

Sinais e Sistemas Electrónicos

Problemas resolvidos IV

Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



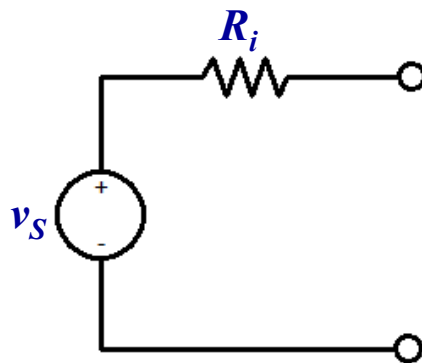
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

1 – Efectuaram-se as seguintes medições de tensão aos terminais de uma fonte de alimentação DC de laboratório:

- **75V, com a fonte em aberto;**
- **60V, tendo-se ligado previamente uma resistência de 20Ω entre os terminais da fonte.**

Com base nestes dados, calcule o **equivalente de Thévenin da fonte de alimentação.**

Como sabemos, uma **fonte de tensão real** pode representar-se pelo circuito...

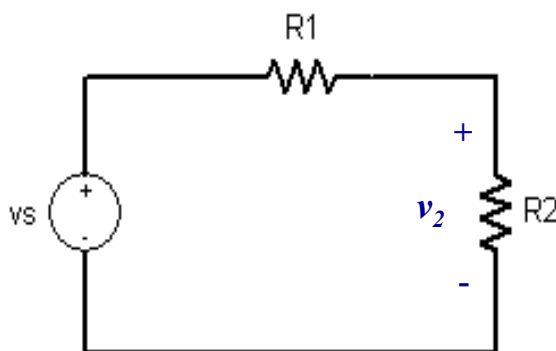


... que tem, portanto, a mesma forma que o **equivalente de Thévenin** dessa fonte, com $v_T = v_S$ e $R_T = R_i$.

IV-3

Antes de prosseguir, recordemos, mais um vez, o omnipresente e infinitamente recorrente, **divisor de tensão** 😊 ...

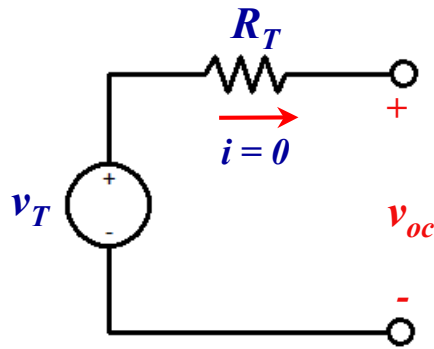
Divisor de tensão



$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

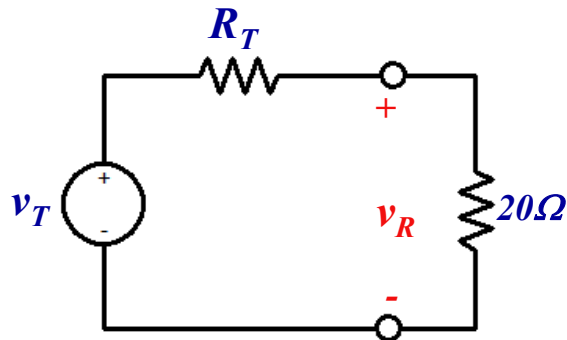
IV-4

Medição em circuito aberto: $75V$



$$v_{oc} = 75V = v_T$$

Medição com resistência de 20Ω : $60V$

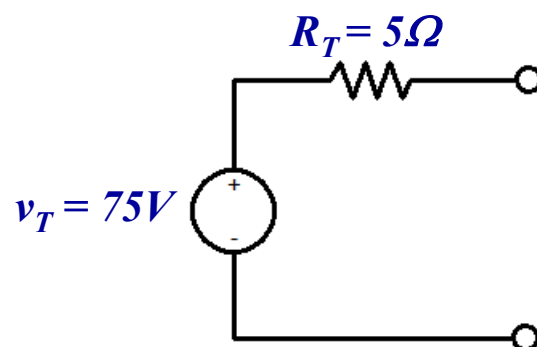


$$v_R = \frac{20}{R_T + 20} 75 = 60V$$

$$R_T = 5\Omega$$

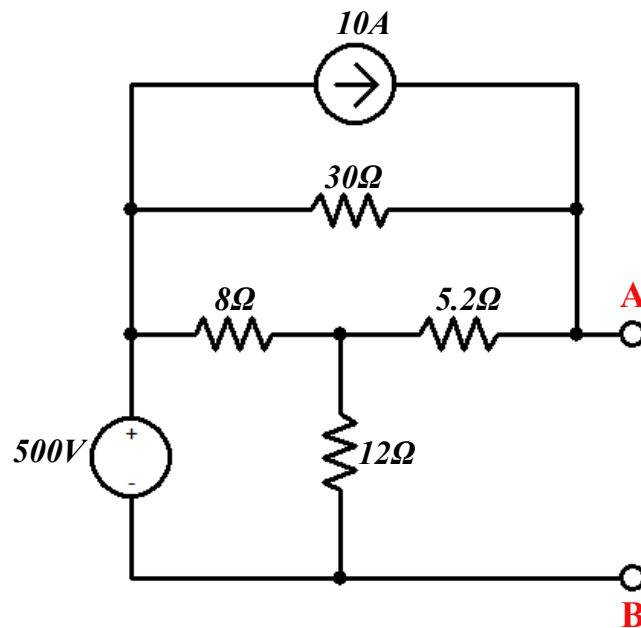
IV-5

O **equivalente de Thévenin** da fonte de alimentação é portanto.



IV-6

2 – Calcule os equivalentes de Thévenin e de Norton entre os terminais A e B do circuito.



IV-7

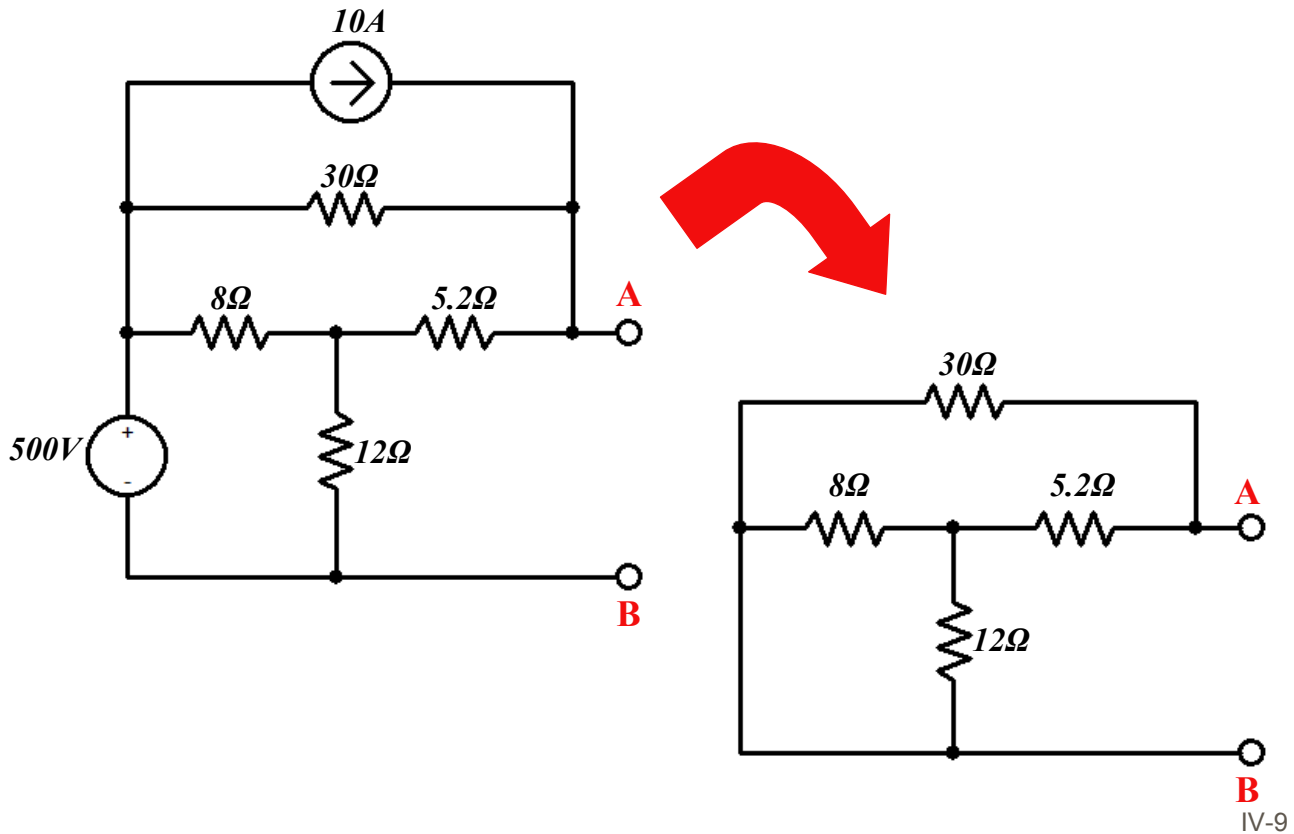
1º Passo: Começamos por determinar a resistência de Thévenin (R_T) que é, como sabemos, igual à resistência de Norton (R_N).

Segundo a definição, esta resistência é:

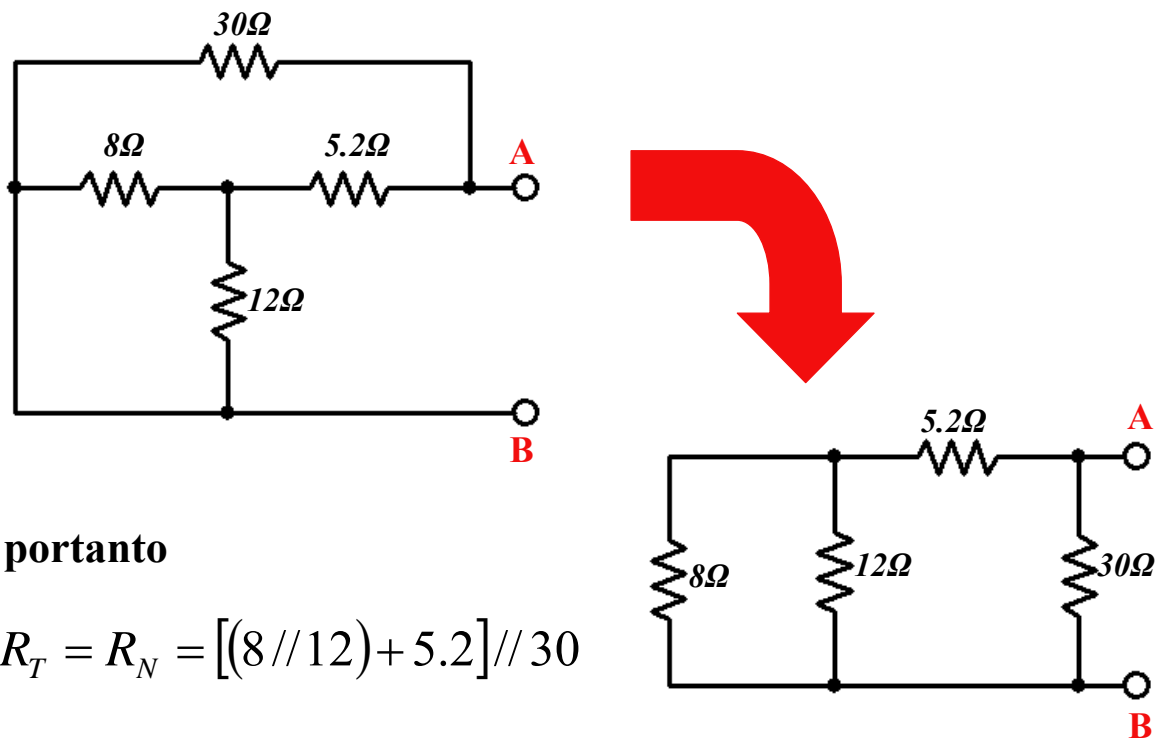
- a **resistência equivalente** vista aos terminais do circuito quando este é **desativado**, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).

IV-8

desactivando as fontes...



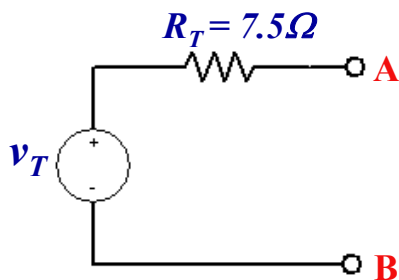
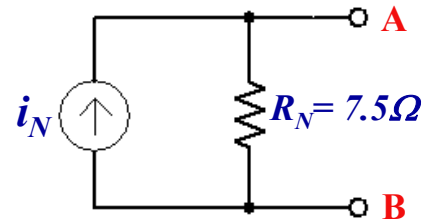
IV-9



portanto

$$R_T = R_N = [(8 // 12) + 5.2] // 30$$

$$R_T = R_N = 7.5\Omega$$

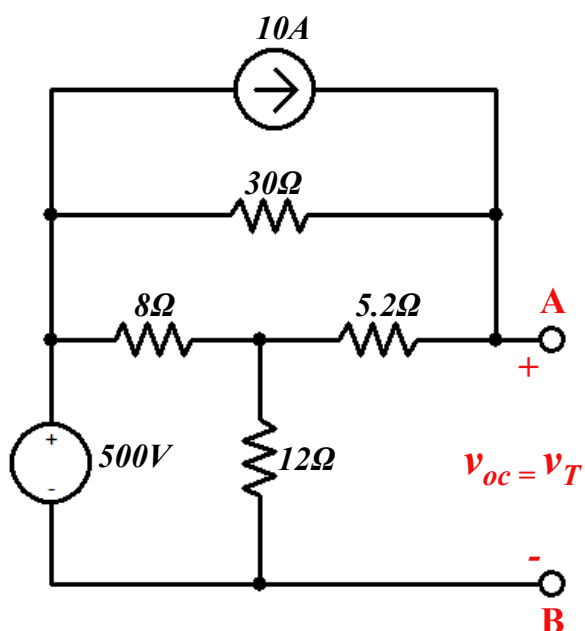
2º Passo: calculo de ou v_T e i_N **Equivalente de Thévenin****Equivalente de Norton**

Sabemos que $i_N = v_T / R_T$

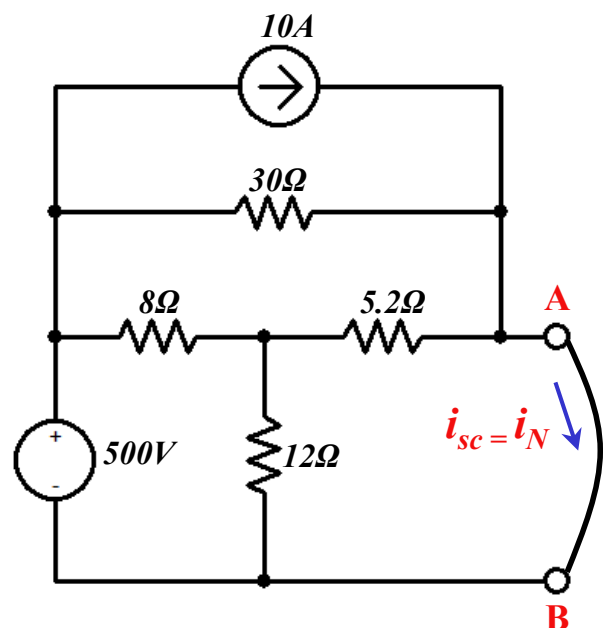
portanto, podemos optar por determinar ou v_T ou i_N ... o que for mais fácil de obter!

IV-11

v_T é igual à tensão em
circuito aberto

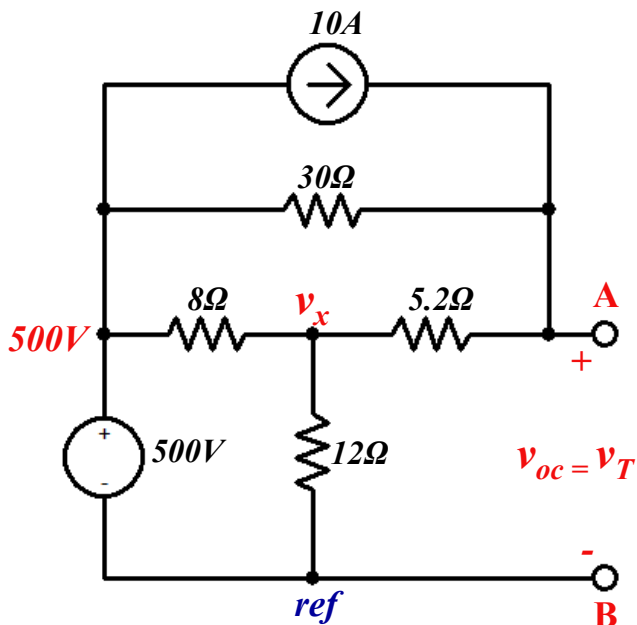


i_N é igual à corrente de
curto-circuito



IV-12

Calculemos a tensão em circuito aberto



Usando análise nodal

Nó v_x :

$$\frac{500 - v_x}{8} = \frac{v_x}{12} + \frac{v_x - v_T}{5.2}$$

Nó A:

$$10 + \frac{500 - v_T}{30} + \frac{v_x - v_T}{5.2} = 0$$

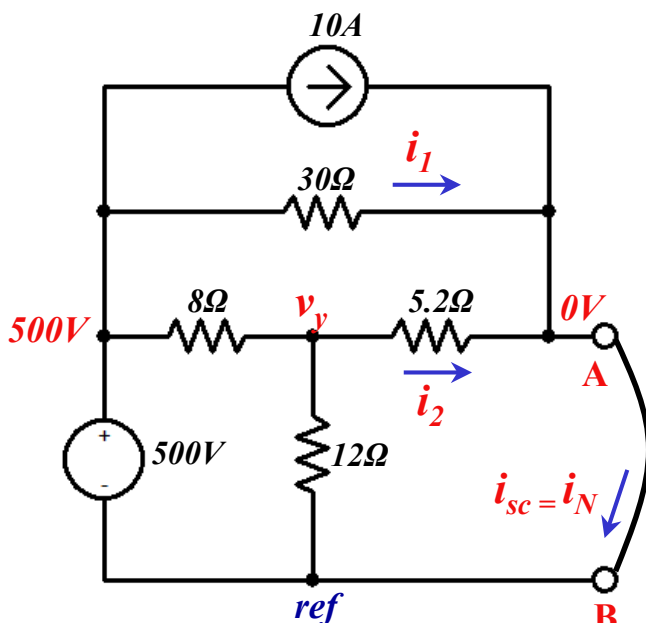
Resolvendo...

$$v_x = 360V$$

$$v_T = 425V$$

IV-13

O cálculo da corrente de curto-circuito seria, no entanto, mais fácil!...



$$i_N = 10 + i_1 + i_2$$

$$= 10 + \frac{500}{30} + \frac{v_y}{5.2}$$

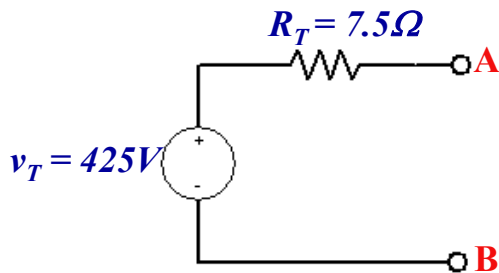
$$v_y = \frac{5.2 // 12}{8 + (5.2 // 12)} 500 = 156.1V$$

$$i_N = 56.67A$$

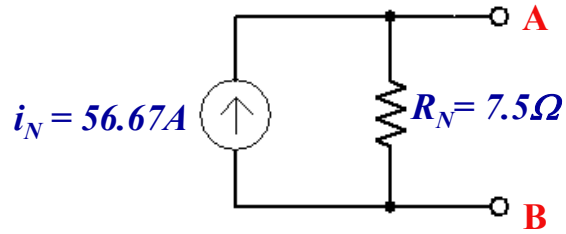
IV-14

Os equivalentes de Thévenin e de Norton são portanto

Equivalente de Thévenin



Equivalente de Norton



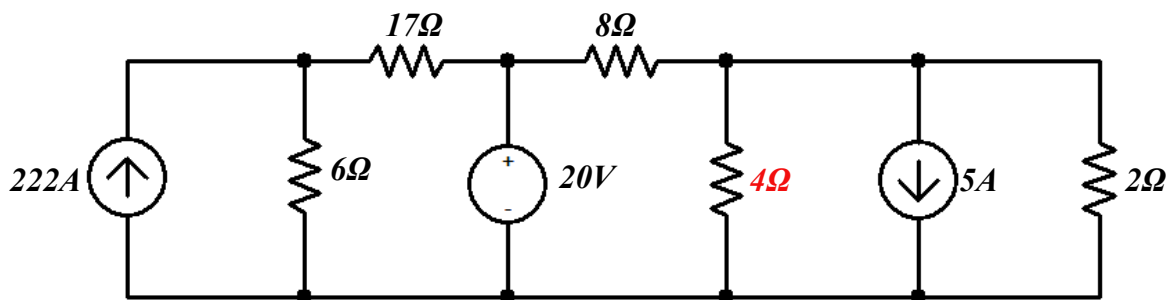
Notar que, como era de esperar, verifica-se $i_N = v_T / R_T$

Nota: Neste problema fizemos duas análises separadas para obter v_T e i_N mas em geral basta calcular um destes valores. O outro obtém-se usando a relação acima.

IV-15

3 – Calcule:

- A potência dissipada na resistência de 4Ω ;
- O novo valor que esta resistência deve ter de forma a que dissipe, neste circuito, a **potência máxima**.



IV-16

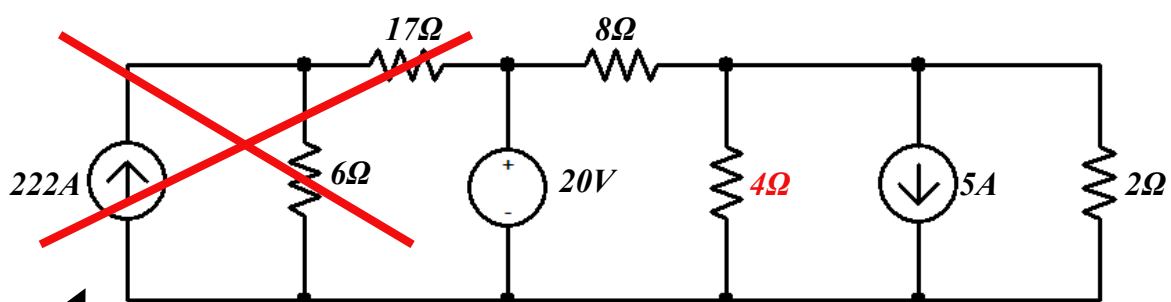
Dado que

- as duas alíneas do problema se referem à resistência de 4Ω ;
- uma delas remete para o **Teorema da Máxima Transferência de Potência...**

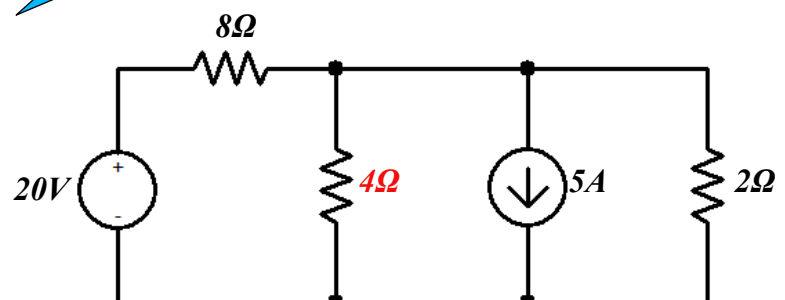
... a melhor estratégia passa por determinar primeiro o **Equivalente de Thévenin** visto por esta resistência.

IV-17

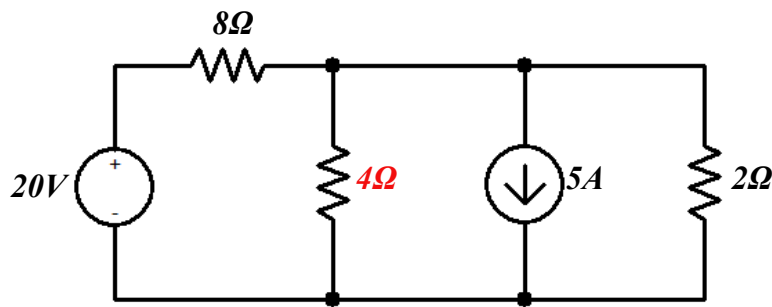
Começemos por simplificar o circuito...



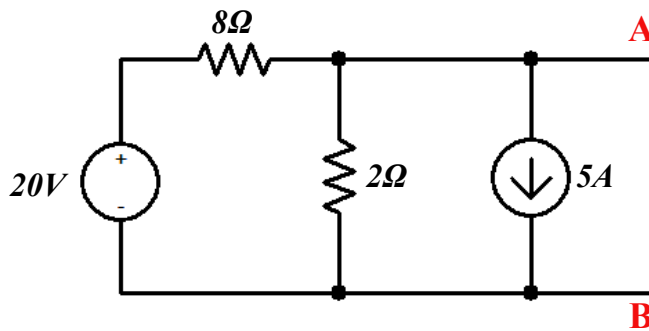
Elementos em paralelo com fontes de tensão não têm influência no resto do circuito!



IV-18



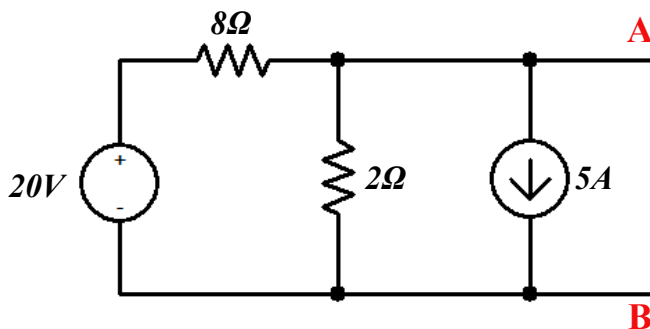
Este é o circuito **visto**
pela resistência de **4Ω**



Vamos portanto calcular
o **Equivalente de**
Thévenin entre **A** e **B**

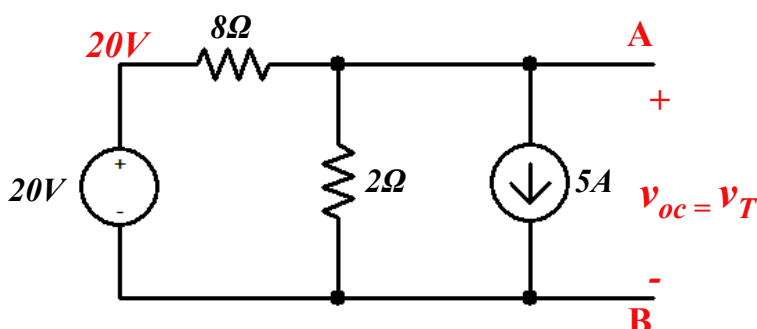
IV-19

Resistência equivalente



$R_T = 8 // 2 = 1.6\Omega$

Tensão em circuito aberto



Nó A:

$$\frac{20 - v_T}{8} = \frac{v_T}{2} + 5$$

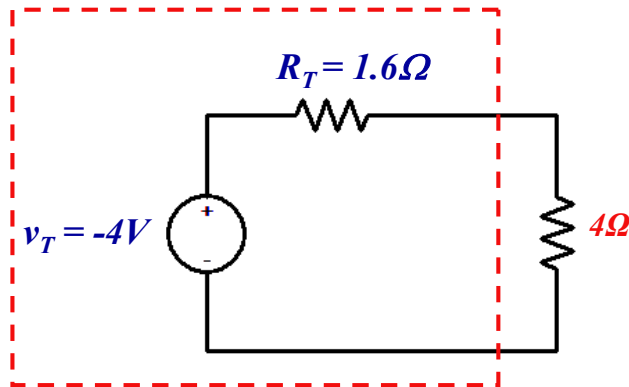
Resolvendo...

$$v_T = -4V$$

IV-20

Com o **Equivalente de Thévenin** é agora muito fácil responder às questões:

Equivalente de Thévenin



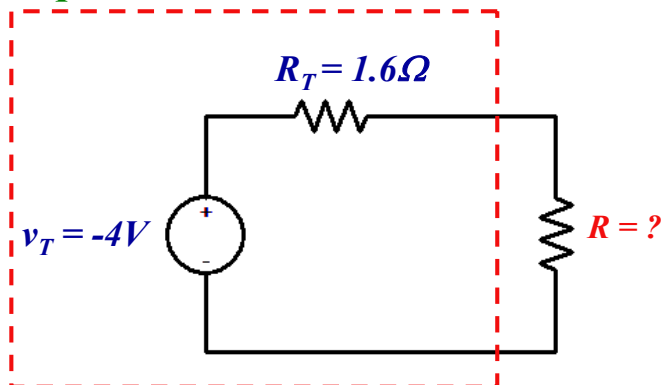
a) A potência dissipada na resistência de **4Ω** ?

$$\begin{aligned} P &= RI^2 \\ &= 4 \left(\frac{-4}{4 + 1.6} \right)^2 \\ &= 2.04W \end{aligned}$$

IV-21

b) Novo valor da resistência de forma a que dissipe a potência máxima?

Equivalente de Thévenin



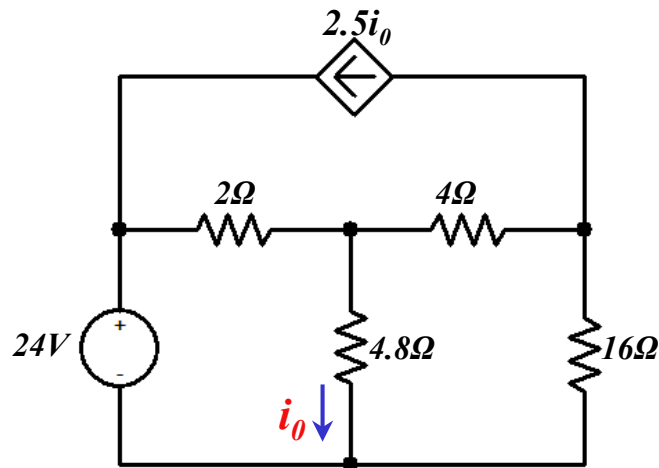
Teorema da máxima transferência de potência:
Uma fonte real de tensão com resistência interna R_S fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$.

Portanto, o novo valor da resistência deve ser **1.6Ω**.

IV-22

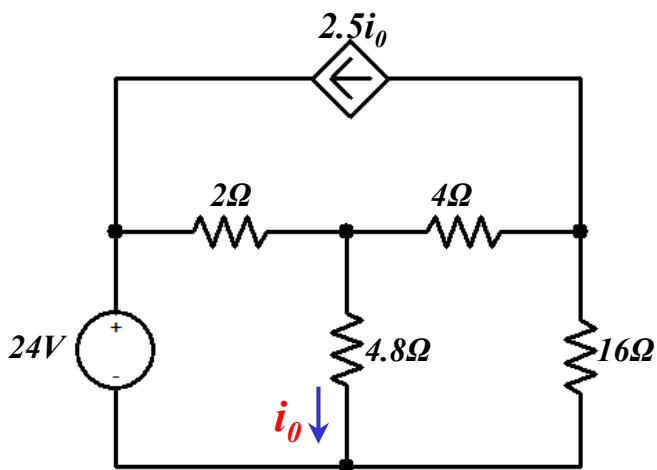
4 – Um amperímetro é usado para medir a corrente i_0 , indicando o valor $2.1A$. Determine:

- A **resistência interna** do amperímetro;
- A **percentagem de erro** introduzida pelo amperímetro na medição.



IV-23

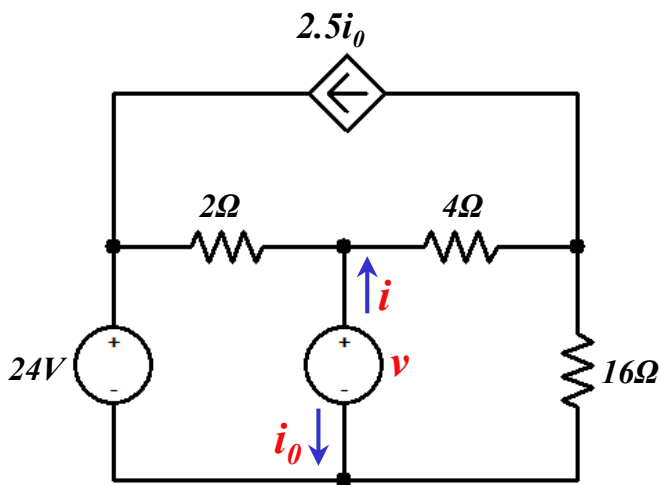
O problema diz respeito ao ramo onde está a resistência de 4.8Ω , portanto o melhor é começarmos por determinar o **Equivalente de Thévenin** visto por esta resistência.



Dado que o circuito inclui uma fonte dependente, vamos usar aqui o **Método Universal**, substituindo a resistência de 4.8Ω por uma fonte de tensão de teste, de valor v .

IV-24

Aplicação do Método Universal



- Vamos então analisar o circuito de forma a obter uma expressão de v em função de i , com a forma

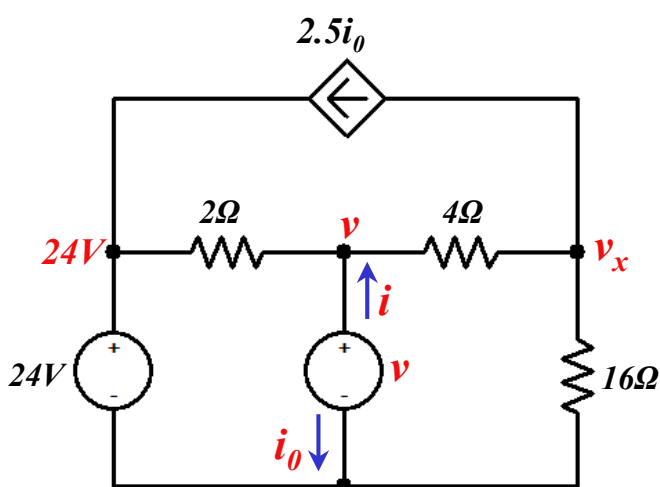
$$v = ai + b$$

- Dos coeficientes a e b concluiremos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

IV-25

Usando análise nodal...



$$\text{Nó } v: \frac{24 - v}{2} + i = \frac{v - v_x}{4}$$

$$\text{Nó } v_x: \frac{v - v_x}{4} = 2.5i_0 + \frac{v_x}{16}$$

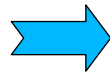
Sabendo que $i_0 = -i$ obtém-se

$$\begin{cases} v + 10i = \frac{5}{4}v_x \\ -3v + 4i = -v_x - 48 \end{cases}$$

Eliminando v_x , obtemos...

IV-26

$$v = \frac{60}{11}i + \frac{240}{11}$$

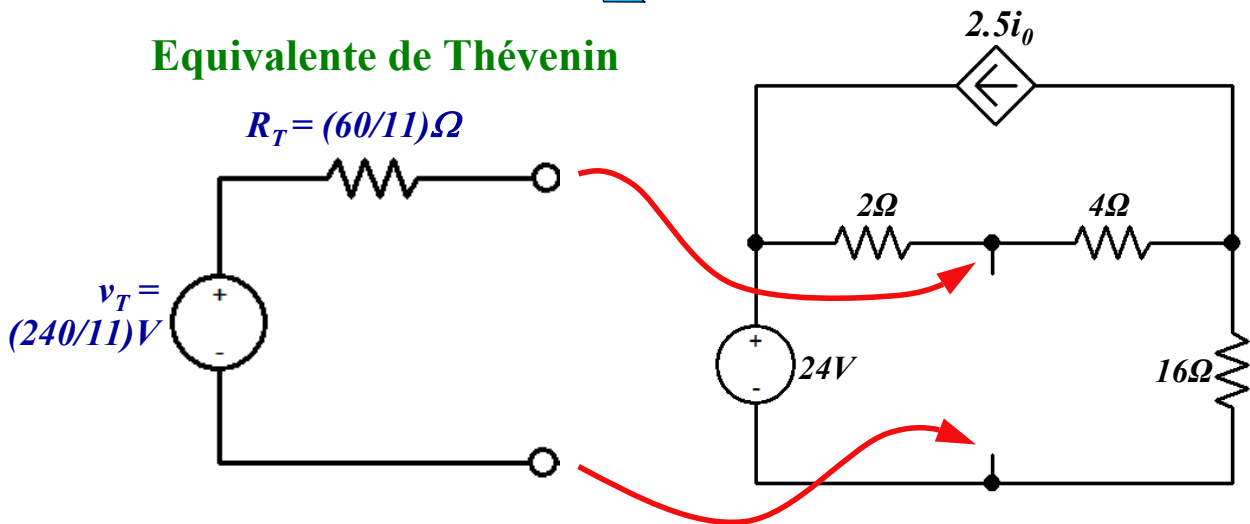


$$v = ai + b$$

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$



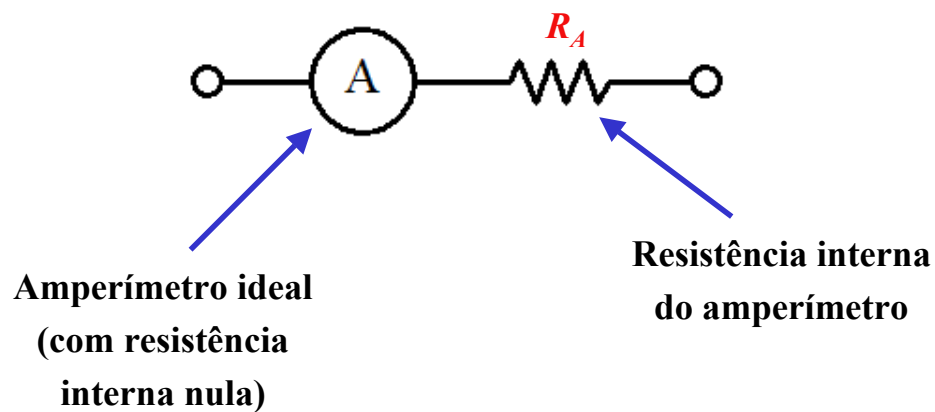
Equivalente de Thévenin



IV-27

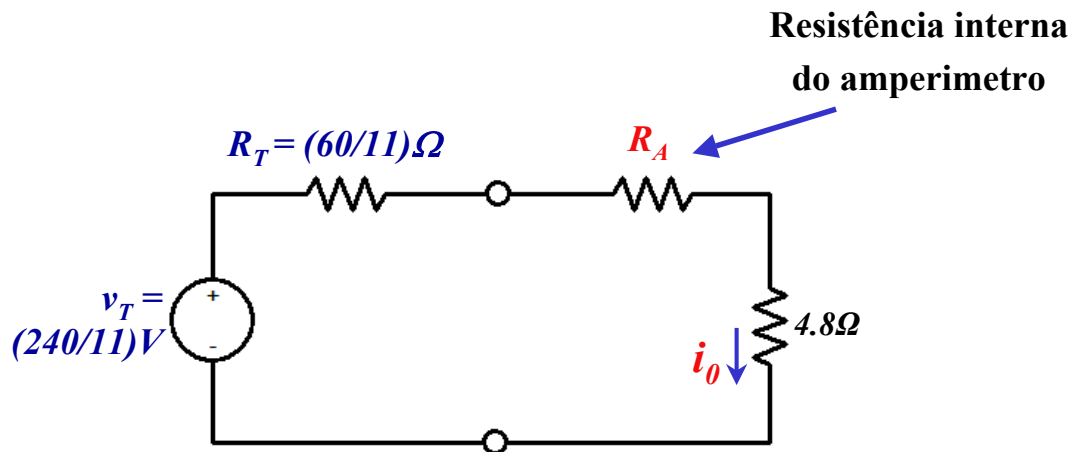
Modelo do amperímetro

Podemos considerar que o amperímetro usado na medição é constituído por um amperímetro ideal em série com uma resistência.



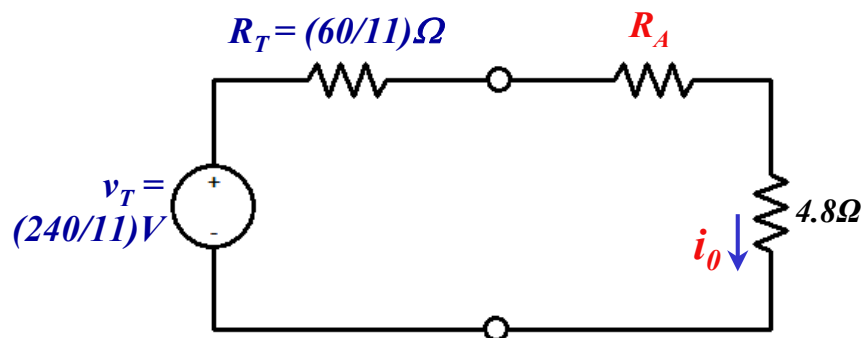
IV-28

Ligar o amperímetro em série com a resistência de 4.8Ω no circuito original, é o mesmo que ligar este conjunto ao Equivalente de Thévenin determinado:



IV-29

a)

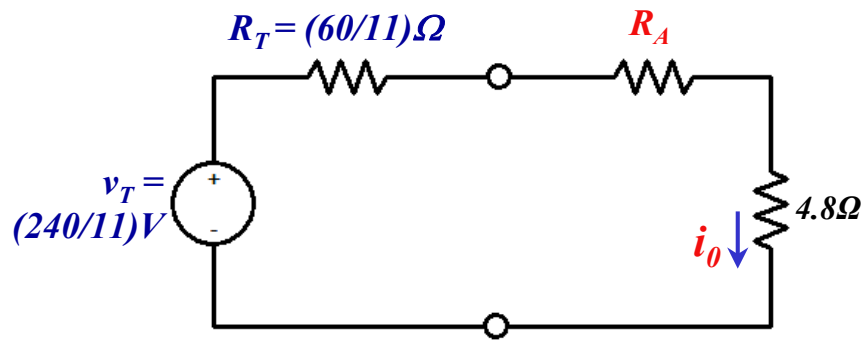


Nestas condições o valor medido de i_0 foi $2.1A$, portanto

$$\frac{240/11}{(60/11) + R_A + 4.8} = 2.1$$

$$R_A = 135m\Omega$$

IV-30

b)

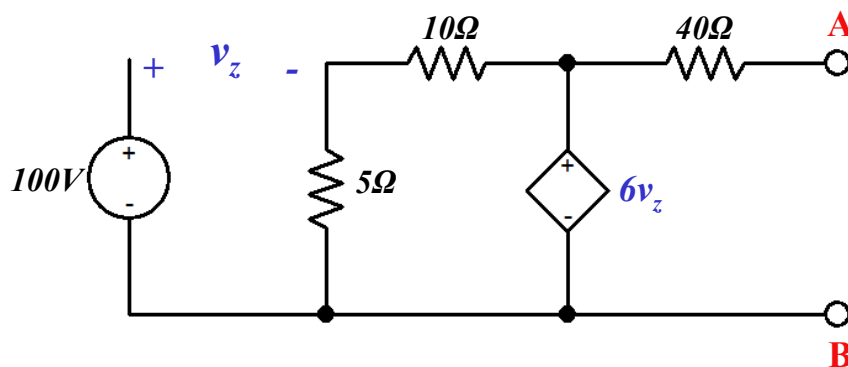
Sem o amperímetro presente no circuito o valor de i_0 seria

$$\frac{240/11}{(60/11) + 4.8} = 2.13A$$

O erro introduzido pelo amperímetro é portanto $\frac{2.1 - 2.13}{2.13} = -0.014 \rightarrow -1.4\%$

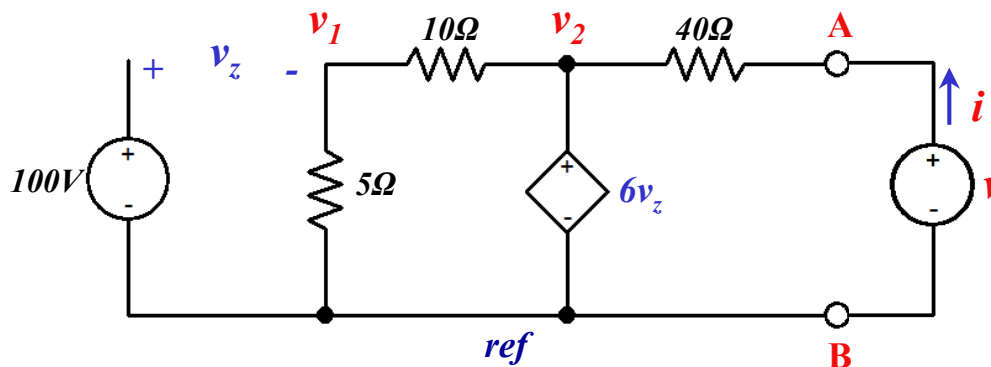
IV-31

5 – Determine o **equivalente de Thévenin** entre os terminais A e B do circuito.



IV-32

Como o circuito contém uma fonte dependente, vamos usar o **Método Universal**.

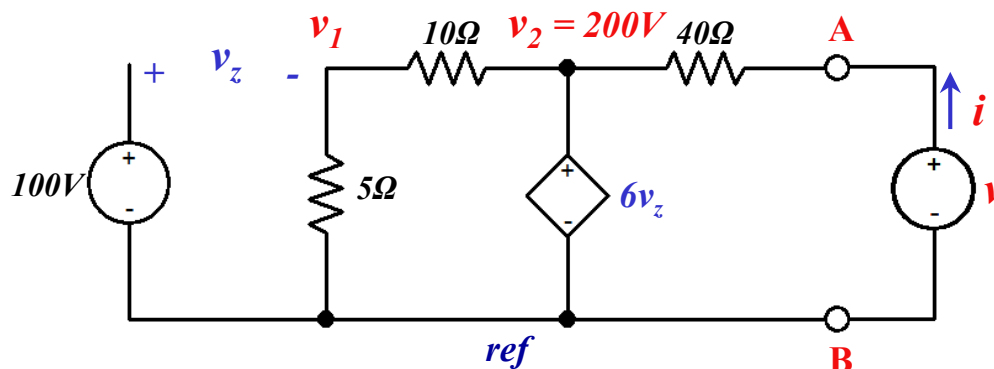


Por um lado:
$$v_1 = \frac{5}{5+10} v_2 = \frac{v_2}{3}$$

... e por outro:
$$v_2 = 6v_z = 6(100 - v_1)$$

IV-33

Conjugando as duas equações obtemos $v_2 = 200V$

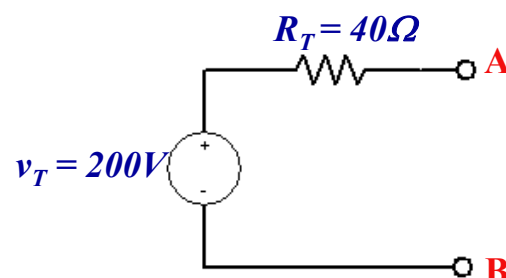


$$i = \frac{v - 200}{40} \Leftrightarrow v = 40i + 200$$

Equivalente de Thévenin

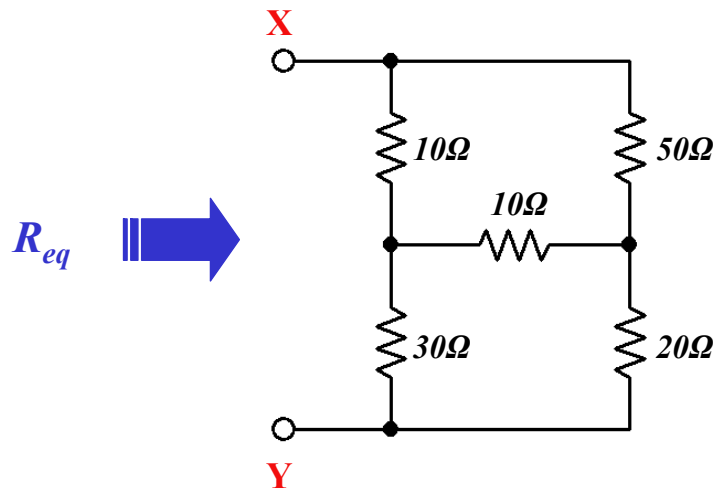
Portanto

$$v_T = 200V \quad R_T = 40\Omega$$



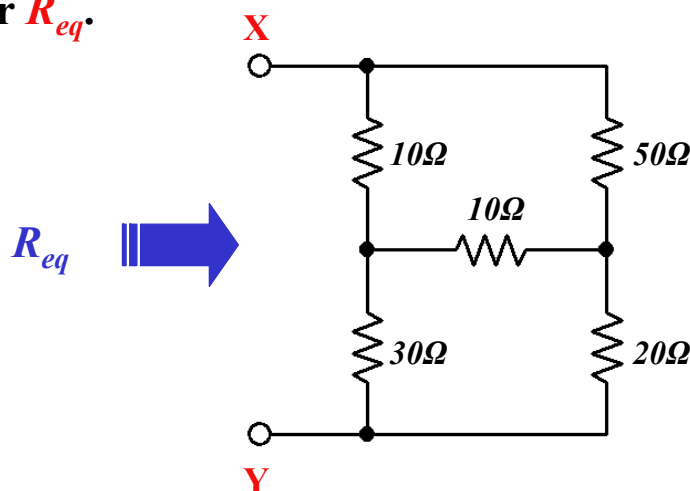
IV-34

6 – Determine a resistência equivalente entre os terminais X e Y.



IV-35

Note-se, antes de mais, que este circuito **não permite** associação de resistências em série ou em paralelo para obter R_{eq} .



Na prática, se tivéssemos que medir esta resistência, aplicaríamos uma tensão v entre os terminais X e Y, medíamos a corrente i e, finalmente, calcularíamos R_{eq} fazendo $R_{eq} = v/i$.

IV-36

É isso mesmo que podemos fazer!

Usando análise nodal...

Nó v_1 :

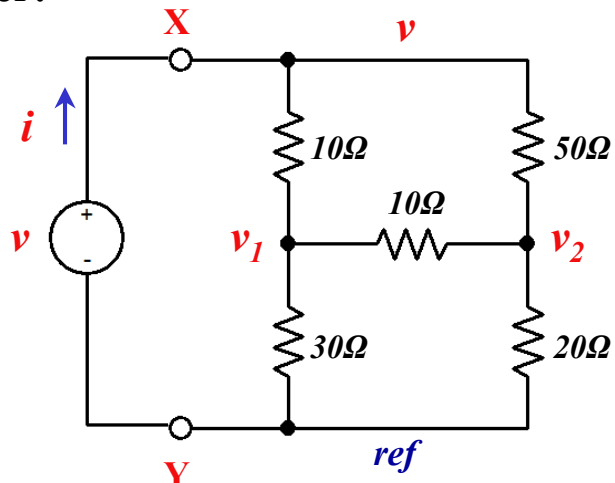
$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_1 - v_2}{10} + \frac{v_1 - v}{10} = 0$$

Nó v_2 :

$$\frac{v_2}{20} + \frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2 - v}{50} = 0$$

Usando KCL no nó inferior...

$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_2}{20} = i$$



Eliminando as incógnitas

v_1 e v_2 obtemos...

$$\frac{v}{i} = 21.7\Omega = R_{eq}$$

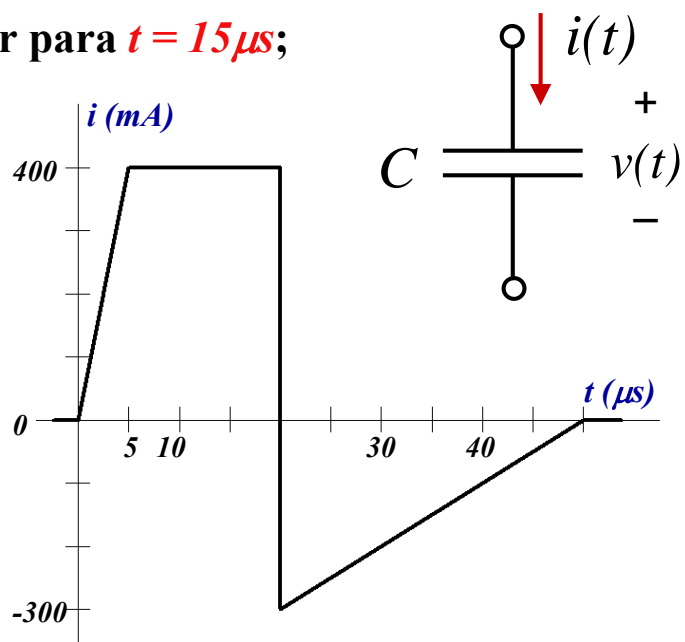
IV-37

7 – Um condensador de $0.25\mu F$ é percorrido pela corrente i do gráfico abaixo. Sabendo que $v(0) = 0$, calcule

a) A carga no condensador para $t = 15\mu s$;

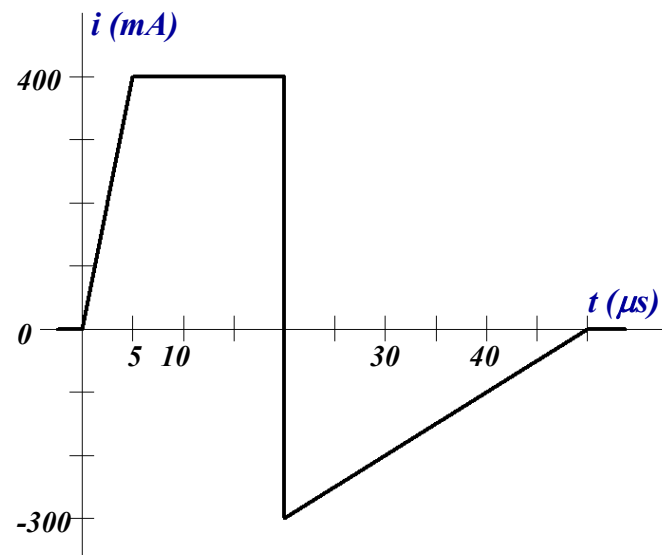
b) A tensão no condensador para $t = 30\mu s$;

c) A energia armazenada no condensador para $t > 50\mu s$.



IV-38

- A partir do gráfico dado poderíamos começar por exprimir algebricamente $i(t)$, integrando depois as equações correspondentes a cada intervalo de tempo, de forma a responder às questões pedidas.



- ... mas uma maneira mais expedita de chegar lá é **calculando áreas**.

Vejamos:

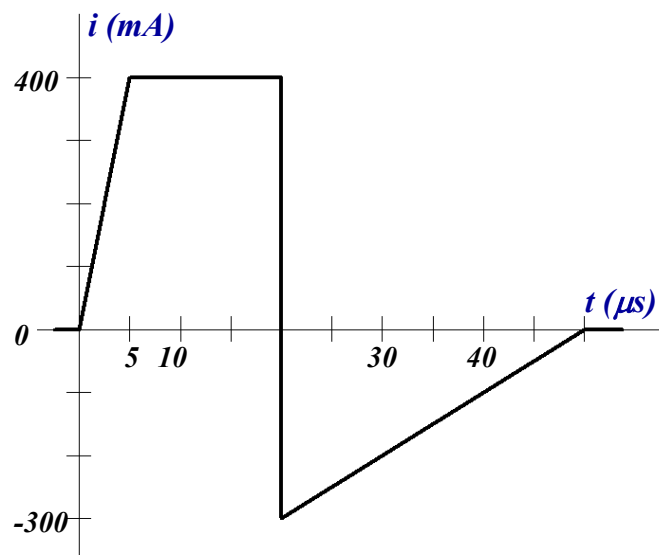
IV-39

a) $q(t = 15\mu s) = ?$

Num qualquer instante t_1 a carga no condensador pode ser calculada por

$$q(t_1) = \int_0^{t_1} i(t) dt + q(0)$$

Como $v(0) = 0$, então $q(0) = 0$ e a carga pode ser obtida calculando a área:



$$\text{Área}_{[0,15]} = \frac{5 \times 400}{2} + (15 - 5) \times 400 = 5000 nC = 5 \mu C$$

IV-40

b) $v(t = 30\mu s) = ?$

Num qualquer instante t_1
a tensão no condensador
é dada por

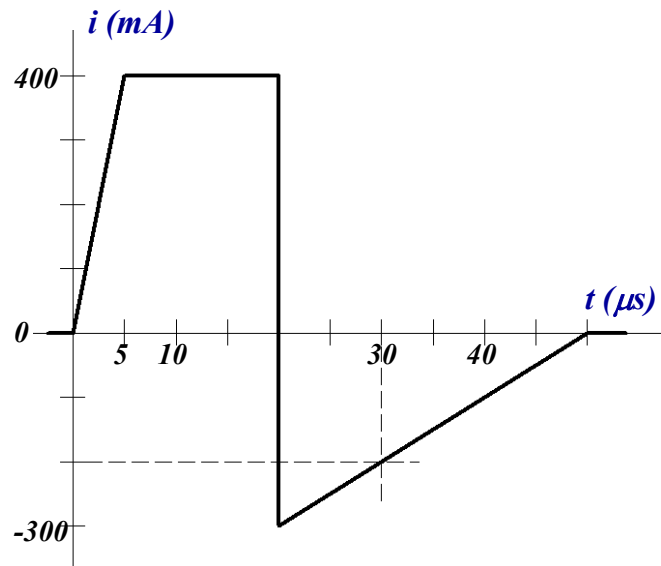
$$v(t_1) = \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i(t) dt + v(0)$$

Calculamos então a **área de 0 a 30 μs** :

$$\text{Área}_{[0,30]} = \text{Área}_{[0,15]} + (20-15) \times 400 - \left[(30-20) \times 200 + \frac{(30-20) \times 100}{2} \right]$$

$$\text{Área}_{[0,30]} = 4.5 \mu C \quad \rightarrow \quad v(30\mu s) = \frac{4.5 \mu C}{0.25 \mu F} = 18V$$

IV-41



c) $E_C(t = 50\mu s) = ?$

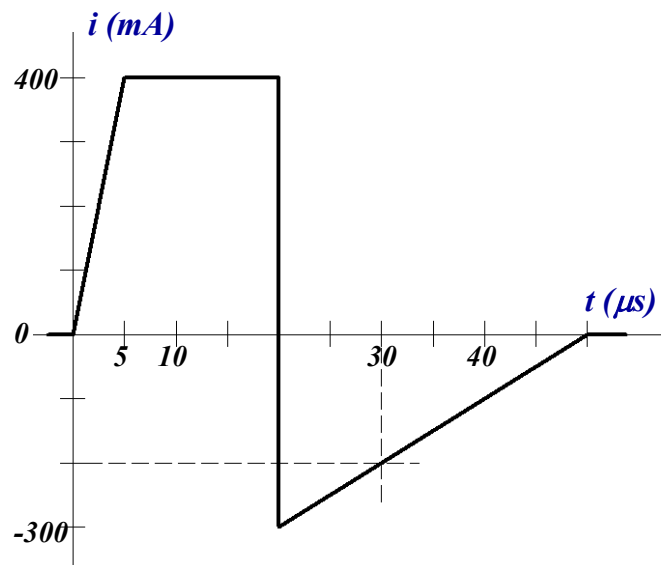
Calculamos **$v(50\mu s)$** pela
área total

$$\text{Área}_{[0,50]} = \text{Área}_{[0,30]} - \frac{(50-30) \times 200}{2}$$

$$= 2.5 \mu C$$

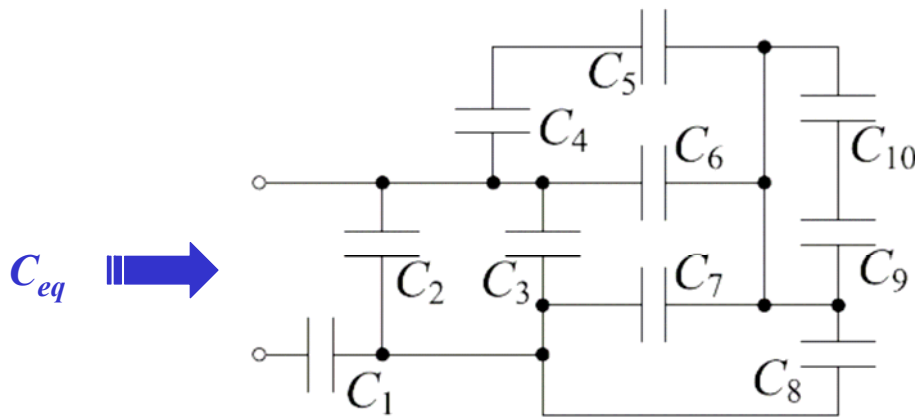
$$v(50\mu s) = \frac{2.5 \mu C}{0.25 \mu F} = 10V$$

$$\rightarrow E_C(50\mu s) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \times 0.25 \times 10^2 = 12.5 \mu J$$



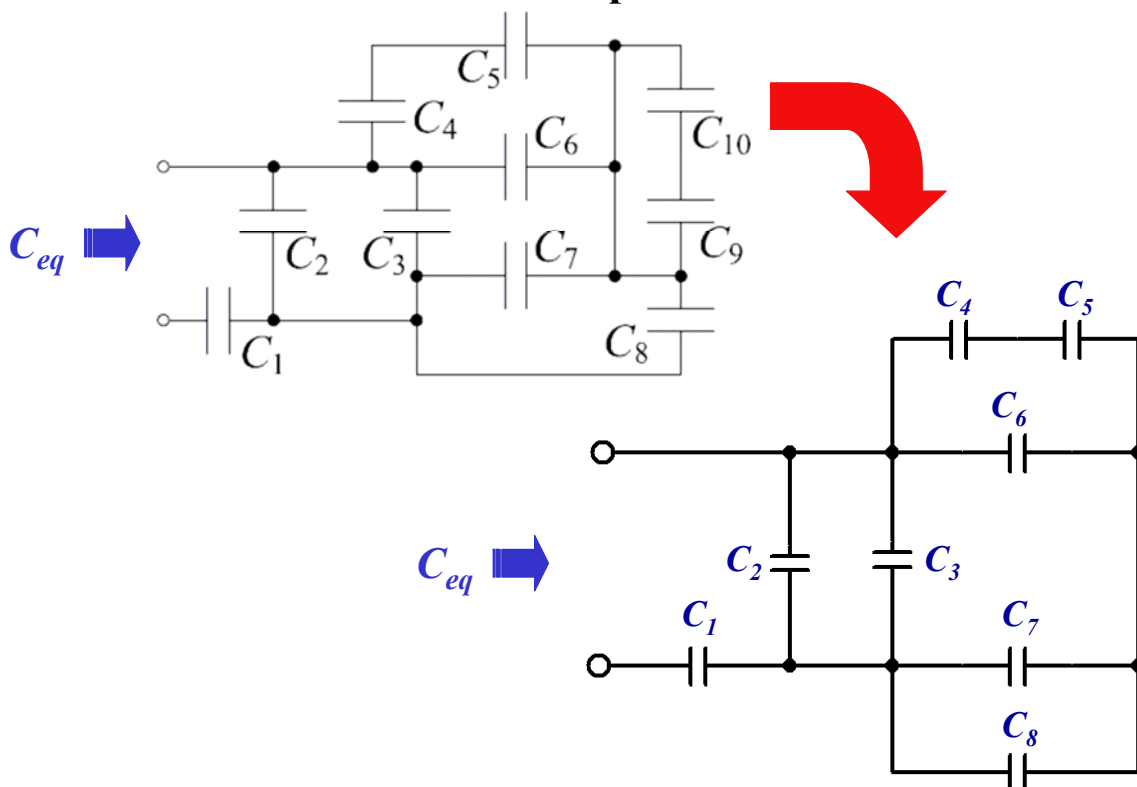
IV-42

8 – Determine o valor da capacidade equivalente no circuito abaixo. Todos os condensadores são de $1\mu F$.



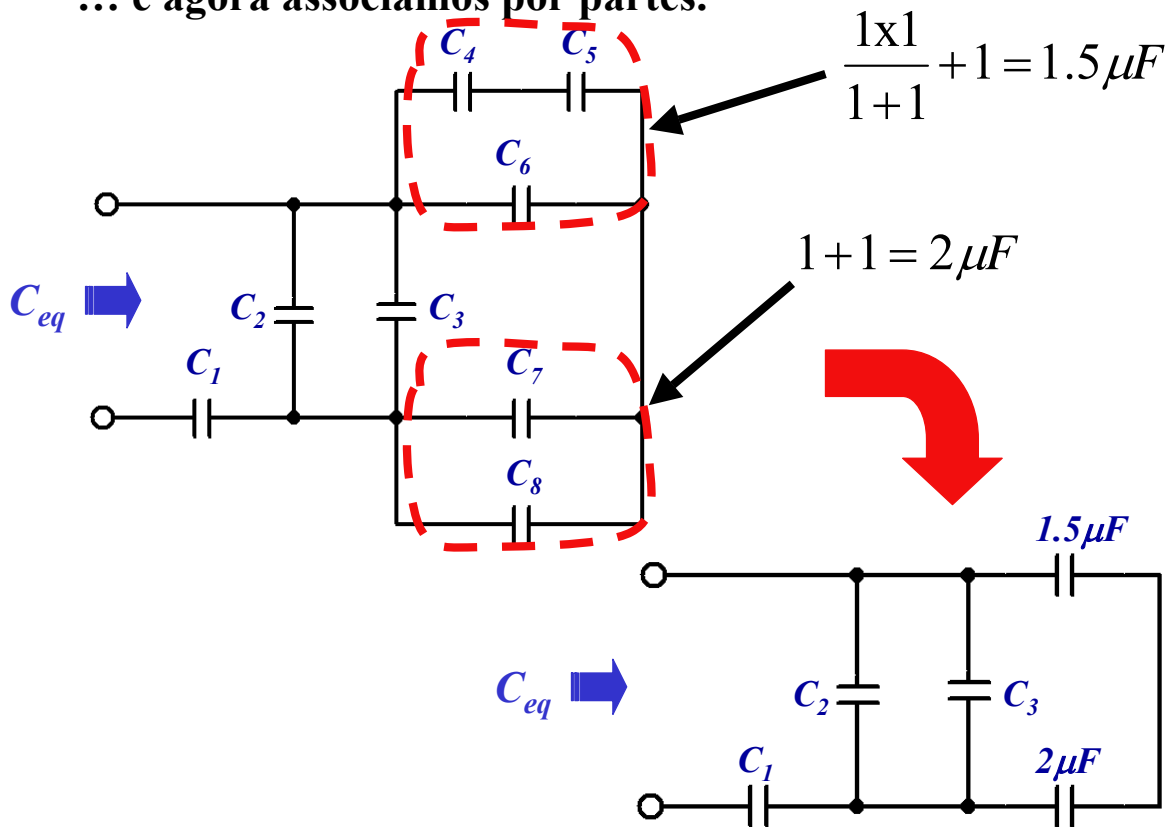
IV-43

Como sempre, começamos por redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos...

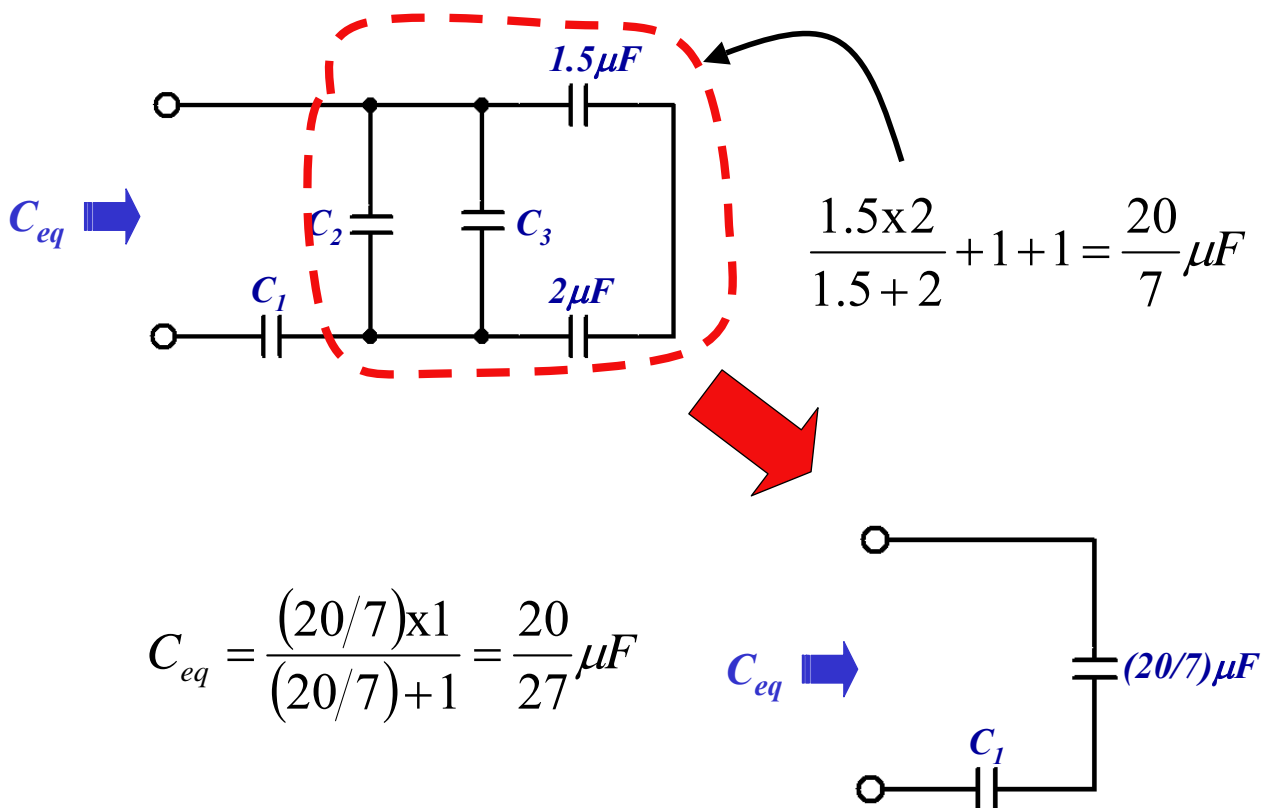


IV-44

... e agora associamos por partes.



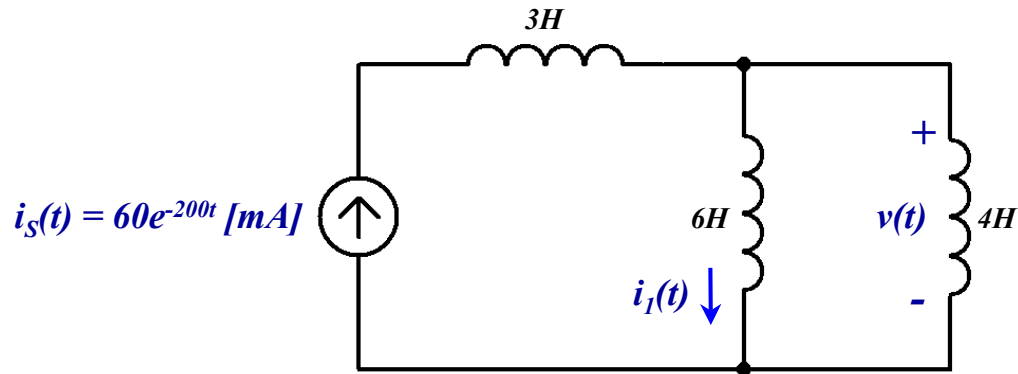
IV-45



IV-46

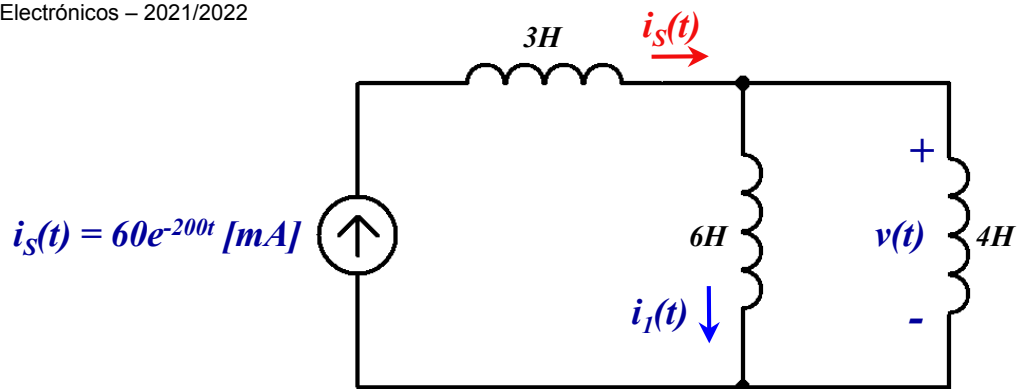
9 – No circuito abaixo considere $i_1(0) = 20mA$. Calcule

- a) A tensão $v(t)$;
b) A energia armazenada na bobina de $6H$ em $t = 5ms$.



IV-47

a)



$$v(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_s(t) = 2.4 \frac{d}{dt} (60e^{-200t})$$

$$L_1 = \frac{6 \times 4}{6 + 4} = 2.4H$$

$$= 2.4 \times (-200) \times 60e^{-200t}$$

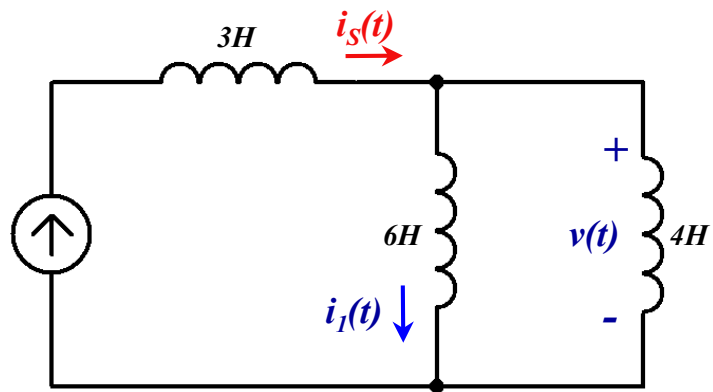
$$v(t) = -28.8e^{-200t} [V] \quad t \geq 0$$

IV-48

b)

$$v(t) = -28.8e^{-200t}$$

$$i_s(t) = 60e^{-200t} \text{ [mA]}$$



$$i_1(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i_1(0) = \frac{1}{6} \int_0^t -28.8e^{-200t} dt + 0.02$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{200} \right) (-28.8) e^{-200t} \Big|_0^t + 0.02 = 24e^{-200t} - 4 \text{ [mA]}$$

$$i_1(5ms) = 4.83mA$$

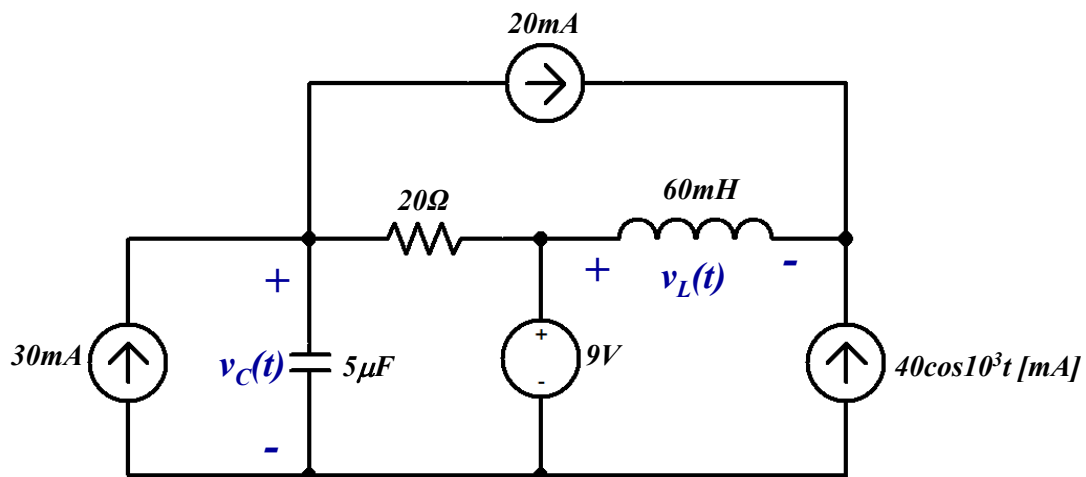
$$W = \frac{1}{2} Li_1^2 = 70\mu J$$

IV-49

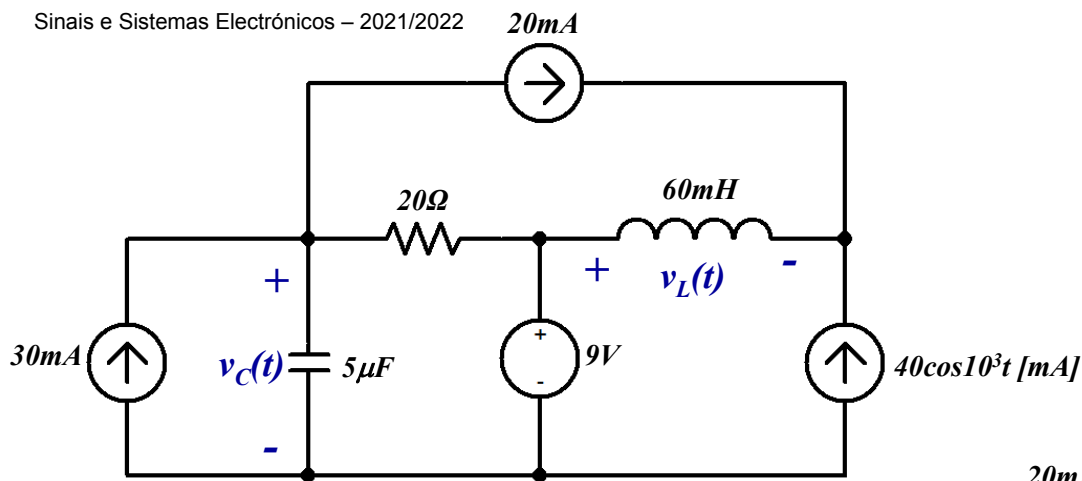
10 – Usando o Princípio da Sobreposição, calcule no circuito abaixo

a) $v_C(t)$;

b) $v_L(t)$.



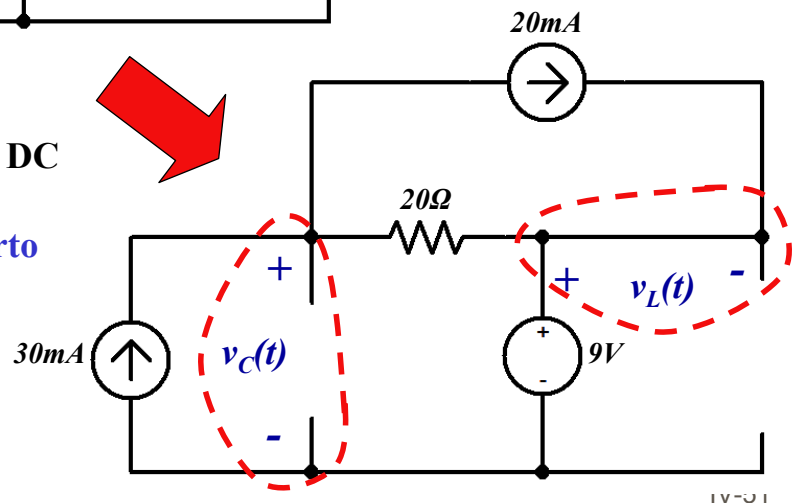
IV-50



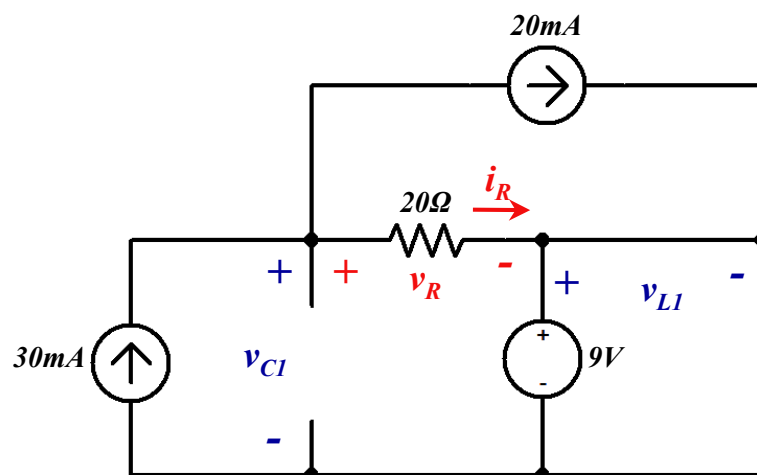
1) Considerando só as fontes DC

condensador \Leftrightarrow circuito aberto

bobina \Leftrightarrow curto-circuito



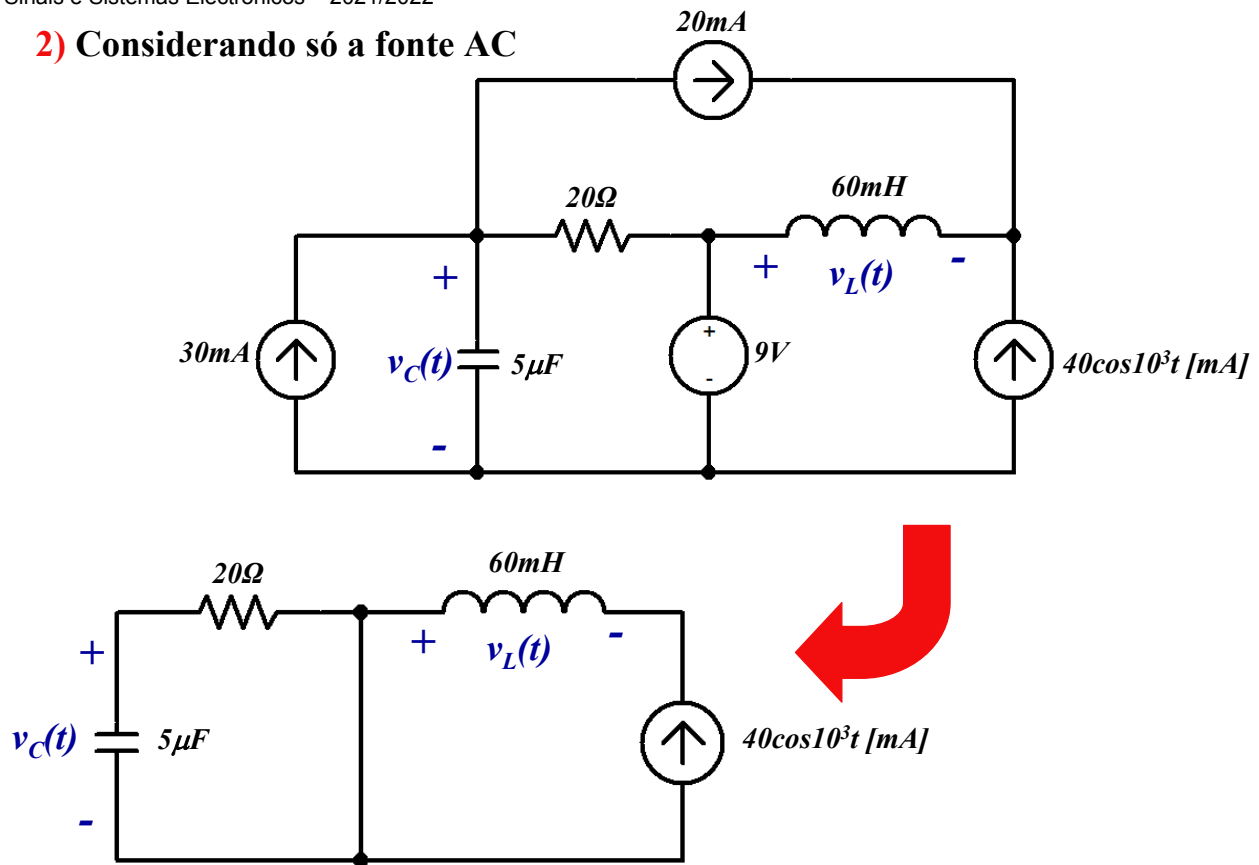
1) Considerando só as fontes DC



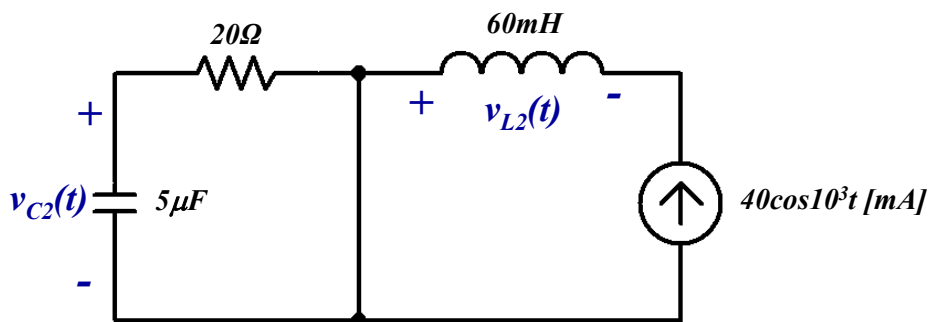
Do circuito tiramos: $v_{L1} = 0V$

$$i_R + 20 = 30 \Leftrightarrow i_R = 10mA$$

$$-v_{C1} + v_R + 9 = 0 \Leftrightarrow v_{C1} = 9 + (20 \times 0.01) = 9.2V$$

2) Considerando só a fonte AC

IV-53

2) Considerando só a fonte AC**Do circuito tiramos:** $v_{C2} = 0V$

$$v_{L2}(t) = -L \frac{d}{dt} i(t) = -0.06 \frac{d}{dt} (0.04 \cos 10^3 t) = 2.4 \sin 10^3 t \text{ [V]}$$

Aplicando o Teorema da Sobreposição:

$$v_C(t) = v_{C1} + v_{C2} = 9.2 + 0 = 9.2V$$

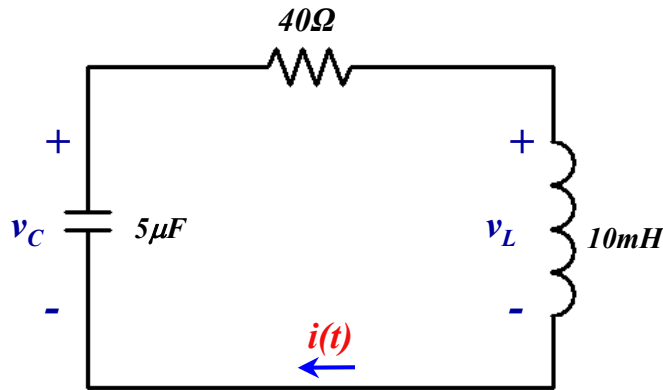
$$v_L(t) = v_{L1} + v_{L2} = 0 + 2.4 \sin 10^3 t = 2.4 \sin 10^3 t \text{ [V]}$$

IV-54

11 – Sabendo que, no circuito abaixo, $i(t)$ é dada por

$$i(t) = 5e^{-2000t} \cos 4000t \quad [A] \quad t \geq 0$$

Calcule $v_L(0)$ e $v_C(0)$.



IV-55

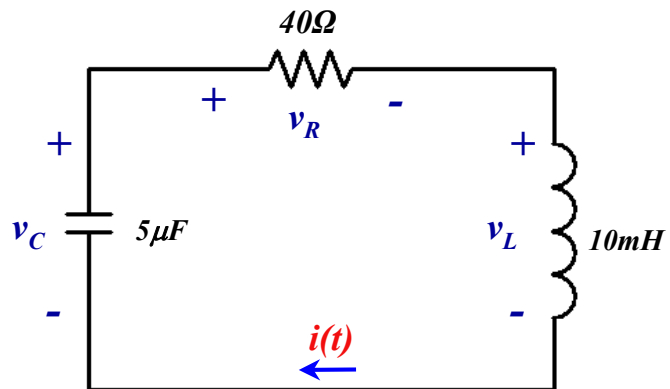
Começamos por calcular a tensão na bobina

$$v_L = L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$= 0.01 \frac{d}{dt} (5e^{-2000t} \cos 4000t)$$

$$= 0.01 [5(-2000)e^{-2000t} \cos 4000t + 5e^{-2000t} (-4000 \sin 4000t)]$$

$$v_L = -100e^{-2000t} (\cos 4000t + 2 \sin 4000t) \quad [V]$$

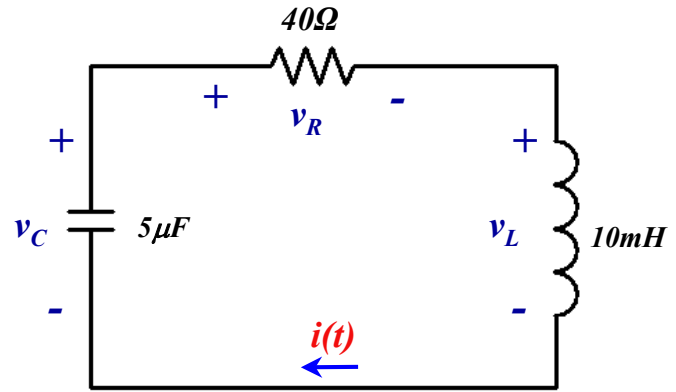


IV-56

**Calculamos agora os valores
para $t = 0$**

$$v_L = -100e^{-2000t}(\cos 4000t + 2 \sin 4000t)$$

$$v_L(0) = -100V$$



Aplicando KVL:

$$-v_C(0) + v_R(0) + v_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 40i(0) - 100$$

$$v_C(0) = 40 \times 5 - 100 = 100V$$

$$i(t) = 5e^{-2000t} \cos 4000t$$

$$i(0) = 5A$$