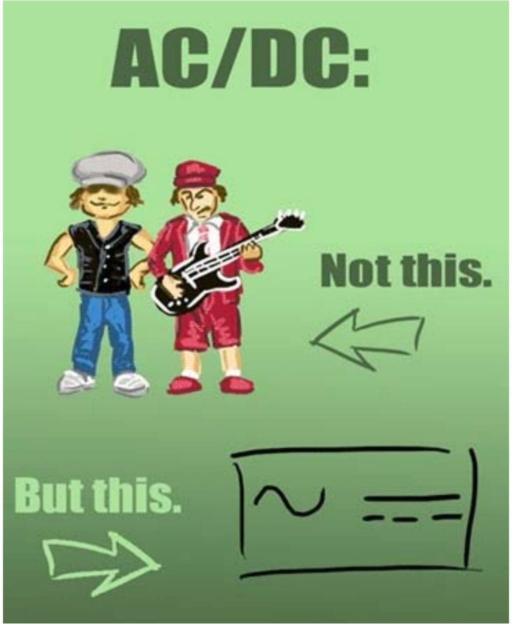


Sinais e Sistemas Electrónicos

Problemas resolvidos V

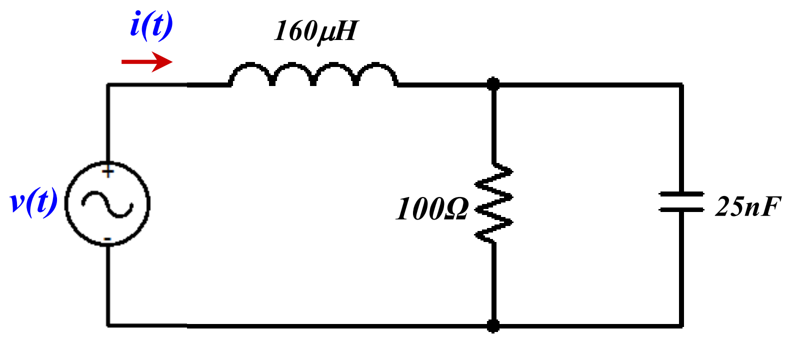
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Circuitos em regime sinusoidal

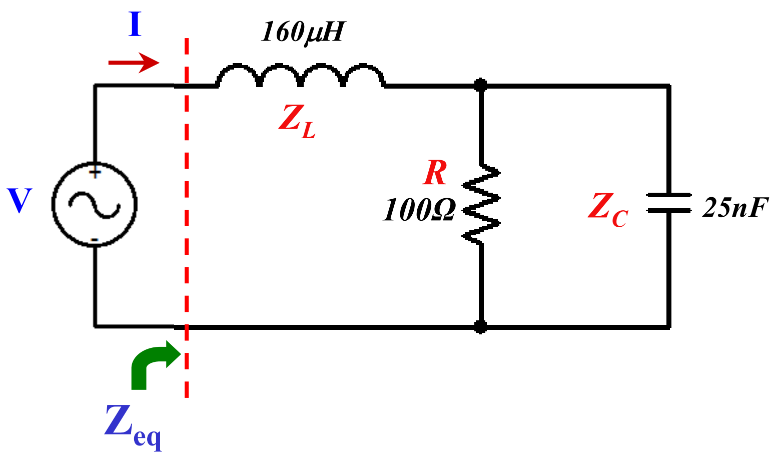
1 – Para o circuito representado, calcule

a) a frequência para a qual a tensão sinusoidal *v(t)* está em fase com *i(t)*;

b) a impedância total *vista* pela fonte *v(t)* a essa frequência.



Com fasores:



I e V relacionam-se por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

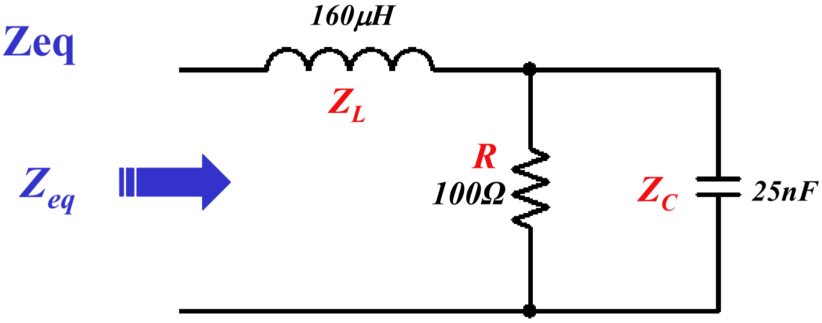
Para que os fasores I e V tenham o mesmo angulo (de forma a ter *v(t)* e *i(t)* em fase) é preciso que Zeq seja um numero real.

Zeq tem de ser, portanto, uma impedância resistiva.

a) Calculemos então Zeq

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



$$Z_{eq} = Z_L + \left(R // Z_C\right) \ = j\omega L + \frac{R\left(1/j\omega C\right)}{R + \left(1/j\omega C\right)}$$

Multiplicando a fracção pelo complexo conjugado do denominador e simplificando, obtemos

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

Para que Z_{eq} seja real, é preciso que a parte imaginária seja nula, donde

$$\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right] = 0$$

portanto

$$\omega = 0 \quad \vee \quad \left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right] = 0$$

Resolvendo a segunda igualdade em ordem a ω…

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$$

L = 160μH,
R = 100Ω
C= 25nF

$$\omega = 300 Krad/s$$

$$f = 47.7 KHz$$

b) impedância à frequência ω calculada?

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

A *300krad/s* a parte imaginária da impedância é nula pelo que fica

$$Z_{eq(300Krad/s)} = \frac{R}{\left(0.3\text{x}10^6\right)^2 R^2 C^2 + 1}$$

Substituindo valores obtemos

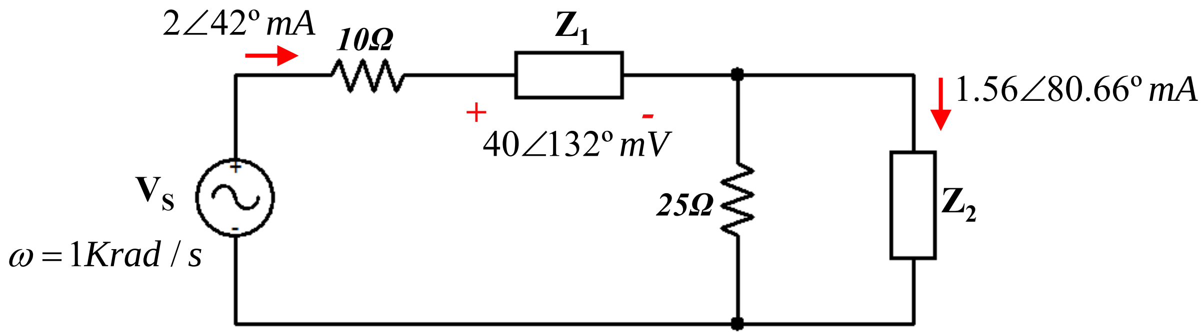
$$Z_{eq(300Krad/s)} = 64\Omega$$

2 – Considere o circuito representado na figura.

a) De que tipo (resistência, condensador ou bobina) é o elemento Z_1.

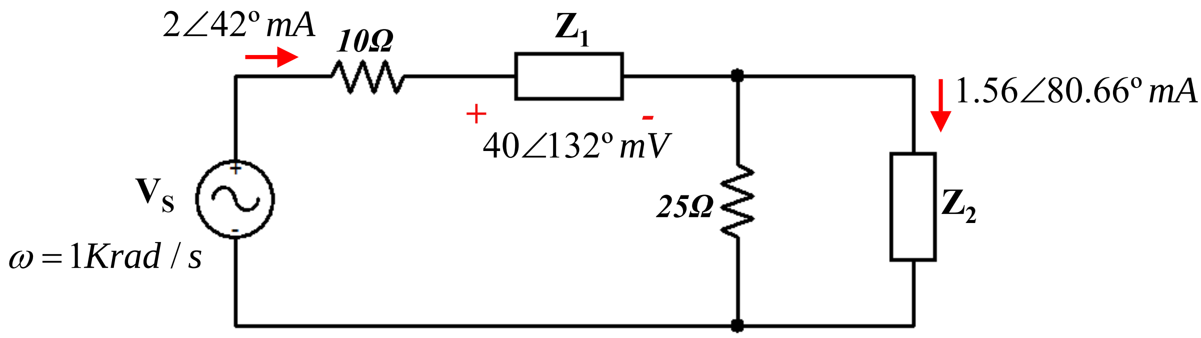
b) Determine o seu valor.

c) Calcule o valor de Z_2.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 2.

a) Tipo de $\mathbf{Z}_1$?



$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{40\angle 132^o}{2\angle 42^o} = 20\angle 90^o\,\Omega$$

Com uma fase de *90º*, $\mathbf{Z}_1$ tem de ser uma bobina

b) Valor de $\mathbf{Z}_1$?

$$\mathbf{Z}_1 = 20\angle 90^o\,\Omega = j20\Omega \quad = j\omega L$$

Com *ω = 1Krad/s*, vem *L = 20mH*

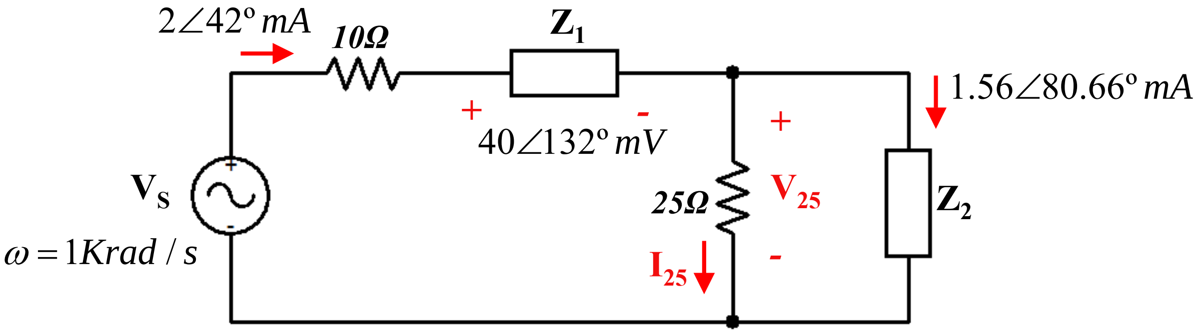
Antes de resolver a alínea c) recordemos a…

Fórmula de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

… que iremos usar para converter fasores da forma polar para a representação algébrica.

c) Valor de Z_2 ?



Usando KCL: $\mathbf{I}_{25} = 2\angle 42^{\circ} - 1.56\angle 80.66^{\circ}$

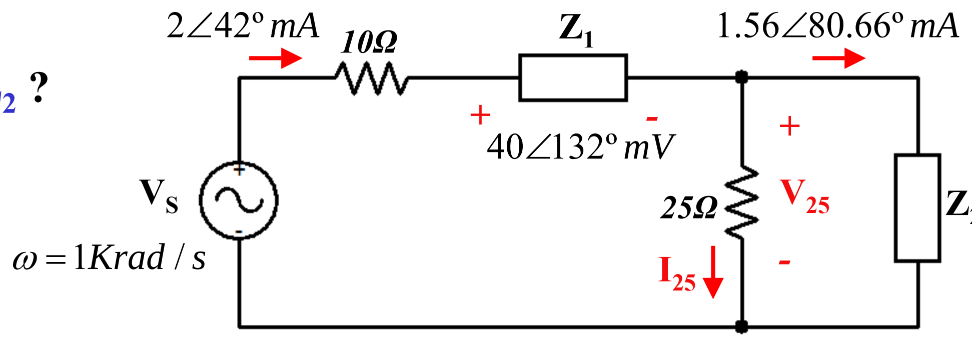
$$= 2(\cos 42^{\circ} + j\sin 42^{\circ}) - 1.56(\cos 80.66^{\circ} + j\sin 80.66^{\circ})$$

$$= 1.233 - j0.2 \; [mA]$$

$$\mathbf{V}_{25} = 25\mathbf{I}_{25} = 30.83 - j5 \; [mV]$$

c)

Valor de Z_2 ?



$$\mathbf{V}_{25} = 30.83 - j5 \; [mV]$$

$$\mathbf{V}_{25} = \sqrt{30.83^2 + (-5)^2}\angle arctg(-5/30.83) \;\; = 31.23\angle -9.21^{\circ} \;\; [mV]$$

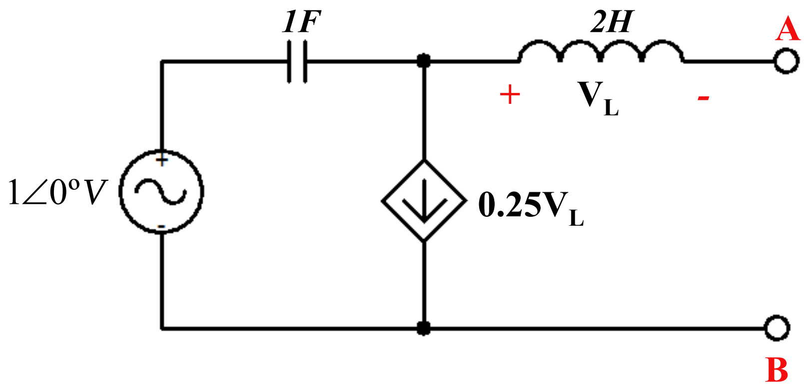
$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}_{25}}{1.56\angle 80.66^{\circ}} = 20\angle -90^{\circ}\,\Omega$$

Com uma fase de -*90º*, Z_2 tem de ser um condensador

$$\mathbf{Z}_2 = -j20\Omega = 1/j\omega C$$

Com $\omega = 1Krad/s$, vem $C = 50\mu F$

3 – Calcule o equivalente de Norton entre os terminais A e B, considerando $\omega = 1 rad/s$.

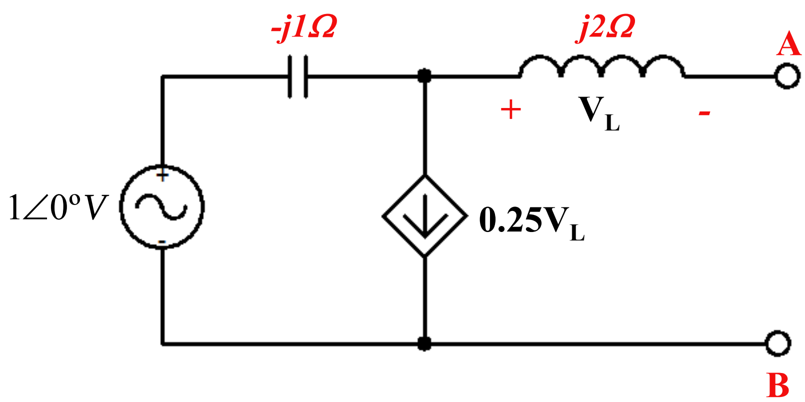


Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 6.

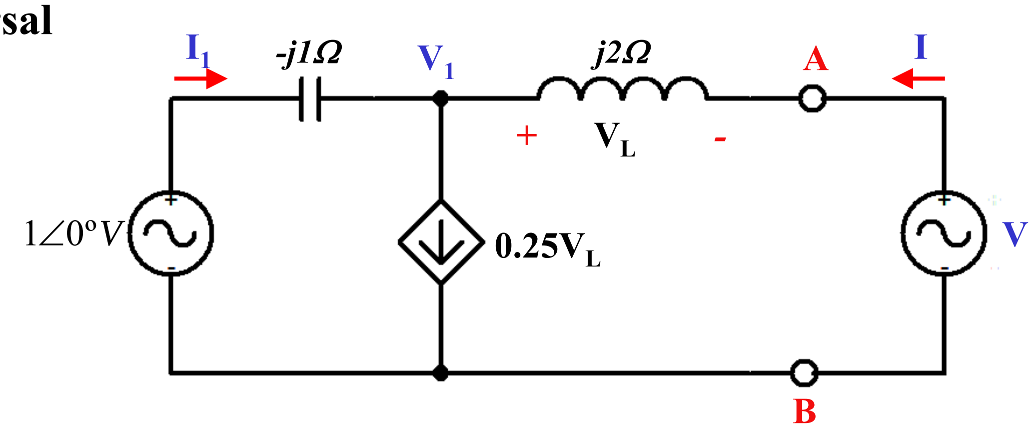
Calculamos primeiro as impedâncias do condensador e da bobina

$$\omega = 1 rad/s \qquad \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{1\text{x}1} = -j1\Omega$$

$$j\omega L = j1\text{x}2 = j2\Omega$$



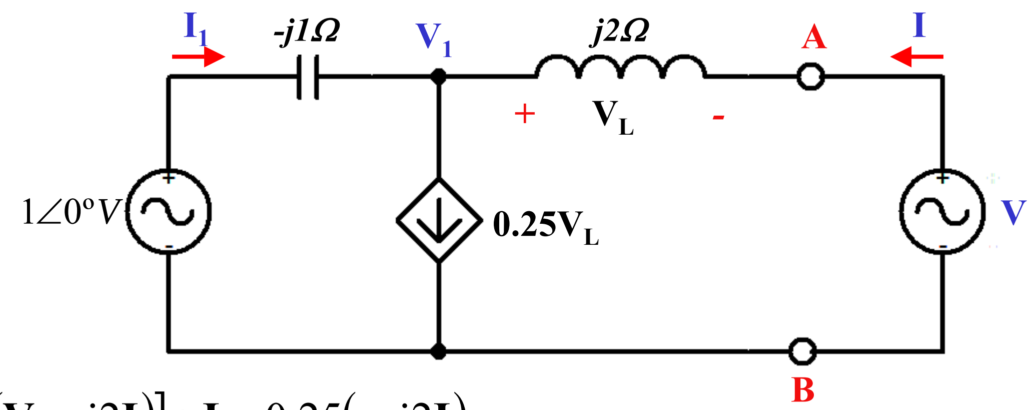
Calculamos agora o equivalente de Thévenin pelo método universal



Usando KCL no nó V_1: $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V_L} \Leftrightarrow \dfrac{1-\mathbf{V}_1}{-j} + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V_L}$

Sabendo que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{V_L}$ **e** $\mathbf{V_L} = -j2\mathbf{I}$

Substituindo estas igualdades em cima $j[1-(\mathbf{V}-j2\mathbf{I})] + \mathbf{I} = 0.25(-j2\mathbf{I})$



$$j[1-(\mathbf{V}-j2\mathbf{I})] + \mathbf{I} = 0.25(-j2\mathbf{I})$$

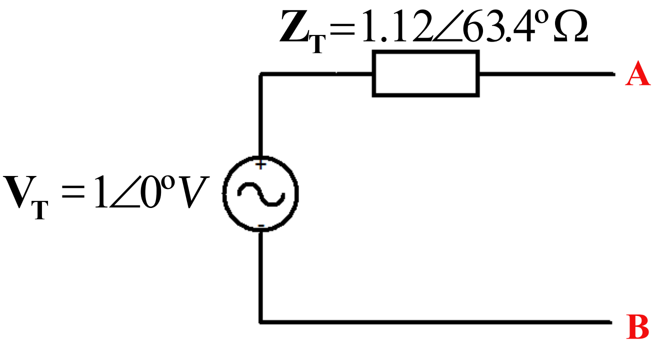
De onde se obtém $\mathbf{V} = (0.5+j)\mathbf{I} + 1$

Dos coeficientes da equação tiramos

$$\mathbf{Z_T} = (0.5+j)\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1V$$

ou $\mathbf{Z_T} = 1.12\angle 63.4^\circ\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1\angle 0^\circ V$

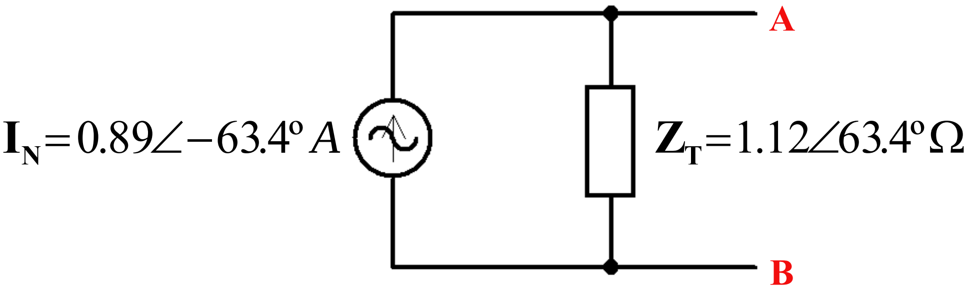
Equivalente de Thévenin



A corrente do equivalente de Norton obtém-se por:

$$\mathbf{I_N} = \frac{\mathbf{V_T}}{\mathbf{Z_T}}$$

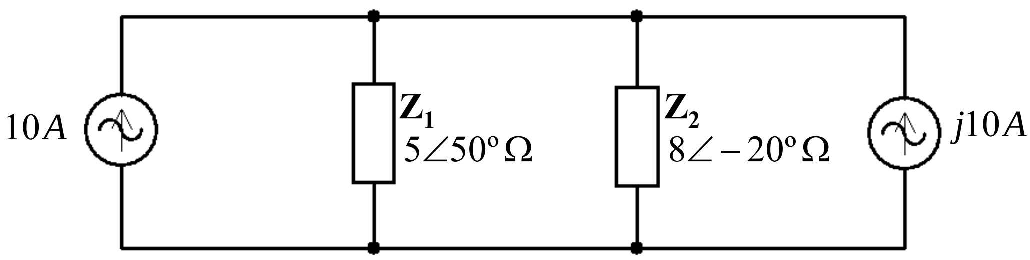
Equivalente de Norton



4 – Relativamente ao circuito abaixo, calcule as potências médias…

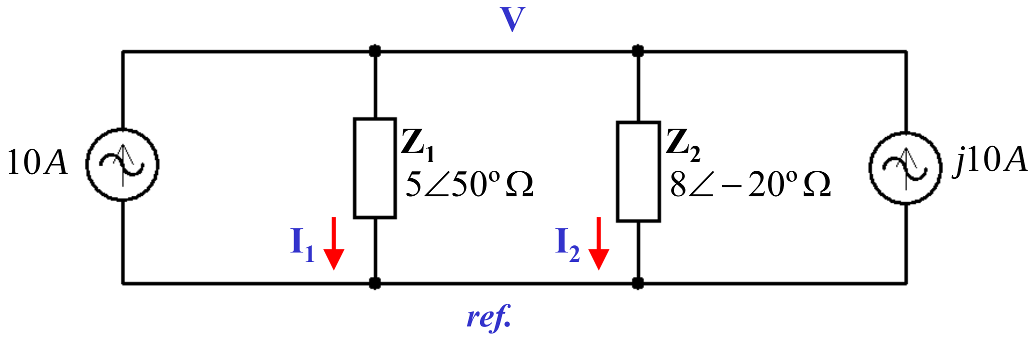
a) … dissipadas em $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_2}$;

b) … fornecidas pelas fontes.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 7.

Usando análise nodal, começamos por determinar a tensão V no circuito



$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 10 + j10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{V}}{5\angle 50^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} = 10(1 + j)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8/5\angle -70^\circ\,\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}\left(1 + 8/5\angle -70^\circ\right) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}\left(1 + 8/5\angle -70^\circ\right) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V}\left[1 + (8/5)\left(\cos(-70^\circ) + j\sin(-70^\circ)\right)\right] = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

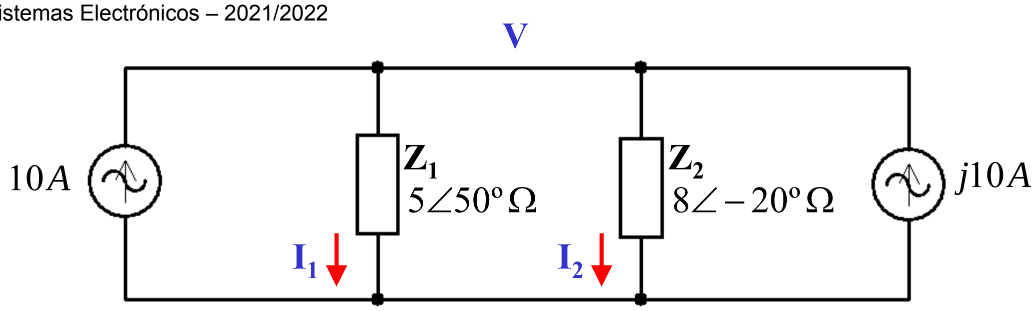
$$\Leftrightarrow \mathbf{V}(1.55 - j1.5) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{V} = \frac{80\sqrt{2}\angle 25^\circ}{2.16\angle -44.1^\circ} \quad = \; 52.5\angle 69.1^\circ V$$

A potência média num elemento de circuito é dada por

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Sendo θ e ϕ as fases da tensão e corrente, respectivamente.



Note-se que para obter as potência em $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ não precisamos de calcular as correntes respectivas, dado que:

$$\Leftrightarrow\ \mathbf{Z}=\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}\ \Leftrightarrow\ |Z|\angle Z=\frac{V_m}{I_m}\angle(\theta-\phi)$$

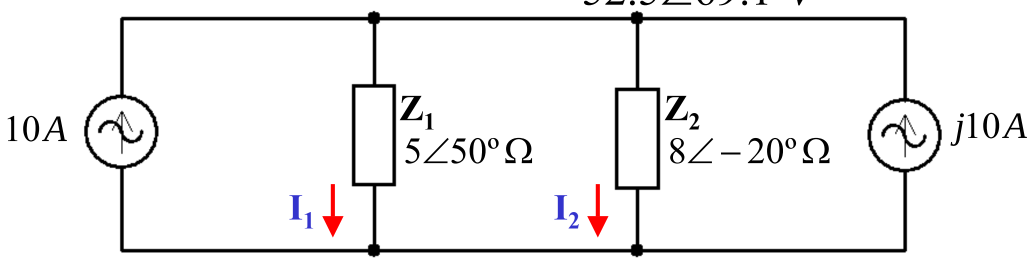
Pelo que

$$I_m=\frac{V_m}{|Z|}\quad \text{e} \quad (\theta-\phi)=\angle Z$$

e portanto

$$P=\frac{1}{2}V_m I_m\cos(\theta-\phi)\ =\frac{1}{2}\frac{{V_m}^2}{|Z|}\cos(\angle Z)$$

$\mathbf{V}=\ 52.5\angle 69.1^{o}V$



$$P_1=\frac{1}{2}\frac{{V_m}^2}{|Z_1|}\cos(\angle Z_1)=\frac{1}{2}\frac{52.5^2}{5}\cos(50^o)\ =177.2W$$

$$P_2=\frac{1}{2}\frac{52.5^2}{8}\cos(-20^o)=161.9W$$

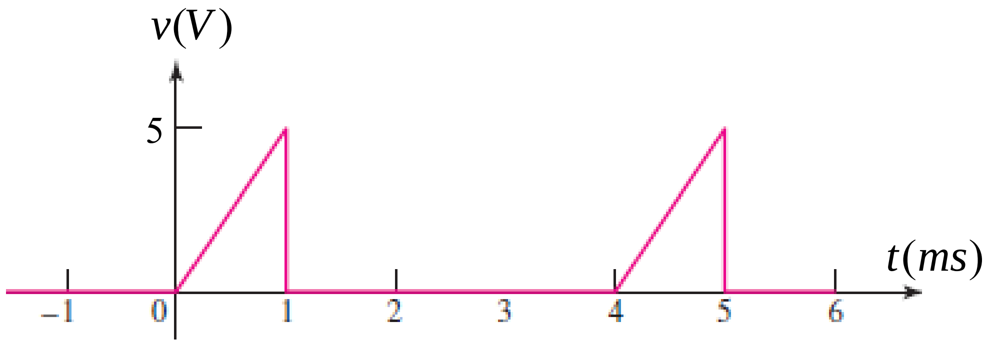
Potências absorvidas

$$P_{10}=\frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^o-0)\ =93.6W$$

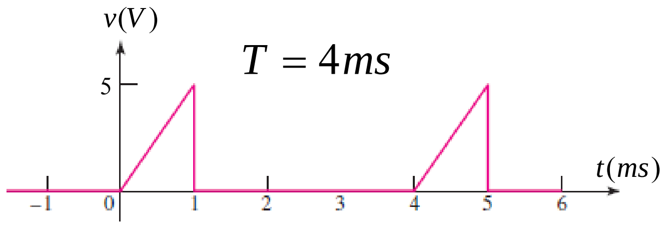
$$P_{j10}=\frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^o-90^o)=245.3W$$

Potências fornecidas

5 – Determine os valores médio e eficaz da tensão periódica representada na figura abaixo.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 10-b).



$$T = 4ms$$

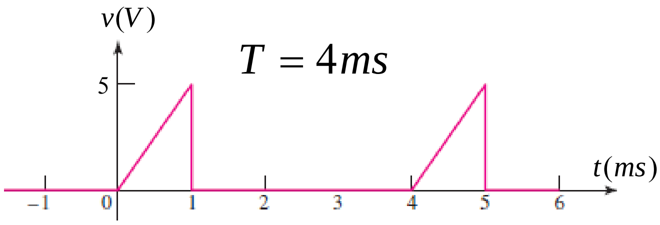
No período que vai de *0* a *4ms*, a tensão *v(t)* é dada algebricamente por:

$$v(t) = \begin{cases} 5000t\,[V] & 0 < t < 1ms \\ 0V & 1 < t < 4ms \end{cases}$$

Valor médio de *v(t)*:

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{4x10^{-3}}\int_0^{1ms} (5000t)dt$$

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{4x10^{-3}} 5000 \frac{t^2}{2}\Big|_0^{1ms} = 625mV$$



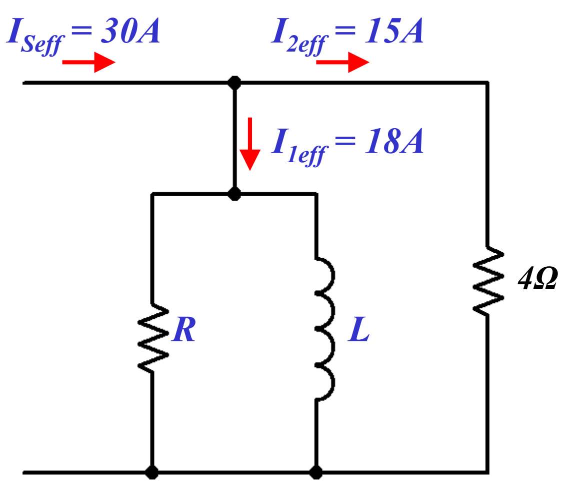
Valor eficaz de *v(t)*:

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{4x10^{-3}}\int_0^{1ms}(5000t)^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4x10^{-3}}\left(25x10^6\right)\frac{t^3}{3}\Big|_0^{1ms}} = \sqrt{\frac{6.25}{3}}$$

$$v_{eff} = 1.44V$$

6 – Considere o circuito representado na figura e as correntes indicadas com os respectivos valores eficazes. Calcule *R* e o valor da impedância de *L*.



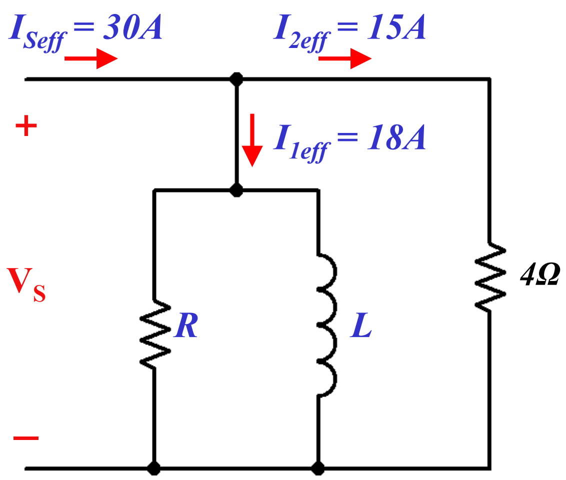
Ficha "Circuitos em regime sinusoidal 2", prob. 7.

Este problema resolve-se melhor começando por traçar um diagrama fasorial. Para o fazer, note-se que:

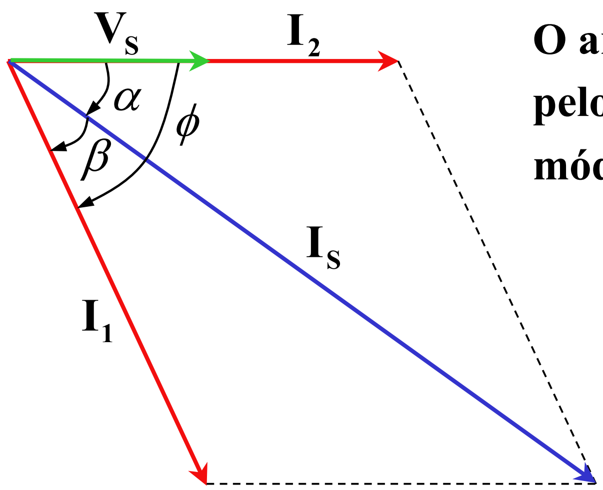
- **O fasor I_2 tem de estar em fase com V_S;**

- **Como o paralelo de R e L é indutivo, o fasor I_1 tem de estar em atraso relativamente a V_S;**

- **Finalmente, $I_S = I_1 + I_2$.**



O diagrama fasorial deverá ser portanto



O angulo α pode ser determinado pelo teorema do coseno, partindo do módulo dos vectores:

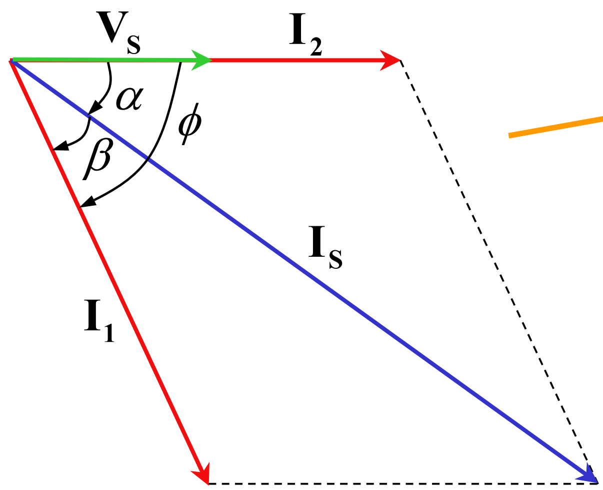
$$\mathbf{I}_1^{\;2} = \mathbf{I}_2^{\;2} + \mathbf{I}_S^{\;2} - 2\mathbf{I}_2\mathbf{I}_S \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\frac{15^2 + 30^2 - 18^2}{2\text{x}15\text{x}30}$$

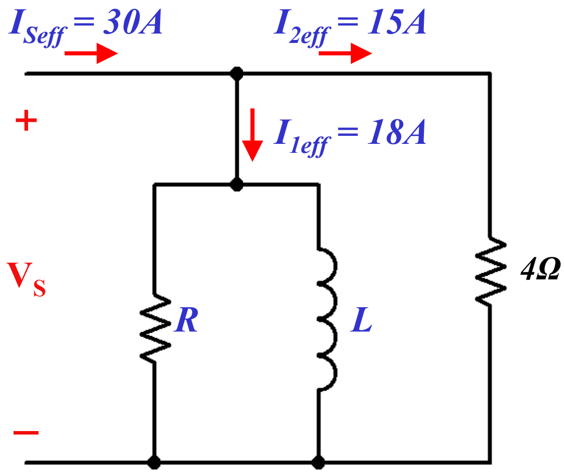
$$\alpha = 27.13^{\text{o}}$$

O angulo β é calculado da mesma maneira:

$$\mathbf{I}_2^{\;2} = \mathbf{I}_1^{\;2} + \mathbf{I}_S^{\;2} - 2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_S \cos\beta \;\Rightarrow\; \beta = \arccos\frac{30^2 + 18^2 - 15^2}{2\text{x}18\text{x}30} = 22.33^{\text{o}}$$



$$\phi = \alpha + \beta = 49.5^o$$

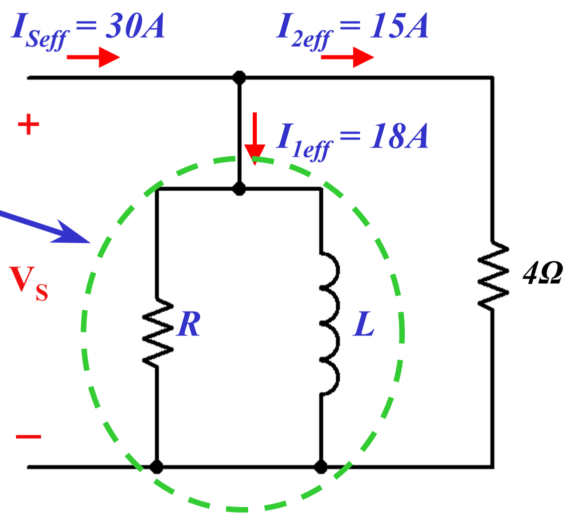


Os fasores $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{V_S}$ são

$$\mathbf{I_1} = 18\sqrt{2}\angle -49.5^o\, A$$

$$\mathbf{V_S} = (4\Omega)\mathbf{I_2} = 60\sqrt{2}\angle 0^o V$$

$$\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{V_S}} = \mathbf{Y_T}$$



$$\mathbf{Y_T} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{V_S}} = \frac{18\sqrt{2}\angle -49.5^o}{60\sqrt{2}\angle 0^o}$$

$$= 0.3\angle -49.5^o$$

$$= (0.195 - j0.228)\Omega^{-1}$$

igualando…

$$\mathbf{Y_T} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = 0.195 - j0.228$$

$$R = \frac{1}{0.195} = 5.13\Omega \qquad X_L = \frac{1}{0.228} = 4.39\Omega$$