

O caso da *Tech4all*

Competências Transferíveis 2 - Investigação Operacional

João Figueiredo (98506)
Tiago Leitão (108387)
Gabriel Monteiro (107987)
Tomás Nunes (94545)
André Ferreira (103659)
André Gonçalves (107231)
Neuza Pinto (107386)

Professor do módulo CT2-IO: Carlos Ferreira



2022/2023

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Resolução	4
2.1	A) Formulação do problema em programação linear	4
2.1.1	Variáveis de decisão	4
2.1.2	Função Objetivo	4
2.1.3	Restrições	4
2.2	B) Resolução com o solver do excel	5
2.3	C) Análise e descrição da solução obtida	6
2.4	D) Formulação do problema dual	7
2.5	E) Análise e descrição obtida para o modelo dual - valorizações internas (preços sombra/custos de oportunidade)	8
2.6	F) Análise de sensibilidade	10
2.6.1	Quanto aos termos independentes (disponibilidade das li- nhas de produção, montagem e de embalagem e as limi- tações de produção diária de cada produto)	10
2.6.2	Quanto aos coeficientes da função objetivo (lucros unitá- rios de cada produto)	12

Lista de Figuras

1.1	Tabela da tech4all	3
2.1	Tabela do excel	5
2.2	Tabela de conversão para o dual	7
2.3	Relatório de sensibilidade sobre as restrições	8
2.4	Relatorio de sensibilidade sobre os coefecientes da FO	12

Capítulo 1

Introdução

A Tech4All é uma empresa que fabrica quatro tipos de produtos (P1, P2, P3 e P4) utilizando uma linha de produção, uma linha de montagem e uma linha de embalagem. A disponibilidade máxima diária de cada linha, os coeficientes tecnológicos (consumos unitários em cada linha) e os lucros unitários (€) para os quatro produtos, apresentam-se na tabela seguinte:

Linha de	Tempo (hora) necessário para produzir uma unidade de cada produto				Disponibilidade máxima diária
	P1	P2	P3	P4	
Produção	3	2	2	4	450 horas
Montagem	1	1	2	3	400 horas
Embalagem	2	1	2	1	400 horas

Lucro unitário (€)	60	40	60	80
--------------------	----	----	----	----

Figura 1.1: Tabela da tech4all

A Tech4All tem compromissos com alguns clientes, que obrigam a uma produção diária de pelo menos 50 unidades de P1; também devem ser produzidos diariamente, em conjunto, pelo menos 100 unidades de P2 e P3; por outro lado prevê-se uma limitação superior de 25 unidades para a quantidade do produto P4 a fabricar diariamente. O objetivo da Tech4All é maximizar o lucro total diário, que advém da venda dos produtos fabricados. Utilizando como metodologia a Programação Linear, resolva este problema e forneça à Tech4All indicações de gestão úteis para esta situação.

Capítulo 2

Resolução

2.1 A) Formulação do problema em programação linear

Para conseguirmos formular o problema, existem 3 aspetos que teremos de definir: a função objetivo, as variáveis de decisão e restrições existentes.

2.1.1 Variáveis de decisão

De acordo com a tabela fornecida, conseguimos determinar 4 variáveis de decisão:

x_1 Quantidade produzida do produto p1;

x_2 Quantidade produzida do produto p2;

x_3 Quantidade produzida do produto p3;

x_4 Quantidade produzida do produto p4.

2.1.2 Função Objetivo

O objetivo da Tech4all é maximizar o lucro diário, portanto podemos determinar a função objetivo como:

$$\text{MAX}(\mathbf{Z}) = 60x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 80x_4$$

2.1.3 Restrições

Analisando a tabela e o contexto fornecido no enunciado, é possível identificar 6 restrições:

$$\mathbf{R1: } 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 450 \text{ (Disponibilidade máxima na linha de produção)}$$

R2: $= 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 400$ (Disponibilidade máxima na linha de montagem)

R3: $= 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 400$ (Disponibilidade máxima na linha de embalagem)

R4: $= x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 \geq 50$ (Limite mínimo de produção P1)

R5: $= 0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 \geq 100$ (Limite mínimo de produção de P2+P3)

R6: $= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 \leq 25$ (Limite máximo de produção de P4)

CNN: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (Condições de não negatividade)

2.2 B) Resolução com o solver do excel

Através do excel, utilizá-mos o solver para nos encontrar uma solução ótima e gerar os relatórios de sensibilidade, resposta e limites.

A solução do solver está identificada pelos números destacados a vermelho.

	P1	P2	P3	P4			disponibilidade maxima diaria
	50	0	150	0	TOTAL		
PRODUÇÃO	3	2	2	4	450	<=	450
MONTAGEM	1	1	2	3	350	<=	400
EMBALAGEM	2	1	2	1	400	<=	400
LUCRO	60	40	60	80	12000		

Figura 2.1: Tabela do excel

2.3 C) Análise e descrição da solução obtida

Portanto, analisando a solução obtida conseguimos determinar o seguinte:

- A solução ótima é atingida com a produção de 50 unidades de P1, 0 de P2, 150 de P3 e 0 de P4;
- O valor da função objetivo é igual a 12000 euros, o que representa o lucro diário total maximizado;
- Para esta solução ótima, foram consumidas todas as horas disponíveis nas linhas de produção e embalagem, sobrando 50 na linha de montagem (análise de variáveis de folga):
 - As linhas de produção e embalagem foram totalmente consumidas, logo são **recursos escassos**;
 - A linha de montagem não foi totalmente consumida, sobrando 50 horas, portanto é um **recursos abundante**;

2.4 D) Formulação do problema dual

Para formular o problema dual, teremos que fazer a conversão do primal (obtido na alínea a)). Esta conversão seguirá as seguintes regras:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO	Passagem ao dual ←→		PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO
restrição i	\leq \geq $=$	≥ 0 ≤ 0 livre	variável i
variável j	≥ 0 ≤ 0 livre	\geq \leq $=$	restrição j
matriz A			matriz A^T
coeficientes da FO			termos independentes
termos independentes			coeficientes da FO

Figura 2.2: Tabela de conversão para o dual

Como no modelo primal temos 4 variáveis e 6 restrições, no modelo dual teremos 6 variáveis e 4 restrições. Eis o modelo dual:

$$\text{MIN}(\mathbf{W}) = 450y_1 + 400y_2 + 400y_3 + 50y_4 + 100y_5 + 25y_6$$

$$\mathbf{R1:} \quad 3y_1 + 1y_2 + 2y_3 + 1y_4 + 0y_5 + 0y_6 \geq 60$$

$$\mathbf{R2:} \quad 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 + 0y_4 + 1y_5 + 0y_6 \geq 40$$

$$\mathbf{R3:} \quad 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 0y_4 + 1y_5 + 0y_6 \geq 60$$

$$\mathbf{R4:} \quad 4y_1 + 3y_2 + 1y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 1y_6 \geq 80$$

$$\mathbf{CNN:} \quad y_1, y_2, y_3, y_6 \geq 0$$

$$\mathbf{CNP:} \quad y_4, y_5 \leq 0$$

2.5 E) Análise e descrição obtida para o modelo dual - valorizações internas (preços sombra/custos de oportunidade)

Para podermos analisar as valorizações internas (preços-sombra/custos de oportunidade), teremos que analisar o relatório de sensibilidade devolvido pelo solver do excel.

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$D\$2	(R)p4	0	0	25	1E+30	25
\$E\$2	(R)p1	50	-16,66666667	50	0	30
\$H\$2	(R)p2+p3	150	0	100	50	1E+30
\$Q\$3	PRODUÇÃO TOTAL	450	16,66666667	450	75	0
\$Q\$4	MONTAGEM TOTAL	350	0	400	1E+30	50
\$Q\$5	EMBALAGEM TOTAL	400	13,33333333	400	0	75

Figura 2.3: Relatório de sensibilidade sobre as restrições

Analisando a coluna, "Preço Sombra", podemos concluir o seguinte quanto a cada restrição:

- **Restrição do limite máximo de P4**

- Preço sombra é nulo
- Portanto, a solução ótima não é afetada (de forma alguma) por variações à restrição do lado direito

- **Restrição do limite mínimo de P1**

- Preço sombra é negativo (-16.6667)
- Portanto, se a restrição do lado direito variar irá haver um impacto na solução ótima
- Interpretação económica: Se a restrição do lado direito aumentar em 1 unidade, o valor da função objetivo (lucro) diminui em 16.6667 euros
- Restrição vinculativa

- **Restrição do limite mínimo de P2+P3**
 - Preço sombra é nulo
 - Portanto, a solução ótima não é afetada (de forma alguma) por variações à restrição do lado direito
- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de produção**
 - Preço sombra é positivo (16.6667)
 - Portanto, se a restrição do lado direito variar irá haver um impacto na solução ótima
 - Interpretação económica: Se a restrição do lado direito aumentar em 1 unidade, o valor da função objetivo (lucro) aumenta em 16.6667 euros
 - Restrição vinculativa
- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de montagem**
 - Preço sombra é nulo
 - Portanto, se a restrição do lado direito variar não irá haver um impacto na solução ótima
 - Interpretação económica: não é um fator limitante para a maximização ou minimização da função objetivo
- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de embalagem**
 - Preço sombra é positivo (13.3333)
 - Portanto, se a restrição do lado direito variar irá haver um impacto na solução ótima
 - Interpretação económica: Se a restrição do lado direito aumentar em 1 unidade, o valor da função objetivo (lucro) aumenta em 13.3333 euros
 - Restrição vinculativa

2.6 F) Análise de sensibilidade

2.6.1 Quanto aos termos independentes (disponibilidade das linhas de produção, montagem e de embalagem e as limitações de produção diária de cada produto)

Para analisar as restrições do lado direito e sua influência na solução ótima, é necessário observar a tabela presente na figura 2.3 e as colunas "Restrição do lado direito", "Permissível Aumentar" e "Permissível Diminuir". Através desses valores, é possível determinar em que medida as restrições do lado direito podem variar sem afetar a solução ótima. Em resumo, podemos concluir o seguinte para cada uma das restrições:

- **Restrição do limite máximo de P4**

- Restrição do lado direito = 25
- Aumento possível = $+\infty$
- Diminuição possível = 25
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[0, +\infty)$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra, ou seja, neste caso não sofre. O preço sombra é nulo

- **Restrição do limite mínimo de P1**

- Restrição do lado direito = 50
- Aumento possível = 0
- Diminuição possível = 30
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[20, 50)$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra. O preço sombra é negativo

- **Restrição do limite mínimo de P2+P3**

- Restrição do lado direito = 100
- Aumento possível = 50
- Diminuição possível = ∞
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[-\infty, 150]$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra, ou seja, neste caso não sofre. O preço sombra é nulo

- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de produção**

- Restrição do lado direito = 450
- Aumento possível = 75
- Diminuição possível = 0
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[450, 525]$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra. O preço sombra é positivo

- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de montagem**

- Restrição do lado direito = 400
- Aumento possível = ∞
- Diminuição possível = 50
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[350, \infty]$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra. Neste caso não existem alterações pois o preço sombra é nulo

- **Restrição do limite máximo de horas disponíveis para a linha de embalagem**

- Restrição do lado direito = 400
- Aumento possível = 0
- Diminuição possível = 75
- Conjunto de valores que a restrição de lado pode assumir = $[325, 400]$
- O valor ótimo sofre alterações proporcionais ao preço sombra. O preço sombra é positivo

Nota: Em certas restrições podem haver aumentos/diminuições de quantidades bastante elevadas, praticamente infinitas. Esses numeros derivam da análise matemática que o solver do excel realiza. Num cenário real não existirão custos negativos nem quantidade negativas a produzir.

2.6.2 Quanto aos coeficientes da função objetivo (lucros unitários de cada produto)

Para explorar a sensibilidade dos coeficientes, vamos examinar a tabela de variáveis no relatório de sensibilidade gerado pelo Excel.

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$M\$2 P1		50	0	60	16,66666667	1E+30
\$N\$2 P2		0	-6,666666667	40	6,666666667	1E+30
\$O\$2 P3		150	0	60	100	20
\$P\$2 P4		0	0	80	40	20

Figura 2.4: Relatório de sensibilidade sobre os coeficientes da FO

Analisando as colunas "Permissível Aumentar" e "Permissível Diminuir", descobrimos o quanto cada coeficiente pode variar (individualmente, ou seja, apenas esse e não os outros) sem que a solução ótima seja alterada.

Analisando agora em detalhe cada coeficiente:

- **Coeficiente de P1 = 60**

- Analisando os aumentos e diminuições possíveis, conseguimos concluir, matematicamente, que podemos aumentar o coeficiente em 16.666667 euros ou diminuir de forma infinita, que a solução ótima não seria afetada. Ou seja, as quantidades produzidas de cada produto seriam as mesmas.
- Mas o solver apenas faz a análise matemática e, obviamente, não possui contexto. Por exemplo, uma diminuição infinita é impossível, não existem custos negativos. Portanto, realisticamente, o coeficiente de P1 pode assumir um valor entre $[0; 76.667]$ e a solução ótima manteria-se igual.
- Apesar da solução ótima permanecer inalterada, o valor da função objetivo poderá alterar consoante o aumento ou redução.

- **Coeficiente de P2 = 40**

- Analisando os aumentos e diminuições possíveis, conseguimos concluir, matematicamente, que podemos aumentar o coeficiente em 6.666667 euros ou diminuir de forma infinita, que a solução ótima não seria afetada. Ou seja, as quantidades produzidas de cada produto seriam as mesmas.

- Mas o solver apenas faz a análise matemática e, obviamente, não possui contexto. Por exemplo, uma diminuição infinita é impossível, não existem custos negativos. Portanto, realisticamente, o coeficiente de P2 pode assumir um valor entre $[0; 46.667]$ e a solução ótima manteria-se igual.

- **Coeficiente de P3 = 60**

- Analisando os aumentos e diminuições possíveis, conseguimos concluir, matematicamente, que podemos aumentar o coeficiente em 100 euros ou diminuir em 20 euros, que a solução ótima não seria afetada. Ou seja, as quantidades produzidas de cada produto seriam as mesmas.
- Portanto, realisticamente, o coeficiente de P3 pode assumir um valor entre $[80; 160]$ e a solução ótima manteria-se igual.
- Apesar da solução ótima permanecer inalterada, o valor da função objetivo poderá alterar consoante o aumento ou redução.

- **Coeficiente de P4 = 80**

- Analisando os aumentos e diminuições possíveis, conseguimos concluir, matematicamente, que podemos aumentar o coeficiente em 40 euros ou diminuir em 20 euros, que a solução ótima não seria afetada. Ou seja, as quantidades produzidas de cada produto seriam as mesmas.
- Mas o solver apenas faz a análise matemática e, obviamente, não possui contexto. Por exemplo, uma diminuição infinita é impossível, não existem custos negativos. Portanto, realisticamente, o coeficiente de P1 pode assumir um valor entre $[60; 120]$ e solução ótima manteria-se igual.
- Apesar da solução ótima permanecer inalterada, o valor da função objetivo poderá alterar consoante o aumento ou redução.

Os únicos coeficientes que afetam o valor da função objetivo são os de P1 e P3, pois seus valores finais são diferentes de zero e positivos. Já os coeficientes de P2 e P4 podem variar dentro dos limites calculados sem afetar a solução ótima, mantendo o valor da função constante.