Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1
Cinemática da partícula

universidade de aveiro

Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1
Cinemática da partícula

universidade de aveiro

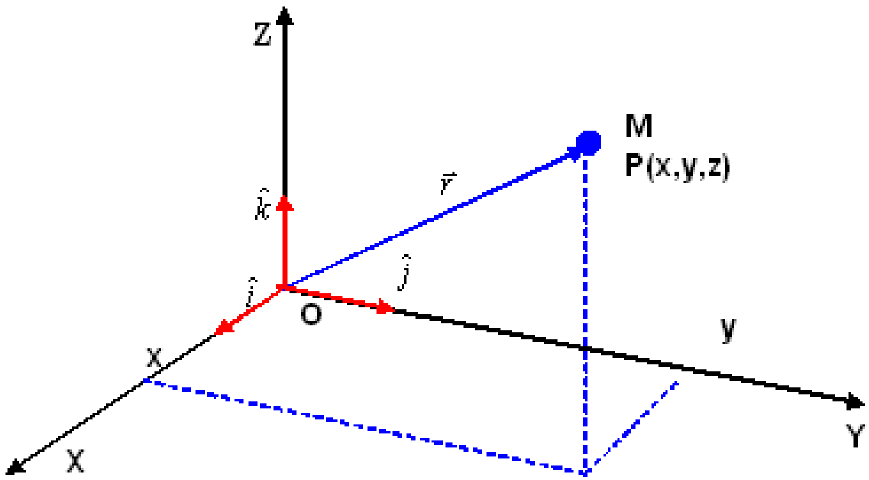
Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1
Cinemática da partícula
Tipos de movimento

universidade de aveiro

Posição e Trajectória

Ex. 3D



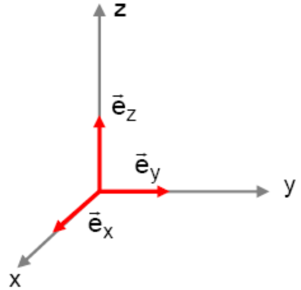
- **Sistema de coordenadas cartesianas: posição da massa pontual M relativamente à origem**

- **Posição**

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\hat{i} + y\,(t)\,\hat{j} + z\,(t)\,\hat{k}\\ &r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}}$$

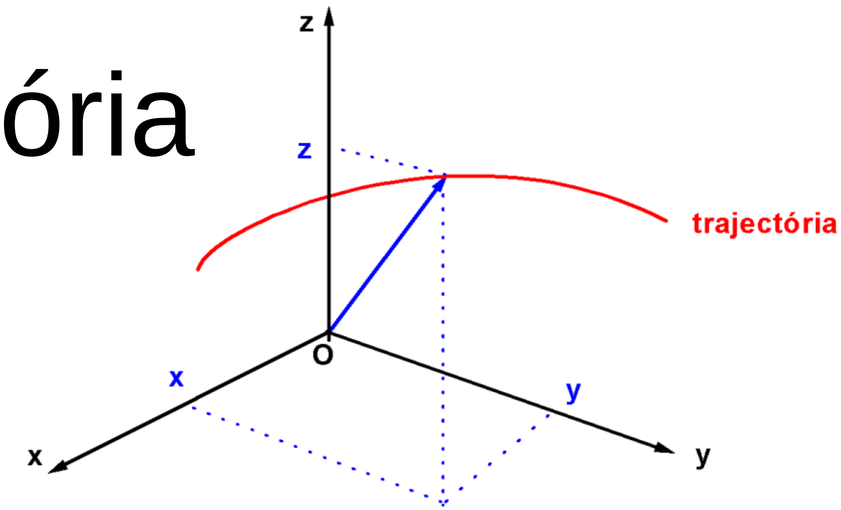
- **Versores unitários**

$$\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}$$



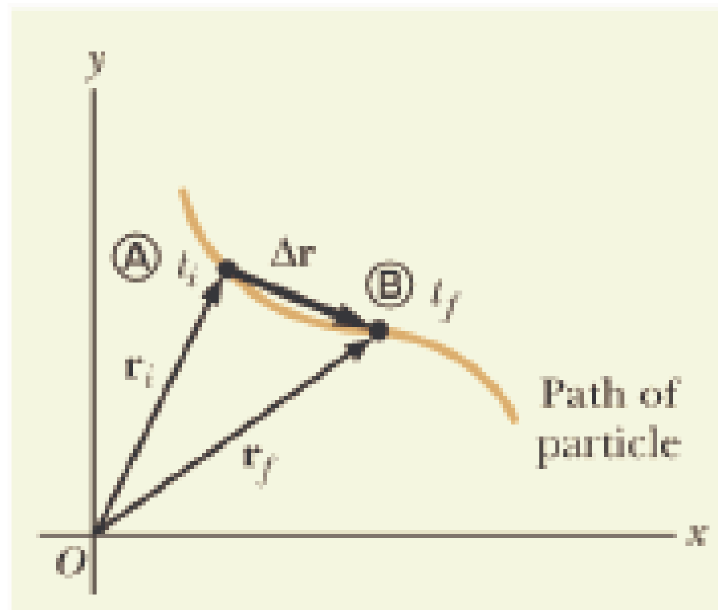
Posição e Trajectória

- **Trajectória – lugar geométrico dos pontos ocupados por um ponto material P ao longo do tempo (Ex. 2D)**

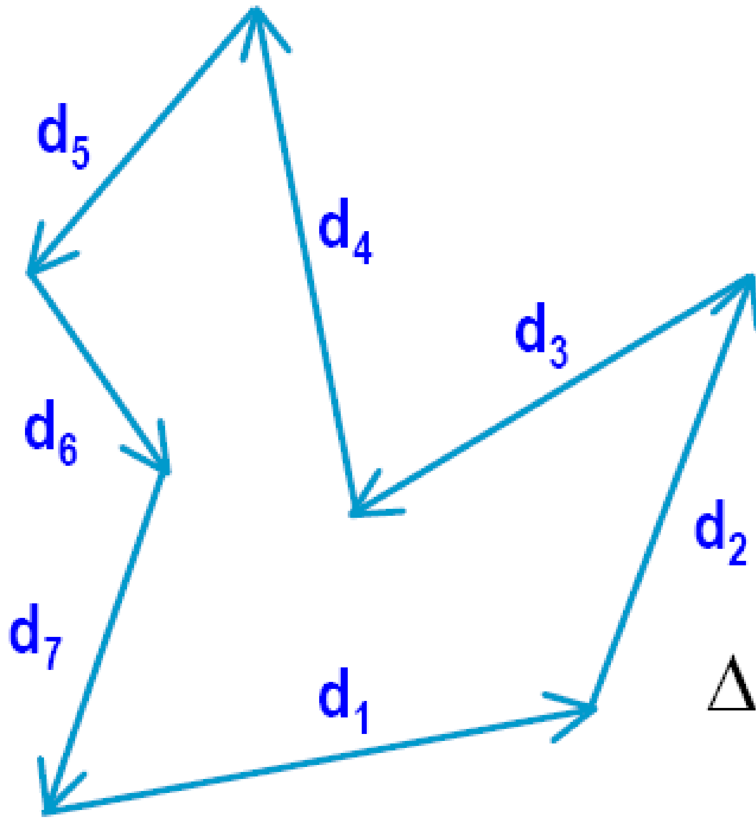


- **Deslocamento – grandeza vectorial, variação na posição,**

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i}$$



Deslocamento e distância



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i$$

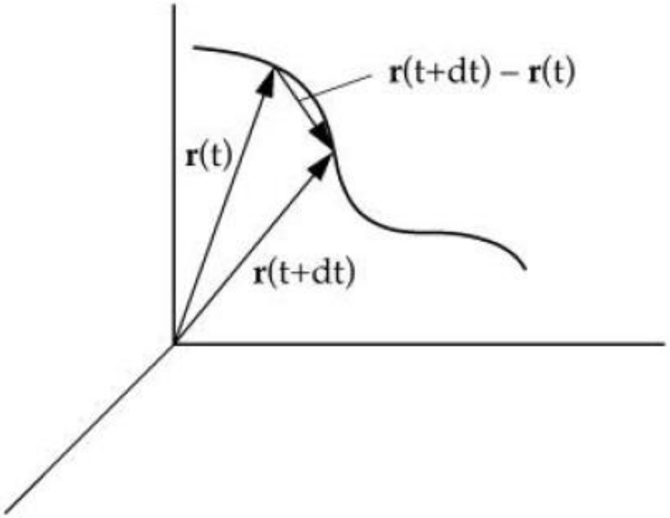
$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$

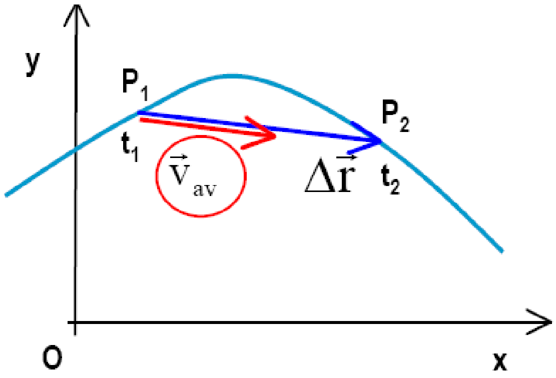
Velocidade

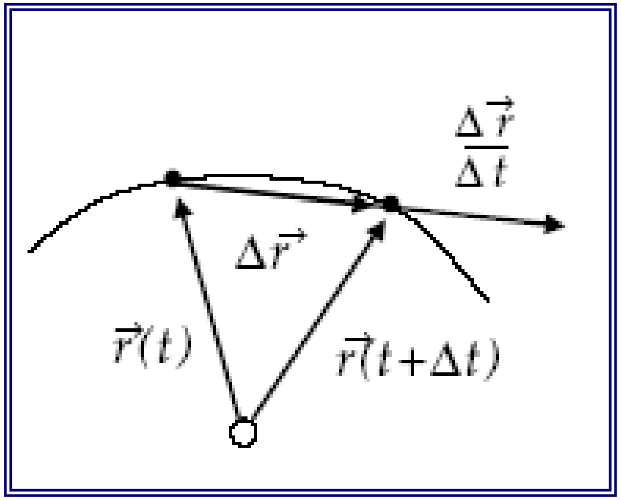
- **Velocidade média**

  [L]/[T] m/s

$$\boxed{\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}}$$







Velocidade

- **Velocidade instantânea**

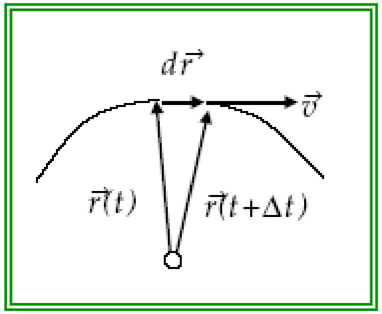
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

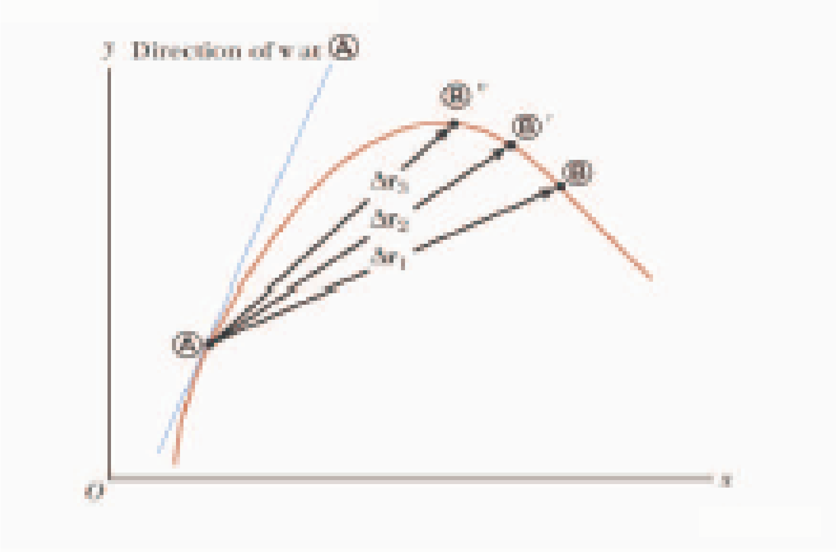
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

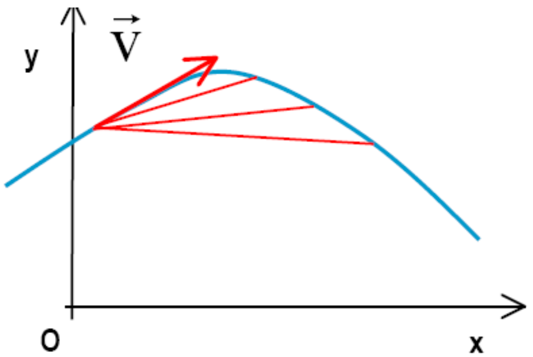
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$







Posição obtida pelo cálculo integral

- **Dado que**

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

- **Então**

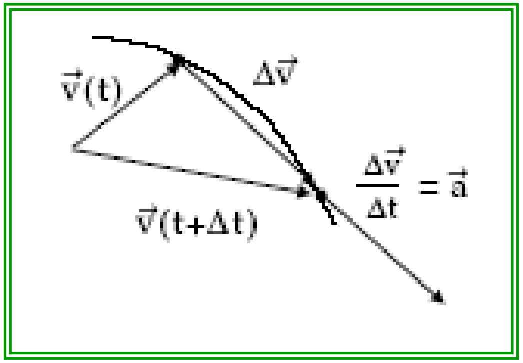
$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,'(t')\,dt' + \vec{r}(t_0) \\
&\vec{r}(t) = \left[\int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' + x(t_0)\right]\hat{i} + \left[\int_{t_0}^{t} v_y(t')\,dt' + y(t_0)\right]\hat{j} + \left[\int_{t_0}^{t} v_z(t')\,dt' + z(t_0)\right]\hat{k} \\
&\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,'(t')\,dt'
\end{aligned}}$$

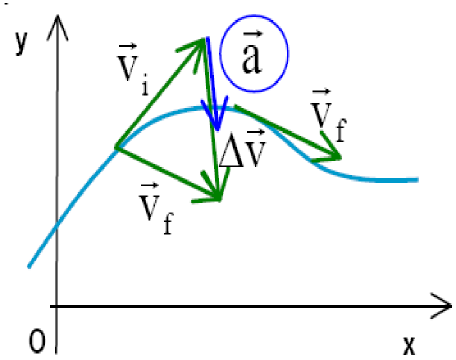
Aceleração

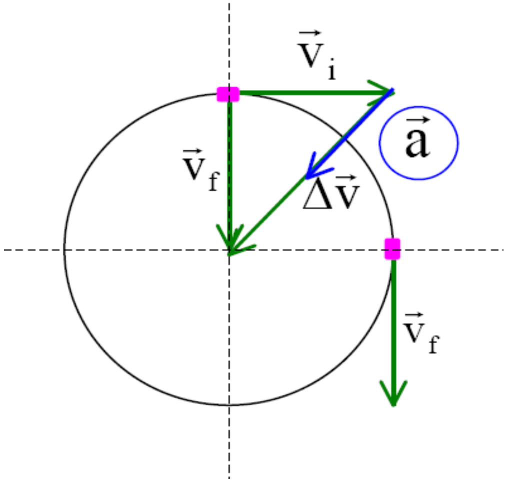
- **Aceleração média**

[L]/[T]² **m/s²**

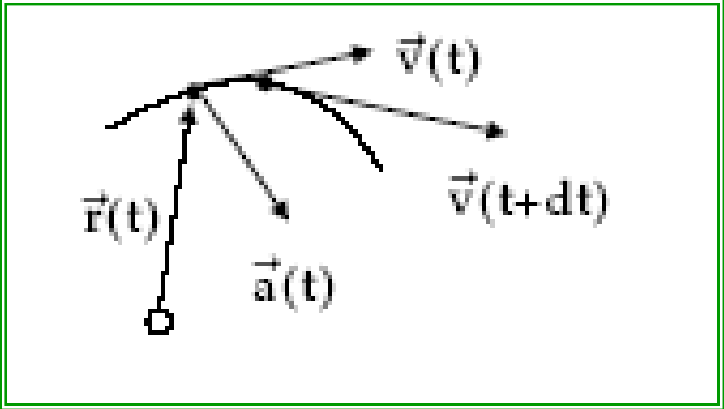
$$\boxed{\vec{a}_{m\acute{e}d} = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}}$$







Aceleração



- **Aceleração instantânea**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} =$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}\right)$$

$$= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}}$$

Velocidade obtida pelo cálculo integral

- **Dado que**

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

- **Então**

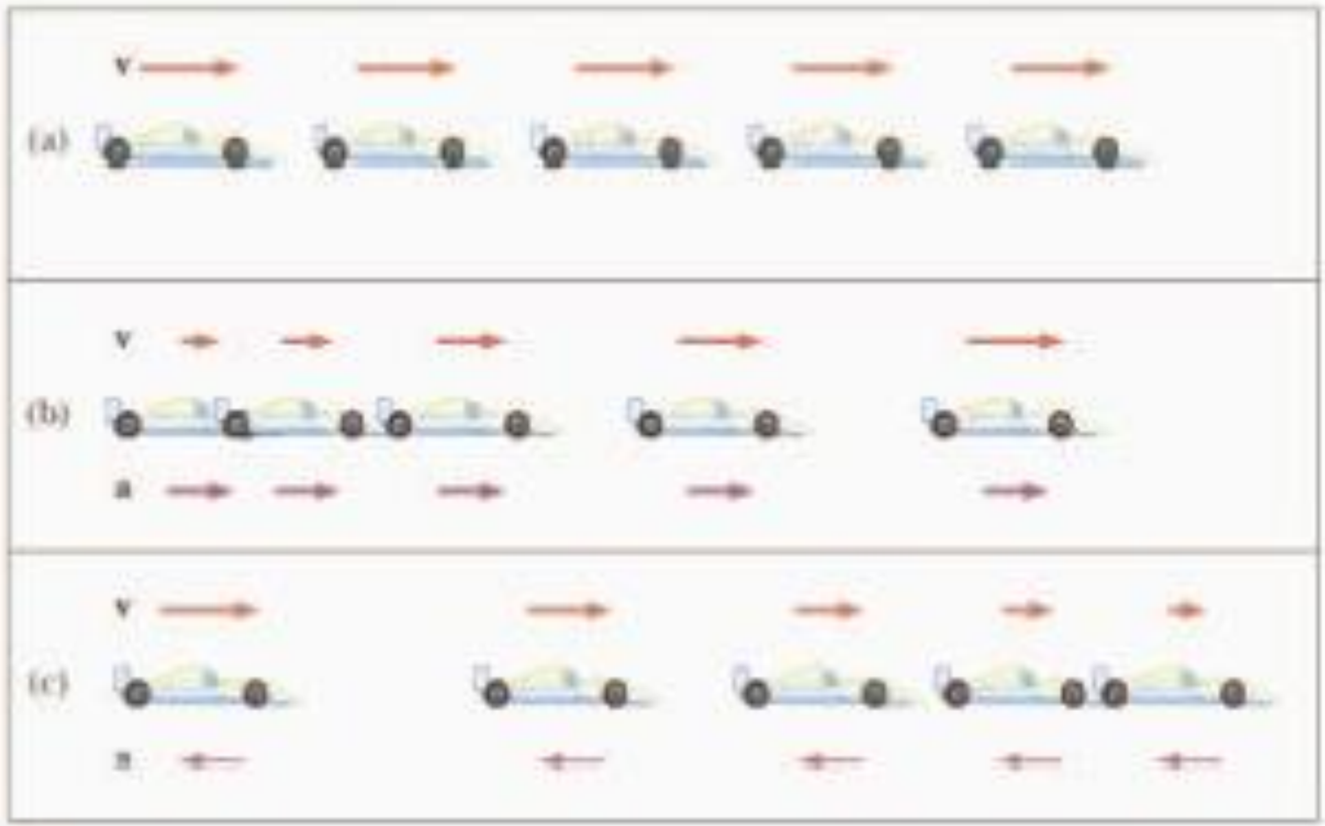
$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}'(t')\,dt' + \vec{v}(t_0)$$

$$\vec{v}(t) = \left[\int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt' + v_x(t_0)\right]\hat{i} + \left[\int_{t_0}^{t} a_y(t')\,dt' + v_y(t_0)\right]\hat{j} + \left[\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' + v_z(t_0)\right]\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}'(t')\,dt'$$

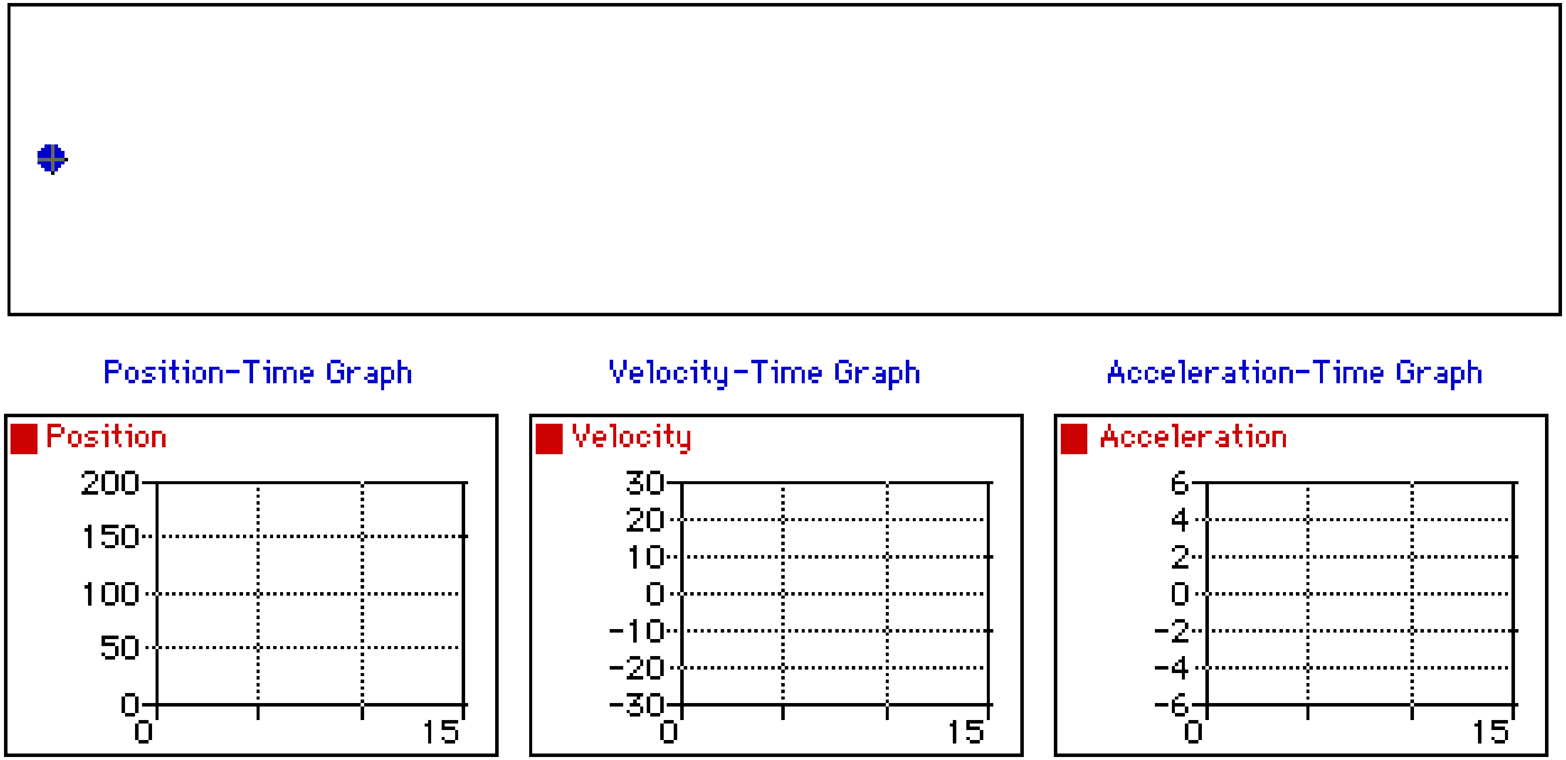
Velocidade e Aceleração

- **Ex. 1D**
- **MRU**
- **MRUA**
- **MRUR**



Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniforme ($v = c^{te}$)**



http://www.PhysicsClassroom.com

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

$$Ex.: \quad \vec{v}(t) = v(t)\hat{\imath}$$

1) Uniforme (v=c^{te})

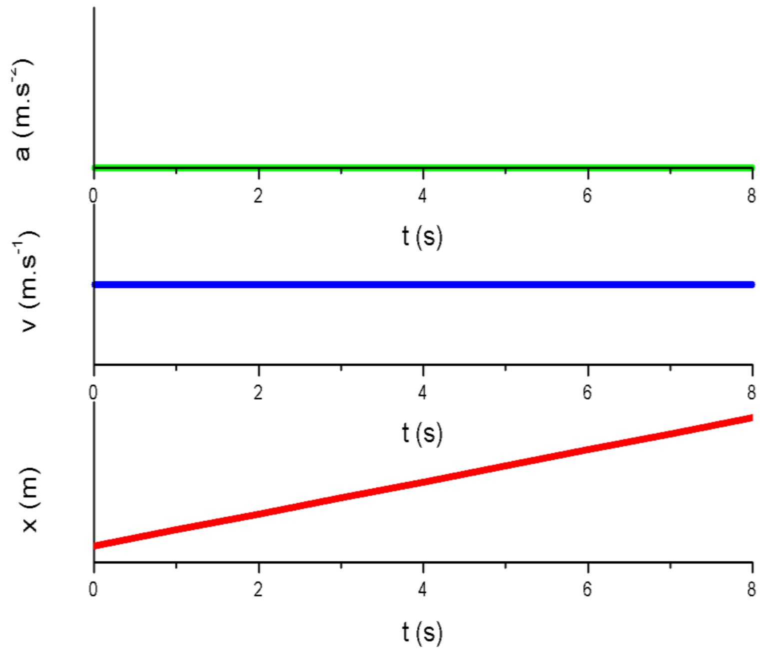
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$



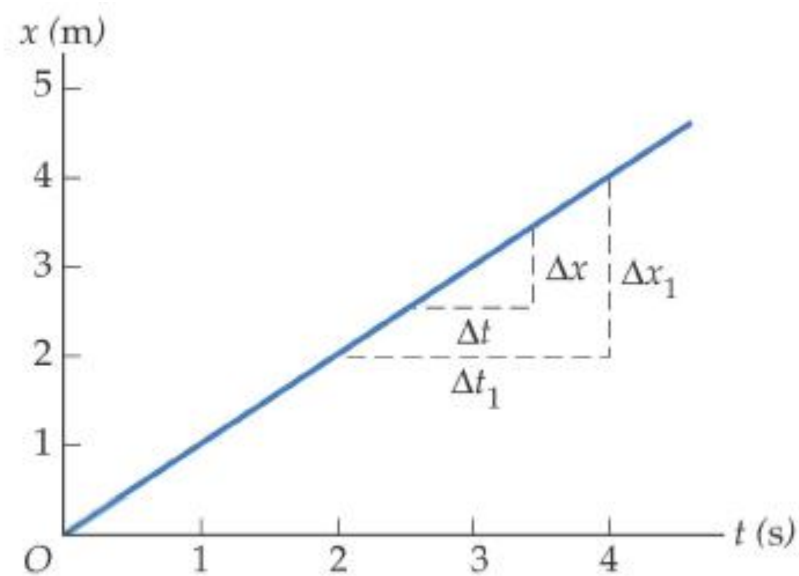
$$a = 0$$

$$v = c^{te}$$

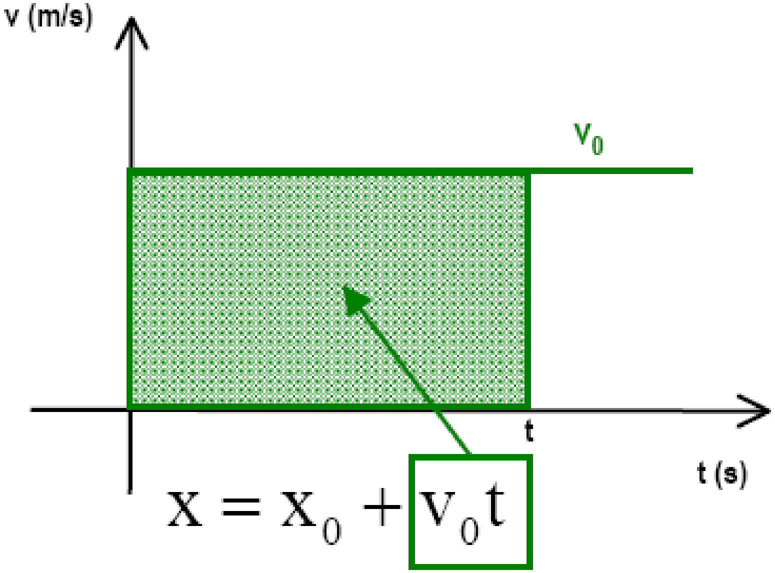
$$x = x_0 + v(t - t_o)$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniforme ($v=c^{te}$)**



Cálculo de v



Cálculo de $x\text{-}x_0$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

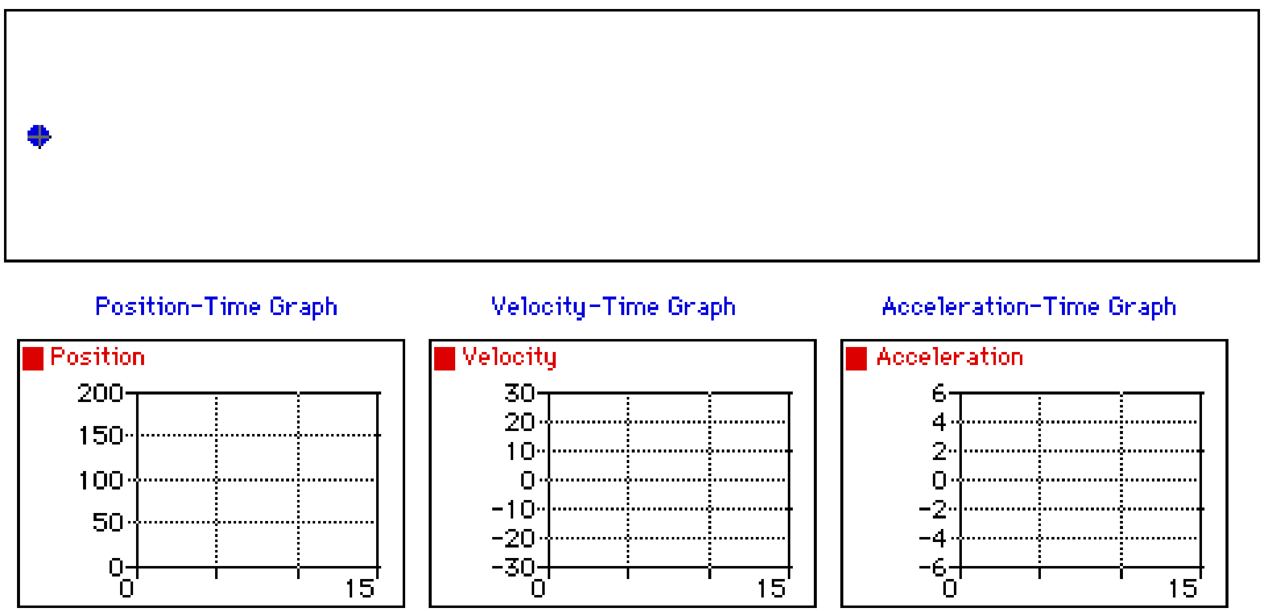
$$\boxed{a = c^{te}}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2}$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)}$$

- **Uniformemente variado ($a = c^{te}$): acelerado (retardado)**



Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

$$\boxed{Ex.: \quad \vec{a}(t) = a(t)\hat{\imath}}$$

2) **Uniformemente variado (a = c[te]): acelerado ou retardado**

$$\boxed{a(t) = \frac{dv(t)}{dt}}$$

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

$$v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t' - t_0)]dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = v_0\int_{t_0}^{t} dt' + a\int_{t_0}^{t} (t' - t_0)dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

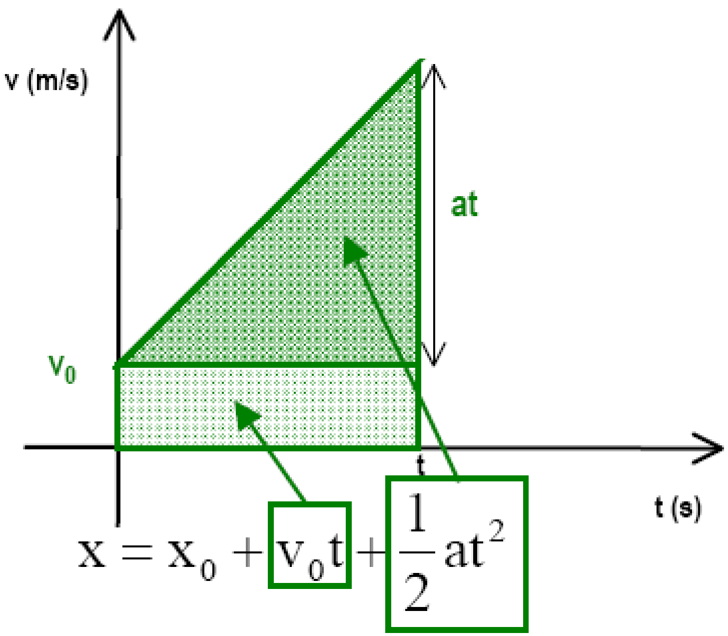
- **Uniformemente variado ($a = c^{te}$): acelerado ou retardado**

Eliminando *t*:

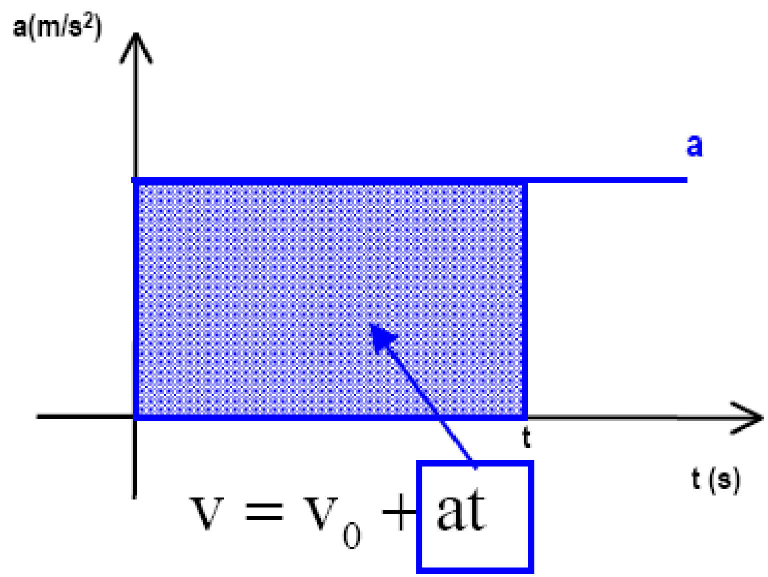
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)}$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniformemente variado ($a = c^{te}$): acelerado**



Cálculo de $x\text{-}x_0$



Cálculo de $v\text{-}v_0$

Cinemática 3D

Equações cinemáticas

<u>Genericamente</u>

$$\boxed{\vec{r}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\vec{v}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\vec{a}(t)}$$

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

$$x(t) = 2t^3+5t^2+5 \text{ (m)}$$

- Determine:

a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;

b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;

c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

$$x(t) = 2t^3+5t^2+5 \text{ (m)}$$

- Determine:

a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;

b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;

c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução

a)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t^3 + 5t^2 + 5\right) = 6t^2 + 10t \quad m.s^{-1}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^2 + 10t\right) = 12t + 10 \quad m.s^{-2}$$

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

$$x(t) = 2t^3+5t^2+5 \text{ (m)}$$

- Determine:

a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;

b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;

c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução

b)

$$t = 2s$$

$$x = 41\,m \quad v = 44\,m.s^{-1} \quad a = 34\,m.s^{-2}$$

$$t = 3s$$

$$x = 104\,m \quad v = 84\,m.s^{-1} \quad a = 46\,m.s^{-2}$$

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

$$x(t) = 2t^3+5t^2+5 \text{ (m)}$$

- Determine:

a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;

b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;

c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução

c)

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63}{1} = 63\, m.s^{-1}$$

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40}{1} = 40\, m.s^{-2}$$

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

$$x(t) = 2t^3+5t^2+5 \text{ (m)}$$

- Determine: a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t; b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s; c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

- **Solução**

a)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t^3 + 5t^2 + 5\right) = 6t^2 + 10t \quad m.s^{-1}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^2 + 10t\right) = 12t + 10 \quad m.s^{-2}$$

b)

$$t = 2s$$

$$x = 41\ m \quad v = 44\ m.s^{-1} \quad a = 34\ m.s^{-2}$$

$$t = 3s$$

$$x = 104\ m \quad v = 84\ m.s^{-1} \quad a = 46\ m.s^{-2}$$

$c)$

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63}{1} = 63\ m.s^{-1}$$

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40}{1} = 40\ m.s^{-2}$$

Exemplo 1-2

- **Movimento rectilíneo variado.** Uma partícula move-se ao longo do eixo dos xx com uma velocidade descrita por

$$v(t) = 40-5t^2 \ (m.s^{-1})$$

- Sabendo que no instante t=1s a partícula se encontra em x(t=1s)= 10 m determine: a) aceleração da partícula em qualquer instante t; b) a posição da partícula em qualquer instante;

  c) Represente graficamente x=f(t), v=f(t) e a=f(t)

Exemplo 1-2

- **Movimento rectilíneo variado.** Uma partícula move-se ao longo do eixo dos xx com uma velocidade descrita por

  v(t) = 40-5t² (m.s⁻¹)

- Sabendo que no instante t=1s a partícula se encontra em x(t=1s)= 10 m determine: a) aceleração da partícula em qualquer instante t; b) a posição da partícula em qualquer instante;
  c) Represente graficamente x=f(t), v=f(t) e a=f(t)

- **Solução**

a)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-5t^2 + 40\right) = -10t \quad m.s^{-2}$$

b) ***Usando conceito de integral indefinido***

$$x(t) = \int v(t)dt + C$$

$$x(t) = \int \left[40 - 5t^2\right]dt + C$$

$$x(t) = 40t - \frac{5}{3}t^3 + C$$

$$\underline{\underline{Cálculo\ de\ C}}:$$

$$x(t = 1s) = 10$$

$$x(t = 1s) = 40(1) - \frac{5}{3}(1)^3 + C$$

$$10 = 40 - \frac{5}{3} + C$$

$$C = -\frac{85}{3}$$

Exemplo 1-2

Portanto

$$\boxed{x(t) = 40t - \frac{5}{3}t^3 - \frac{85}{3}\,(m)}$$

Verifique v(t) derivando

$$\boxed{v(t) = 40 - 5t^2\left(m.s^{-1}\right)}$$

Usando conceito de integral definido

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) - x(1) = \int_{1}^{t} \left(40 - 5t^2\right)dt'$$

$$x(t) - x(1) = 40\,t\Big|_1^t - \frac{5}{3}t^3\Big|_1^t$$

$$x(t) - x(1) = 40(t-1) - \frac{5}{3}\left(t^3 - 1\right)$$

$$x(t) - 10 = 40t - \frac{5}{3}t^3 - 40 - \frac{5}{3}$$

Exemplo 1-2

$$\boxed{x(t) = 40t - \frac{5}{3}t^3 - \frac{85}{3}\,(m)}$$

$$\boxed{v(t) = 40 - 5t^2\left(m.s^{-1}\right)}$$

$$\boxed{a(t) = -10t\left(m.s^{-2}\right)}$$