PageRank

Serve também de revisão dos conceitos essenciais das aulas anteriores sobre Cadeias de Markov

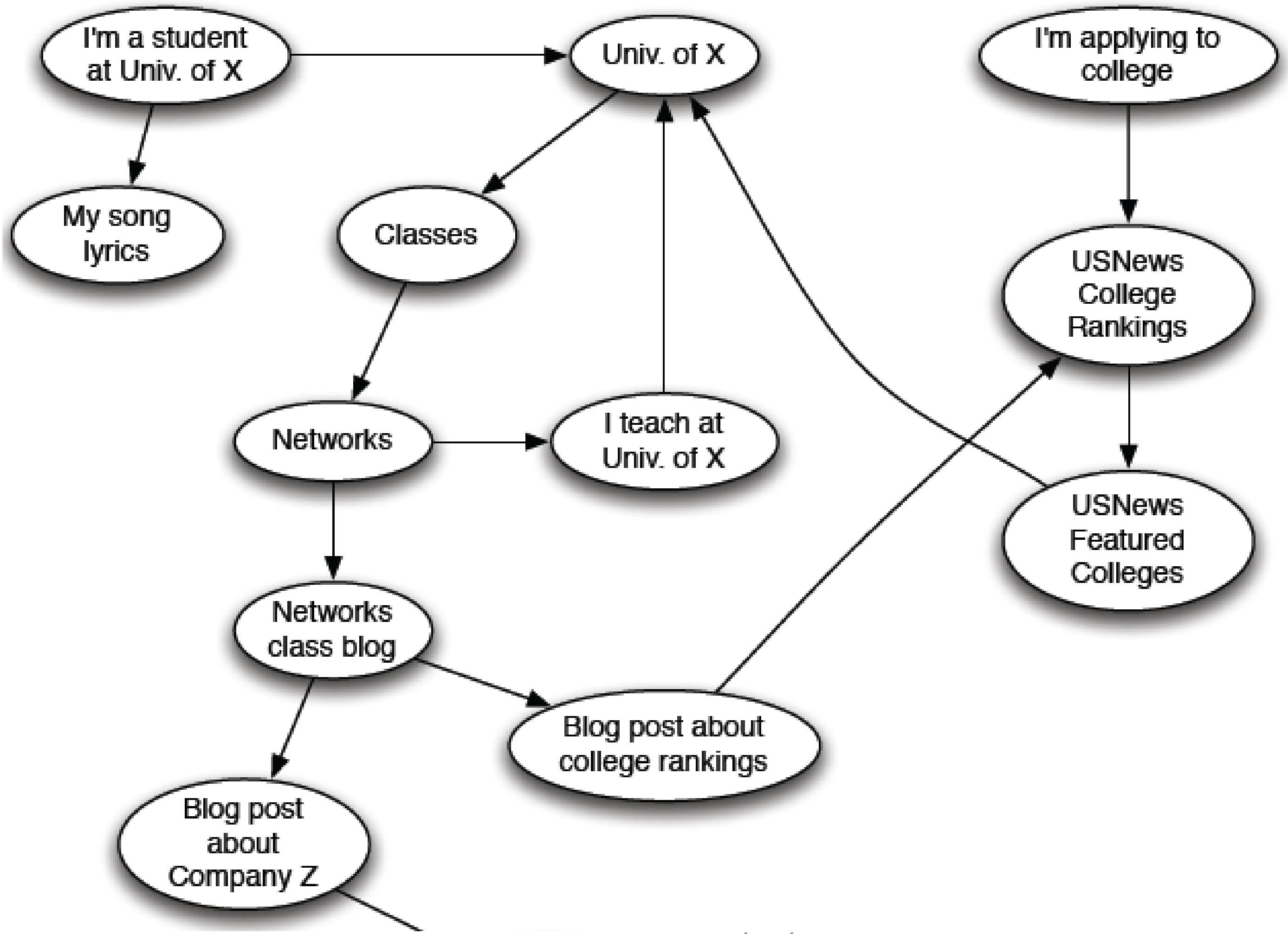
Motivação

E um pouco de História ..

Como descobrir informação na web?

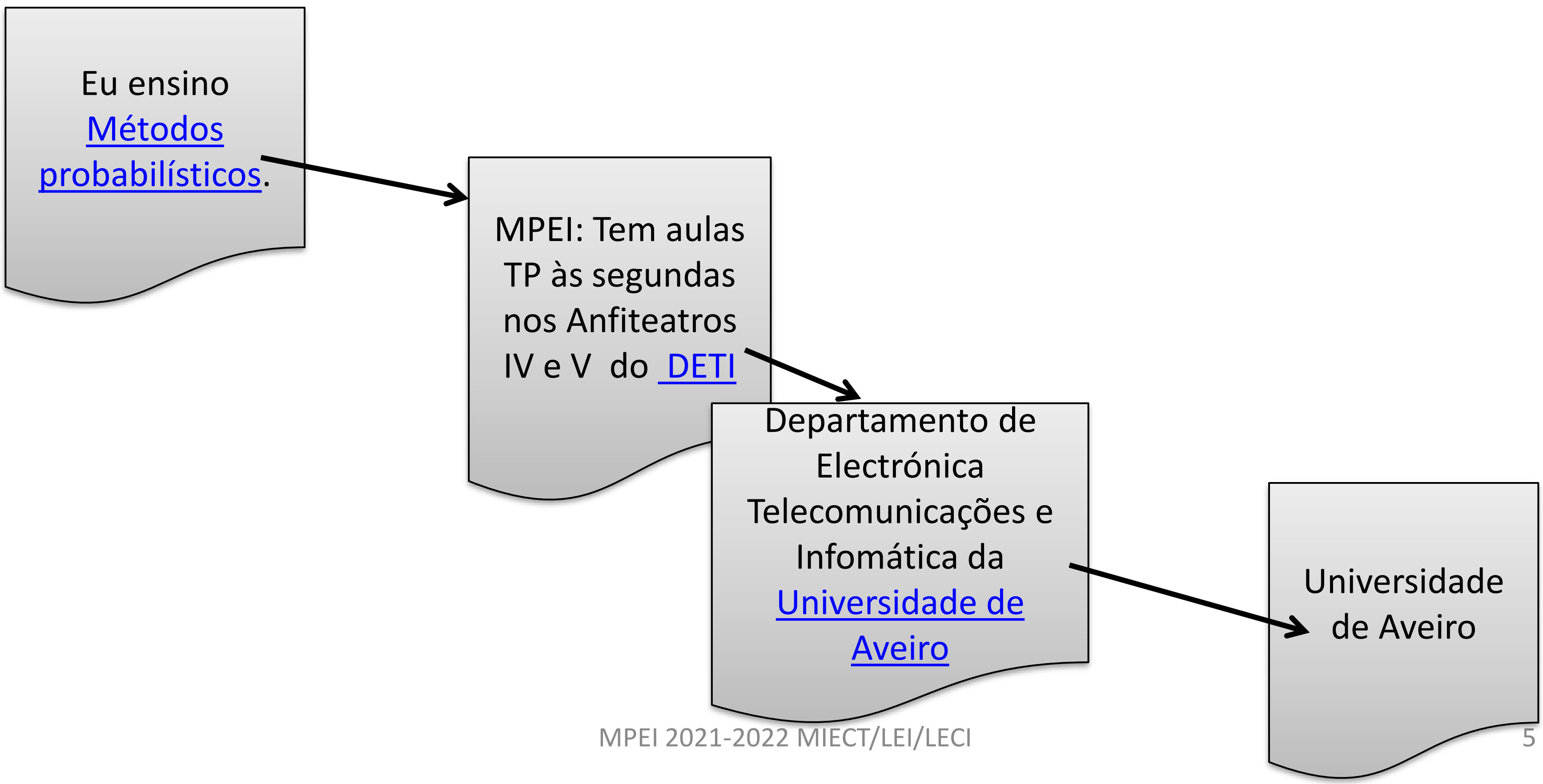
- **Primeiras tentativas:**
  - Listas criadas por humanos **Directórios da Web**
  - Yahoo, DMOZ, LookSmart
- **Segunda geração: Web Search**
  - **Information Retrieval** : Procura de documentos relevantes num conjunto pequeno e de confiança
    - Artigos de jornais, Patentes, etc.
  - **MAS:** A Web é gigantesca, cheia de documentos sobre os quais não temos garantias de ser de confiança, cheia de SPAM, etc.

A Web como um grafo

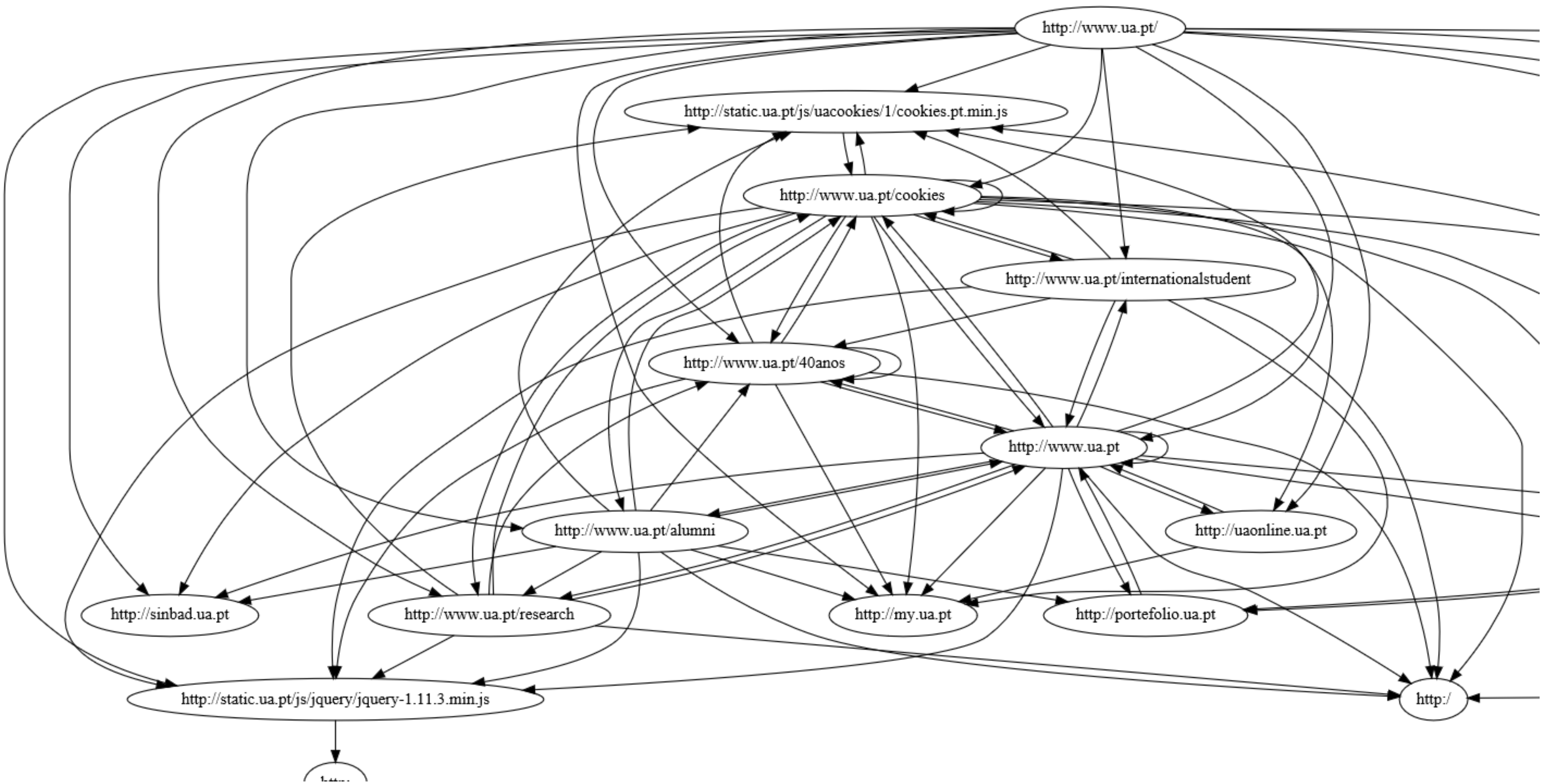


A Web como um Grafo

- **Nós /nodos/vértices : Páginas Web**
- **Ligações/arcos: Hyperlinks**



Uma pequena parte das páginas da UA

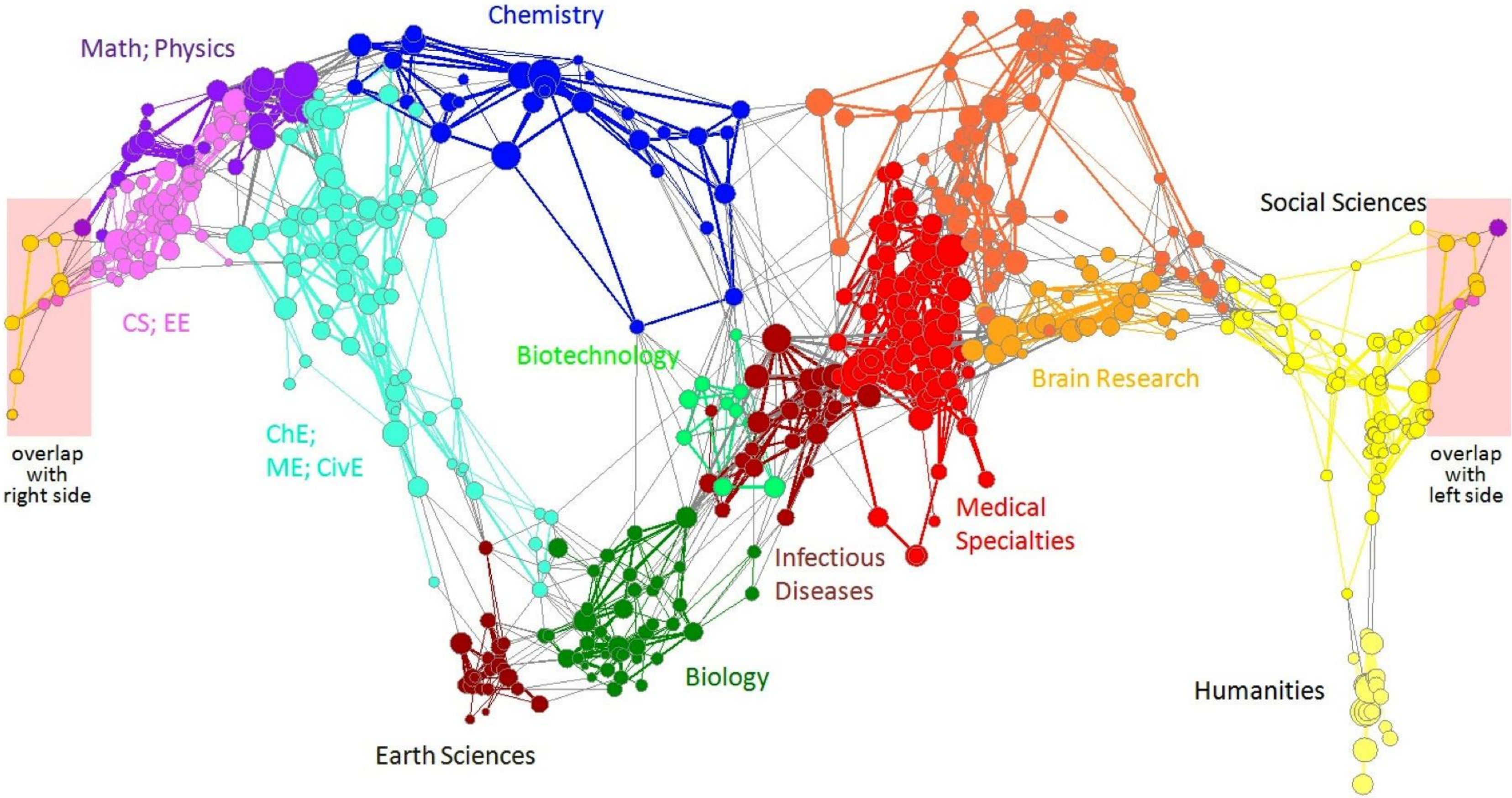


Outros grafos na web: Social Networks

Facebook social graph

4-degrees of separation [Backstrom-Boldi-Rosa-Ugander-Vigna, 2011]

Outros grafos na web: Redes de informação



Citation networks and Maps of science

[Börner et al., 2012]

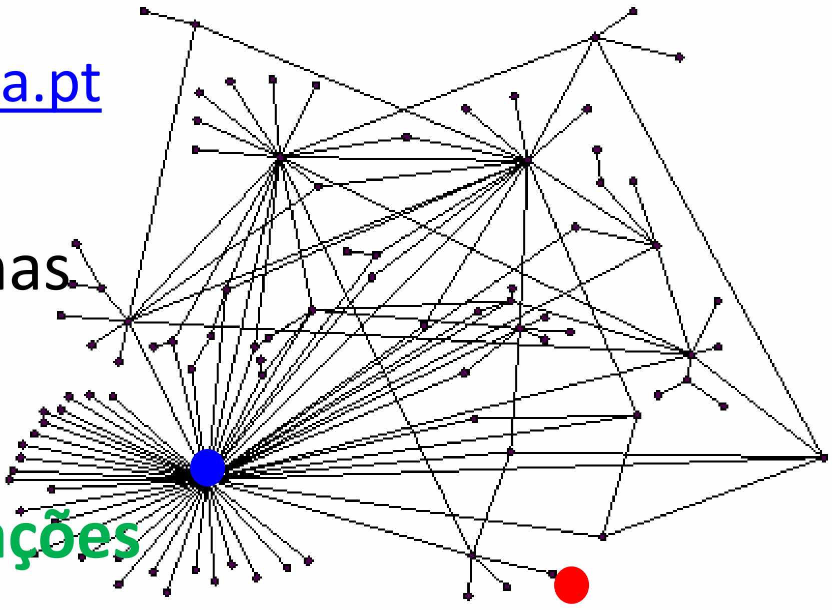
Estrutura do grafo

- **As páginas da web Não são todas igualmente "importantes"**

  www.joe-schmoe.com vs. www.ua.pt

- Existe um grande diversidade nas ligações

- **Ideia: Usar a estrutura das ligações para saber quais as páginas "importantes"**



Os primeiros motores de procura

- Baseavam-se em percorrer (crawl) a web e listar os termos (palavras ou outras sequências de caracteres excluindo os espaços) de cada página, num índice invertido

- Um índice invertido/inverson (inverted index) é uma estrutura de dados que torna simples, dado um termo, descobrir (apontar para) todas as páginas em que o termo ocorre.
  - Assunto da área de Information Retrieval

Ataques de spam

- Rapidamente estes primeiros motores de procura foram atacados.
- Sendo **sensíveis às palavras nas páginas**, facilmente os detentores de páginas com menos escrúpulos podiam inflacionar a importância das suas páginas:
  - Adicionando muitas cópias de uma ou várias palavras ao conteúdo da página e tornando essa parte invisível quando mostrada num browser
  - Usando o motor de procura para saber a página mais importante segundo o seu algoritmo e copiando o seu conteúdo para as suas páginas (mantendo esta parte invisível no browser)

Contribuição da Google

- Não calcular a relevância das páginas apenas com base nos termos que contém mas **usar também informação sobre as ligações** a essa página
  - Desenvolvendo e patenteando o Pagerank
  - Que começou como um projecto de investigação

Ideia base

Random surfers / Passeios aleatórios

- Simular onde passeios aleatórios (de surfistas aleatórios / random surfers) pelas páginas, começando numa página aleatória, tendem a passar mais se se escolherem aleatoriamente os links de saída de uma página (em que se encontram)
  - E permitindo que o processo se repita muitas vezes

- As páginas visitadas por muitos passeios (ou surfers) serão "mais importantes" do que páginas raramente visitadas.

- O Google dá preferência a páginas mais importante ao decidir quais as páginas a mostrar primeiro em resposta a um *query*
  - Mas obviamente as páginas têm de conter os termos …

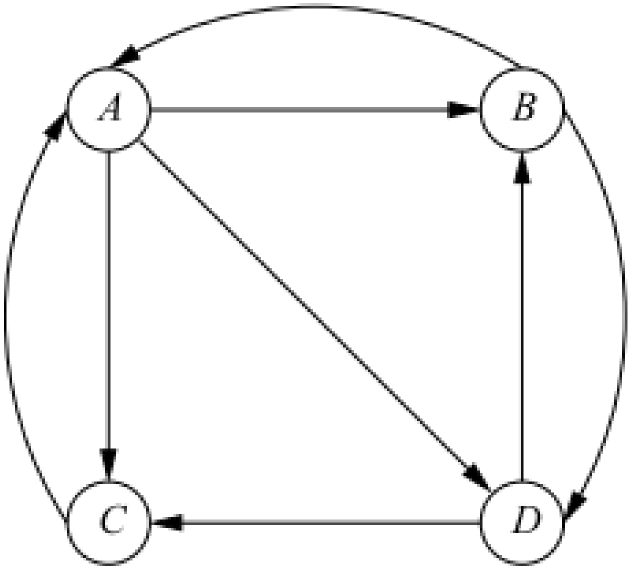
Versão base ‘ideal’

- Consideremos a web como um grafo orientado (*directed*),
- em que as páginas são os nodos (ou vértices)
- e existe um arco (ou ligação) da página P_1 para a página P_2 se existe um ou mais links de P_1 para P_2

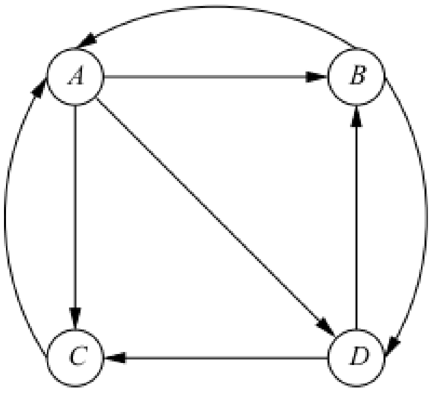
- Exemplo:

- Muito pequena rede: apenas 4 páginas

- A página A tem links para as outras 3
- A página B tem ligações apenas para a A e a D;
- A página C tem apenas um link, para a A
- E a página D tem links apenas para B e C



…



- Suponhamos que o surfista aleatório começa na página A:
- Existem links para B, C e D, logo o surfista estará de seguida numa dessas 3 páginas, com probabilidade 1/3 [1 a dividir pelos links de saída]
  - E probabilidade zero de estar em A
- O surfista aleatório B terá, no próximo passo, probabilidade 1/2 de estar em A, 1/2 de estar em D e 0 de estar em C

Questão

- Estes passeios permitem mesmo aproximar a noção intuitiva de “importância” de uma página ?

- Possíveis Justificações:
  - Os utilizadores da web “votam com os seus pés”. Tendem a colocar links para páginas que consideram boas ou com informação útil
    - E não ligam a páginas de má qualidade ou inúteis
  - O comportamento dos *random surfers* indica quais a páginas que utilizadores da web visitarão com maior probabilidade.
    - Os utilizadores visitam mais páginas úteis do que não úteis.

- Independentemente das justificações anteriores, este método provou na prática que é capaz de atribuir uma medida de “importância” que permite um bom desempenho em procuras na web.
- **Veremos de seguida como funciona …**

Definição de pagerank

- O PageRank é uma função/algoritmo que atribui um número real a cada página da Web
  - (ou a porção dela que foi processada e as ligações obtidas)
  - Designamos esse número por pagerank
  - Quanto maior é o valor mais "importante" é a página.
- Baseia-se na ideia dos random surfers
- Não existe propriamente um algoritmo fixo, havendo variações do algoritmo
  - Que podem dar valores diferentes de pagerank

pagerank

- O pagerank (r) de uma página P_j é, por **definição**:

$$r(P_j) = \sum_i \frac{r(P_i)}{d_i}$$

- sendo:

  i o índice das páginas que apontam para P_j

  d_i o número de páginas para as quais P_i aponta

  ou seja, número de links de saída

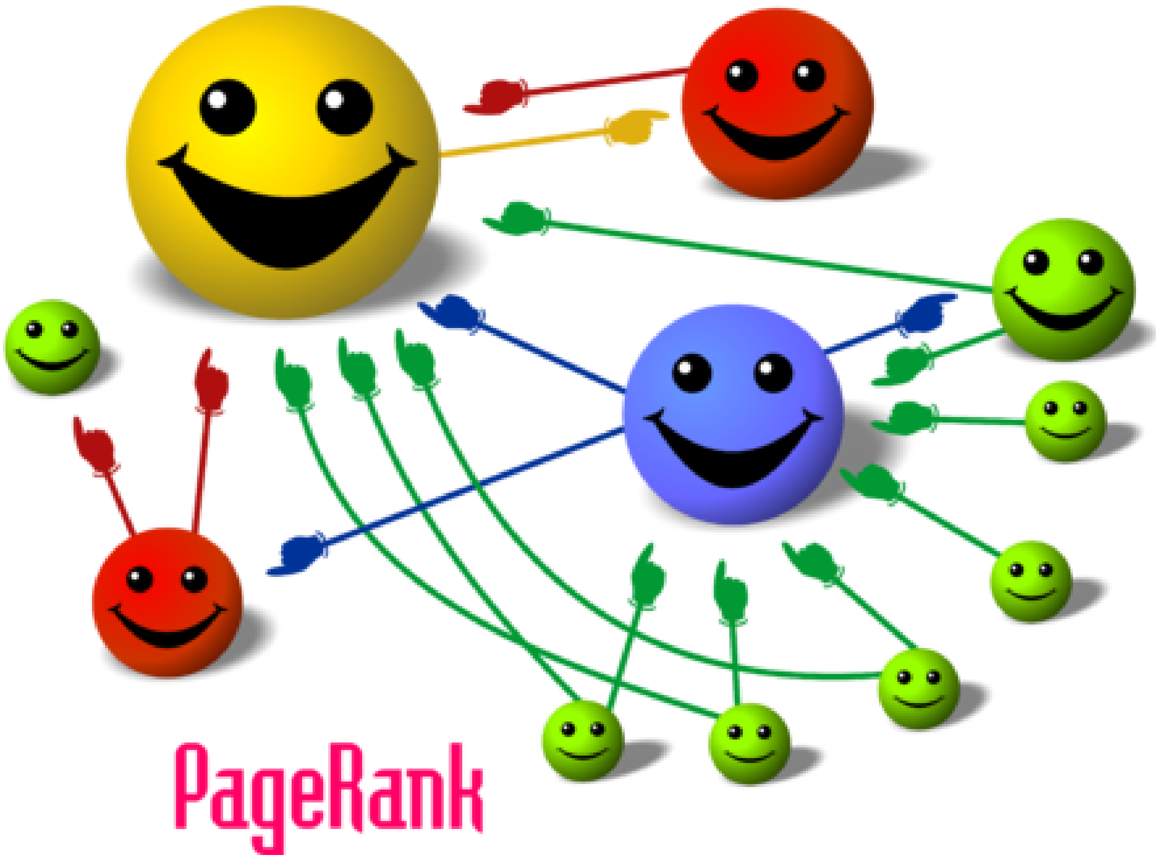
Calculo do pagerank

- O pagerank de uma página depende do pagerank das páginas que têm links para ela
  - identificadas pelo índice i

- O que sugere um cálculo iterativo

$$r_{k+1}(P_j) = \sum_i \frac{r_k(P_i)}{d_i}$$

- A condição inicial é $r_0(P_i) = 1/n$, com n igual ao número de páginas



- Uma simplificação do sistema do PageRank,
- Cada bola representa uma página e o tamanho de cada uma a sua importância (PageRank).
- Quanto maior a bola, mais valor tem seu voto:
- Repare que a bola superior vermelha é grande mesmo recebendo só um voto, pois o voto que ela recebe, da bola maior amarela, tem mais valor

DE: https://pt.wikipedia.org/wiki/PageRank.

Forma matricial

- Definindo a matriz de hyperlinks H como

- $$\boldsymbol{H_{ji}} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & , se\ existir\ link\ de\ i\ para\ j \\ 0 & , caso\ contrário \end{cases}$$

- Teremos $\quad r^{(k+1)} = H\, r^{(k)}$

  – Sendo $r^{(k)}$ o vector com *pageranks* na iteração k

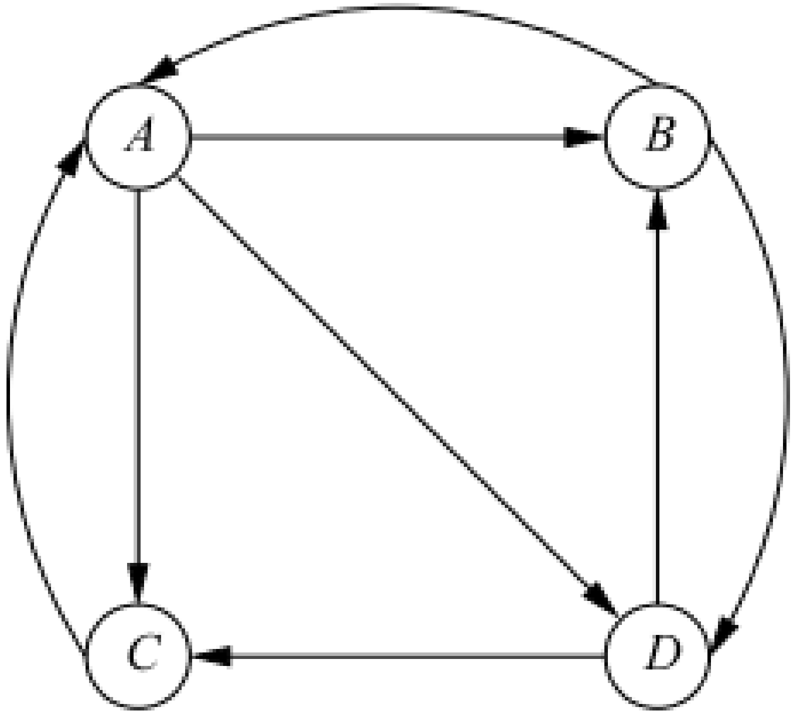
Forma matricial

- A matriz H pode ser interpretada como contendo as probabilidades de transição entre páginas (os estados).

- Em consequência pode aplicar-se o que aprendemos nas aulas anteriores e calcular probabilidades após múltiplas transições, estudar o comportamento quando o número de transições (iterações) tende para infinito, etc .

Matriz para o nosso exemplo ?

- Qual será então a matriz H para a nossa mini web ?



Solução

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Acertaram ?

Limite

- Sabemos que a distribuição dos pageranks atingirá um **estado estacionário**, em que $r = Hr$
  - Pelo menos em certas condições:
    - O grafo ser fortemente ligado, sendo possível ir de qualquer página para qualquer página
    - Não existirem becos sem saída (*dead ends*): páginas que não têm links de saída

- O limite é atingido quando multiplicando os pageranks por *H* mais uma vez a distribuição de pageranks não se altera

Aplicando ao nosso exemplo

- Aplicando $r^{(k+1)} = H\, r^{(k)}$ sucessivamente
  - e iniciando com 1/n

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15/48 \\ 11/48 \\ 11/48 \\ 11/48 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11/32 \\ 7/32 \\ 7/32 \\ 7/32 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 3/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

Comentário

- Esta diferença em probabilidade é pequena
- Mas na web real, com biliões de páginas the grande variedade de importância, a verdadeira probabilidade de uma página como www.amazon.com é ordens de magnitude superior à probabilidade de outras páginas, como uma página pessoal

Questões

- **É mesmo assim tão simples ?**
- **Converge sempre?**
- **Converge para o que queremos?**
- **Os resultados são razoáveis?**

A realidade é sempre mais complicada …

Estrutura da web

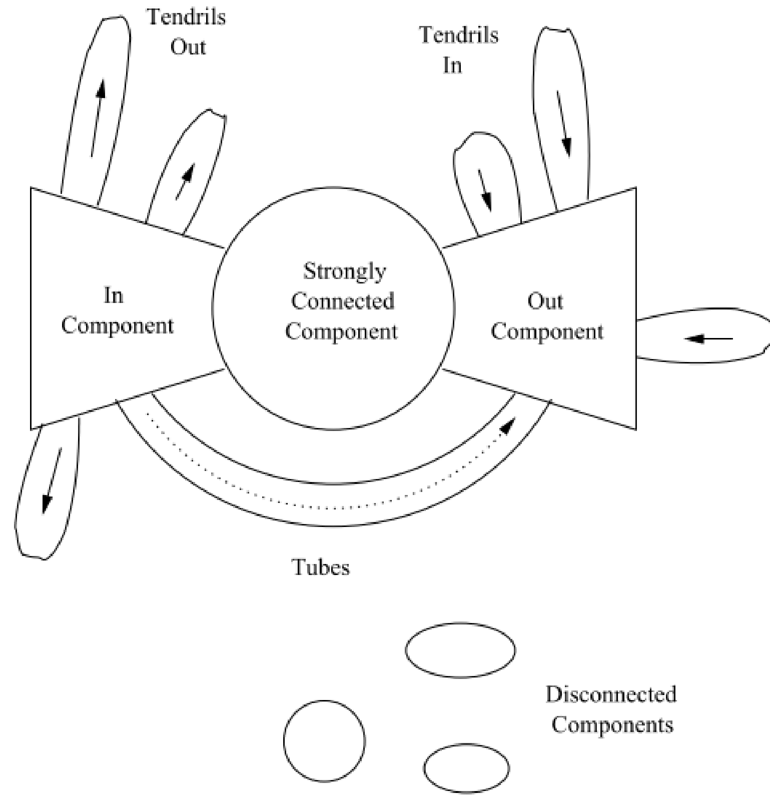
- Será a web tão fortemente ligada como o nosso exemplo ?

- Seria bom que fosse…
- Mas, na prática, não é
  - Pelo menos não na sua totalidade

Estrutura da web

- Um estudo antigo da web revelou a estrutura à direita

- Existe uma parte fortemente ligada (o SCC)
- Mas também muitas páginas com:
  - Ligações ao SCC mas às quais não é possível chegar a partir do SCC (in-component)
  - Ligações a partir do SCC mas sem forma de chegar ao SCC (out-component)
  - Ligações do in-component mas incapazes de aceder a esse componente
  - Etc ..



Isto traz problemas

Temos **dois tipos de problemas** que têm de ser resolvidos

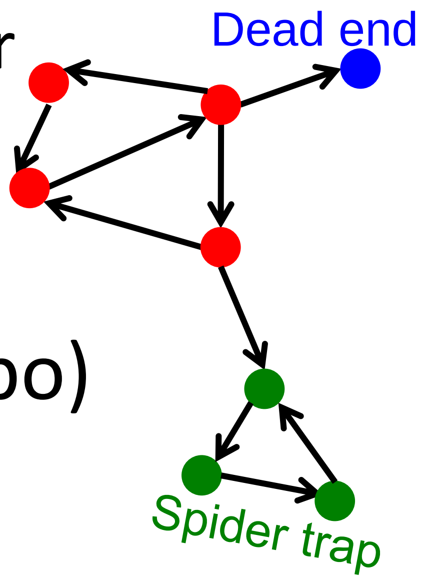
1. Becos sem saída (*dead ends)*

2. Grupos de páginas que têm links de saída mas apenas para esse grupo, impedindo a ida para outras páginas
   - Estas estruturas são chamadas de *spider traps*
     - Porquê ?

A spider is a program run by a search engine to build a summary of a website's content (*content index*). Spiders create a text-based summary of content and an address (URL) for each webpage.

Problemas (continuação)

1. **Dead ends** (sem links de saída)
   – Passeio aleatório não tem para onde ir



2. **Spider traps:**
   (todos os links de saída para o grupo)
   – O passeio aleatório fica "preso" na armadilha (trap)

- Qual o efeito nos pageranks ?

Efeito de *dead ends* e *spider traps* no pagerank

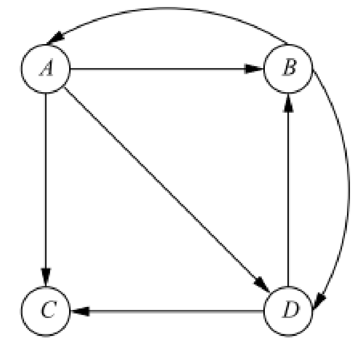
E como resolver.

Efeitos dos *Dead ends*

- Neste caso as colunas correspondentes ficam com zeros e a sua soma é zero
- Em consequência a matriz de transição deixa de ser estocástica
- O que implica ?

Dead Ends – Exemplo

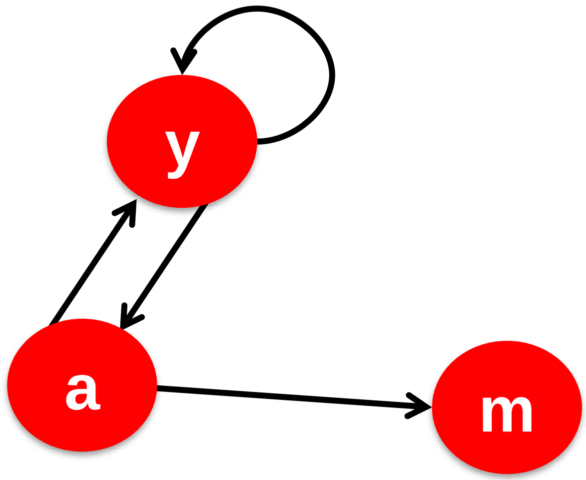
- Removendo a ligação de C para A, C passa a ser um *dead end*.
- H= $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



- Multiplicando várias vezes H pelo estado inicial temos:

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/48 \\ 7/48 \\ 7/48 \\ 7/48 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21/288 \\ 31/288 \\ 31/288 \\ 31/288 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dead Ends – Exemplo 2



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	0

- **Exemplo:**

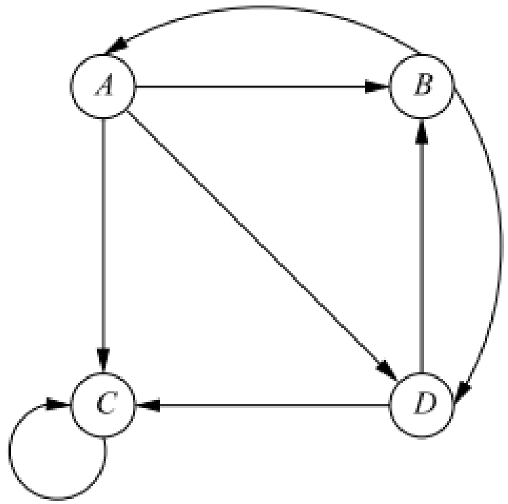
$$\begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \ldots & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/12 & 2/24 & & 0 \end{array}$$

Iteração 0, 1, 2, …

O PageRank "desaparece" pois a matriz não é estocástica.

Spider Traps – Exemplo 1

- Consideremos a seguinte rede e matriz

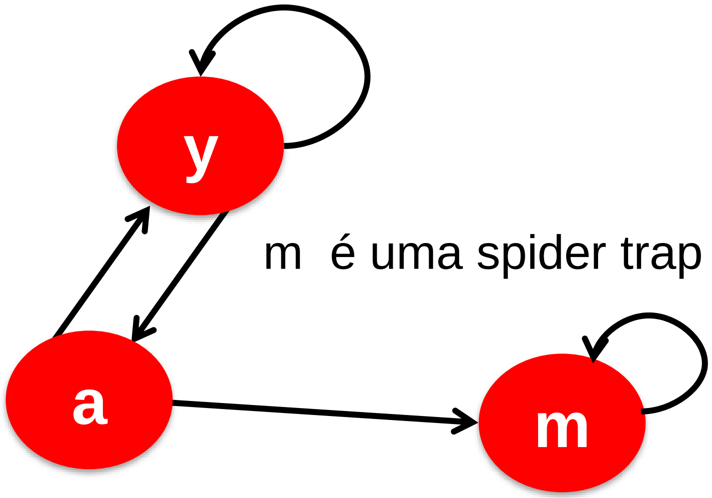


$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Teremos para o vector estado

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/24 \\ 5/24 \\ 11/24 \\ 5/24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/48 \\ 7/48 \\ 29/48 \\ 7/48 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21/288 \\ 31/288 \\ 205/288 \\ 31/288 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Spider Traps – Exemplo 2



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	1

- **Exemplo:**

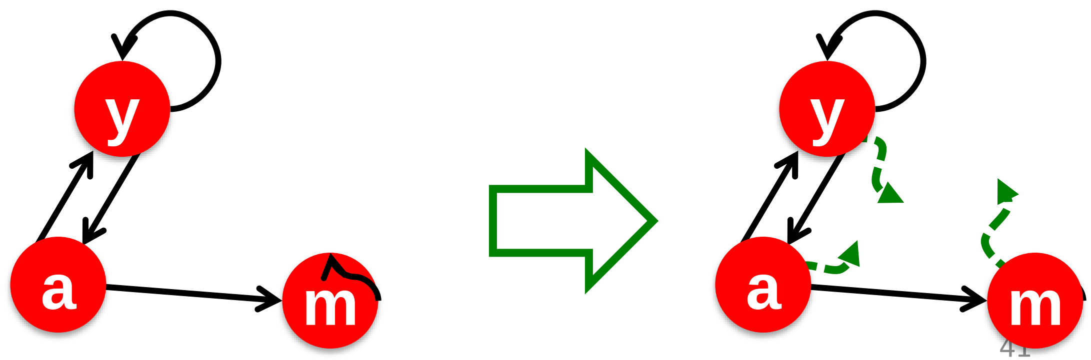
$$\begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \ldots & 0 \\ 1/3 & 3/6 & 7/12 & 16/24 & & 1 \end{array}$$

Iteração 0, 1, 2, …

O PageRank é todo "apanhado" pelo nó m.

Solução para *spider traps*

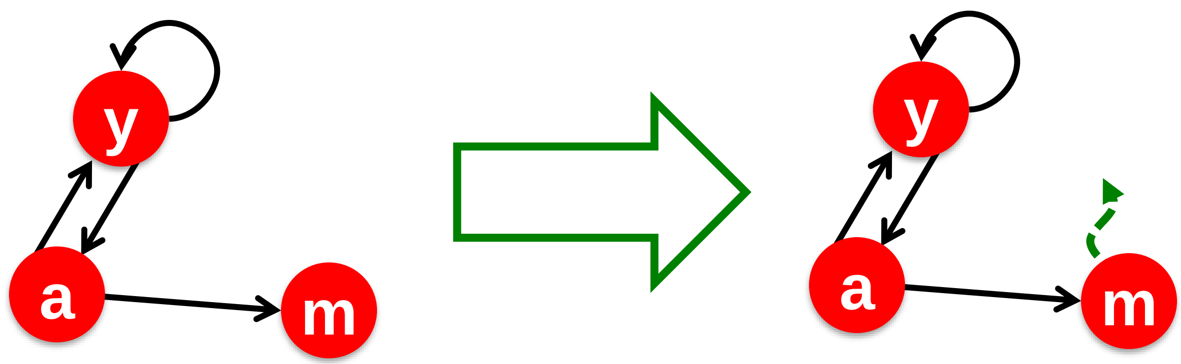
- Em cada passo, **o surfista aleatório tem duas opções**
  - Com probabilidade β:
    - **Seguir um link** aleatoriamente
  - Com probabilidade **1-**β,
    - **Saltar aleatoriamente para uma página qualquer**



- **O surfista teletransporta-se para fora da *spider trap* ao fim de alguns passos**
- Valores usuais para β : intervalo 0.8 to 0.9

Solução para *dead ends*

- Teletransportar (teleport) sempre
- **Implica ajustar a matriz** por forma a:
  - seguir um link com probabilidade 1/n



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	0

	y	a	m
y	½	½	⅓
a	½	0	⅓
m	0	½	⅓

Os teletransportes resolvem os dead-ends ?

- **SIM**

- **Deixa de haver dead-ends**
  - **Existe sempre para onde ir**
  - **Matriz volta a ser estocástica**

Solução: *Random Teleports* (teletransportes aleatórios)

- **A solução da Google resolve a possibilidade de haver spider traps**
- Em cada passo, **o surfista aleatório tem duas opções**
  - Com probabilidade β:
    - **Seguir um link** aleatoriamente
  - Com probabilidade **1-β**:
    - **Saltar aleatoriamente para uma página qualquer**

- **PageRank equation** [Brin-Page, 98]

$$r_j = \sum_{i \to j} \beta \frac{r_i}{d_i} + (1-\beta)\frac{1}{N}$$

A Matriz da Google

- **Matriz da Google:**

$$A = \beta\, H + (1-\beta)\left[\frac{1}{N}\right]_{N\times N}$$

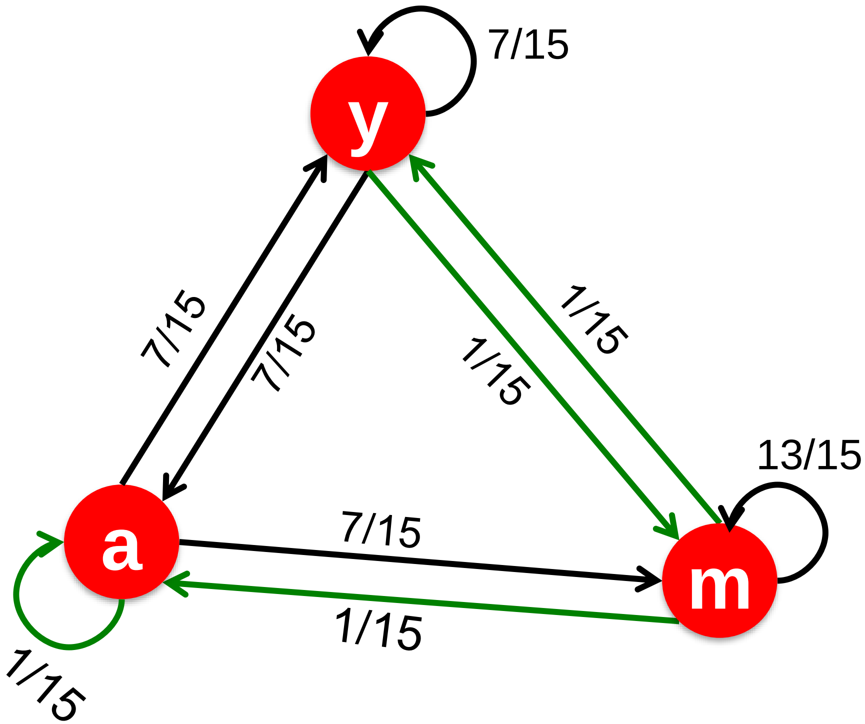
[

$[1/N]_{NxN}$…matriz N por N com todas entradas iguais a 1/N

- **Temos um problema recursivo:** $\boldsymbol{r = A \cdot r}$
- A que se pode aplicar o método das potências (Power)

- $\boldsymbol{\beta}$ **?**
  - Na prática β =0.8,0.9 (5 passos em média para saltar)

Exemplo: Random Teleports ($\beta = 0.8$)



$$
0.8 \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} + 0.2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{[1/N]_{NxN}}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} y \\ a \\ m \end{array} \begin{bmatrix} 7/15 & 7/15 & 1/15 \\ 7/15 & 1/15 & 1/15 \\ 1/15 & 7/15 & 13/15 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} y \\ a \\ m \end{array} = \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.33 \\ 0.20 \\ 0.46 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.24 \\ 0.20 \\ 0.52 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0.26 \\ 0.18 \\ 0.56 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c} 7/33 \\ 5/33 \\ 21/33 \end{array}
$$

PageRank in Matlab

Ver
http://www.mathworks.com/moler/exm/chapters/pagerank.pdf para mais informação

Aplicação a uma “pequena rede”

- Consideremos apenas um número reduzido de páginas
  - exemplo: N=20 páginas acedíveis a partir de http://www.ua.pt
- Principais passos:
  - Obter informação das páginas e suas ligações
  - Com base nos links obter M (ou H)
  - Criar a matriz A aplicando o método da Google para evitar dead ends e spider traps
  - Aplicar power method
  - Apresentar resultados

Obter informação das páginas e suas ligações

- Uma forma simples, em Matlab, é usando a função **surfer()**
  - **disponibilizada** em http://www.mathworks.com/moler/exm/exmfilelist.html
  - Copyright 2013 Cleve Moler & The MathWorks, Inc.

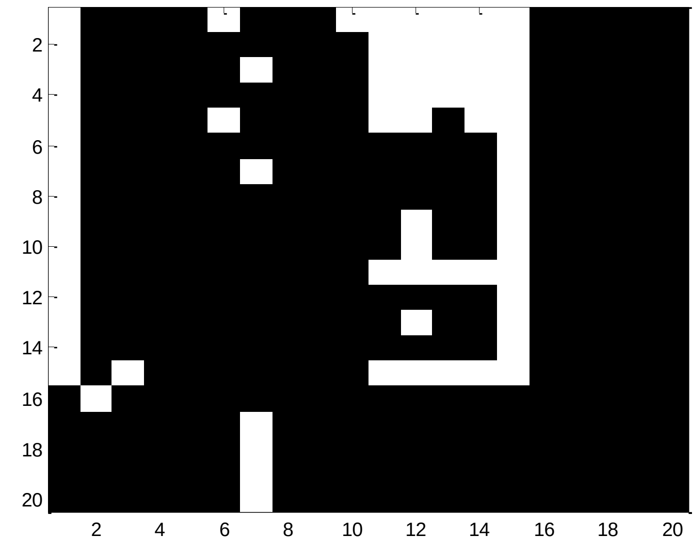
- Fazendo: `[U,L]=surfer('http://www.ua.pt',20);`
- Temos em U as URLs
- E em L as ligações

Resultados exemplificativos

```
>> U{1:6}

ans =

   'http://www.ua.pt'
   'http://static.ua.pt/js/jquery/jquery-1.11.3.min.js'

'http://static.ua.pt/js/uacookies/1/cookies.pt.min.js'
   'http:/'
   'http://my.ua.pt'
   'http://uaonline.ua.pt'
```

L:

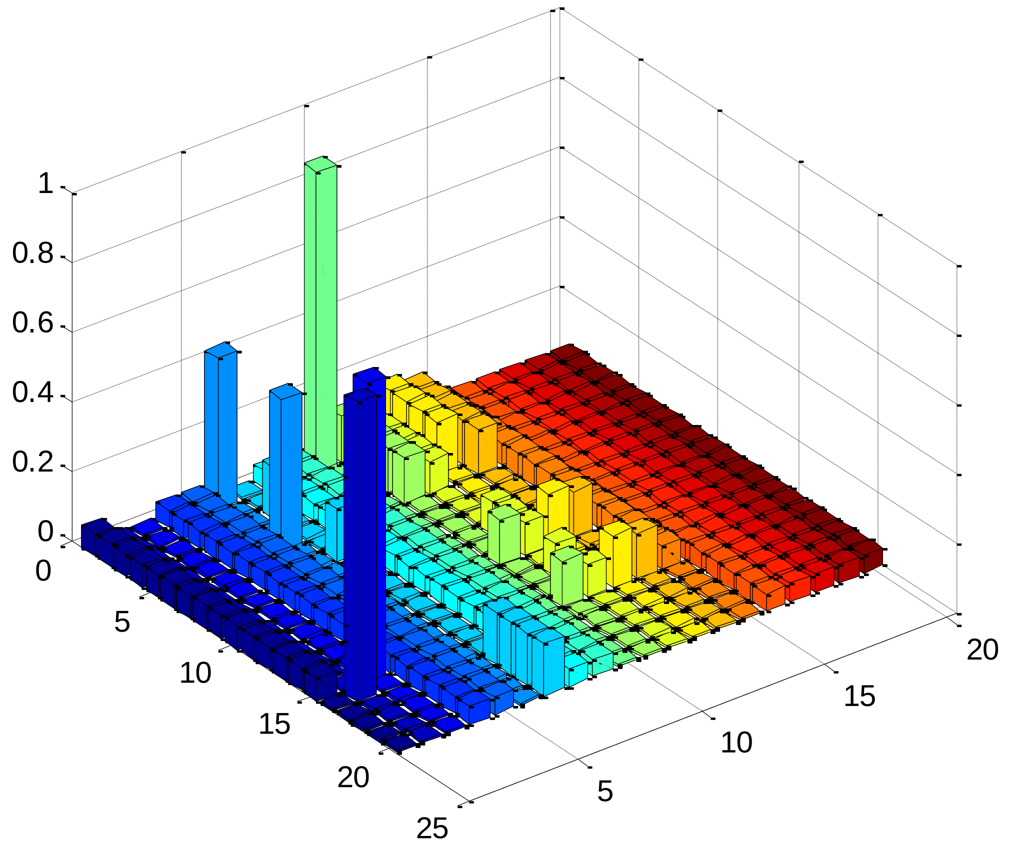
```
imagesc(L);
colormap(gray);
```



Obter H e A

```
H=full(L);
c=sum(full(L));  %  número de ligações (d)
H=H./repmat(c,N,1)

p=0.85
A=p*H+(1-p)*ones(N)/N % matriz da Google
A(isnan(A))=1/N                %  resolver dead ends
```

A



Aplicar “power method”

```
x0=ones(N,1)/N;

% ----------------------
iter=1;
x=x0;
epsilon=1e-3;
while 1
   fprintf(1,'iteração %d\n',iter);
   xold=x;
   x=A*x;
   if  max(abs(x-xold))<epsilon break ; end
   iter=iter+1;
end


x
```

Apresentar resultados

```
[xs idx]=sort(x,'descend');

for p=1:N
   fprintf(1,'PageRank=%.3f :  %s \n',
                  x(idx(p)), U{idx(p)});
end
```

Resultados finais

PageRank=0.108 : http://www.ua.pt/cookies ,
PageRank=0.104 : http://www.ua.pt ,
PageRank=0.071 : http: ,
PageRank=0.065 : http://my.ua.pt ,
PageRank=0.062 : http://static.ua.pt/js/uacookies/1/cookies.pt.min.js ,
PageRank=0.056 : http://static.ua.pt/js/jquery/jquery-1.11.3.min.js ,
PageRank=0.056 : http:/ ,
PageRank=0.056 : http://www.ua.pt/40anos ,
PageRank=0.042 : http://elearning.ua.pt ,
PageRank=0.039 : http://sinbad.ua.pt ,
PageRank=0.039 : http://portefolio.ua.pt ,

- Estes resultados podem ser confirmados usando
- r=pagerank(U,L)
  - A diferença entre o vector x obtido e r tem de ser zero

Para casa

- Obter surfer() e pagerank()   de Cleve Moler
  - https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4822-using-numerical-computing-with-matlab-in-the-classroom/content/surfer.m
- Fazer com que o Matlab consiga encontrar essas funções
  - Adicionando o directório em que as colocar à **path** ou colocando-as no seu directório de trabalho
- Fazer os exemplos em http://www.mathworks.com/moler/exm/chapters/pagerank.pdf
- Experimentar o código dos slides anteriores
- Experimentar com outras “mini redes”

E na realidade ?

Apenas 2 ou 3 slides para terem uma ideia, pois começa a sair do âmbito de MPEI

Calcular para toda a web …

- **O passo mais importante é a multiplicação**

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}^{k}$$

- Fácil se desse para ter tudo em memória: $\mathbf{A}$, $\mathbf{r}^{k+1}$, $\mathbf{r}^{k}$

- **Se N =** 10^9 páginas
    - 1 bilião na América, 1000 milhões na Europa
- E considerarmos 4 bytes por entrada

- Temos:
    - 2x 10^9 posições para os 2 vectores (aprox. 8GB)
    - Uma matriz **A** com N^2 elementos
        - Ou seja 10^{18}

Partes da solução ...

- **Aproveitar o facto da matriz ser esparsa**
- **Codificá-la com base apenas nas entradas não-nulas**

origem	grau	Nós destino
0	3	1, 5, 7
1	5	17, 64, 113, 117, 245
2	2	13, 23

  - Espaço proporcional aproximadamente ao número de links
  - Por exemplo: 10N, or 4*10* 10^9 $\cong$ 40GB
  - **Contínua a "não caber" em memória mas cabe em disco**

Algoritmo básico: Passo de actualização

- **Assumindo que r^{k+1} cabe em memória**
  - r^k e a matriz no disco
- **1 passo da iteração do método das potências :**

Inicializar todas as entradas de $\mathbf{r^{k+1}}$ com **(1-β) / N**
Para cada página ***i*** (com grau d_i):
  Ler para memória: i, d_i, $dest_1, \ldots, dest_{d_i}$, $r^k(i)$
  Para **j** = **1…**$\mathbf{d_i}$
    $\mathbf{r^{k+1}(dest_j) \mathrel{+}= \beta\, r^k(i) / d_i}$

Exemplo

r^{k+1}

0	
1	🟩
2	
3	
4	
5	🟩
6	🟩

origem	grau	destino
0	3	1, 5, 6
1	4	17, 64, 113, 117
2	2	13, 23

r^{k}

🟩	0
	1
	2
	3
	4
	5
	6

Inicializar todas as entradas de $\mathbf{r^{k+1}}$ com $\mathbf{(1-\beta) / N}$

Para cada página ORIGEM $\boldsymbol{i}$ (com grau $\boldsymbol{d_i}$):

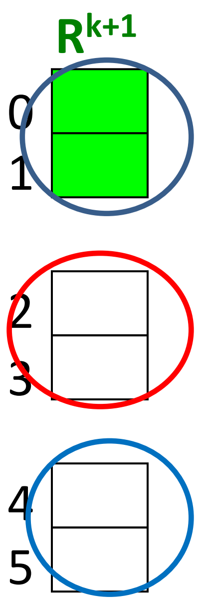
  Ler para memória: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{d_i}$, $\boldsymbol{dest_1, \ldots, dest_{d_i}, r^k(i)}$

  Para $\mathbf{j} = \mathbf{1 \ldots d_i}$

    $\mathbf{r^{k+1}(dest_j) \mathrel{+}= \beta\, r^k(i) / \boldsymbol{d_i}}$

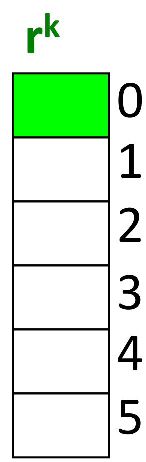
E se nem $\boldsymbol{r}^{k+1}$ cabe em memória ?

– Dividir $\boldsymbol{r}^{k+1}$ em $\boldsymbol{k}$ blocos que caibam em memória
– Processar a Matriz e $\boldsymbol{r}^{k}$ uma vez para cada bloco



origem	grau	destino
0	4	0, 1, 3, 5
1	2	0, 5
2	2	3, 4

H



Alguns problemas do Page Rank

- **Mede a importância genérica**
  - Não tem em conta “autoridades” num tópico específico
- **Solução:** Topic-Specific PageRank

- **Usa uma medida única de importância**
- **Solução:** Hubs-and-Authorities

- **Susceptível a spam de links**
  - Por exemplo “spam farms”: topografias artificiais de links criadas para aumentar o pagerank
- **Solução:** TrustRank

Para saber mais

- Capítulo *Link Analysis* do livro **Mining of Massive Datasets**
  - Disponível em http://infolab.stanford.edu/~ullman/mmds/book.pdf
- Capítulo *PageRank* do livro **Experiments with MATLAB** de C. Moler
  - e respectivo software
  - http://www.mathworks.com/moler/exm/chapters.html
- Notas do Prof. Paulo Jorge Ferreira "MPEI - pagerank"
  - Disponíveis no elearning
- Artigos dos autores do PageRank e fundadores da Google
  - É uma questão de usar o Google ☺

Nesta apresentação foram usados e/ou adaptados slides da seguinte apresentação:

Analysis of Large Graphs: Link Analysis, PageRank

Mining of Massive Datasets
Jure Leskovec, Anand Rajaraman, Jeff Ullman Stanford University
http://www.mmds.org