordagem não-paramétrica é livre de modelo, porém limitada aos eventos que já ocorreram. Como este trabalho abordou o problema através de simulações, em detrimento a buscar soluções analíticas, é possível aplicar a mesma metodologia para diversos instrumentos que poderiam ser modelados por diferentes processos estocásticos, ou então fazer a simulação não paramétrica, sem assumir nenhum modelo específico.

Para a obtenção dos pontos ótimos de saída, podemos optar por utilizar o otimizador da biblioteca *SciPy* ou construir um grid de parâmetros. Por um lado, a otimização via grid é consideravelmente mais rápida do que através do método *Dual Annealing*, chegando a resultados semelhantes. Por outro lado, o gestor não precisaria rodar este algoritmo frequentemente, visto que para uma dada posição, os pontos de saída são obtidos na entrada do investimento, ou seja para cada posição o algoritmo será aplicado uma única vez.

No caso específico deste trabalho, consideramos o caso da ação PETR4 e de um par *Long Short* de BBDC3 e BBDC4, representando respectivamente ativos que possam ser modelados como um Movimento Browniano Geométrico (ou por uma Mistura de Normais) e instrumentos financeiros que apresentem reversão à média, caracterizações que cobrem uma gama de instrumentos. Portanto, a metodologia deste trabalho poderia ser aplicada a qualquer destes produtos englobados por tais caracterizações. Também exploramos a abordagem não-paramétrica tanto para PETR4 quanto para o par de BBDC3 e BBDC4.

Na aplicação em dados de PETR4, as abordagens com distribuição Log-Normal e Mistura de Normais chegaram em resultados semelhantes e as figuras geradas na abordagem

não-paramétrica ficaram semelhantes às figuras geradas na abordagem paramétrica. Já na aplicação em dados do par de ativos BBDC3 e BBDC4 houve uma diferença considerável entre as abordagens paramétrica e não-paramétrica, de forma que há necessidade de análises futuras para definir o método mais adequado.

A dissertação limita-se a encontrar os pontos de saída de uma estratégia de investimentos, desconsiderando o ponto de entrada ou o método de seleção de ativos. Outra limitação é que só foi aplicada em um ativo representativo de um processo com drift e um único par de ativos representativo do processo com reversão à média. Para o caso em que há reversão à média, para a abordagem paramétrica só consideramos um processo Ornstein-Uhlenbeck mais simples, assumindo volatilidade constante e distribuição normal, enquanto para o caso da ação de PETR4 relaxamos estas hipóteses utilizando a Mistura de Normais. Além disso, não foram exploradas outras funções de recompensa a serem maximizadas além do retorno descontado esperado. Por fim, consideramos apenas o caso unidimensional, de um instrumento, não considerando o caso de um portfólio como um todo.

Possíveis extensões desse trabalho incluem: i) Aplicar a mesma metodologia para diferentes funções de recompensa, como o Índice de Sharpe ou alguma outra medida de retorno ajustada ao risco, por exemplo o retorno dividido pelo máximo drawdown; ii) No caso paramétrico com reversão à média, incluir saltos de Levy na modelagem, de forma a relaxar algumas das hipóteses; iii) Estender a análise para o problema de um portfólio de um fundo de investimentos composto por diversos ativos correlacionados entre si, determinando os pontos ótimos de saída do fundo ou de encerramento de todas as posições.

REFERÊNCIAS

- AVELLANEDA, M.; LEE, J.-H. Statistical arbitrage in the us equities market. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 10, n. 7, p. 761–782, 2010.
- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1900. v. 17, p. 21–86.
- BERTRAM, W. K. Analytic solutions for optimal statistical arbitrage trading. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 11, p. 2234–2243, 2010.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 637–659, 1973.
- BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828.
- DAI, M.; ZHANG, Q.; ZHU, Q. J. Trend following trading under a regime switching model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, SIAM, v. 1, n. 1, p. 780–810, 2010.
- DYNKIN, E. *Theory of Markov Processes*. [S.l.]: Pergamon Press, Oxford, 1960.
- EINSTEIN, A. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular kinetic theory of heat. *Ann. d. Phys*, v. 17, n. 549–560, p. 1, 1905.
- ELOE, P. et al. Optimal selling rules in a regime-switching exponential gaussian diffusion model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 69, n. 3, p. 810–829, 2008.
- ENDRES, S.; STÜBINGER, J. Optimal trading strategies for lévy-driven ornstein-uhlenbeck processes (no. 17/2017). *FAU Discussion Papers in Economics*, 2018.
- EVANS, L. C. *An introduction to stochastic differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2012. v. 82.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. [S.l.]: Springer, 2004. v. 53.
- ITÔ, K. On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*, Cambridge University Press, v. 3, p. 55–65, 1951.
- KONG, H. T. *Stochastic control and optimization of assets trading*. Tese (Doutorado) — uga, 2010.
- LEMKE, W. *Term structure modeling and estimation in a state space framework*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 565.
- ØKSENDAL, B. Stochastic differential equations. In: *Stochastic differential equations*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 65–84.

- PRADO, M. L. D. *Advances in financial machine learning*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2018.
- SAMUELSON, P.; MERTON, R. C. A complete model of warrant pricing that maximizes utility. *IMR; Industrial Management Review (pre-1986)*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, v. 10, n. 2, p. 17, 1969.
- SAMUELSON, P. A. Rational theory of warrant pricing. *Ind. Management Rev.*, Massachussets Institute of Technology, v. 6, p. 13–32, 1965.
- SONG, Q.; ZHANG, Q. An optimal pairs-trading rule. *Automatica*, Elsevier, v. 49, n. 10, p. 3007–3014, 2013.
- SUZUKI, K. Optimal pair-trading strategy over long/short/square positions—empirical study. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 97–119, 2018.
- WIENER, N. Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, v. 2, n. 1-4, p. 131–174, 1923.
- ZENG, Z.; LEE, C.-G. Pairs trading: optimal thresholds and profitability. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 14, n. 11, p. 1881–1893, 2014.
- ZHANG, H.; ZHANG, Q. Trading a mean-reverting asset: Buy low and sell high. *Automatica*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 1511–1518, 2008.
- ZHANG, Q. Stock trading: An optimal selling rule. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 40, n. 1, p. 64–87, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CONCEITOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

A.1 Movimento Browniano e a Existência de Variação Quadrática

O movimento browniano pode ser definido como um processo estocástico $\{W_t\}$ em um espaço filtrado $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, sendo que:

- (i) $W(0) = 0$
- (ii) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ para todo $t \geq s \geq 0$
- (iii) $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ são i.i.d. para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

Dessa definição segue que:

- 1. $E(W(t)) = 0, E(W^2(t)) = t$ ($t \geq 0$)
- 2. $E(W(t)W(s)) = \min(s, t)$ ($t, s \geq 0$)

Uma propriedade importante é a existência de variação quadrática, diferentemente do que ocorre no cálculo tradicional:

$$\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [X_{t_i} - X_{t_{i-1}}]^2 = T, \Delta_t := \max_i (t_i - t_{i-1}) \quad (\text{A.1})$$

Outro ponto importante com relação ao movimento browniano é que as trajetórias são contínuas porém não diferenciáveis em quase nenhum ponto, ainda que heurísticamente a ideia de tratar a derivada do processo estocástico em relação ao tempo como um ruído branco será de suma importância.

A.2 Propriedade de Markov

Um processo estocástico $X(\cdot)$ é um processo de Markov se:

$$P(X(t) \in B | \mathcal{U}(s)) = P(X(t) \in B | X(s)) \quad (\text{A.2})$$

onde $\mathcal{U}(s) := U(X(r) | 0 \leq r \leq s)$ é a chamada história do processo até o período s .

A.3 Integrais Estocásticas

Para resolver as equações diferenciais estocásticas que aparecem neste trabalho, precisamos primeiro definir uma integral estocástica como a abaixo:

$$\int_0^T G dW$$

Ou, para um processo estocástico W :

$$\int_0^T W dW$$

A definição segue da aproximação da integral estocástica pela soma de Riemann abaixo, onde o parâmetro $0 \leq \lambda \leq 1$ indica onde o ponto π_k se encontra dentro do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ - ou seja, $\lambda = 0$ implica em $\pi_k = t_k$ e $\lambda = 1$ implica em $\pi_k = t_{k+1}$ - e P é uma partição do intervalo $[0, T]$

$$R(P, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\pi_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

Fazendo $|P| \rightarrow 0$, ou seja, tomando uma partição com infinitos elementos cujo módulo tende a zero, temos o importante resultado da variação quadrática:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 \rightarrow b - a$$

Essa ideia da variação quadrática de certa forma explica a ideia que veremos adiante de que

$$dW \approx (dt)^{\frac{1}{2}}$$

Com a ideia de variação quadrática, é possível provar que a soma de Riemann, quando $|P| \rightarrow 0$, é dada por:

$$R = \frac{W(T)^2}{2} + (\lambda - \frac{1}{2})T$$

A integral de Itô corresponde à escolha de $\lambda = 0$.

$$\int_0^T W dW = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}$$

A importância da integral na definição de Itô, fazendo a soma da função "pela esquerda", reside no fato de que isso permitirá a definição da integral para uma classe de processos estocásticos "não-antecipativos" $G(\cdot)$, visto que em t_k , $G(t_k)$ é conhecido, mas o comportamento de $W(\cdot)$ no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ não.

Um processo estocástico $G(\cdot)$ é dito "não-antecipativo" com relação à filtração $\mathcal{F}(\cdot)$ se para cada $t \geq 0$, $G(t)$ é $\mathcal{F}(t)$ – *mensurável*. Em outras palavras, a variável aleatória $G(t)$ depende apenas da informação disponível na σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$.

Algumas propriedades importantes da Integral de Itô são:

$$(i) \quad E\left(\int_0^T G dW\right) = 0$$

$$(ii) \quad E\left(\left(\int_0^T G dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^T G^2 dW\right) \text{ (Isometria de Itô)}$$

Dois teoremas importantes que seguem são a Regra da Cadeia de Itô e a Regra do Produto de Itô.

Se $X(\cdot)$ é governado pela equação diferencial estocástica:

$$dX = Fdt + GdW$$

E sendo $u(x, t)$ uma função contínua do processo estocástico com derivadas parciais u_t , u_x , u_{xx} , então $u(X(t), t)$ é governado pela equação diferencial estocástica:

$$du = u_t dt + u_x dX + \frac{1}{2} u_{xx} G^2 dt = (u_t + u_x F + \frac{1}{2} u_{xx} G^2) dt + u_x G dW$$

Já a regra do Produto de Itô afirma que, dados dois processos estocásticos

$$dX_1 = F_1 dt + G_1 dW$$

$$dX_2 = F_2 dt + G_2 dW$$

Temos que

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt$$

Com essas ideias, é possível definir e resolver equações diferenciais estocásticas.

A.4 Equações Diferenciais Estocásticas

Um processo estocástico $X(\cdot)$ é a solução de uma equação diferencial estocástica do tipo

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \\ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Se:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s), s)ds + \int_0^t B(X(s), s)dW$$

Em finanças, a equação diferencial estocástica mais conhecida é dada por:

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma S dW \\ S(0) = s_0 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia de Itô:

$$\begin{aligned} d(\log S) &= \frac{dS}{S} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2 dt}{S^2} \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW \\ S(t) &= s_0 e^{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \end{aligned}$$