

Aula 08

Recursão versus Iteração

Recursão e Iteração em Estruturas Ordenadas

Programação II, 2019-2020

v1.3, 2020-04-12

DETI, Universidade de Aveiro

08.1

Conteúdo

1	Recursão: implementação	1
2	Conversão entre recursão e iteração	3
2.1	Iteração para recursão	3
2.2	Recursão para iteração	3
3	Travessia de listas: recursão e iteração	4
4	Travessia de vectores: recursão e iteração	5
5	Gestão de listas e vectores ordenados	5

08.2

1 Recursão: implementação

- Não há suporte directo para a recursão nas *linguagens de máquina*, isto é, linguagens que são directamente executadas pelos processadores (CPU) existentes nos computadores;
- Assim, para que este mecanismo funcione é necessária uma adequada implementação pelos compiladores (ou interpretadores) das linguagens de programação de mais alto nível (como o Java);

Problema: Garantir uma separação clara entre o contexto do cliente (que invoca o método) e o contexto do método, impedindo a interferência entre diferentes invocações do método (incluindo possíveis invocações recursivas).

08.3

Recursão: implementação

- Este objectivo pode ser atingido fazendo com que os métodos, sempre que são invocados, funcionem com *contextos de execução* próprios onde são armazenadas as suas variáveis locais e parâmetros.
- Podemos fazer uma analogia com a instanciação de objectos, com a diferença de as variáveis do método só existirem durante a execução do método.
 - As variáveis são criadas quando o método inicia a sua execução e descartadas quando termina.

- A implementação mais eficiente para este fim assenta numa estrutura de dados composta designada por *Pilha* (*stack*), que se caracteriza por uma gestão do tipo *LIFO* (*Last In First Out*);

08.4

Exemplo

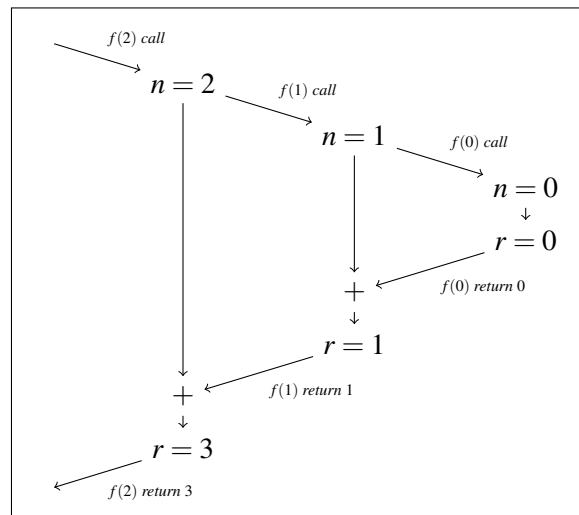
- Vejamos, como exemplo, a seguinte função recursiva $f(n)$, que devolve o somatório dos números de 0 a n :

```
static int f(int n) {
    assert n >= 0;
    //out.printf("f(%d)... \n", n);
    int r = 0;
    if (n > 0)
        r = n + f(n-1);
    //out.printf("f(%d) = %d\n", n, r);
    return r;
}
```

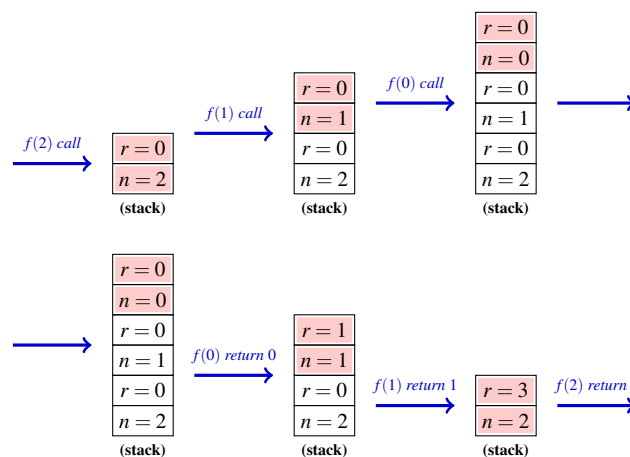
08.5

Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente [este exemplo no Java Tutor](#).)



08.6



08.7

Note que a representação acima está um pouco simplificada. Na implementação real, para cada execução da função f , além das variáveis locais n e r , a pilha guarda também os endereços para aonde retornar.

2 Conversão entre recursão e iteração

2.1 Iteração para recursão

- Como já foi referido, um algoritmo recursivo tem sempre uma versão iterativa e vice-versa.
- Uma forma genérica de converter um ciclo (estruturado) numa função recursiva é a seguinte:

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>for (INIT; COND; UPDATE) { BODY } ...</pre>	<pre>INIT loopEquiv (ARGS) ... static void loopEquiv(ARGS decl) { if (COND) { BODY UPDATE loopEquiv (ARGS); } }</pre>

- A função recursiva tem de declarar argumentos formais correspondentes às variáveis utilizadas no ciclo.
- Os valores dessas variáveis têm de ser passados como argumentos da função.
- Se precisarmos dos valores finais de algumas variáveis, então a função recursiva deverá *devolver* esses valores como resultado ou modificando atributos do objeto.
- Se o ciclo não for estruturado, ou seja, se contiver instruções do tipo “salto” (*break*, *continue* ou *return*), então terá de ser transformado num ciclo estruturado antes da conversão.

08.8

Iteração para recursão: exemplo

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>// int[] arr for(int i=0; i<arr.length; i++) out.println(arr[i]); ...</pre>	<pre>int i = 0; loopEquiv(arr, i); ... static void loopEquiv(int[] arr, int i) { if (i < arr.length) { out.println(arr[i]); i++; loopEquiv(arr, i); } }</pre>

- Podemos melhorar esta implementação substituindo o incremento de *i* pela passagem de *i+1* para a função.

08.9

2.2 Recursão para iteração

- A conversão de algoritmos recursivos para ciclos é, em geral, mais complexa do que a transformação inversa.
- Uma forma geral de fazer essa conversão faz uso de uma *pilha* para armazenar explicitamente os contextos de execução da função recursiva (contendo os argumentos e variáveis locais da função) e substitui as chamadas das funções por instruções do tipo *salto* (*goto*).
- No entanto, o algoritmo resultante fica muito *menos legível*.
- Alguns tipos particulares de recursividade, como é o caso da *recursão de cauda* (*tail recursion*) prestam-se a optimizações interessantes (já que podemos prescindir do armazenamento de algum contexto).
- Mas isso sai fora do âmbito desta disciplina.

08.10

Recursão para iteração: exemplo

- Certas funções recursivas (como o cálculo dos números de Fibonacci ou o factorial) são, no entanto, facilmente convertidas em ciclos:
 - Basta fazer a iteração desde o(s) caso(s) limite até ao valor desejado, e ir armazenando os valores calculados num array.
 - E substituir as invocações recursivas por acessos ao array.

Implementação Recursiva	Implementação Iterativa (com array)
<pre>static int factorial(int n) { assert n >= 0; int res; if (n <= 1) res = 1; else res = n * factorial(n-1); return res; }</pre>	<pre>static int factorial(int n) { assert n >= 0; int[] arr = new int[n+1]; for(int i = 0; i <= n; i++) { if (i <= 1) // casos limite arr[i] = 1; else arr[i] = i * arr[i-1]; } return arr[n]; }</pre>

08.11

Por vezes, pode não ser necessário armazenar todos os valores anteriores. Nesses casos, pode otimizar-se o algoritmo iterativo para usar menos memória. (Pode fazer isso no exemplo acima.)

3 Travessia de listas: recursão e iteração

Travessia de listas: recursão e iteração

- Embora as listas sejam estruturas de dados recursivas, é possível utilizar algoritmos iterativos.
- Vejamos novamente a função `contains()` da classe `LinkedList`, da aula anterior, comparando com uma versão iterativa equivalente.

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>public class LinkedList<E> { ... public boolean contains(E e) { boolean found = false; Node<E> n = first; while (n!=null && !found) { if (n.elem.equals(e)) found = true; n = n.next; } return found; } ... }</pre>	<pre>public class LinkedList<E> { ... public boolean contains(E e) { return contains(first, e); } private boolean contains(Node<E> n, E e) { if (n == null) return false; if (n.elem.equals(e)) return true; return contains(n.next, e); } ... }</pre>

08.12

Um padrão que se repete ...

- Muitas funções têm de fazer uma *travessia* da lista.
- Essa travessia segue um padrão que convém assimilar.

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>public class LinkedList<E> { ... public ... xpto(...) { ... Node<E> n = first; while (n!=null && ...) { ... n = n.next; } return ...; } ... }</pre>	<pre>public class LinkedList<E> { ... public ... xpto(...) { return xpto(first, e); } private ... xpto(Node<E> n, ...) { if (n == null) return ...; xpto(n.next, ...); return ... } ... }</pre>

Travessia (= percurso): Algoritmo que percorre potencialmente todos os elementos de uma estrutura de dados visitando cada um apenas uma vez.

08.13

4 Travessia de vectores: recursão e iteração

Travessia de vectores: recursão e iteração

- Como faríamos uma pesquisa sequencial num vector?
- Aqui, em vez de passarmos de `n` a `n.next`, passamos de `i` a `i+1`.
- E, em vez de compararmos com `n.elem`, comparamos com o elemento `v[i]` do vector.

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>public static boolean contains(E[] v, E e) { int i=0; while (i < v.length) { if (v[i].equals(e)) return true; i++; } return false; }</pre>	<pre>public static boolean contains(E[] v, E e) { return contains(v, e, 0); } private static boolean contains(E[] v, E e, int i) { if (i >= v.length) return false; if (v[i].equals(e)) return true; return contains(v, e, i+1); }</pre>

08.14

5 Gestão de listas e vectores ordenados

- Em muitas aplicações, dá jeito ter estruturas ordenadas.
 - O problema coloca-se quer para vectores, quer para listas.
- Na próxima aula, vamos ver diversos algoritmos de ordenação.
- Um problema mais simples é o de criar e manter uma estrutura sempre ordenada.
 - Dependendo da aplicação, pode ser preferível.
- Por simplicidade, vamos trabalhar com listas e vectores de elementos inteiros.

08.15

Lista ligada ordenada: semântica

- **insert(e)** - inserir o elemento dado.
 - Pré-condição: `isSorted()`
 - Pós-condição: `contains(e) && isSorted()`
- **removeFirst()** - remover o primeiro elemento.
 - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **first()** - consultar o primeiro elemento.
 - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **remove(e)** - remover o elemento dado.
 - Pré-condição: `contains(e) && isSorted()`
 - Pós-condição: `isSorted()`

08.16

Vector ordenado: semântica

- **insert(v, ne, e)** - inserir o elemento dado.
 - Pré-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
 - Pós-cond.: `contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
- **removeFirst(v, ne)** - remover o primeiro elemento.
 - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **first(v)** - consultar o primeiro elemento.
 - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **remove(v, ne, e)** - remover o elemento dado.
 - Pré-cond.: `contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
 - Pós-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
- (`v` = vector, `ne` = número de elementos, `e` = elemento)

08.17

Verificar se uma lista está ordenada: recursão e iteração

- Numa lista ordenada, qualquer função deve manter a lista ordenada.
- Precisamos assim de uma função que verifique isso.
- Essa verificação pode ser usada em asserções.
- Em cada passo, precisamos de conhecer o elemento anterior (`p`).

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>public class SortedListInt { ... public boolean isSorted() { if (size < 2) return true; NodeInt p = first; NodeInt n = first.next; while (n!=null) { if (n.elem<p.elem) return false; p = n; //previous n = n.next; } return true; } ... }</pre>	<pre>public class SortedListInt { ... public boolean isSorted() { if (size < 2) return true; return isSorted(first, first.next); } private boolean isSorted(NodeInt p, NodeInt n) { if (n == null) return true; if (n.elem < p.elem) return false; return isSorted(n, n.next); } ... }</pre>

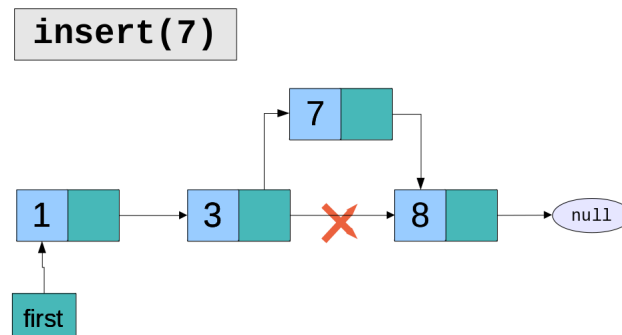
Verificar se um vector está ordenado: recursão e iteração

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre> public static boolean isSorted(int[] v) { if (v.length < 2) return true; int i = 1; boolean sorted = true; while (i!=v.length && sorted) { if (v[i] < v[i-1]) sorted = false; i++; } return sorted; } </pre>	<pre> public static boolean isSorted(int[] v) { if (v.length < 2) return true; return isSorted(v, 1); } private static boolean isSorted(int[] v, int i) { if (i==v.length) return true; if (v[i] < v[i-1]) return false; return isSorted(v, i+1); } </pre>

08.19

Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:



- Quando o elemento fica no início, funciona como addFirst
- Quando o elemento fica no fim, funciona como addLast

08.20

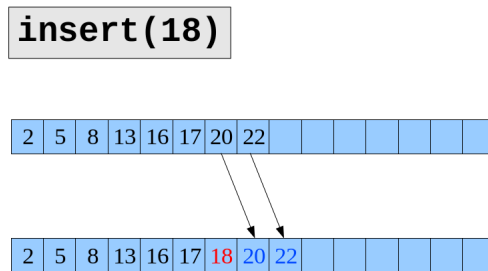
Inserção numa lista ordenada: recursão e iteração

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre> public class SortedListInt { ... public void insert(int e) { if (first==null e<first.elem) first = new NodeInt(e, first); else { NodeInt p = first; NodeInt n = first.next; while (n!=null && e>n.elem) { p = n; n = n.next; } p.next = new NodeInt(e, n); size++; } ... } } </pre>	<pre> public class SortedListInt { ... public void insert(int e) { first = insert(first, e); size++; } private NodeInt insert(NodeInt n, int e) { if (n==null e<n.elem) return new NodeInt(e, n); n.next = insert(n.next, e); return n; } ... } </pre>

08.21

Inserção num vector ordenado

- Inserção no meio do vector:



08.22

Inserção num vector ordenado: recursão e iteração

- Inserir um elemento *e* num vector *v* com *ne* elementos

Implementação Iterativa	Implementação Recursiva
<pre>public static int insert(int[] v, int ne, int e) { int i=ne; while (i>0 && e<v[i-1]) { v[i] = v[i-1]; i--; } v[i] = e; return ne+1; }</pre>	<pre>public static int insert(int[] v, int ne, int e) { shiftInsert(v, e, ne); return ne+1; } public static void shiftInsert(int[] v, int e, int i) { if (i==0 e>v[i-1]) v[i] = e; else { v[i] = v[i-1]; shiftInsert(v, e, i-1); } }</pre>

08.23

Implementação de uma lista ordenada genérica

- Qualquer objecto Java tem o método `equals()`.
- No entanto, só alguns objectos têm o método `compareTo()` necessário para manter uma lista ordenada.
- Podemos definir classes genéricas em que os parâmetros de tipo são declarados como “comparáveis”.

```
public class SortedList<E extends Comparable<E>> {
    ...
    public void insert(E e) {
        ...
    }
    ...
}

...
public static void main(String args[]) {
    ...
    SortedList<Double> p1 = new SortedList<Double>();
    SortedList<Integer> p2 = new SortedList<Integer>();
    ...
}
```

08.24

