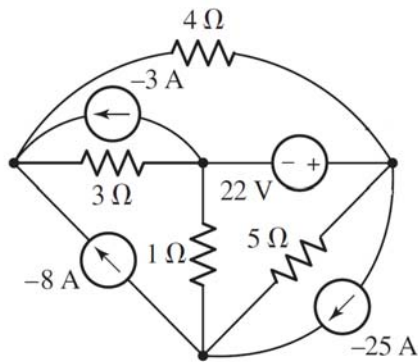


Sinais e Sistemas Electrónicos



Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos

(parte 1)



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Sumário

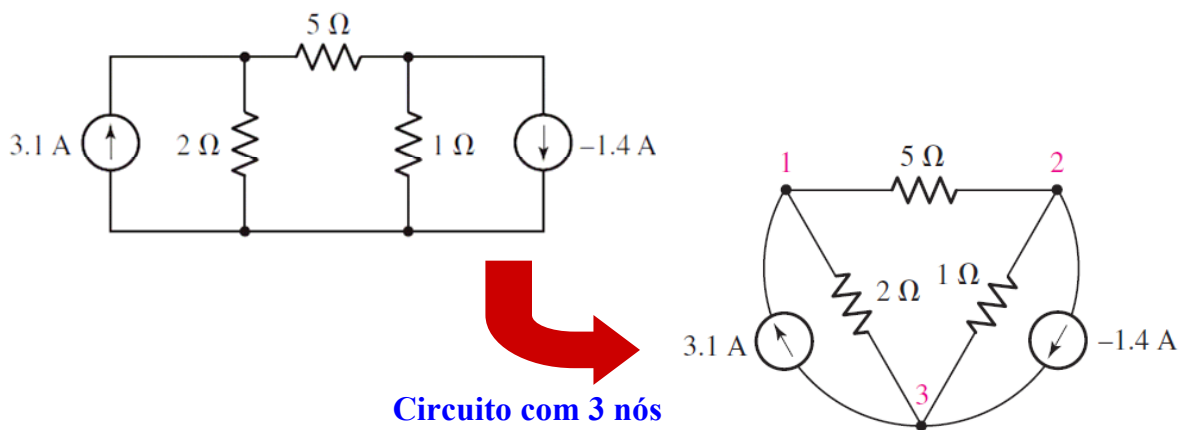
- **Análise de Nodal;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Análise Nodal com super-nós;**
- **Linearidade e sobreposição;**
- **Exemplos de cálculo.**

Análise Nodal

2.1-3

Análise de Nodal

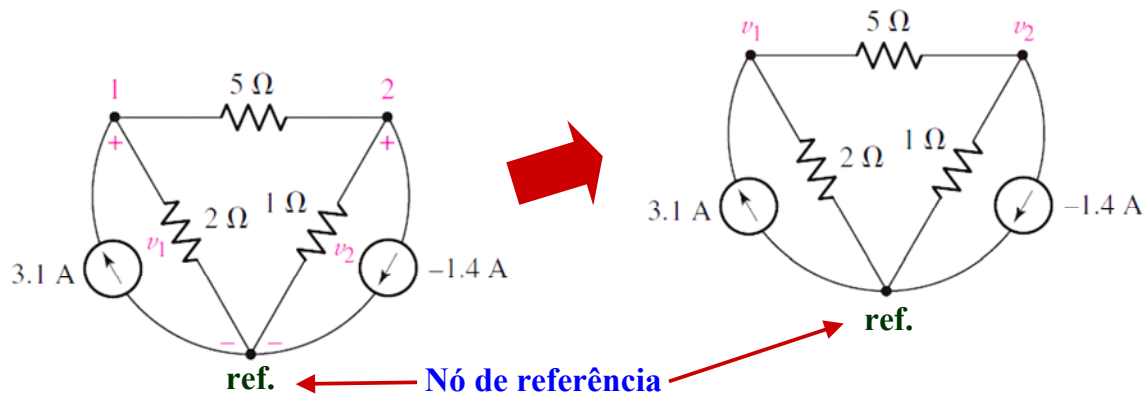
- Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;
- **nó** – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;



2.1-4

Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.

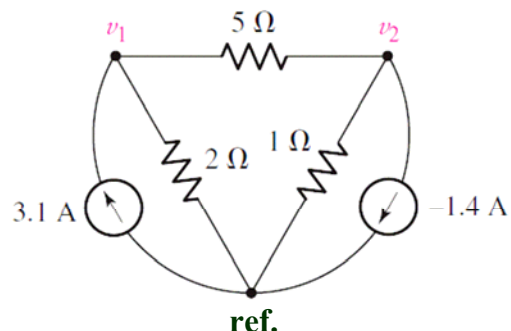


- Quando referirmos, por exemplo, a tensão v_1 , estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

2.1-5

Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no nó de referência é considerado nulo;
- Um circuito com N nós tem $N-1$ tensões – as **Tensões Nodais**;
- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva (+) em cada nó e negativa (-) no nó de referência;
- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de $N-1$ equações com $N-1$ incógnitas que nos permite determinar as tensões nodais.

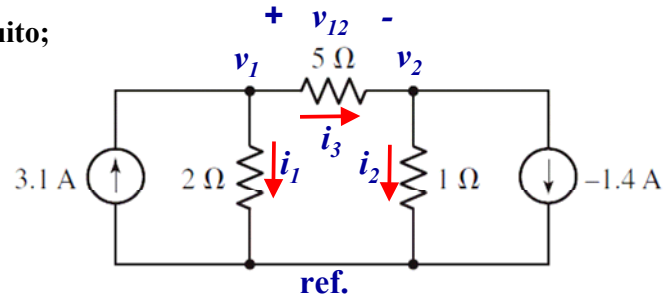


2.1-6

Análise Nodal – exemplo 1

- Apliquemos KCL aos nós do circuito;

KCL: “A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó”



nó 1: $3.1 = i_1 + i_3$

nó 2: $i_3 = i_2 - 1.4$

- Expressimos agora cada uma das correntes em função das tensões:

$$i_1 = v_1 / 2 \quad i_2 = v_2 / 1 \quad i_3 = v_{12} / 5 = (v_1 - v_2) / 5$$

- Substituindo acima obtém-se

$$3 = 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2)$$

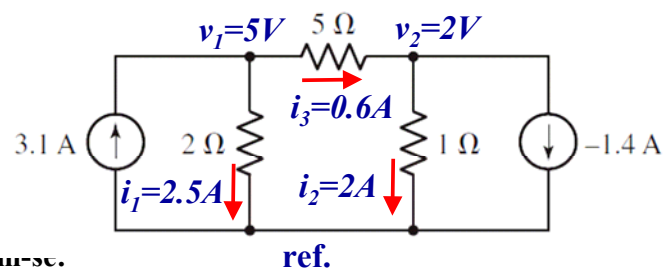
$$0.2(v_1 - v_2) = 1v_2 - 2$$

2.1-7

Análise Nodal – exemplo 1

- O que, rearranjando, dá o sistema:

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- Resolvendo por substituição obtém-se.

$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito

$$i_1 = v_1 / 2 = 2.5A$$

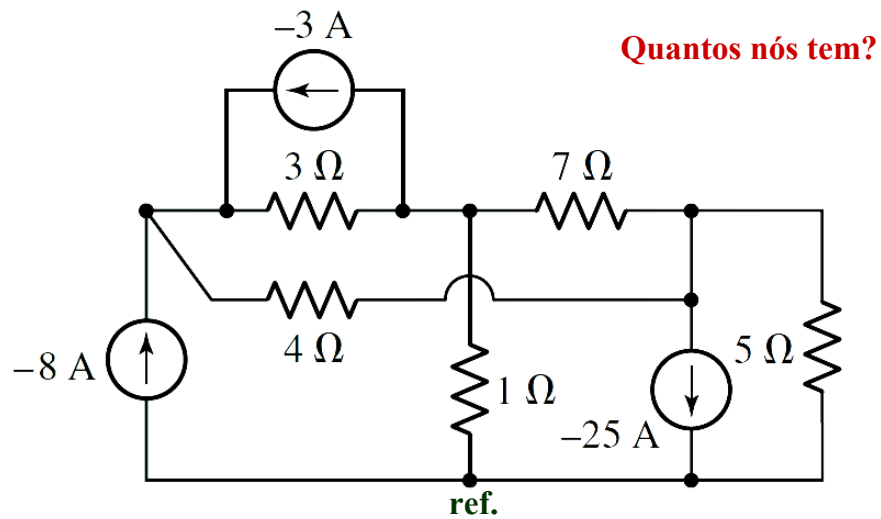
$$i_2 = v_2 / 1 = 2A$$

$$i_3 = (v_1 - v_2) / 5 = 0.6A$$

2.1-8

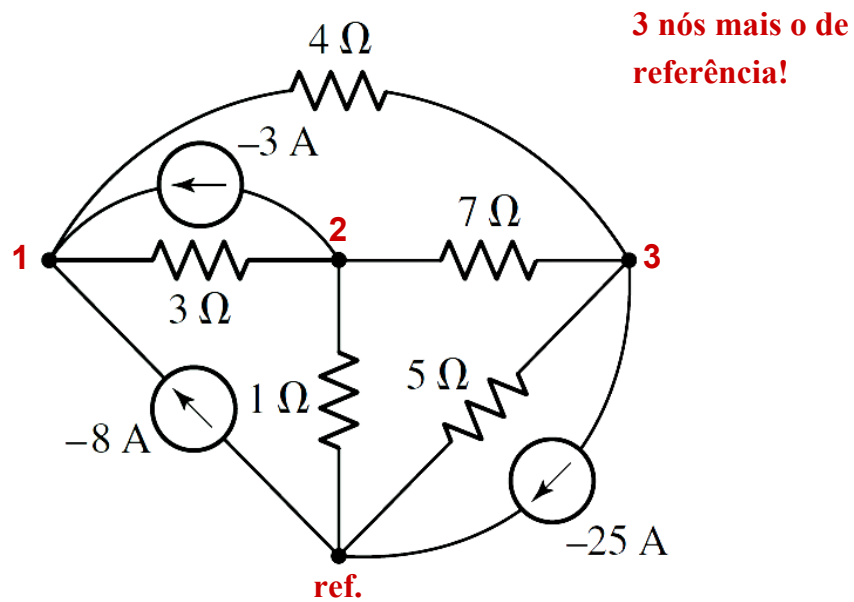
Análise Nodal – exemplo 2

- Determinar as tensões nodais no circuito dado.



2.1-9

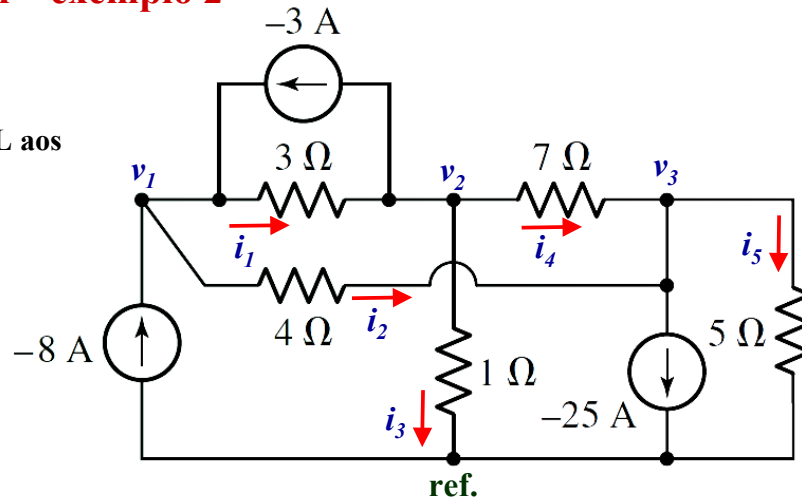
Análise Nodal – exemplo 2



2.1-10

Análise Nodal – exemplo 2

- Aplicando KCL aos três nós:



nó 1: $-8 - 3 = i_1 + i_2$

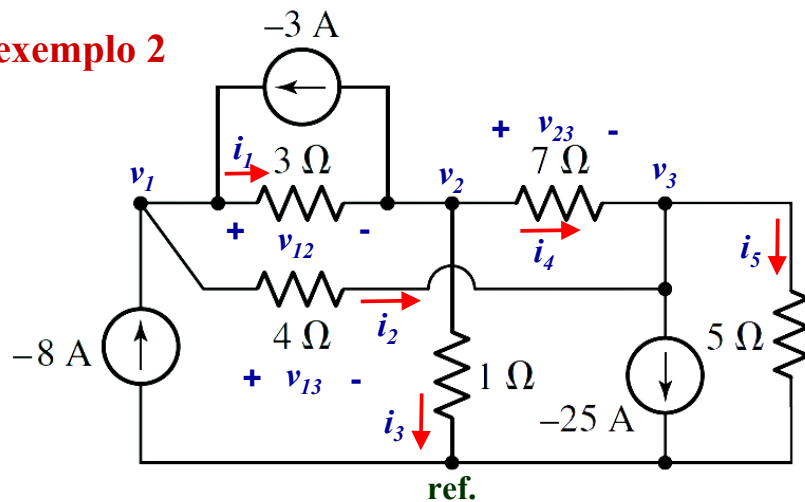
nó 2: $i_1 = -3 + i_3 + i_4$

nó 3: $i_4 + i_2 = -25 + i_5$

2.1-11

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:



nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

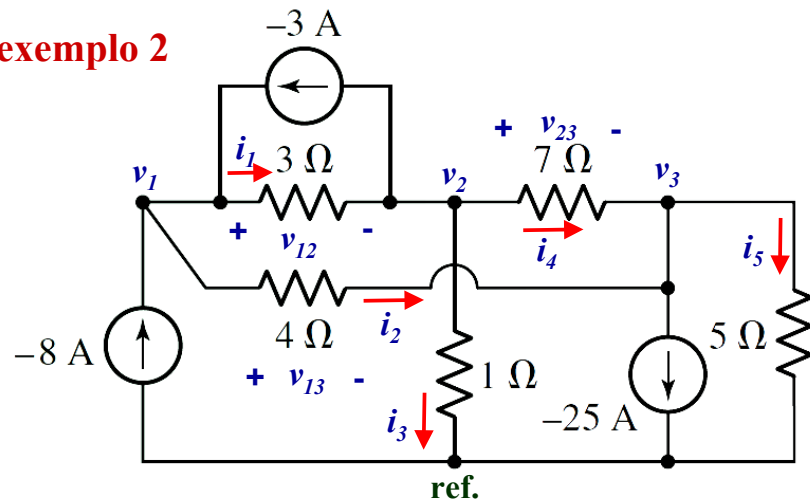
$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

2.1-12

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 2:

$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

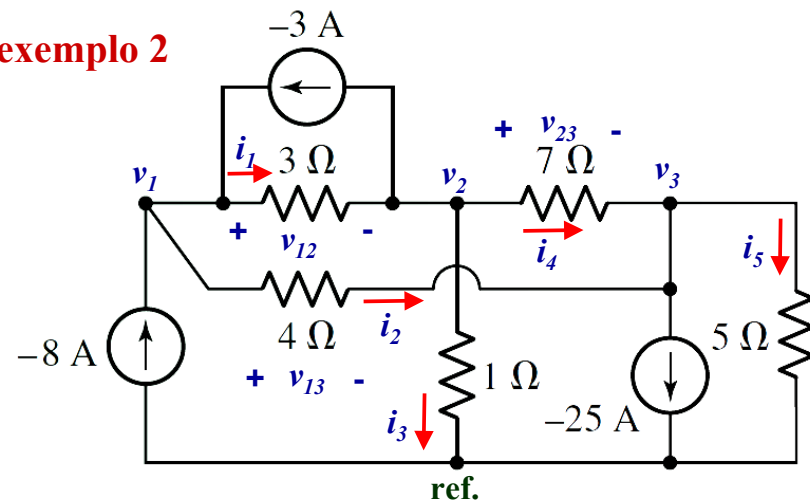
$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

2.1-13

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 3:

$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

2.1-14

Análise Nodal – exemplo 2

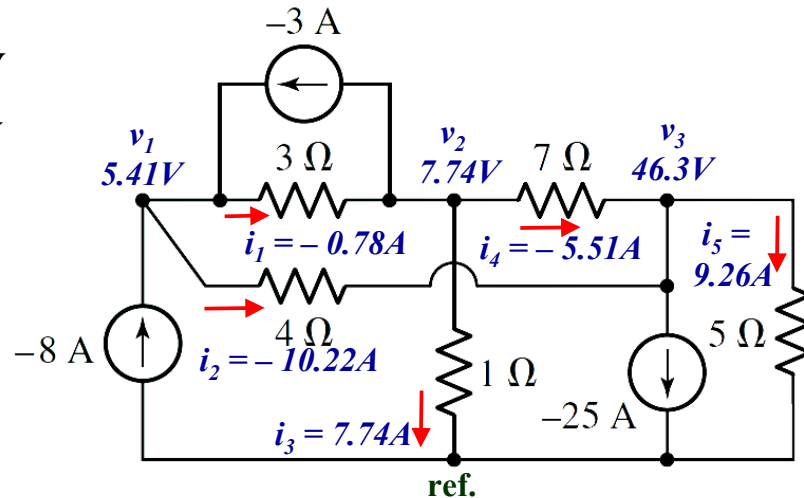
- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.



Análise Nodal passo a passo

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher um dos nós como **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever **$N-1$ equações nodais**.



Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Como resolver?

Processo 1

- marcar uma corrente na fonte de tensão: i_f

- aplicar KCL aos 3 nós

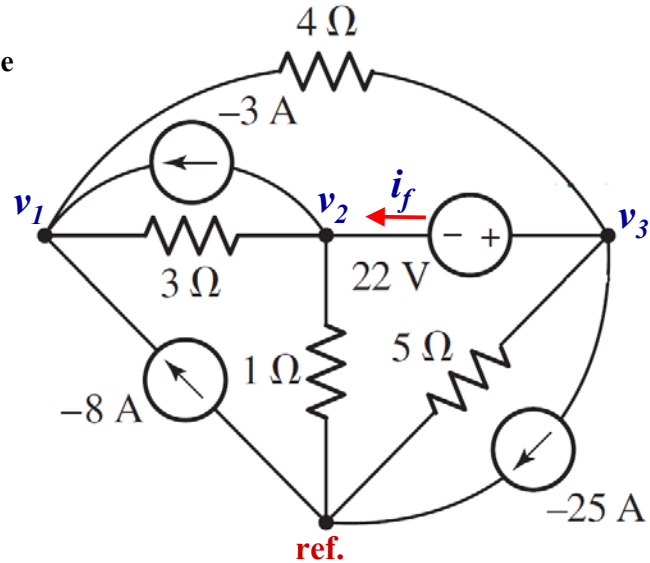
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas

MUITO COMPLICADO!!



2.1-17

Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Processo 2

- tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: **um super nó**

- aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó

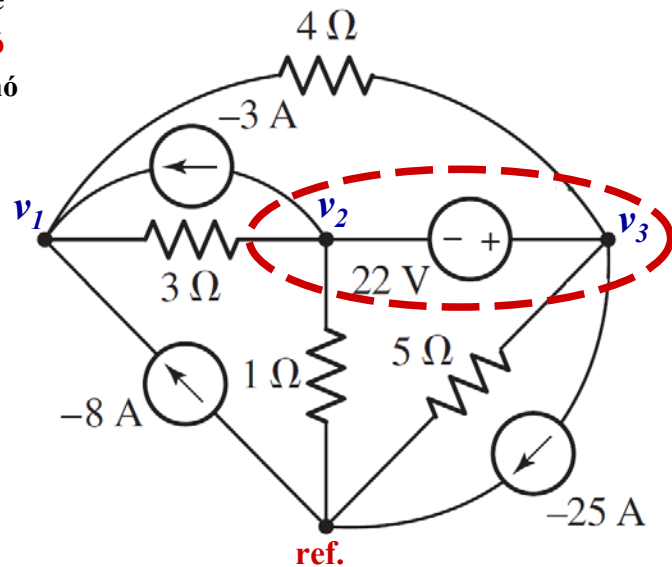
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

Resultado:

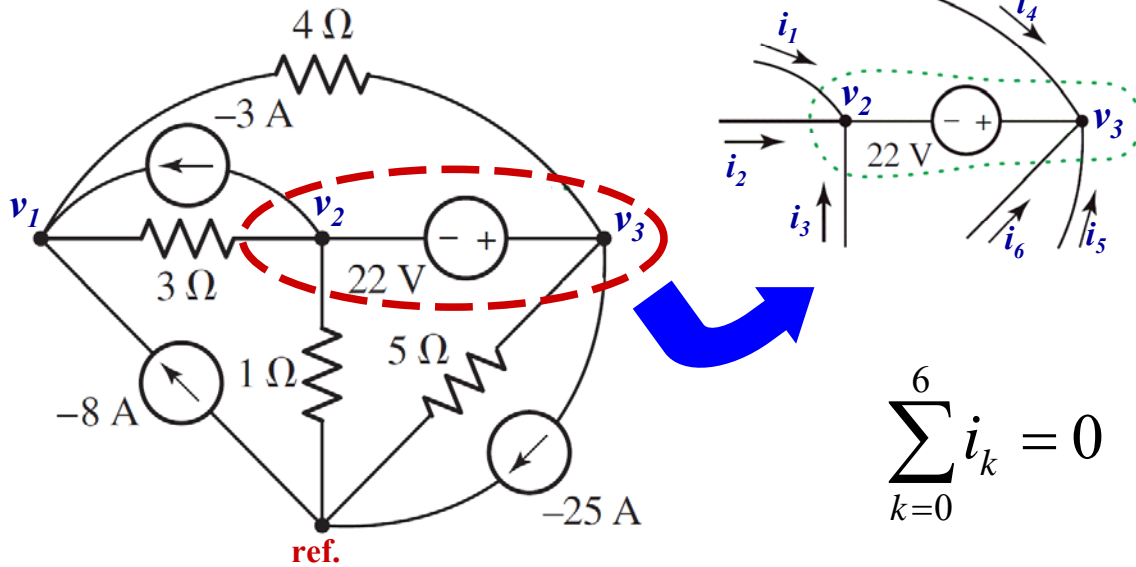
3 equações com 3 incógnitas

PROCESSO MAIS SIMPLES!!



2.1-18

Análise Nodal – com super-nó



- Se a soma das correntes que entram no nó v_2 é zero e a soma das correntes que entram no nó v_3 é zero, então a soma das correntes que entram **nos dois nós** também tem de ser zero.

2.1-19

Análise Nodal – com super-nó

- Apliquemos então KCL

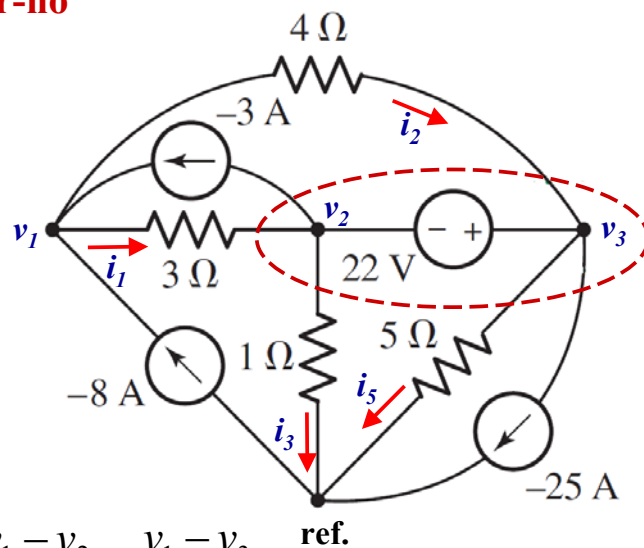
nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

... é a mesma equação do exemplo anterior



2.1-20

Análise Nodal – com super-nó

NOTA: O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada

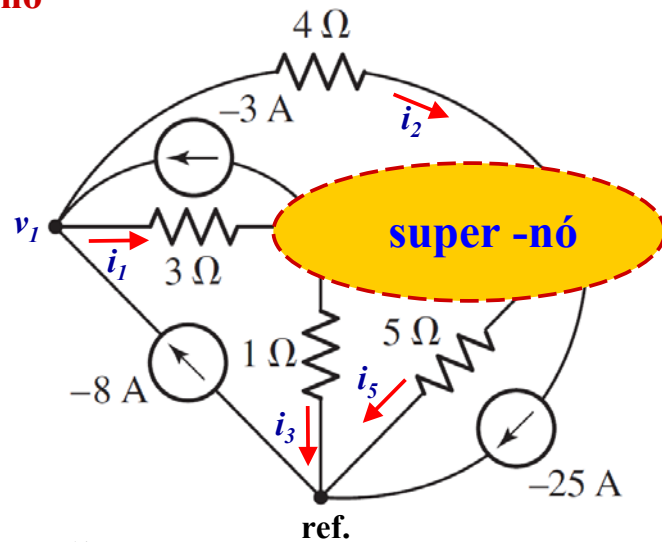
super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$

2.1-21



Análise Nodal – com super-nó

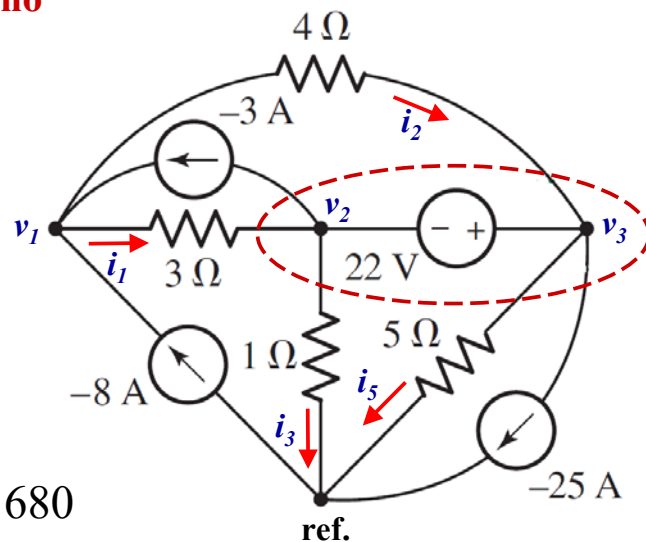
● Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:

$$v_3 - v_2 = 22$$

● pelo que o sistema de equações final é

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$

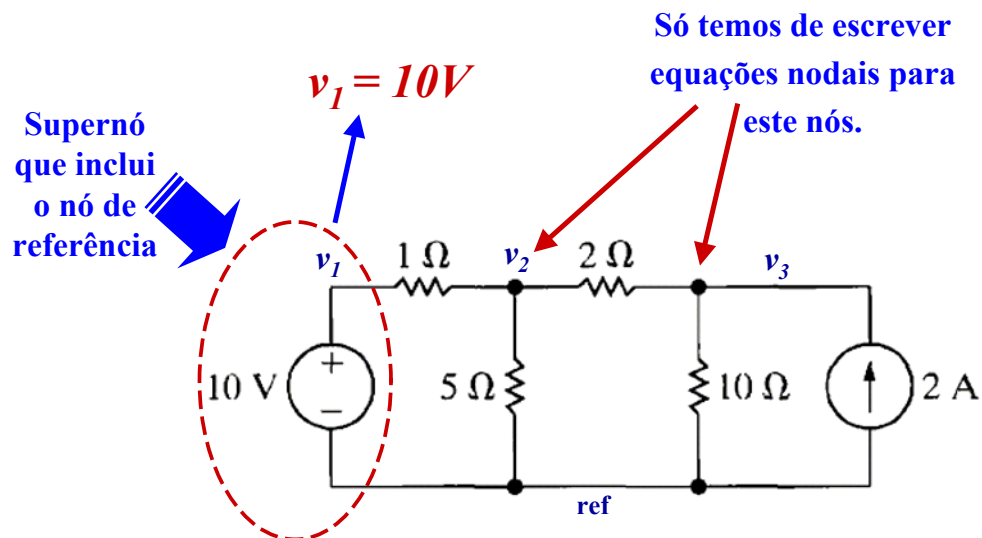
● Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$$


2.1-22

Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!



2.1-23

Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Se o circuito contiver fontes de tensão, formar **super-nós** que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;
6. Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;
7. Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.

2.1-24

Linearidade e Sobreposição

2.1-25

Linearidade

- **Circuito linear** – É um circuito composto apenas por:
 - Elementos lineares;
 - Fontes independentes;
 - Fontes dependentes lineares.

- **Elemento linear** – É um elemento passivo que tem uma relação linear entre a tensão aos seus terminais e a corrente que o percorre.
Exemplo:
 - Resistência: $v = R.i$;
 - Condensador e bobina.

2.1-26

Princípio da Sobreposição

- É a consequência mais importante da linearidade.
- **Princípio da Sobreposição:** A resposta de um circuito com mais do que uma fonte pode obter-se como a soma das respostas individuais devidas a cada uma das fontes, actuando sozinhas.
- Em termos formais, podemos expressar o **Princípio da Sobreposição** como:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

Em que

- x_1, x_2, \dots, x_n são as fontes;
- $f()$ são as respostas.

2.1-27

Princípio da Sobreposição

Em termos mais concretos, pode ser enunciado como

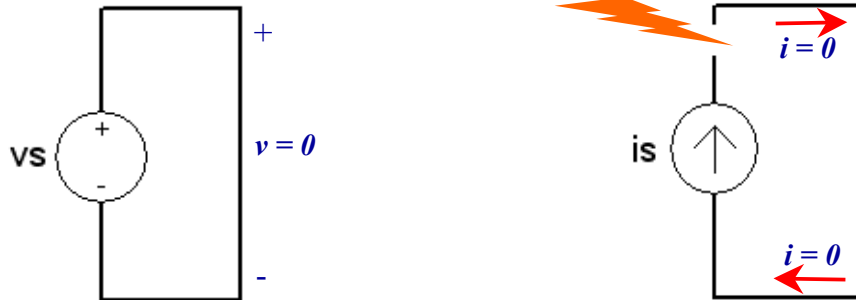
Em qualquer circuito linear contendo várias fontes, as tensões/correntes em qualquer nó/ramo podem ser calculadas **adicionando** as tensões/correntes individuais provocadas por cada uma das fontes actuando sozinhas.

2.1-28

Desactivação das *outras* fontes

● Para determinar o efeito provocado por uma fonte, devemos **desactivar** todas as outras fontes independentes:

- Fontes de tensão devem ser **curto-circuitadas**, anulando assim a sua tensão;
- Fontes de corrente devem ser **abertas**, anulando assim a sua corrente.



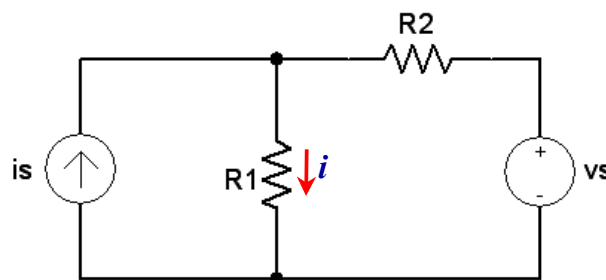
Nota: fontes dependentes não se desactivam!

2.1-29

Aplicação do Princípio da Sobreposição

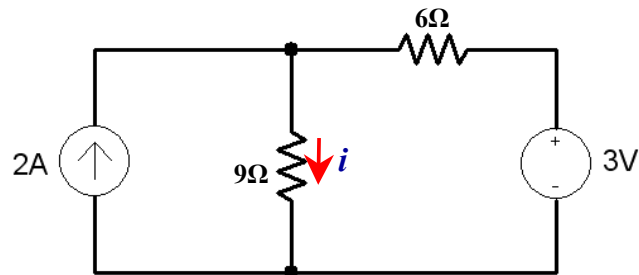
● Para o circuito dado, se

- i_1 for a corrente em $R1$ produzida só por i_S , e
- i_2 for a corrente em $R1$ produzida só por v_S , então
- a corrente produzida pelas duas fontes em simultâneo será $i = i_1 + i_2$



2.1-30

Exemplo: Para o circuito dado, calcular i

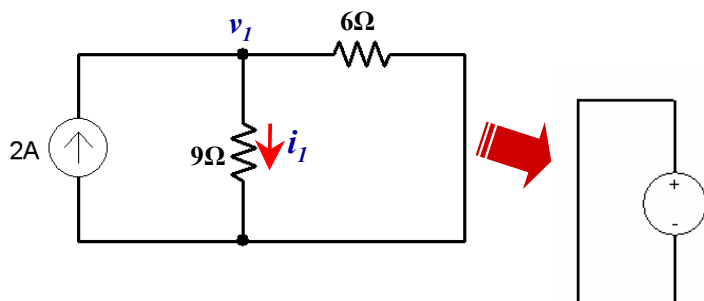


2.1-31

Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

1º passo: Consideremos primeiro só o efeito da fonte de corrente:

➤ Desactivamos a fonte de tensão.



Fonte de tensão
foi desactivada!

$$v_1 = 2 \left(\frac{6 \times 9}{6 + 9} \right) = 7.2V$$

$$\text{com } \frac{6 \times 9}{6 + 9}$$

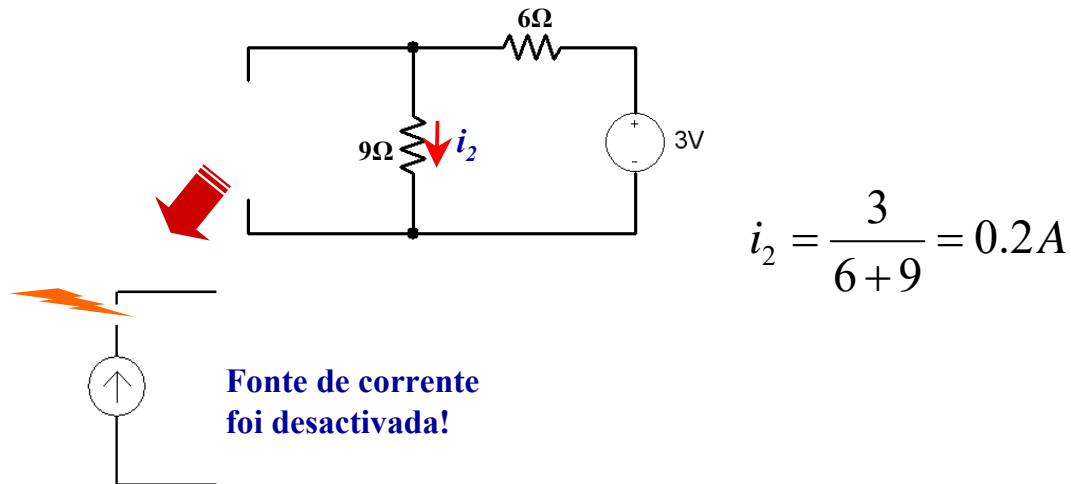
$$i_1 = \frac{v_1}{9} = \frac{7.2}{9} = 0.8A$$

2.1-32

Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

2º passo: Consideremos agora só o efeito da fonte de tensão:

➤ Desactivamos a fonte de corrente;

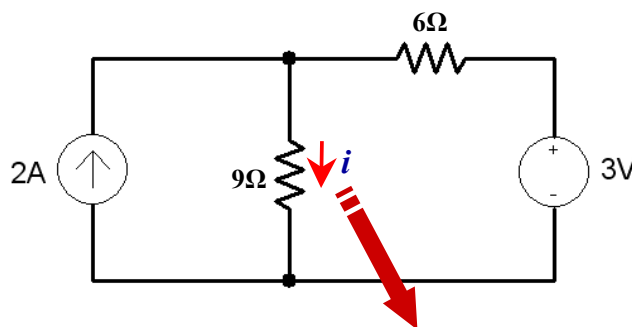


2.1-33

Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

3º passo: Aplicamos o Princípio da Sobreposição

➤ i vai ser dada pela soma dos contributos i_1 e i_2 de cada uma das fontes



$$i = i_1 + i_2 = 0.8 + 0.2 = 1A$$

2.1-34

Princípio da Sobreposição – algumas notas

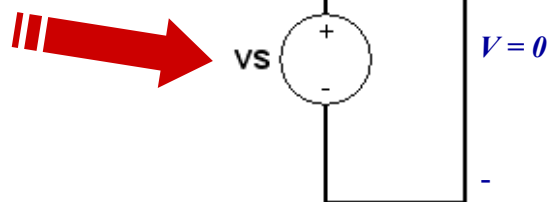
- Se tivermos N fontes independentes, o circuito será analisado N vezes considerando uma fonte de cada vez;
- Contudo, nada obriga a que apenas uma fonte esteja activa em cada análise, embora essa seja a situação mais fácil;

2.1-35

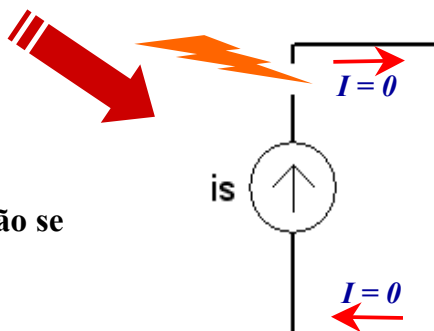
Princípio da Sobreposição – não esquecer!

Como se desactivam as fontes independentes?

- Fontes de tensão são curto-circuitadas $\Rightarrow V = 0$;



- Fontes de corrente são abertas $\Rightarrow I = 0$;



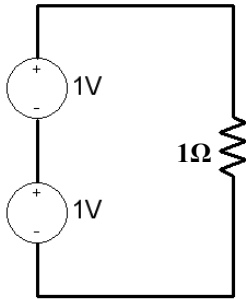
- Fontes dependentes não se desactivam.

2.1-36

Princípio da Sobreposição – nota final

- Como o princípio só se aplica a respostas lineares, então **NÃO se aplica à determinação da potência!**

Exemplo: Potência dissipada na resistência? $P = \frac{v^2}{R} = \frac{(1+1)^2}{1} = 4W$



Se pretendêssemos aplicar o **Princípio da Sobreposição** considerando que $P = P_1 + P_2$, sendo P_1 e P_2 as potências devidas a cada uma das fontes a actuar em separado, teríamos

$$P_1 = \frac{1^2}{1} = 1W \quad P_2 = \frac{1^2}{1} = 1W$$

o que resultaria num valor **errado** da potência na resistência:

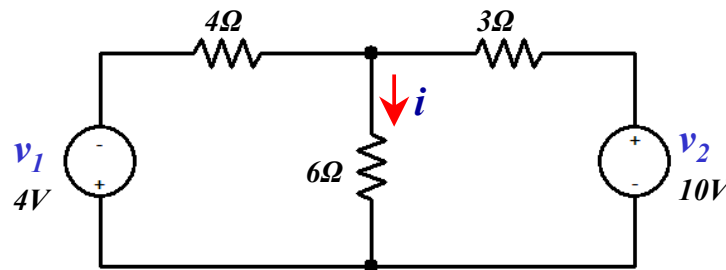
$$P = P_1 + P_2 = 2W$$

Sobreposição não funciona com potências!

2.1-37

Princípio da Sobreposição – Exercício

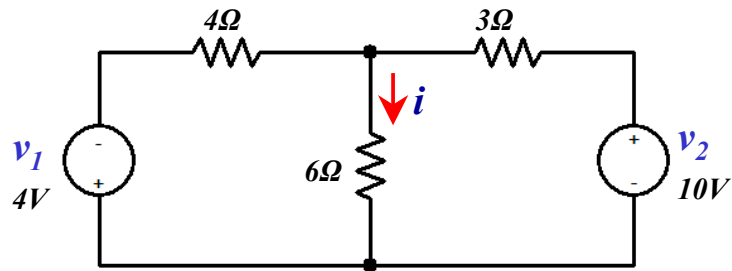
- Usando o princípio da sobreposição calcule i ;
- Determine o valor que a fonte de tensão v_1 deve ter, para que a corrente i duplique.



2.1-38

Princípio da Sobreposição – Exercício

a)



● Cada uma das fontes, v_1 e v_2 , vai contribuir para a corrente i :

- i_1 a corrente produzida só por v_1 , e
- i_2 a corrente produzida só por v_2

$$i = i_1 + i_2$$

2.1-39

Princípio da Sobreposição – Exercício

a)

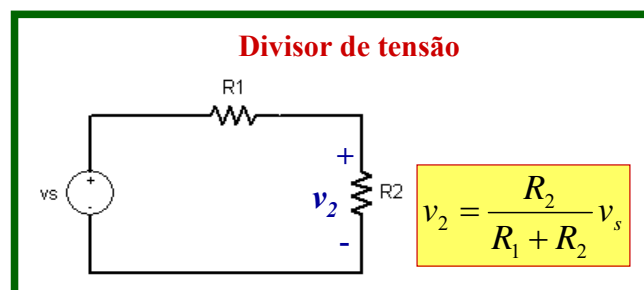
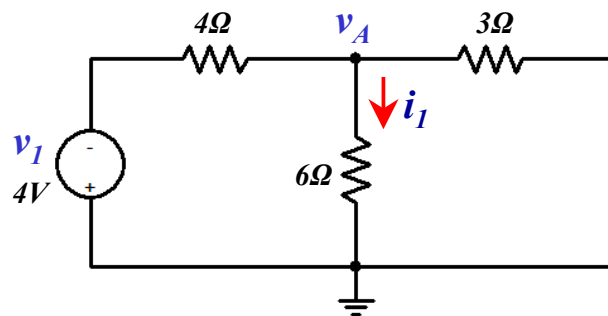
● Calculemos o contributo da fonte v_1

Usando a fórmula do divisor de tensão:

$$v_A = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1$$

$$i_1 = \frac{v_A}{6}$$

$$i_1 = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1 \frac{1}{6} = -\frac{v_1}{18}$$



2.1-40

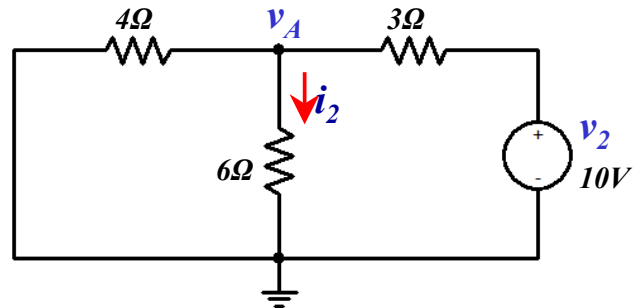
Princípio da Sobreposição – Exercício**a)**

- E agora o contributo da fonte v_2

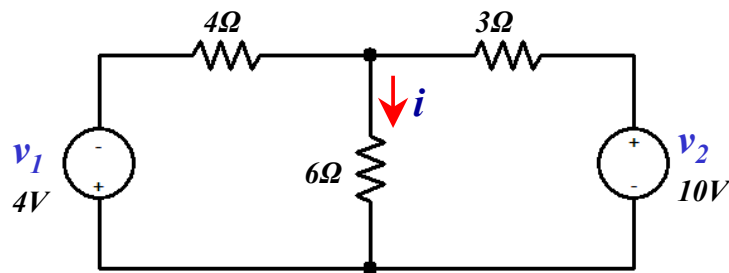
$$v_A = \frac{4//6}{4//6+3} v_2$$

- Para $v_2 = 10V$

$$i_2 = v_A \frac{1}{6} = \frac{4//6}{4//6+3} 10 \frac{1}{6} = \frac{20}{27} A$$



2.1-41

Princípio da Sobreposição – Exercício**a)**

- Aplicando agora Sobreposição, calculamos a corrente i :

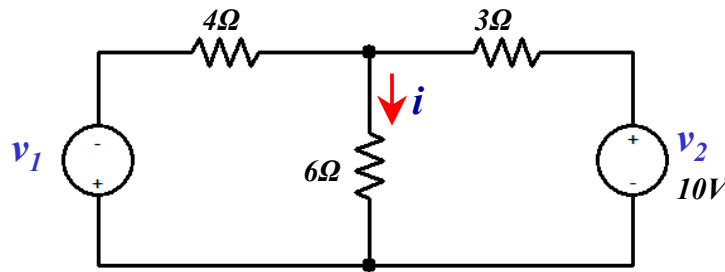
$$i = i_1 + i_2 = -\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27}$$

O que para $v_1 = 4V$ dá $i = \frac{14}{27} A$

2.1-42

Princípio da Sobreposição – Exercício

b) Calculemos agora o valor de v_1 que duplica o valor da corrente i .



● Para isso basta resolver a equação

$$-\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27} = 2 \times (\text{valor obtido em } a) = 2 \times \frac{14}{27}$$

$$\text{que dá } v_1 = -\frac{16}{3} = -5.33V$$