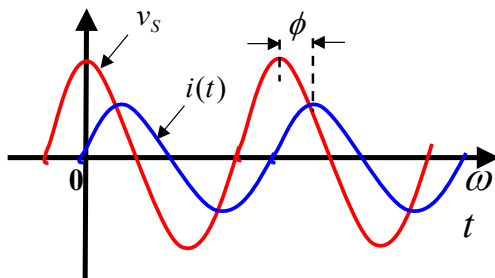


Sinais e Sistemas Electrónicos



Capítulo 4: Circuitos em regime sinusoidal



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Sumário

- **Introdução**
- **Resposta forçada a uma função sinusoidal;**
- **Função forçadora complexa;**
- **Fasores;**
- **Relações fasoriais para R, L e C;**
- **Extensão das técnicas de análise aos circuitos em regime sinusoidal;**
- **Impedância;**
- **Potência em regime sinusoidal;**
- **Valor eficaz.**

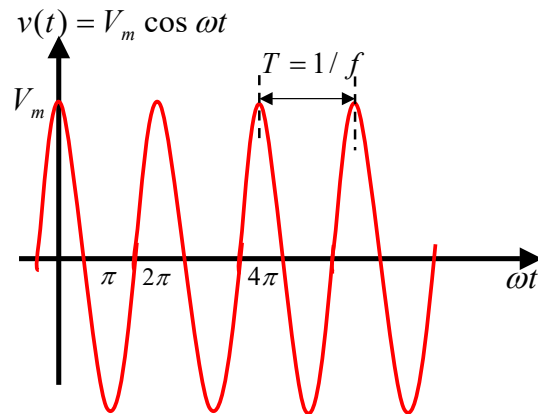
Introdução

● O estudo da resposta dos circuitos a uma **função forçadora** sinusoidal é importante porque:

➤ Tensões sinusoidais são geradas facilmente; a **energia eléctrica** disponível é sinusoidal;

➤ A sinusóide goza da propriedade de **manter a forma** em circuitos lineares;

➤ Qualquer função periódica pode ser decomposta numa soma de sinusóides – conhecendo a resposta do circuito a cada uma das sinusóides podemos calcular a resposta à função original.



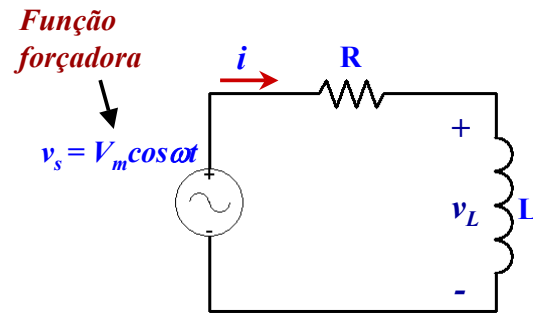
Resposta a uma função sinusoidal

Resposta a uma função sinusoidal

- Aplicando KVL

$$-v_s + Ri + v_L = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cos \omega t$$



- Dado que a resolução desta equação passa pela derivação e pela integração da função forçadora, é de prever que a sua solução, $i(t)$, tenha **a mesma forma** (e a mesma frequência) da função forçadora.

- Podemos portanto admitir que a solução tem a forma...

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{em que } A \text{ e } \phi \text{ são constantes a determinar.}$$

Função forçadora complexa

Função forçadora complexa

- A resolução de equações diferenciais é **muito complicada** para ter utilidade em cálculos à mãos;
- O problema é simplificado se optarmos antes pela **função forçadora complexa**:

Em lugar desta: $v_S = V_m \cos \omega t$  Função forçadora **sinusoidal**

Usamos **antes esta**: $v_S = V_m e^{j\omega t}$  Função forçadora **complexa**

E porque é que esta mudança para a função complexa é legítima?

Função forçadora complexa

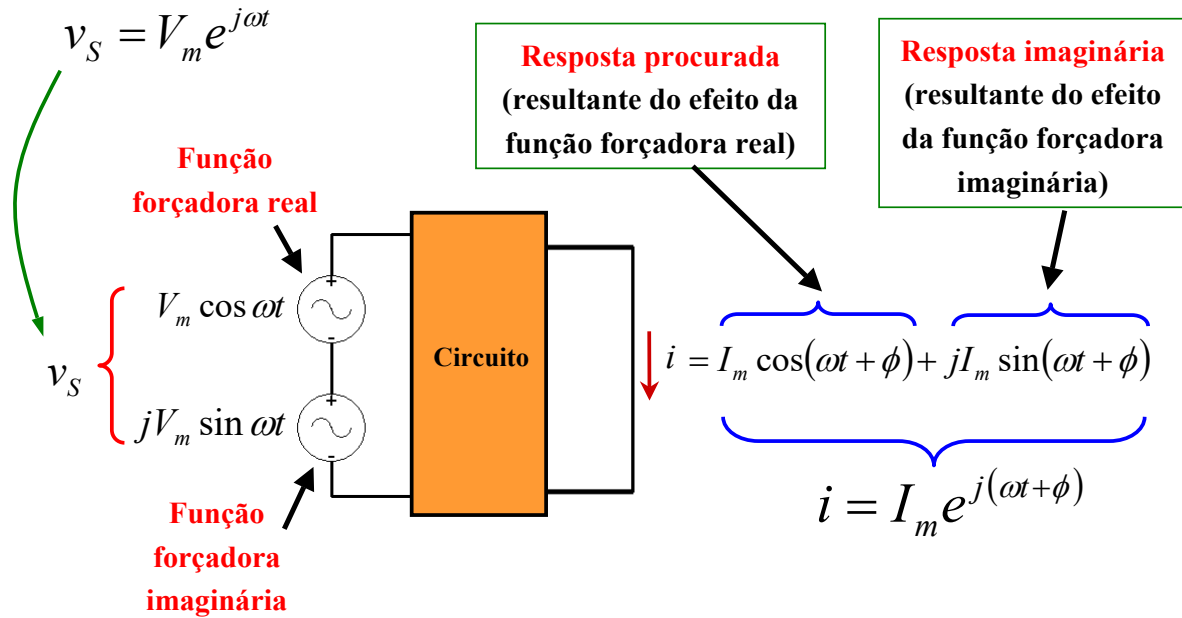
... Porque segundo a **Fórmula de Euler**:

$$\begin{array}{c}
 \text{Função forçadora} \\
 \text{complexa}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow \\
 V_m e^{j\omega t} = \underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Função forçadora real dada}} + \underbrace{j V_m \sin \omega t}_{\text{Função forçadora imaginária}}
 \end{array}$$

- Portanto, ao aplicar a função forçadora complexa estamos, de facto, a aplicar, em simultâneo, **duas funções**:
 - A função forçadora sinusoidal usada no circuito real;
 - Uma função forçadora imaginária.
- O resultado obtido da análise, terá também uma **parte real** e uma **parte imaginária**. A parte real será a resposta desejada. A parte imaginária deve ser ignorada.

Aplicação de uma função forçadora complexa

- Esta abordagem funciona graças ao **Princípio da Sobreposição**.



Fasores

O fasor

- Uma grandeza sinusoidal é completamente caracterizada pela **amplitude**, pela **fase** e pela **frequência**;

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \longrightarrow \quad i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

- Mas num circuito linear, a **frequência é a mesma para todas as tensões e correntes**, pelo que a sua indicação é **supérflua**;

- Vamos então optar por uma **representação complexa**, na **forma polar**, que **omite a frequência**:

$$i = I_m e^{j\phi} \quad \longrightarrow \quad I = I_m \angle \phi$$

representação abreviada que se designa por **fasor**.

O fasor

- Assim, a função forçadora real

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 0) \quad \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \quad \mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$$

e a resposta real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \quad \mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

- Fasores são quantidades complexas; são escritos em **maiúsculas** e em **bold**;
- Fasores **não são funções do tempo**.

i(t)

é uma representação
no domínio do tempo

I

é uma representação
no domínio da frequência

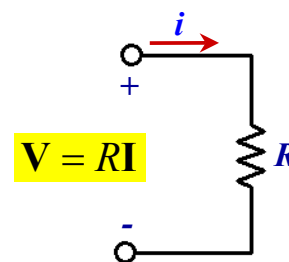
Relações fasoriais para R, L e C

- Sendo representações no domínio da frequência, os fasores têm a vantagem de transformar as **relações diferenciais** corrente-tensão das bobinas e condensadores, em simples **relações algébricas**, simplificando assim a análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário;
- Vejamos então como ficam as **relações corrente-tensão** dos três elementos passivos que conhecemos, no domínio da frequência:
 - Resistência;
 - Bobina;
 - Condensador.

Relação entre os fasores **V** e **I** na resistência

$$V_m \angle 0^\circ = R I_m \angle \phi \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = R \mathbf{I}$$

- Na forma fasorial (domínio da frequência), a relação corrente-tensão na resistência é **igual à do domínio do tempo**;



- Isto implica $\phi = 0$, ou seja, tensão e corrente estão **sempre em fase** no circuito.

Relação entre os fasores V e I na bobina

- Para a bobina temos $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Substituindo $v(t)$ pela função forçadora complexa

$$v(t) = V_m e^{j\omega t}$$

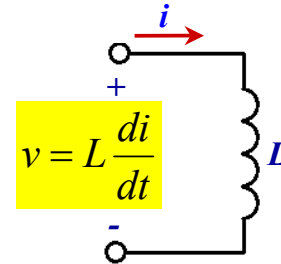
e $i(t)$ pela resposta complexa $i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

$$\text{obtemos } V_m e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Dividindo por $e^{j\omega t}$ obtemos $V_m = j\omega L I_m e^{j\phi}$

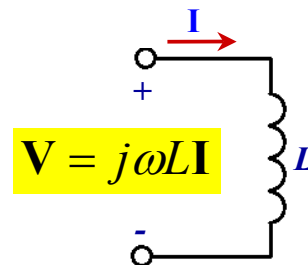
O que dá na forma polar $V_m \angle 0^\circ = j\omega L I_m \angle \phi$

A **relação fasorial** é portanto $V = j\omega L I$



Relação entre os fasores V e I na bobina

$$V = j\omega L I$$



- Ou seja, a **relação diferencial** entre $v(t)$ e $i(t)$ que existe no domínio do tempo, transforma-se numa **relação algébrica** no domínio da frequência;
- Como o ângulo do factor $j\omega L$ é 90° , a fase de V é igual à fase de I mais 90° - ou seja, a **corrente está atrasada em relação à tensão de 90°** .

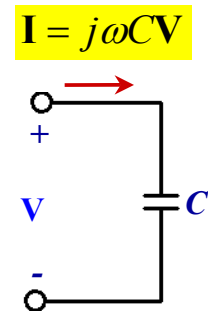
Relação entre os fasores V e I no condensador

$$I = j\omega CV$$

● Mais uma vez, obtemos uma **relação algébrica** entre os fasores de corrente e tensão no domínio da frequência;

● Aqui é a fase de I que é igual à fase de V mais 90° - ou seja, **a corrente está avançada em relação à tensão de 90° .**

● É de notar a semelhança entre as relações corrente-tensão das bobinas e condensadores no domínio da frequência e a lei de Ohm;



Técnicas de Análise de Circuitos com fasores

Técnicas de análise de circuitos com fasores

- Também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores.

KVL

Ao longo de um caminho fechado temos $V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$

KCL

Em qualquer nó de um circuito verifica-se $I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0$

- **Análise Nodal** e **Análise de Malhas** são também aplicáveis no domínio da frequência;
- O mesmo pode ser dito em relação aos **Princípio da Sobreposição**, **Transformações de fontes** e **teoremas de Thévenin e Norton**.

Aplicação da KVL ao circuito RL

- Agora, tensões e correntes são representadas pelo fasor correspondente.

- A aplicação da KVL faz-se da mesma maneira:

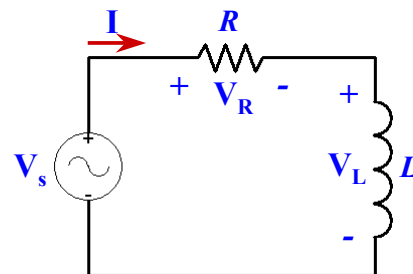
$$-V_S + V_R + V_L = 0$$

Substituindo pelas relações V/I obtidas antes

$$-V_S + RI + j\omega LI = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{V_S}{R + j\omega L}$$

Se, no domínio do tempo, a fonte é $V_s = V_m \cos \omega t$, então o fasor correspondente é

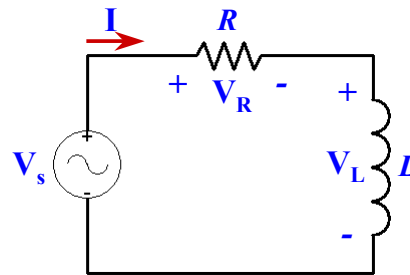
$$V_S = V_m \angle 0^\circ$$



Aplicação da KVL ao circuito RL

Pelo que $\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \left(-\arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$



Relembrando...

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi \longrightarrow i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Convertemos para o domínio do tempo $i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$

Conclusões

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

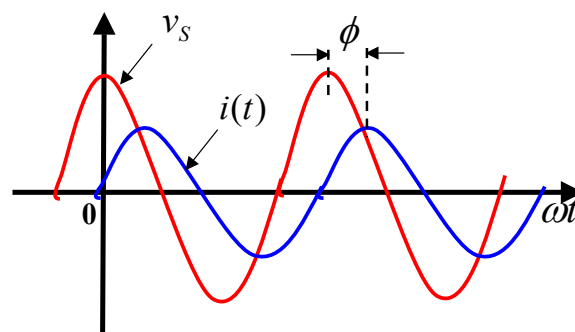
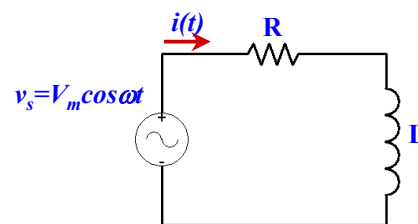
● A amplitude da resposta é **proporcional** à amplitude da função forçadora – se assim não fosse o circuito não era linear!

● A amplitude da resposta diminui com **R, L e ω** , mas não de forma proporcional;

● A **corrente está atrasada** em relação à tensão de um ângulo, ϕ , entre e 0 e 90° :

➤ **$L = 0$** - corrente está em fase com a tensão;

➤ **$R = 0$** - corrente está atrasada 90° .



Impedância

- No domínio da frequência, vimos que as relações V/I para os três elementos passivos que conhecemos são

$$V = RI \quad V = j\omega LI \quad V = \frac{I}{j\omega C}$$

Escrevendo estas expressões como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L = X_L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

verificamos que estas razões dependem apenas dos valores dos elementos e da frequência;

- Por se tratarem de razões entre V e I , estas quantidades complexas são expressas com unidades de **Ohm**. Chamam-se genericamente **impedâncias** e representam-se pela letra **Z** .

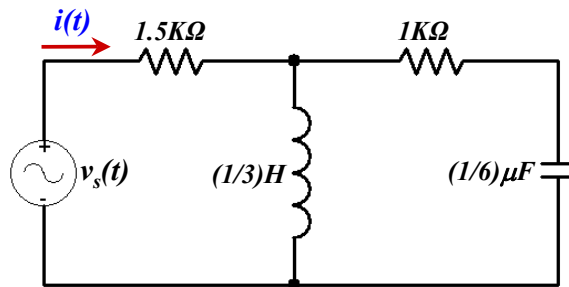
Impedância

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L = X_L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

- Embora possa ser um numero complexo, a **impedância não é um fasor** pois não tem uma correspondência no domínio do tempo.
- A **validade das leis de Kirchhoff** no domínio da frequência implica que as impedâncias podem ser associadas em série e em paralelo seguindo as mesmas regras usadas nas resistências.

Exemplo 1 – Determinar $i(t)$ no circuito sabendo que $v_s(t) = 40\sin(3000t)$ [Volts]

- Começemos por calcular o **fator** da função forçadora.



$$v_s(t) = 40 \sin 3000t = 40 \cos(3000t - 90^\circ) \rightarrow V_s = 40 \angle -90^\circ V$$

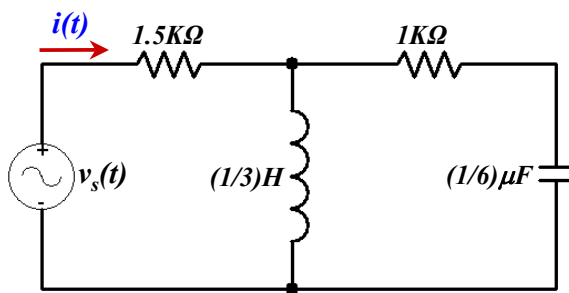
- À frequência de 3000rad/s , as impedâncias da bobina e do condensador são:

$$Z_L = j\omega L = j(3000)(1/3) = j1K\Omega$$

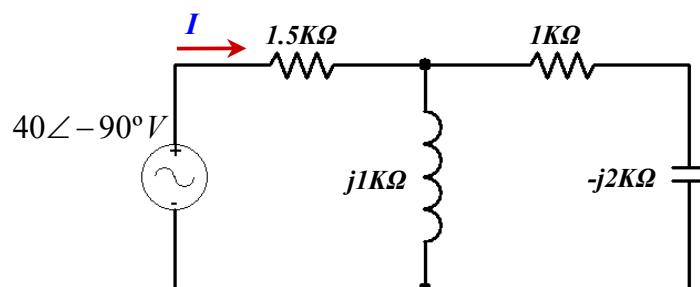
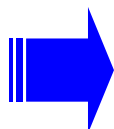
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(3000)(1/6)10^{-6}} = -j2K\Omega$$

Exemplo 1

- Desenhemos agora o **circuito no domínio na frequência**.



**Toda a análise
é feita agora
neste circuito!**



Exemplo 1

- Calculamos agora a impedância total vista pela fonte

$$Z_1 = (1 - j2)K\Omega$$

$$Z_2 = j1 // Z_1 = \frac{j1(1 - j2)}{j1 + 1 - j2} \\ = (0.5 + j1.5)K\Omega$$

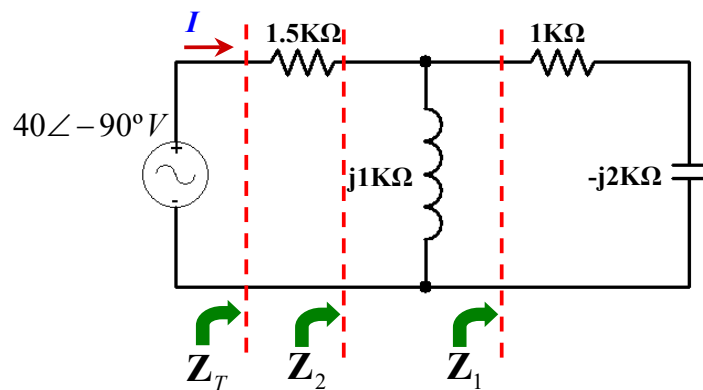
$$Z_T = 1.5 + Z_2 = (2 + j1.5)K\Omega$$

Convertendo para a forma polar $Z_T = 2.5 \angle 36.87^\circ K\Omega$

$$I = \frac{V_s}{Z_T} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.87^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

- O que transformando de volta para o domínio do tempo resulta em

$$i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$



Potência em regime sinusoidal

Valor eficaz

Potência

- Potência instantânea

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- Potência média - é a média da potência instantânea calculada num período:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Potência média em regime sinusoidal

- Admitamos que a tensão e a corrente num dado elemento de circuito é dada por:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \text{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- A potência instantânea nesse elemento é portanto

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \\ &= 1/2 \cos(\alpha + \beta) + \\ &+ 1/2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

- Ou seja, $p(t)$ inclui duas parcelas

- Uma que é constante e independente do tempo;
- Outra que varia ao dobro da frequência de operação

Potência média em regime sinusoidal

- A potência média é portanto

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \right] dt$$

- Como o valor médio de um coseno (ou seno) num período é zero, segue-se que

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Apliquemos este resultado às situações em que o elemento em causa é

- uma resistência;
- um elemento reactivo: bobina ou condensador.

Potência absorvida por uma resistência

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

- Como numa resistência

- a corrente e a tensão estão em fase: $\theta - \phi = 0$
- e $V_m = I_m R$

então

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}$$

Potência absorvida por uma bobina ou um condensador

- Numa **bobina** temos $\theta - \phi = 90^\circ$
- Numa **condensador** temos $\theta - \phi = -90^\circ$

Em qualquer dos casos temos $\cos(\theta - \phi) = 0$

logo $P_L = 0$ e $P_C = 0$

A potência média fornecida a um circuito contendo apenas bobinas e condensadores é zero.

Valor eficaz

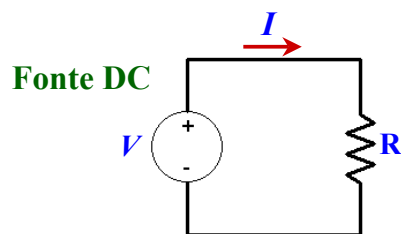
- Como sabemos, a energia elétrica chega a nossas casas na forma de uma tensão alternada sinusoidal com o valor de 220V. 220V é o chamado **valor eficaz** da tensão;
- O valor eficaz de uma tensão ou corrente periódica, é uma **medida da eficácia** dessa tensão ou corrente de fornecer potência a uma carga;



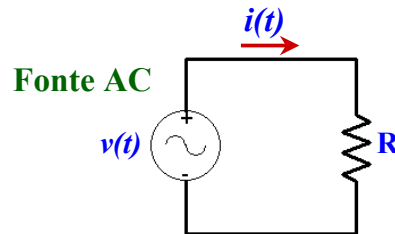
Valor eficaz de um corrente periódica: é igual ao valor da corrente DC que, ao fluir através de uma dada resistência, fornece a mesma potência média que a corrente periódica.

Valor eficaz

Vejamos como calcular o valor eficaz de uma corrente (ou tensão) sinusoidal atendendo à definição.



$$P_{DC} = I^2 R$$



$$P_{AC} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 R dt$$

Igualando as duas potências, definimos o valor eficaz da corrente

$$I_{eff}^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 R dt \quad \longrightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

● O valor eficaz é, assim, obtido tirando a raiz quadrada à média do quadrado da corrente. Por esse motivo é habitualmente chamado de **valor RMS** (*Root-Mean-Square*).

● Se $i(t)$ for a corrente sinusoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

O seu respectivo valor eficaz será

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt} = I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$\longrightarrow I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- O valor eficaz é portanto independente da fase da corrente ou tensão;
- A corrente $\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ tem o **valor eficaz** de **1A**, e por isso fornece a uma resistência a mesma potência média que uma corrente DC de **1A**;
- Notar que o factor $\sqrt{2}$ só é válido para ondas sinusoidais.