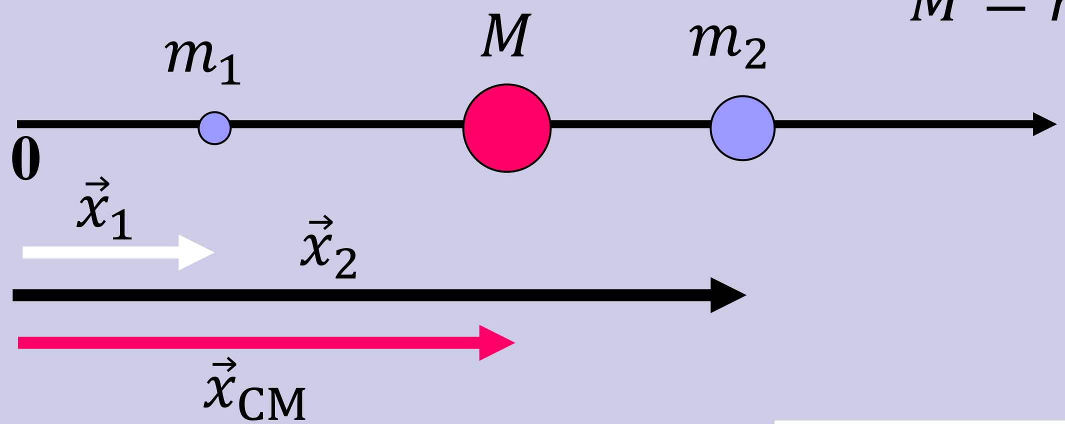
Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.3 Dinâmica de um sistema de partículas (Parte A)

universidade de aveiro

Centro de massa a 1D

$$M = m_1 + m_2$$



$$M\vec{x}_{CM} = (m_1x_1+m_2x_2)\hat{\imath}$$

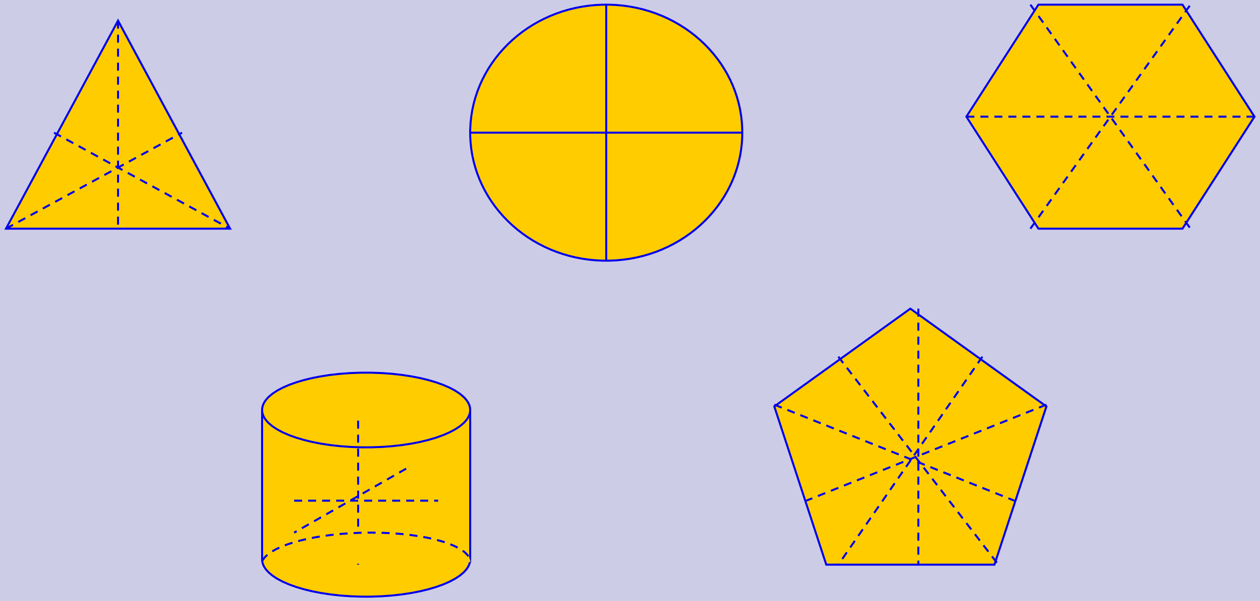
$$\vec{x}_{CM} = \left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{M}\right)\hat{\imath}$$

$$\vec{x}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{x}_{\mathrm{i}}$$

Para N partículas

Centro de massa a 3D

No caso de objetos simétricos com densidade uniforme, o centro geométrico do corpo coincide com o centro de massa do mesmo.

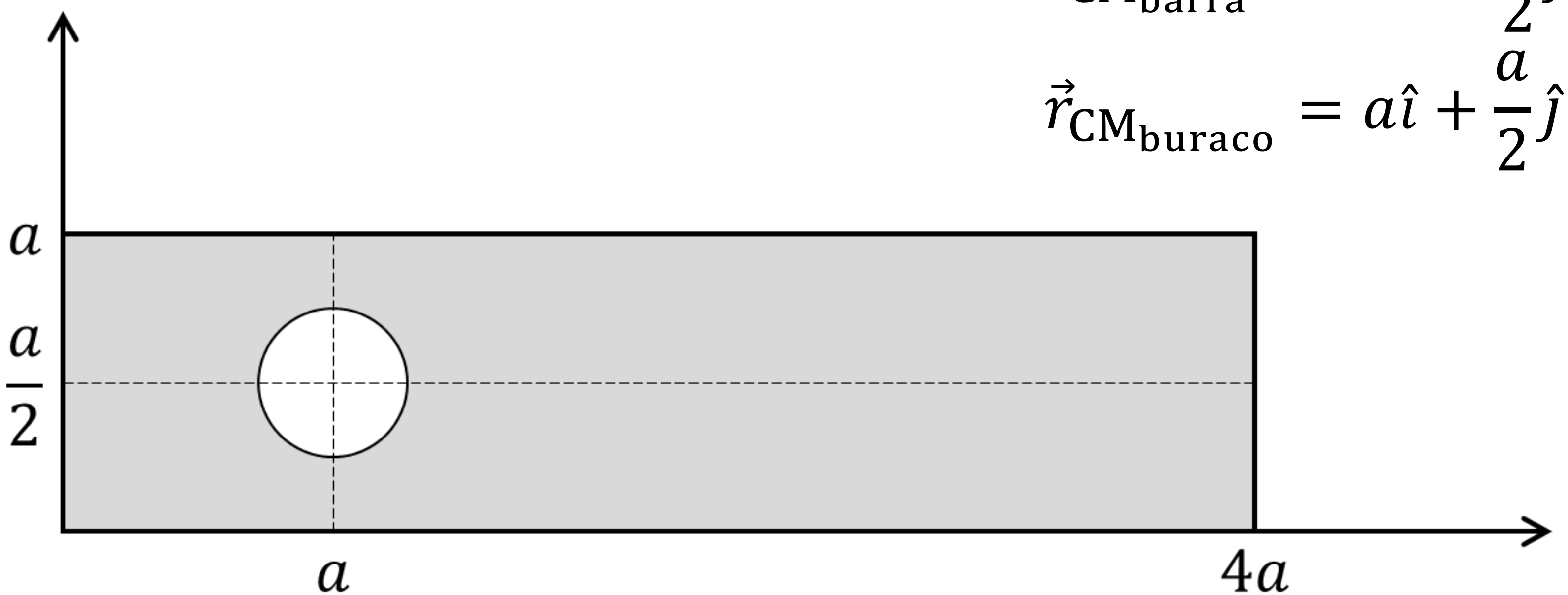


Resolução do exercício 2 (capítulo I.3a))

2 *Uma lâmina retangular homogénea de lados **a** e **b** = 4**a** tem um orifício circular cujo diâmetro é igual a **a**/2. O seu centro está sobre a linha média paralela aos lados **b**, a meia distância entre o centro da lâmina e um dos lados de comprimento **a**. Determine o centro de massa.

$$\vec{r}_{\mathrm{CM_{barra}}} = 2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM_{buraco}}} = a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$



Resolução do exercício 2 (capítulo I.3a))

Se a barra é homogénea, podemos pensar que a zona do buraco é equivalente a termos um corpo nessa posição a contribuir para o CM com uma massa negativa.

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \qquad \sigma = \frac{M_{\mathrm{barra}}}{\text{Área}} = \frac{M_{\mathrm{barra}}}{4a^2}$$

Cálculo da massa do buraco

$$\sigma = \frac{m_{\mathrm{buraco}}}{\pi r^2} \Leftrightarrow m_{\mathrm{buraco}} = \pi r^2 \sigma = \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 \frac{M_{\mathrm{barra}}}{4a^2} = \pi \frac{M_{\mathrm{barra}}}{64}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{M_{\mathrm{barra}} \vec{r}_{\mathrm{CM}_{\mathrm{barra}}} - M_{\mathrm{buraco}} \vec{r}_{\mathrm{CM}_{\mathrm{buraco}}}}{M_{\mathrm{barra}} - m_{\mathrm{buraco}}}$$

Resolução do exercício 2 (capítulo I.3)

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{M_{\mathrm{barra}}\left[2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right] - \pi\frac{M_{\mathrm{barra}}}{64}\left[a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{M_{\mathrm{barra}} - \pi\frac{M_{\mathrm{barra}}}{64}}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath} - \frac{\pi}{64}\left[a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{1 - \frac{\pi}{64}} = \frac{64\left[2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right] - \pi\left[a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{64 - \pi}$$

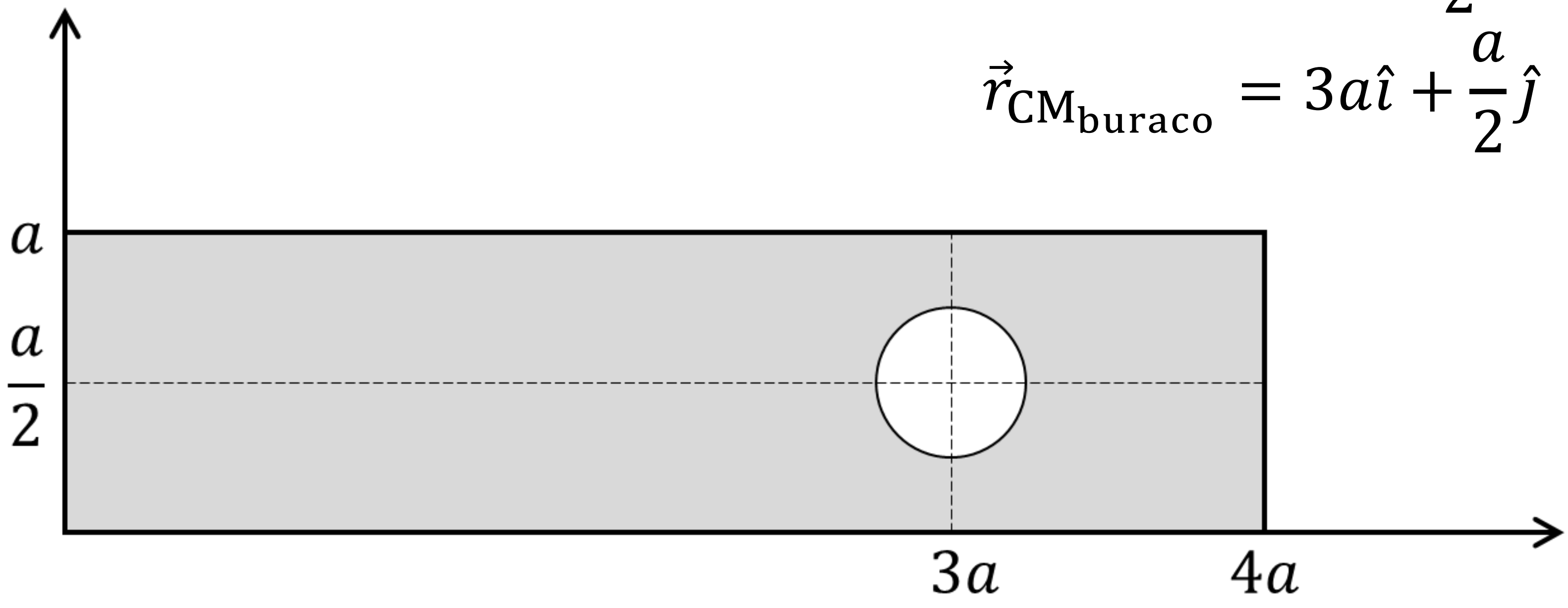
$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{(128a - \pi a)\hat{\imath}}{64 - \pi} + \frac{(64 - \pi)\frac{a}{2}\hat{\jmath}}{64 - \pi} = \frac{(128 - \pi)a\hat{\imath}}{64 - \pi} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$

Resolução do exercício 2 (capítulo I.3a))

Outra posição possível para o buraco

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}_{\mathrm{barra}}} = 2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}_{\mathrm{buraco}}} = 3a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$



Resolução do exercício 2 (capítulo I.3a))

Outra posição possível para o buraco

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{M_{\text{barra}}\left[2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right] - \pi\frac{M_{\text{barra}}}{64}\left[3a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{M_{\text{barra}} - \pi\frac{M_{\text{barra}}}{64}}$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath} - \frac{\pi}{64}\left[3a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{1 - \frac{\pi}{64}} = \frac{64\left[2a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right] - \pi\left[3a\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}\right]}{64 - \pi}$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{(128a - 3\pi a)\hat{\imath}}{64 - \pi} + \frac{(64 - \pi)\frac{a}{2}\hat{\jmath}}{64 - \pi} = \frac{(128 - 3\pi)a\hat{\imath}}{64 - \pi} + \frac{a}{2}\hat{\jmath}$$

Centro de massa a 3 D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Com $\vec{r}_i = x_i\hat{\imath}+y_i\hat{\jmath}+z_i\hat{k}$ e M= $\sum_i^n m_i$

Posição do centro de massa para uma distribuição contínua de massa

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i} \frac{\sum_i^n m_i\vec{r}_i}{\sum_i^n \Delta m_i} = \frac{1}{M}\int \vec{r}_i dm$$

Onde dm representa o elemento diferencial de massa

Movimento do centro de massa de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\boxed{M\vec{v}_{CM} = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = \sum_i^n \vec{p}_i = \vec{P}}$$

O momento linear total, $\vec{\boldsymbol{P}}$, de um sistema de várias partículas é igual ao de uma partícula de massa M deslocando-se com velocidade $\vec{v}_{CM}$

Movimento do centro de massa um sistema de partículas

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Com $\vec{v}_i = v_{xi}\hat{\imath} + v_{yi}\hat{\jmath} + v_{zi}\hat{k}$ e M= $\sum_i^n m_i$

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum_i^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i^n \frac{\vec{p}_i}{dt} = \sum_i^n \vec{F}_{i,ext} = \vec{F}_{R,ext}}$$

$\vec{F}_i$ são as forças exteriores aplicadas sobre cada uma das partículas componentes do sistema.

Note que as forças internas (entre os componentes) não contribuem para a variação da quantidade do movimento do sistema.

Movimento do centro de massa um sistema de partículas

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{R,ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

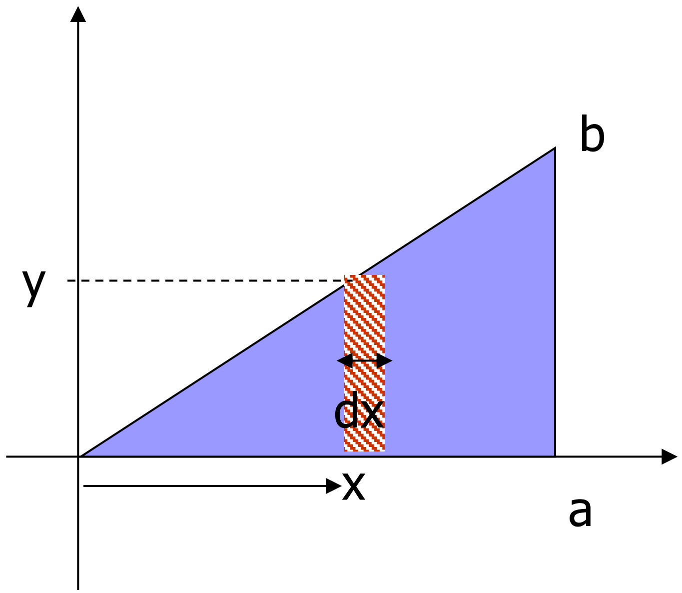
Diz-nos que:

- O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema sujeito à ação de uma força externa aplicada ao sistema.

- Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero:
  $a_{\mathrm{CM}} = 0 \Rightarrow$ o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Leftrightarrow M\vec{v}_{CM} = \text{constante}$$

Exercício: Centro de massa de um corpo extenso



$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i} \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{\sum_i^n \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r}_i dm$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

Solução (continuação)

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_0^a x\,dm$$

distribuição homgénea de massa pela área

$$\frac{M}{\mathrm{A}_{\text{triângulo}}} = \sigma = \frac{2M}{ab} = \frac{dm}{y \times dx} \Leftrightarrow dm = y\frac{2M}{ab}dx$$

$$\Leftrightarrow dm = y\sigma dx; \quad \text{substituindo no integral temos:}$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_0^a x\ \ y\frac{2M}{ab}dx; \quad \text{verificamos que y/x = b/a então temos } y = \frac{b}{a}x$$

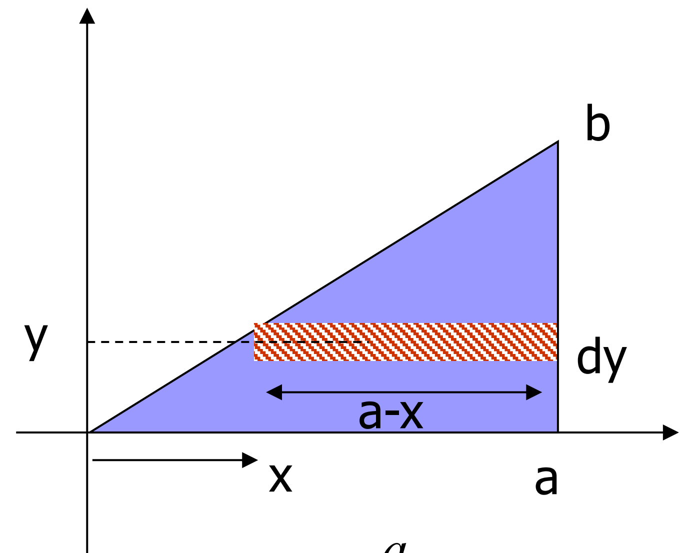
$$\Leftrightarrow x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_0^a x^2\,\frac{b}{a}\,\frac{2M}{ab}dx \Leftrightarrow x_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \Leftrightarrow x_{cm} = \frac{2}{3}a$$

Solução (continuação)

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^a y\,dm$$

distribuição homgénea de massa pela área

$$\frac{M}{A_{\text{triângulo}}} = \sigma = \frac{2M}{ab} = \frac{dm}{(a-x)dy} \Leftrightarrow dm = \frac{2M}{ab}(a-x)dy$$



substituindo no integral temos :

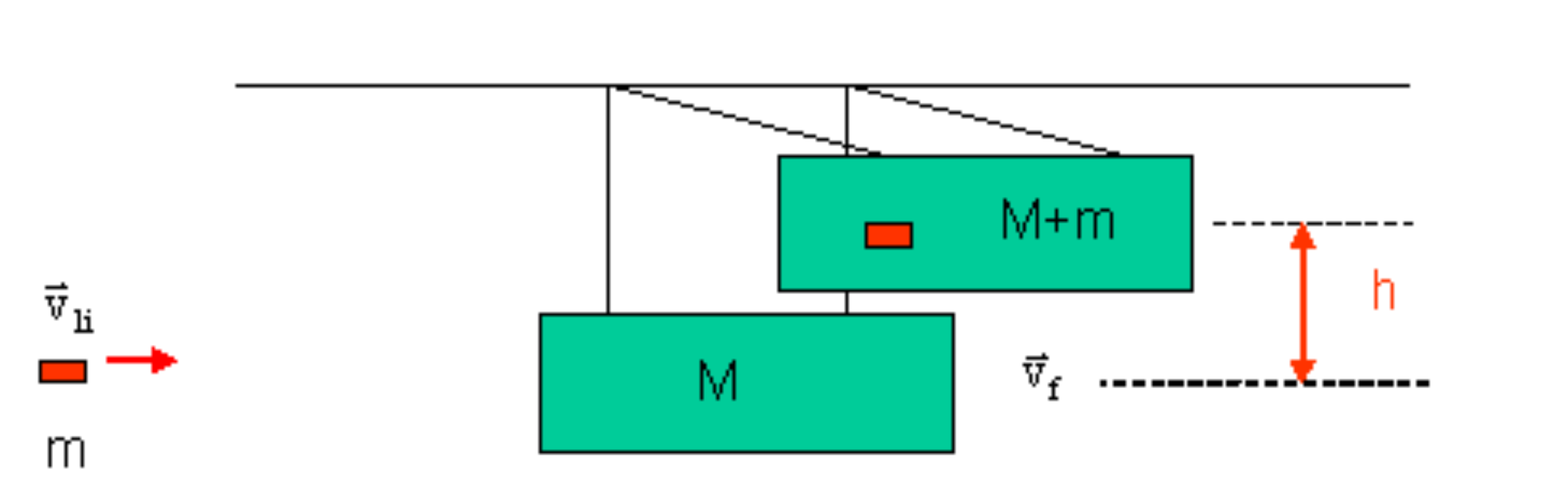
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^b y\,\frac{2M}{ab}(a-x)dy; \quad \text{verificamos que y/x = b/a então temos } x = \frac{a}{b}y$$

$$\Leftrightarrow y_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^b y\left(a-\frac{a}{b}y\right)dy \Leftrightarrow y_{CM} = \frac{2}{ab}\left[a\frac{y^2}{2} - \frac{a}{b}\frac{y3}{3}\right]_0^b \Leftrightarrow y_{CM} = \frac{2}{b}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{1}{b}\frac{b^3}{3}\right]$$

$$y_{CM} = \left[b - \frac{2b}{3}\right] \Leftrightarrow y_{CM} = \frac{1}{3}b$$

Pêndulo balístico
“usado para determinar velocidades de balas”

Um projétil de massa m é disparado contra um bloco suspenso de massa M. A bala aloja-se no bloco e, após a colisão, o sistema $M + m$ movimenta-se com velocidade $\vec{v}_f$, oscilando em torno da posição de equilíbrio. Na posição correspondente à altura máxima, h, a velocidade do sistema é nula. A determinação da velocidade da bala pode ser efetuada considerando uma análise em dois passos:



i) Como o tempo de colisão é muito menor do que o período de oscilação, as cordas ficam na vertical durante a colisão, os seja não há forças externas horizontais durante a colisão, há conservação da componente horizontal do momento linear:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m\vec{v}_{1i} = (m+M)\vec{v}_f$$

$$mv_{1i}\hat{\imath} = (m+M)v_f\hat{\imath}, \qquad \text{(1D)}$$

$$v_f = \frac{m}{(m+M)}v_{1i}$$

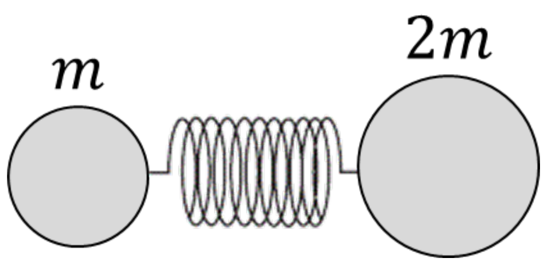
ii) No percurso até o conjunto bloco+bala atingirem a altura h, a energia mecânica conserva-se:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{m}+M)v_f^2 = (m+M)gh \Leftrightarrow$$

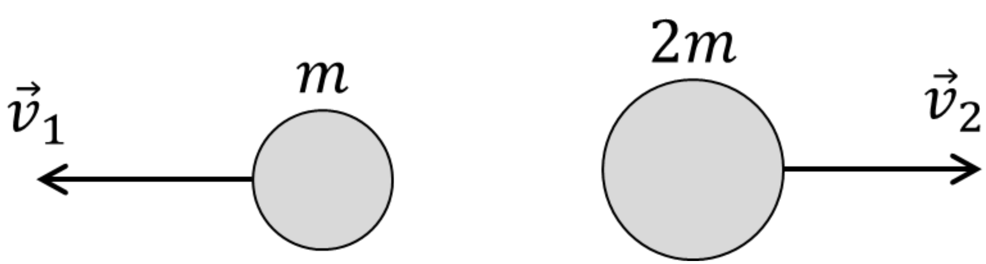
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

Resolução do exercício 10 (capítulo I.3a))

10 *Duas partículas, uma com o dobro da massa da outra e tendo uma mola comprimida entre elas, são mantidas juntas. A energia armazenada na mola é de 60 J. Qual a energia cinética de cada partícula após elas terem sido soltas?



$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 = 60\ \mathrm{J}$$



$$E_m = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$\Delta\vec{p} = \vec{0}$ porque estão apenas sujeitas às suas interações mútuas

Resolução do exercício 10 (capítulo I.3 a))

$$\begin{cases} 60 = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}2mv_2^2 \\ m\vec{v}_{1i} + 2m\vec{v}_{2i} = m\vec{v}_{1f} + 2m\vec{v}_{2f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120 = mv_1^2 + 2mv_2^2 \\ 0 = \vec{v}_{1f} + 2\vec{v}_{2f} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \vec{v}_{2f} = -\dfrac{\vec{v}_{1f}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120 = mv_1^2 + 2m\dfrac{v_1^2}{4} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 120 = mv_1^2 + m\dfrac{v_1^2}{2} \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 = \dfrac{80}{m} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_{c1} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{80}{m} = 40\ \mathrm{J} \\ E_{c2} = \dfrac{1}{2}2m\dfrac{240}{12m} = 20\ \mathrm{J} \end{cases}$$

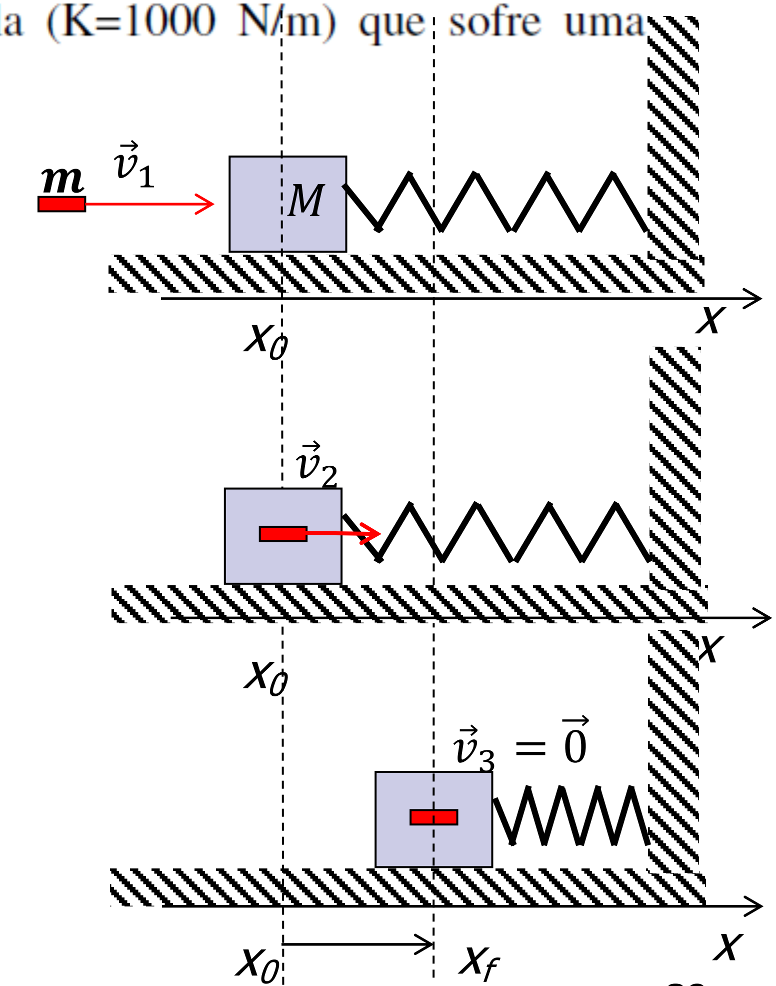
Resolução do exercício 14 (capítulo I.3a))

14 *Uma bala de 20 g, movendo-se com velocidade **v**, fica cravada num bloco de massa 980 g. O bloco está ligado a uma mola (K=1000 N/m) que sofre uma compressão de 10 cm. Calcule:

a) A velocidade final do conjunto bloco/bala.

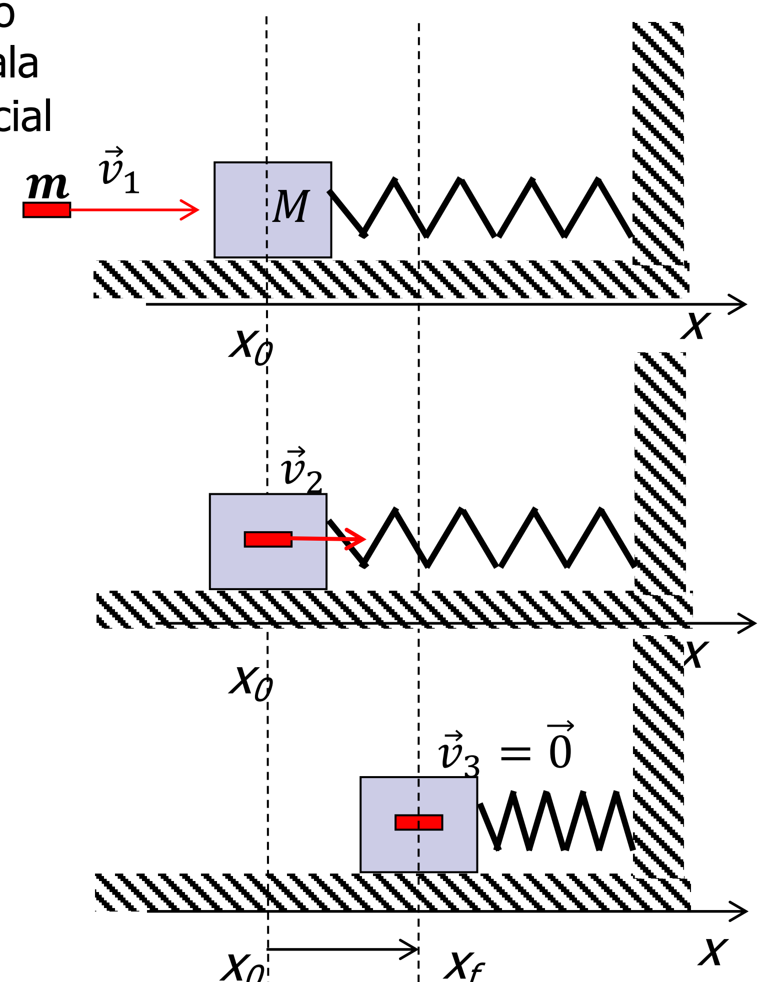
b) A velocidade inicial da bala.

c) A energia cinética perdida na colisão.



Resolução do exercício 14 (capítulo I.3a)

a) Durante a compressão da mola não atuam forças não conservativas no sistema, então a energia mecânica do sistema conserva-se. A energia cinética do sistema (bala + bloco), na posição x_0 converte-se em energia potencial elástica, no instante da compressão máxima (x_f).



$$E_{m,i} = E_{m\,f}$$

$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f}$$

$$\frac{(m+M)(v_2)^2}{2} = \frac{K}{2}\Delta x^2$$

$$\frac{(1)(v_2)^2}{2} = \frac{1000}{2}(10{\times}10^{-2})^2$$

$$v_2 = \sqrt{10} \cong 3{,}16\ \mathrm{m/s}$$

Resolução do exercício 14 (capítulo I.3a)

b) Considerando que no momento da colisão o sistema (bala + bloco) está apenas sujeito às suas interações mútuas, então o momento linear conserva-se.

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Leftrightarrow m\vec{v}_1 = (m+M)\vec{v}_2 \Leftrightarrow$$

$$v_1\hat{e}_x = \frac{(m+M)}{m} v_2\hat{e}_x \Leftrightarrow$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{20\times10^{-3}}\right)3{,}16 \Leftrightarrow v_1 \cong 158{,}1\ \mathrm{m/s}$$

c) Havendo variação da energia cinética a colisão não é elástica.

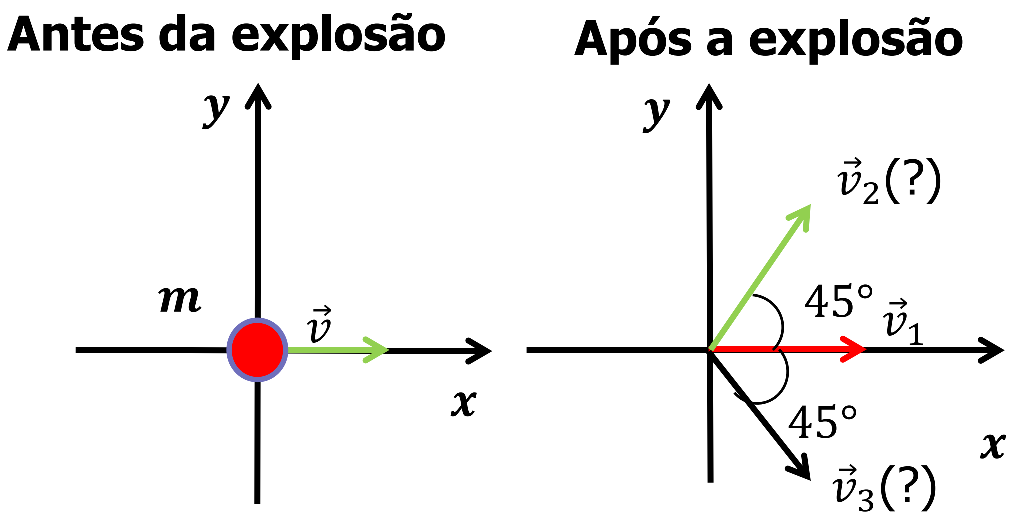
$$\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,f} \Leftrightarrow$$

$$\Delta E_c = \frac{(m+M)(v_2)^2}{2} - \frac{m(v_1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta E_c = \frac{(1)(3{,}16)^2}{2} - \frac{20\times10^{-3}(158{,}1)^2}{2} \cong -245\ \mathrm{J}$$

Resolução do exercício 16 (capítulo I.3 a))

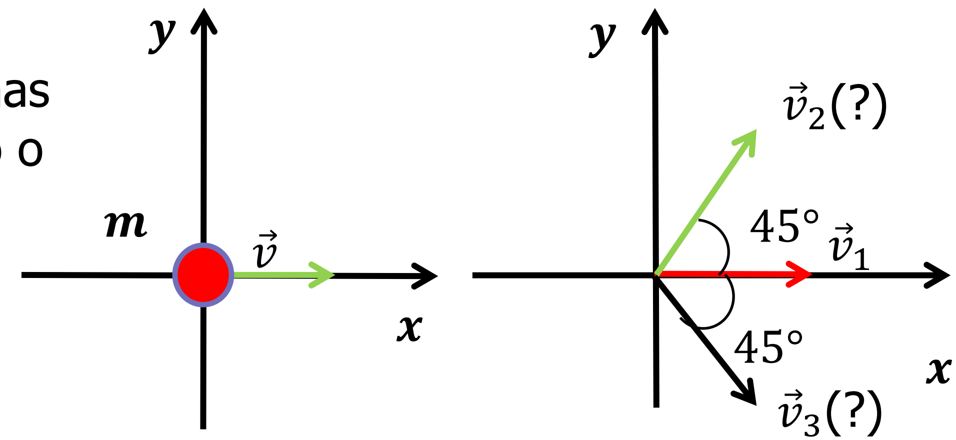
16 *Uma granada que se move horizontalmente com velocidade igual a 8 km/s relativamente à Terra, explode fragmentando-se em três fragmentos iguais. Um deles continua a mover-se horizontalmente com velocidade igual a 16 km/s , outro move-se para cima segundo um ângulo de 45° e o terceiro move-se segundo um ângulo de 45° para baixo da horizontal. Calcule as velocidades do segundo e terceiro fragmentos.



Pela resolução do problema será possível verificar se o sentido atribuído aos vetores velocidades $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ estarão corretos.

Resolução do exercício 16 (capítulo I.3a))

Antes da explosão **Após a explosão**



Durante a explosão o sistema está apenas sujeito às suas interações mútuas, então o momento linear conserva-se.

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Leftrightarrow m\vec{v} = \frac{m}{3}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) \Leftrightarrow$$

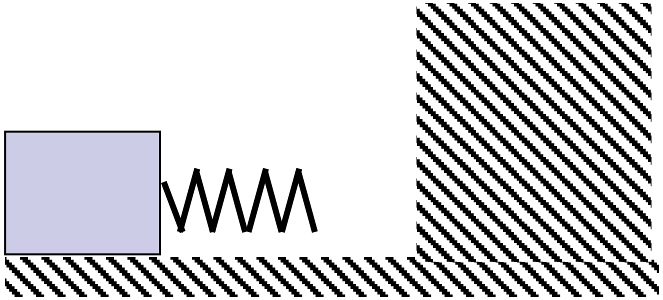
$$(mv)\hat{e}_x = \frac{m}{3}\left(v_1\hat{e}_x + v_2\left[\cos 45°\,\hat{e}_x + \operatorname{sen} 45°\,\hat{e}_y\right] + v_3\left[\cos 45°\,\hat{e}_x - \operatorname{sen} 45°\,\hat{e}_y\right]\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(mv)\hat{e}_x = \frac{m}{3}\left(v_1 + v_2\frac{\sqrt{2}}{2} + v_3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{e}_x \\ 0\hat{e}_y = \frac{m}{3}\left(v_2\frac{\sqrt{2}}{2} - v_3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{e}_y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v = \frac{1}{3}\left(v_1 + v_2\frac{\sqrt{2}}{2} + v_3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ v_2 = v_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v = \frac{1}{3}\left(v_1 + 2v_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right. \\ v_2 = v_3\end{cases}$$

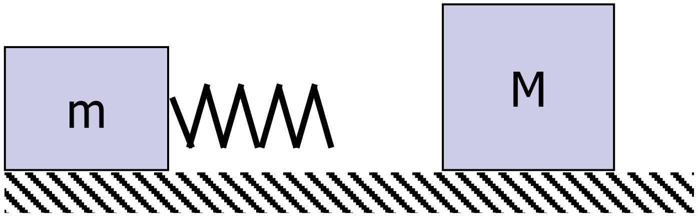
$$\Leftrightarrow \begin{cases}8 = \frac{1}{3}\left(16 + v_2\sqrt{2}\right) \\ v_2 = v_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v_2 = \frac{24 - 16}{\sqrt{2}} \cong 5{,}65\ \text{km/s} \\ v_2 = v_3\end{cases}$$

Exercício Extra

a) **Um bloco de massa m desliza em direção a uma parede fixa com velocidade $\vec{v}$, de acordo com a figura. Determine a compressão máxima da mola.**



b) **Determine a compressão máxima da mola na situação em que a parede é trocada por um corpo de massa M.**



Resolução do exercício Extra

a) Na ausência de atrito, a energia mecânica conserva-se. Assim, a compressão máxima significa que toda a energia cinética do corpo de massa m se converte em energia potencial elástica. A velocidade final do corpo de massa m é nula

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_{p,e} = 0$$

$$\Delta E_c = -\left(\frac{1}{2} K_{mola} x^2\right)$$

$$\frac{1}{2} m\left(\mathrm{v}_\mathrm{f}^2 - \mathrm{v}_\mathrm{i}^2\right) = -\left(\frac{1}{2} k_{mola} x^2\right)$$

$$x = \mathrm{v}_\mathrm{i}\sqrt{\frac{m}{k_{mola}}}$$

Resolução do exercício Extra

b) Ao substituir a parede por um corpo de massa M, vamos consideremos o sistema total constituído pelas duas massas.

Como o sistema está sujeito apenas às suas interações mútuas, verifica-se a conservação do momento linear. Até à compressão máxima há conservação da energia mecânica pois não existem forças de atrito. No instante de compressão máxima ambos os corpos estão solidários e têm a mesma velocidade $\vec{v}_f$.

$$\begin{cases} \vec{p}_i = \vec{p}_f \\ E_{m,i} = E_{m\,f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\vec{v}_{1,i} + M\vec{v}_{2,i} = (m+M)\vec{v}_f \\ E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\vec{v}_{1,i} = (m+M)\vec{v}_f \\ \frac{m\left(v_{1,i}\right)^2}{2} = \frac{(m+M)\left(v_f\right)^2}{2} + \frac{K}{2}\Delta x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_f = \frac{m}{(m+M)}\vec{v}_{1,i} \\ \frac{m\left(v_{1,i}\right)^2}{2} = \frac{(m+M)\left(mv_{1,i}\right)^2}{2(m+M)^2} + \frac{K}{2}\Delta x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_f = \frac{m}{(m+M)}\vec{v}_{1,i} \\ m\left(v_{1,i}\right)^2 - \frac{\left(mv_{1,i}\right)^2}{(m+M)} = \frac{K}{2}\Delta x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_f = \frac{m}{(m+M)}\vec{v}_{1,i} \\ \Delta x^2 = \frac{mM}{(m+M)K}\left(v_{1,i}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v}_f = \frac{m}{(m+M)}\vec{v}_{1,i} \\ \Delta x = \sqrt{\frac{mM}{(m+M)K}}\,v_{1,i} \end{cases}$$