Campo Electromagnético

Indução mútua e auto-indução: a indutância.
- **O coeficiente de auto-indução *L;* coeficiente de indução mútua *M.***
- **O princípio da reciprocidade.**
- **Circuitos indutivos e energia magnética.**
- **Resolução de exercícios.**

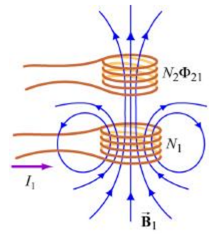
Maria Rute André

rferreira@ua.pt

1

Indução mútua

Já sabemos que, variações de corrente num circuito fechado induzem o aparecimento de uma f.e.m noutro circuito fechado, colocado na vizinhança.



$$\varepsilon_{21} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{circuito 2}} \vec{\mathbf{B}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{A}}_2$$

$$N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Indutância mútua
(amplitude da f.e.m. induzida no circuito 2, por unidade de tempo de variação da corrente no circuito 1)

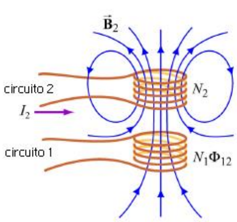
$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$$ **Unidade SI: henry (H)**

$$1\ \text{henry} = 1\ \text{H} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A}$$

2

Indução mútua

Vamos demonstrar que $M_{12}=M_{21}$



A alteração do fluxo através do circuito 1, é proporcional à variação de corrente no circuito 2.

$$N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

A indutância mútua, será:

$$M_{12} = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$$

Através do teorema da reciprocidade (lei de Ampère e lei de Biot-Savat)

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

Indutância mútua

3

Auto-Indução: **propriedade de oposição do campo magnético próprio, a alterações na corrente.**

Podemos dizer que, qualquer circuito fechado tem uma auto-indução. O efeito de indução. Num circuito é como inércia num sistema mecânico.

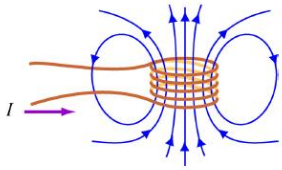
A auto-indução aparece num circuito sempre que:

1. A corrente aumenta ***dI/dt***, logo ***B*** e o fluxo ***ϕ*** aumentam. Logo, se ***dϕ/dt*** aumenta, implica a existência de uma f.e.m. induzida que cria uma corrente induzida que se opõe à variação de ***I***.

2. A corrente num circuito diminui, logo B e o fluxo ϕ diminuem. Logo, se dϕ/dt diminui, implica a existência de uma f.e.m. induzida que cria uma corrente induzida que se opõe à variação de ***I***.

4

Auto-Indução: propriedade de oposição do campo magnético próprio, a alterações na corrente.



1. Se a corrente é constante, então o fluxo de B não varia no tempo.

2. Se I varia no tempo, então de acordo com a lei de Faraday, existe uma f.e.m. induzida (ε_L) que se opõe à variação.

Se $dI/dt > 0$ corrente induzida flui no sentido do mov. dos ponteiros do relógio;

Se $dI/dt < 0$ corrente induzida flui no sentido contrário ao mov. dos ponteiros do relógio;

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}\iint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{A}} \Longrightarrow \varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

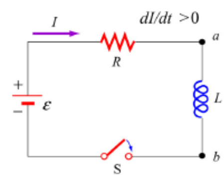
Auto-indução

Um elemento com elevado coeficiente de auto-indução designa-se como indutor símbolo:

5

Circuito RL

Como varia, no tempo, a corrente nos circuitos que contêm uma resistência e uma indutância em série?



Temos de considerar duas situações distintas:

1. S aberto
2. S fechado

t=0s, ***S*** é fechado e a corrente ***I*** aumenta (***dI/dt>0***)

Circuito em carga

Aparecimento de f.e.m na indutância de:

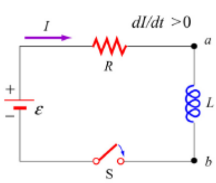
$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} = Va - Vb\,(>0)$$

Oposta a ε

6

Circuito RL

Como varia, no tempo, a corrente nos circuitos que contêm uma resistência e uma indutância em série?



Pela lei da malhas: $\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}$

Fazendo: $y = \frac{\varepsilon}{R} - I \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{R}{L}dt$

Integrando:

$$\ln y = -\frac{R}{L}t + \ln y_0 \Leftrightarrow y = y_0 e^{-(R/L)t} \qquad y_0\ (y, t = 0s)$$

$$y = \frac{\varepsilon}{R} - I \wedge y_0 = \frac{\varepsilon}{R},$$

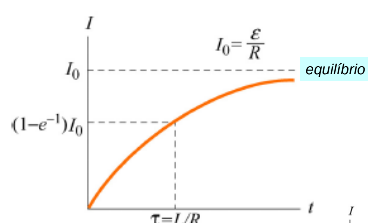
$$\text{vem } I = I_0\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \text{ onde } I_0 = \frac{\varepsilon}{R} \text{ e } \tau = \frac{L}{R}$$

Constante de tempo

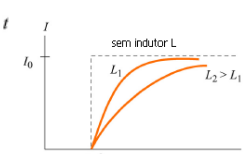
7

Circuito RL

Como varia, no tempo, a corrente nos circuitos que contêm uma resistência e uma indutância em série?



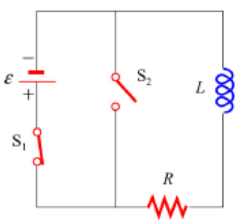
Quanto maior for L, maior o tempo para atingir o equilíbrio



8

Circuito RL

Vamos, agora, analisar a descarga.



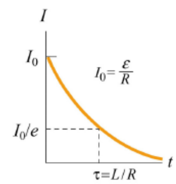
Retirar a fonte ε, abrir S1 e fechar S2. Neste instante, a corrente I começa a diminuir, dI/dt<0

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} = Va - Vb > 0$$

$$lei\ das\ malhas,\ IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int dt \Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

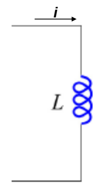
$$t = 0s,\ I = I_0 = \frac{\varepsilon}{R};\ I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-(R/L)t}$$



9

Energia Magnética Armazenada

Qual a energia que deve ser gasta para criar uma corrente *i*, numa indutância *L*?



Por definição, a f.e.m. $\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$

Precisamos de realizar trabalho ***dW*** para mover uma carga ***dq*** contra a fem.

$$dW = -\varepsilon dq = L\frac{di}{dt}dq = L\frac{dq}{dt}di = Lidi$$

O trabalho total para criar uma corrente ***0*** até ***i, é:***

$$U_L = \int dW = \int_0^i Lidi \Leftrightarrow U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Energia armazenada

10

Densidade de Corrente Magnética

(energia magnética por unidade de volume)

A energia magnética é armazenada no campo magnético. Considerando, por exemplo, o caso do solenoide em que a sua auto-indução é dada por:

$$L = \mu_0 N^2 Al \wedge B = \mu_0 I$$

$$U_L = LI^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}Al = \frac{B^2}{2\mu_0}volume\ (Al = volume\ do\ solenoide)$$

$$\mu_L = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Densidade de energia magnética

11

Aplicações da lei geral da indução

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_\tau \vec{E}d\vec{l}$$

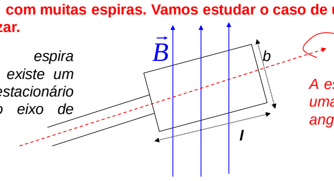
Três situações em que pode ocorrer variação do fluxo

1. ***variação da intensidade de campo magnético (JÁ ESTUDÁMOS)***
2. ***variação da área dS***
3. ***variação do ângulo entre os vectores campo magnético (B) e dS***

Gerador de corrente alternada (caso 3)

É um dispositivo com muitas espiras. Vamos estudar o caso de uma espira e, depois, generalizar.

Temos uma espira rectangular onde existe um campo B estacionário perpendicular ao eixo de rotação.

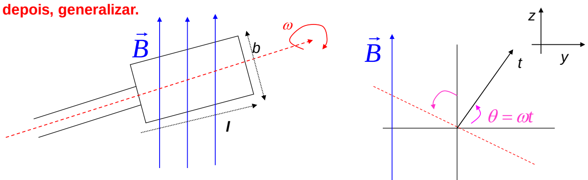


A espira roda com uma velocidade angular ω

12

Gerador de corrente alternada (caso 3)

É um dispositivo com muitas espiras. Vamos estudar o caso de uma espira e, depois, generalizar.



$$\phi(t) = \int_S \vec{B}d\vec{S} = Bn(t)lb = BAsen\,\theta = BAsen(\omega t)$$

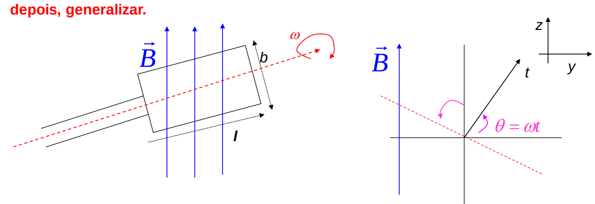
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega AB\cos(\omega t)$$

Para uma espira

13

Gerador de corrente alternada (caso 3)

É um dispositivo com muitas espiras. Vamos estudar o caso de uma espira e, depois, generalizar.



Se a resistência da espira for *R*, aparece uma corrente induzida dada por *I=ε/R*

$$I = \frac{-\omega AB}{R}\cos(\omega t)$$

$$\varepsilon = -\omega NAB\cos(\omega t)$$

Para N espiras

14

Gerador de corrente alternada (caso 3)

A potência desenvolvida pela f.e.m. induzida é

$$P_E(t) = \frac{-\varepsilon^2}{R} = \frac{(\omega NAB)^2}{R}\cos^2(\omega t)$$

Potência eléctrica

Em relação à potência mecânica que é preciso fornecer, teremos de contrariar a força de Lorentz

$$F = IlB \wedge I = \frac{\varepsilon}{R}, \quad F = \frac{\omega NAB}{R}\cos(\omega t)$$

As duas força constituem um binário, ***τ = Fcosθb***

$$\tau = \frac{\omega NAB\cos\omega t BlN\cos\omega t b}{R}$$

A potência mecânica é igual ao produto (momentoxω)

$$P_{MEc}(t) = \frac{(\omega NAB)^2}{R}\cos^2(\omega t)$$

Potência mecânica

15

Gerador de corrente alternada (caso 3)

Conclusão: no caso ideal (ausência de atrito), toda a potência mecânica é convertida em potência eléctrica.

16