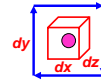


Mecânica e Campo Electromagnético

- Condutores.
- Campo eléctrico no interior de um condutor com uma cavidade com forma arbitrária.
- Capacidade e condensadores
- Condensadores de placas paralelas, cilíndrico e esférico.
- Energia armazenada num condensador.
- Resolução de exercícios.

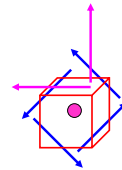
Maria Rute André
rferreira@ua.pt

1



$$\text{div} \vec{F} = 0$$

As componentes são paralelas às faces do elemento de volume



$$\text{div} \vec{F} \neq 0$$

Há uma componente perpendicular às faces do elemento de volume que aponta para fora

2

✍. Resolução de exercícios

26. Dada a função vectorial de componentes:

$$A_x = 6xy \quad A_y = 3x^2 - 3y^2 \quad A_z = 0$$

- Calcule o integral de linha do vector \mathbf{A} , do ponto $(0,0,0)$ para o ponto $(2,4,0)$, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.
- Verifique que o campo representado pelo vector \mathbf{A} pode representar um campo electrostático.
- Calcule a divergência do campo representado pelo vector \mathbf{A} e interprete o resultado atendendo ao significado físico de $\nabla \cdot \mathbf{E}$.

27. Numa determinada região do espaço o campo eléctrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \right)$$

Verifique se nessa região do espaço existe ou não uma distribuição de carga eléctrica.

3

Condutores

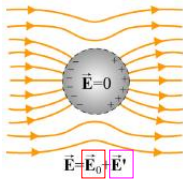
Propriedades

1. Materiais onde as cargas têm uma grande mobilidade.
2. Num condutor perfeito, o deslocamento das cargas sob a acção de um campo eléctrico pode-se fazer em qualquer direcção e sem qualquer obstáculo.
3. O campo eléctrico no interior de um condutor é nulo.

4

Condutores

Vamos analisar o que acontece a um condutor quando o colocamos na presença de um campo electrostático E_0 .

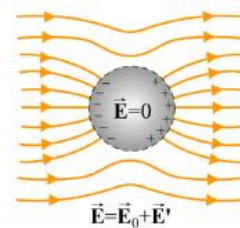


1. Inicialmente, as cargas do condutor estão em repouso e arbitrariamente distribuídas por todo o condutor;
2. Na presença do campo electrostático, as cargas começam a mover-se, de modo a que sejam nulas as forças que nelas actuam ou quando atingem os limites do condutor, originando um campo eléctrico no interior do condutor (E');

3. Uma vez que as cargas são móveis, continuarão a mover-se até que E' anule E_0 no interior do condutor; de tal modo que em equilíbrio electrostático, o campo eléctrico no interior do condutor é nulo.
4. No exterior do condutor o campo E' criado pela distribuição de cargas corresponde a um campo dipolar, sendo o campo total $E = E' + E_0$.

5

Condutores



Próximo do condutor, as linhas de campo entram radialmente (ou seja, perpendicularmente) à superfície.

6

Condutores

- A carga está concentrada na superfície do condutor; logo o campo no interior do condutor é nulo.
- O condutor é um corpo equipotencial e a sua superfície é, também, equipotencial

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

O campo eléctrico tem de ser perpendicular à superfície em cada ponto

A componente tangencial do campo eléctrico na superfície em cada ponto é nula; Caso contrário, originaria um deslocamento de cargas o que implicaria que o condutor estivesse fora do equilíbrio.

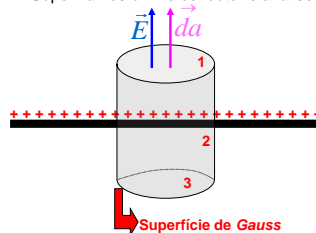
Portanto, o campo eléctrico no exterior de um condutor pode ser calculado, usando a lei de Gauss

7

Condutores: campo eléctrico no exterior

EXEMPLO

1. Suponhamos um fio condutor e analisemos a sua superfície carregada, $+\sigma$



Só existe fluxo na superfície 1, pois o campo no interior é nulo e é perpendicular à superfície do condutor

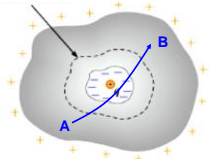
$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &= E \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

8

Condutores com cavidades

• Queremos saber se existe campo eléctrico no interior de cavidades em condutores

Superfície de Gauss



Como já sabemos, o campo no interior do condutor é nulo, logo a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ entre dois pontos do condutor é, também, zero; ou seja:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

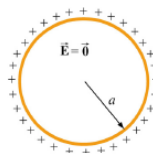
Como a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ deve ser zero para qualquer caminho escolhido, podemos concluir que o campo eléctrico dentro da cavidade, também, terá de ser nulo.

9

Condutores

EXEMPLO

- a) Qual o potencial em todo o espaço devido a uma esfera condutora de raio a e carregada com carga $+Q$?
- b) Qual a energia potencial do sistema?



$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases}$$

Campos eléctricos no interior é nulo

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

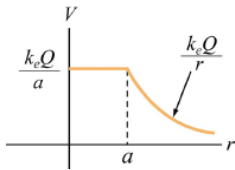
$$\begin{cases} r > a & V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = k_e \frac{Q}{r} \\ r < a & V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^a dr E(r > a) - \int_a^r E(r < a) \\ & = - \int_{\infty}^a dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} = k_e \frac{Q}{a} \end{cases}$$

10

Condutores

EXEMPLO

- a) Qual o potencial em todo o espaço devido a uma esfera condutora de raio a e carregada com carga $+Q$?
- b) Qual a energia potencial U do sistema? É o trabalho necessário para carregar a esfera com carga Q .



$$dW_{\text{ext}} = V dq = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \right) dq$$

trabalho devido a um elemento dq

$$W_{\text{ext}} = \int_0^Q dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$U = \frac{1}{2} QV$$

$$\begin{cases} V = Q / 4\pi\epsilon_0 a \\ W_{\text{ext}} = U \end{cases}$$

11

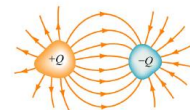
Capacidade e Condensadores

• Definimos capacidade de um condutor como a razão entre a sua carga e o potencial, relativamente ao infinito:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (F)$$

Um condensador é um dispositivo que armazena carga e energia eléctrica

Um condensador pode ter diversas formas e tamanhos, sendo a sua configuração básica definida por dois condutores com a mesma quantidade de cargas opostas:

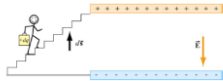


Aplicações: armazenar energia potencial eléctrica, atrasar alterações de potencial quando acoplados a elementos resistivos, filtragem de sinais com frequência não desejadas, circuitos ressonantes...

12

Capacidade e Condensadores

No estado não carregado, a carga em cada condutor é zero. Durante o processo de carga, uma carga Q é movida de um condutor para outro, ficando um condutor carregado com $+Q$ e o outro com $-Q$. Cria-se uma ddp , tal que o condutor carregado $+Q$ está a um potencial superior àquele carregado com $-Q$. NOTA: tanto no estado carregado como no estado não carregado a carga total no condensador é nula.



Definimos capacidade de um condensador como sendo uma medida da habilidade de armazenar carga e energia eléctrica.

Como um condensador é formado por dois (ou mais) condutores separados por uma dada distância, a capacidade pode, também, ser definida como a razão entre a carga total e a ddp dos condutores:

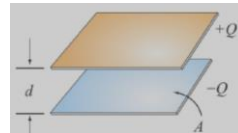
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (F)$$

Para o caso de dois condutores

13

Condensador de placas paralelas

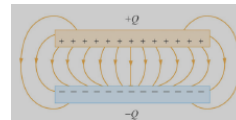
Considere um condensador de placas paralelas, cada uma com uma área A e carga $+Q$ e $-Q$, separadas de uma distância d , tal que $d \ll A$ (ou seja, o campo é uniforme entre as placas).



$$V_1 - V_2 = \int_0^d E dl = Ed = \frac{dQ}{\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

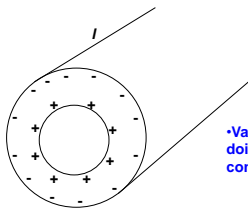
Linhas de campo eléctrico



14

Condensador Cilíndrico

Considere um condensador cilíndrico: temos um condutor central de raio a envolvido por um condutor cilíndrico de raio separados por uma distância $(b-a)$. O condutor exterior está ligado à massa.



Ou seja, inicialmente está descarregado mas devido à presença do condutor interior os electrões fluem da terra até à sua superfície.

- O campo no interior do condutor do meio é nulo;
- O campo é radial $(b-a) \ll l$

• Vamos calcular o campo eléctrico entre os dois condutores, usando a lei de Gauss, considerando um cilindro de raio r : $a < r < b$

$$\int E da = E 2\pi r l \Rightarrow E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}$$

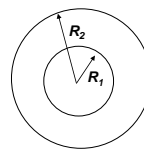
• A ddp entre os condutores será:

$$V_b - V_a = \int E dl = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}, \text{ onde } Q = \sigma 2\pi a l$$

15

Condensador Esférico

Considere uma esfera de raio R_1 e carga $+Q$ envolvida por outra esfera de raio R_2 e carga $-Q$ separadas por uma distância $(R_2 - R_1)$.



- O campo é radial;
- O campo a uma distância r : $R_1 < r < R_2$, pode ser calculado usando a lei de Gauss

$$E = \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0 r^2}$$

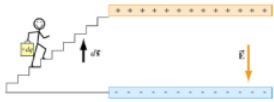
$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} E dl = \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \Rightarrow C = \frac{R_1 R_2 4\pi \epsilon_0}{R_1 - R_2}$$

16

Energia armazenada num condensador

Por definição, é igual ao trabalho necessário para carregá-lo.

- Consideremos que numa dada altura, a carga em qualquer placa é q e que está associada um ddp, tal que $V=q/C$.
- O trabalho necessário para transportar uma carga infinitesimal dq da placa negativa para a placa positiva, será



$$dW = \frac{q}{C} dq \Rightarrow W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Trabalho total

O trabalho é armazenado na forma de energia potencial eléctrica U e sendo $Q=CV$,

$$U = \frac{CV^2}{2}$$