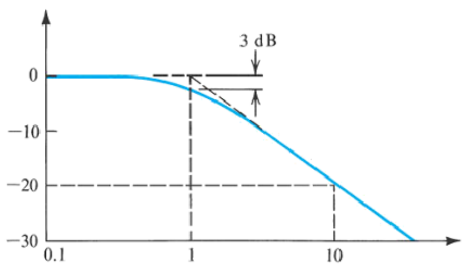
Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 5: Noções de Sistemas e Sinais



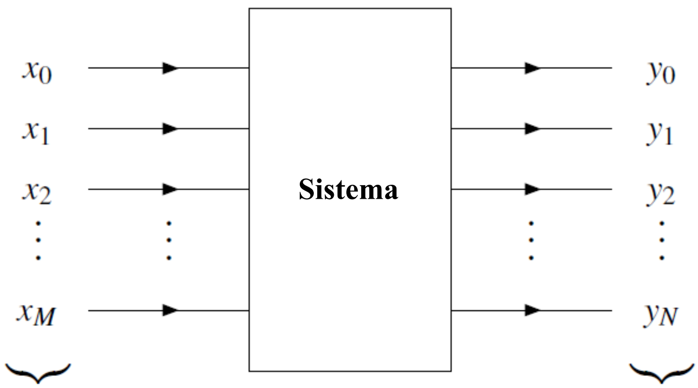
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Nocão de sistema;**
- **Sinais: definição e classificação;**
- **Sinais nos domínios do tempo e da frequência;**
- **Resposta em frequência – caso do circuito RC passa-baixo;**
- **O decibel (dB);**
- **Resposta de amplitude e de fase;**
- **Circuito RC passa-alto;**
- **Diagramas de Bode;**
- **Resposta ao degrau – tempo de subida e tilt.**

Sistema

Entidade que produz um conjunto de *sinais de saída* como resposta a um conjunto de *sinais entradas*.



Sinais de entrada **Sinais de saída**

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Sinal

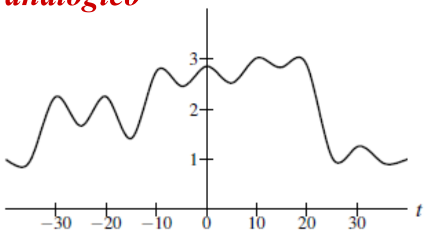
É uma função do tempo que traduz informação sobre um ou mais fenómenos.

- **Os sinais apresentam-se, em geral, em função do tempo:**
  - **Velocidade dum veículo;**
  - **Temperatura ambiente;**
  - **Ritmo cardíaco;**
  - **Tensão eléctrica da rede de distribuição;**
  - **Som de um tema musical;**
  - **…**

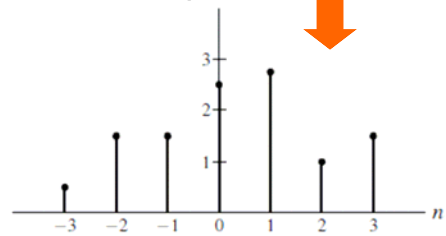
Aqui estamos particularmente interessados em sinais que podem ser representados por tensões ou correntes eléctricas.

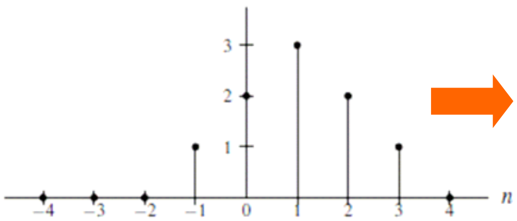
Classificação de sinais

Contínuo no tempo e na amplitude:
sinal analógico



Definido só em *instantes discretos* mas continuo na amplitude: ainda é um sinal analógico

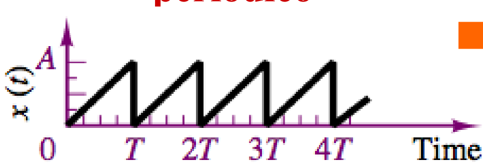




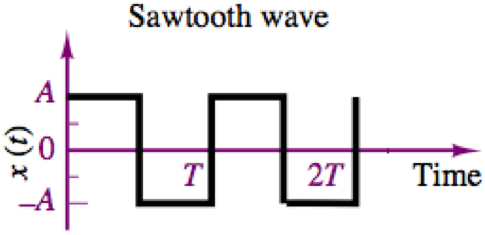
Definido em instantes discretos e com valores discretos de amplitude: *sinal digital*

Classificação de sinais

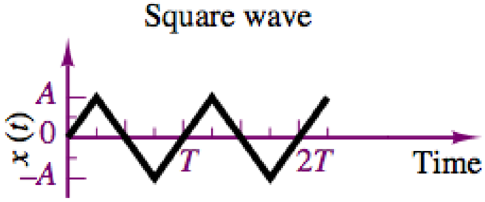
periódico



Sawtooth wave



Square wave

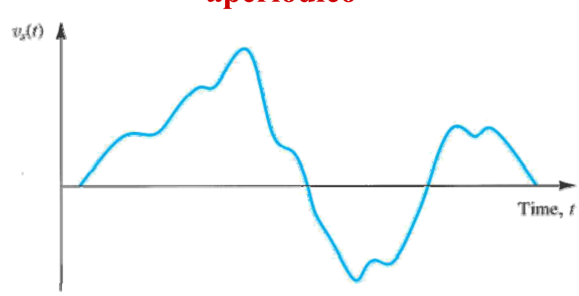


Triangle wave

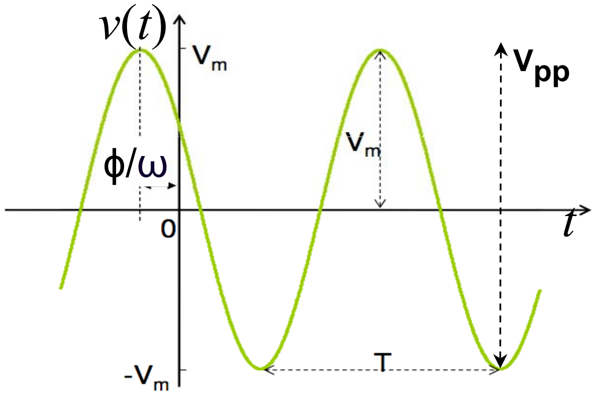
Uma função *x(t)* é periódica, com período *T*, se

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{para qualquer} \quad t$$

aperiódico



Sinais nos domínios do tempo e da frequência



$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

V_m - amplitude máxima (de pico)
T - periodo (s)
f - frequência (Hz) = 1/T
ω - frequência angular (*rad/s*)
ϕ - ângulo de fase (*rad* ou º)
V_{pp} - amplitude pico a pico

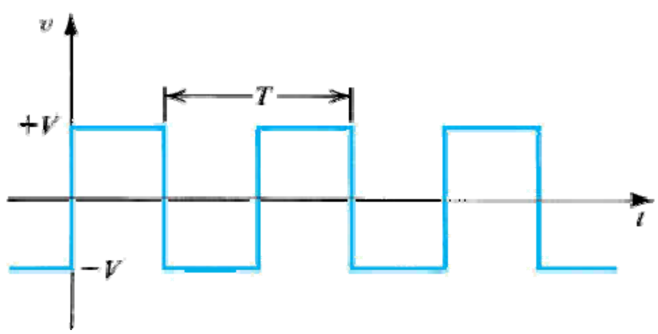
A sinusóide é o sinal mais importante no estudo de circuitos electrónicos.

Porquê?

Sinais nos domínios do tempo e da frequência

… porque segundo a série/transformada de Fourier, qualquer sinal pode ser descrito como uma soma de sinusoides de diferentes amplitudes e frequências.

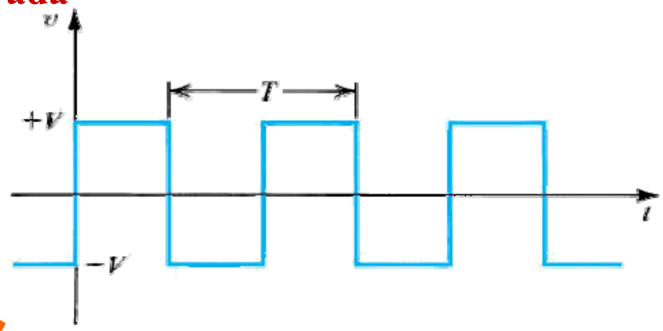
Exemplo:
Onda quadrada



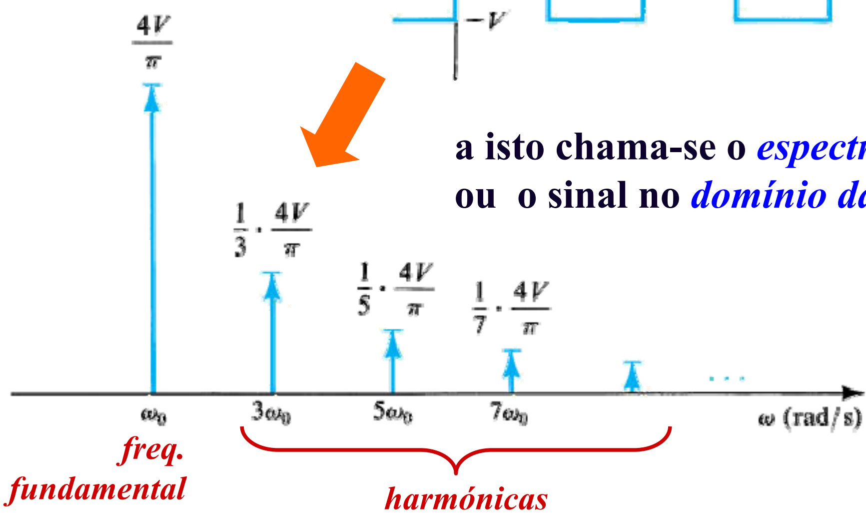
$$v(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \ldots\right)$$

sendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ **a *frequência fundamental***

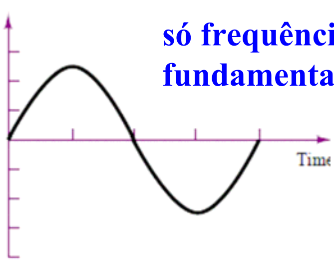
Exemplo: Onda quadrada



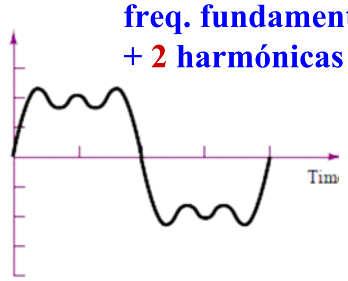
a isto chama-se o *espectro do sinal*
ou o sinal no *domínio da frequência*



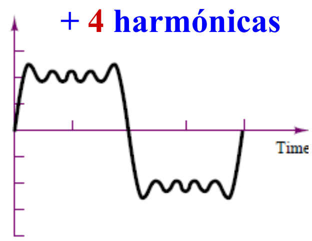
Exemplo: Onda quadrada



só frequência fundamental



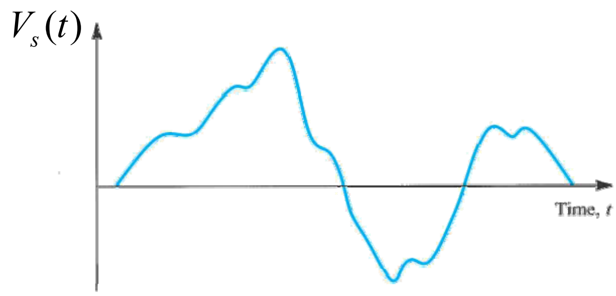
freq. fundamental + 2 harmónicas

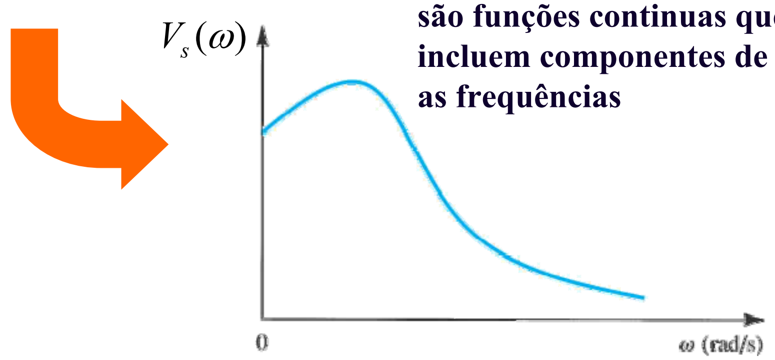


freq. fundamental + 4 harmónicas

Onda quadrada vai-se compondo à medida que mais harmónicas são adicionadas…

Exemplo: sinal aperiódico





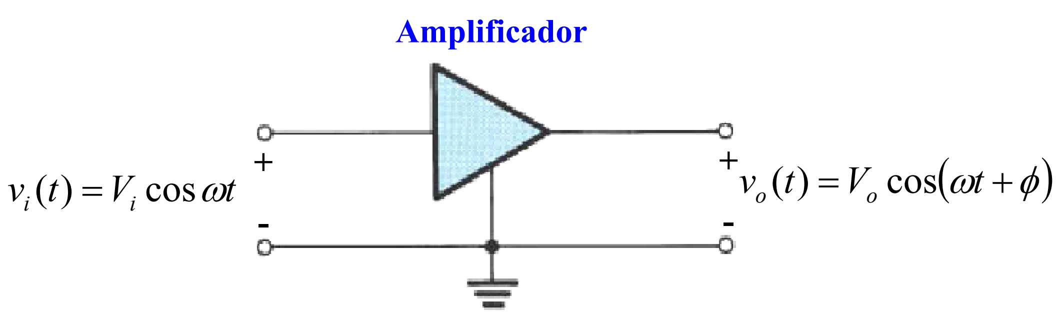
Espectro de sinais aperiódicos são funções continuas que incluem componentes de todas as frequências

Resposta em frequência

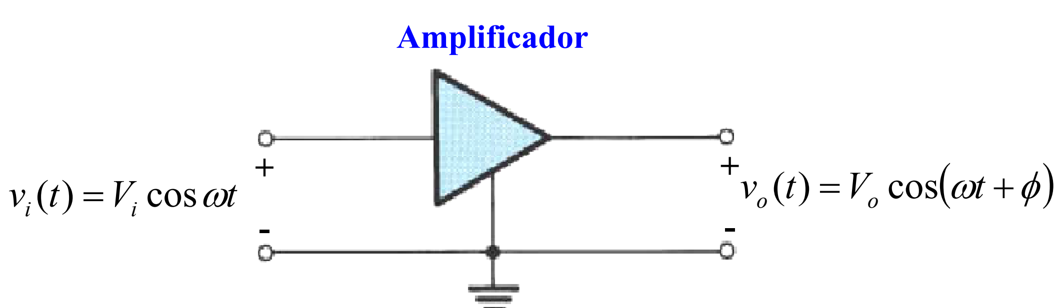
Resposta em frequência

➢ **Caracteriza a forma como um sistema responde a sinusóides de diferentes frequências;**

➢ **É uma característica importante exactamente porque… *qualquer sinal pode ser expresso como uma soma de sinusóides.***



Resposta em frequência



A resposta em frequência do amplificador é expressa pela sua função de transferência:

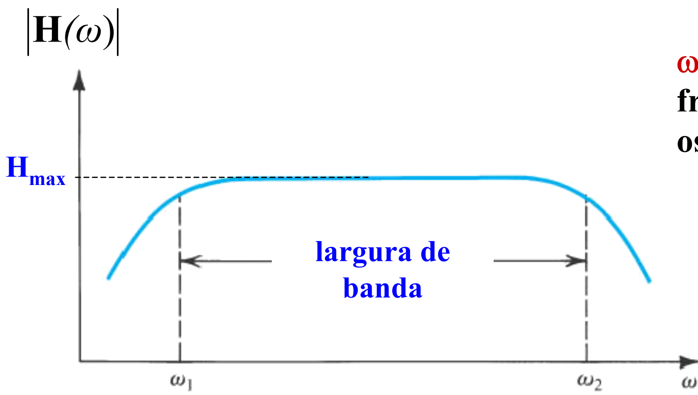
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_O}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)}$$

que inclui a resposta de amplitude, $|\mathbf{H}(\omega)|$

e a resposta de fase, $\angle\mathbf{H}(\omega)$

Resposta em frequência

- A resposta em amplitude traduz a gama de frequências que o sistema amplifica e a gama que tende a atenuar;
- O amplificador funciona como um ***filtro*** com uma dada ***largura de banda***;



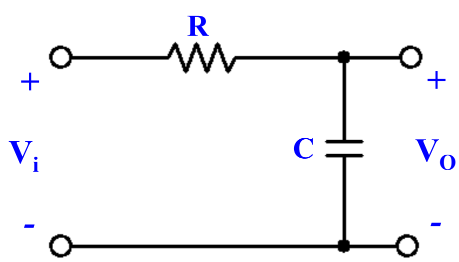
ω_1 e ω_2 são definidas como frequências de corte: para os quais o ganho é

$$\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

Usando a relação do **divisor de tensão**, podemos escrever

$$\mathbf{V_O}(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\mathbf{V_i}(\omega)$$



Notar que a função de transferência é adimensional

Neste caso, a **função de transferência** é

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_O}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Exprimindo em **módulo** e **fase**…

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC)$$

Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

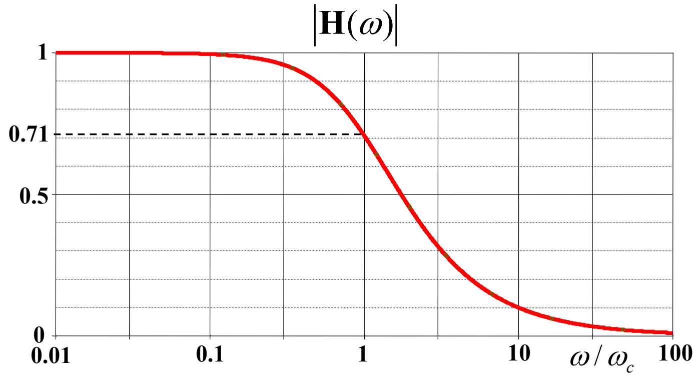
$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \qquad\qquad \angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC)$$

- **Na representação em módulo e fase, a função de transferência indica a atenuação e o desfasamento introduzido pelo circuito na sinusóide de frequência ω.**

- **Comportamento na frequência**
  - **Para frequências muito baixas** $|\mathbf{H}(0)| \approx 1 \quad \angle\mathbf{H}(0) \approx 0$
    pelo que $Vo \approx Vi$
  - **Para** $\omega = \omega_c = 1/RC$**, temos** $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \qquad \angle\mathbf{H}(\omega_c) = -45^{o}$
  - **Para frequências muito elevadas** $|\mathbf{H}(\infty)| = 0 \quad \angle\mathbf{H}(\infty) = -90^{o}$
    pelo que $Vo \approx 0$

Assim, este circuito é conhecido como filtro passa-baixo.

Comportamento na frequência do RC passa baixo



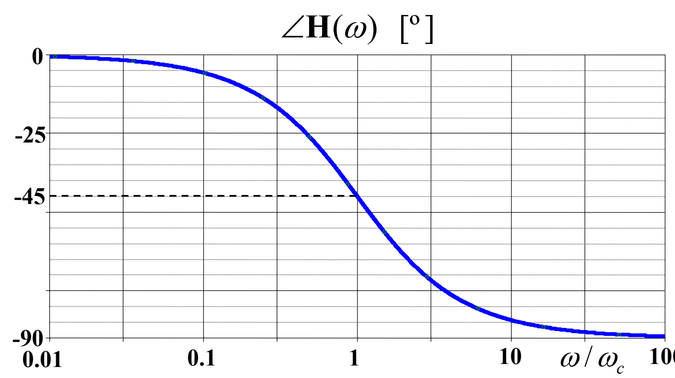
Frequência de corte

$$\omega_c = \frac{1}{\mathrm{RC}}$$

Notar:
- **Eixo X normalizado;**
- **Escala logarítmica em X.**

- **Mas esta resposta de amplitude costuma representar-se numa *medida logarítmica*: em *decibeis* (dB):**

$$20\log|\mathbf{H}(\omega)| \;\; (dB)$$



deciBel (dB)

- O ***deciBel*** **corresponde a *1/10* da unidade base: o *bel*;**

- **Esta unidade surgiu no contexto dos primeiros sistemas de telefones para quantificar a perda de potência de um sinal numa ligação, definindo-se como:**

$$\log\frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (bel) \qquad \textbf{ou} \qquad 10\log\frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (decibel)$$

- **Porquê uma unidade baseada na função logaritmo?**

- **Porque a percepção de intensidade do ouvido humano é logarítmica: e.g. se a intensidade sonora aumentar *10X* a sensação é de apenas uma *duplicação* da intensidade!**

- **Tratando-se de relações entre tensões, o decibel é definido como**

$$20\log\frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (decibel)$$

Resposta em frequência do RC passa-baixo (em *dB*)

$$20\log|\mathbf{H}(\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}} \qquad \omega_c = \frac{1}{\mathrm{RC}}$$

- **Para frequências muito baixas:** $|\mathbf{H}(0)| \approx 1 \quad \text{ou} \quad 0\text{dB}$

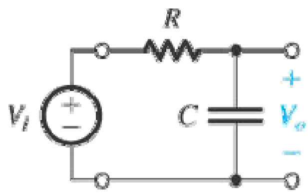
- **Para $\omega = \omega_c$:** $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad 20\log(0.707) = \text{-3dB}$

- **Para frequências elevadas:** $|\mathbf{H}(\omega)| \approx \dfrac{\omega_c}{\omega}$

  - **Portanto, se *ω* duplicar, *|H(ω)|* diminui para *1/2*. Como *20log(0.5) = -6*, então a amplitude cai *6dB*;**

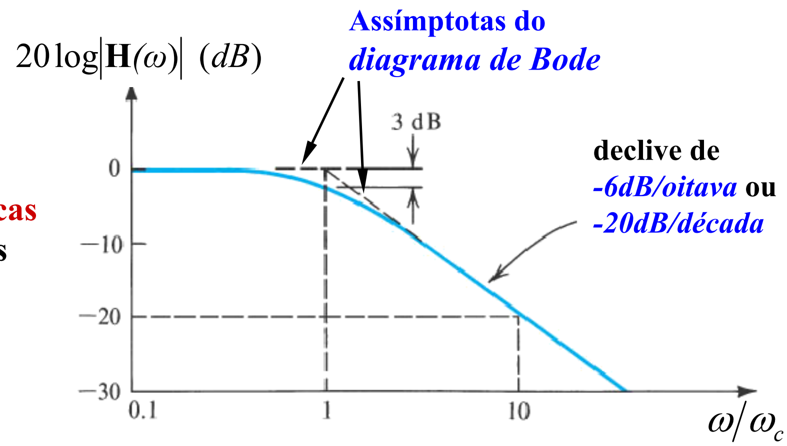
  - **Se *ω* aumentar de um factor de *10*, *|H(ω)|* diminui para *1/10*. Como *20log(0.1) = -20*, então a amplitude cai *20dB*.**

Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode

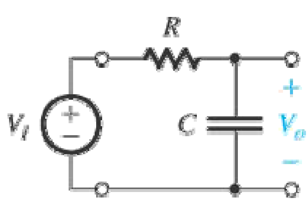


- Com estes dados podemos obter um traçado *assimptótico* da resposta do filtro: o chamado *Diagrama de Bode*.

Escalas logarítmicas **em ambos os eixos**



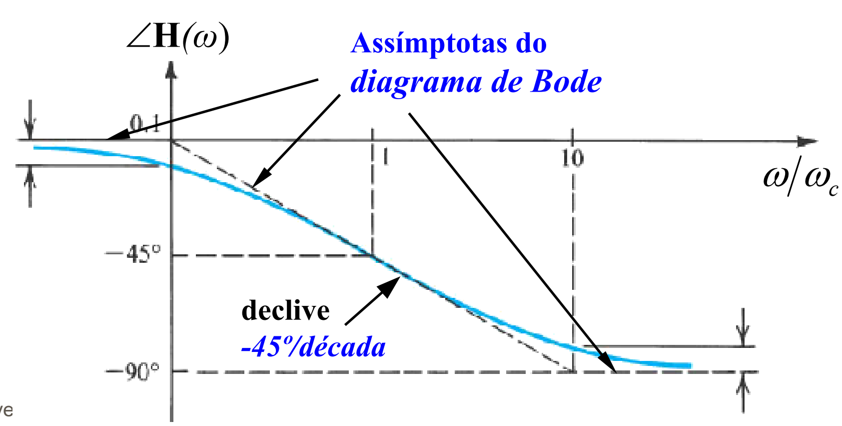
Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode



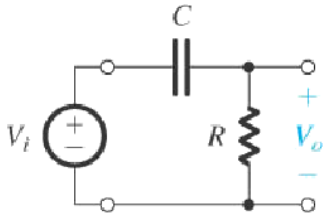
- Para a *resposta de fase* também é possível obter um diagrama de Bode.

$$\angle\mathbf{H}(\omega) = -arctg(\omega RC) = -arctg(\omega/\omega_c)$$

- Para frequências muito baixas, e.g. $\omega < 0.1\omega_c$: $\angle\mathbf{H}(0) \approx 0^o$
- Para frequências muito elevadas , e.g. $\omega > 10\omega_c$: $\angle\mathbf{H}(\infty) \approx -90^o$
- Para $\omega = \omega_c$:
  $\angle\mathbf{H}(\omega_c) = -45^o$

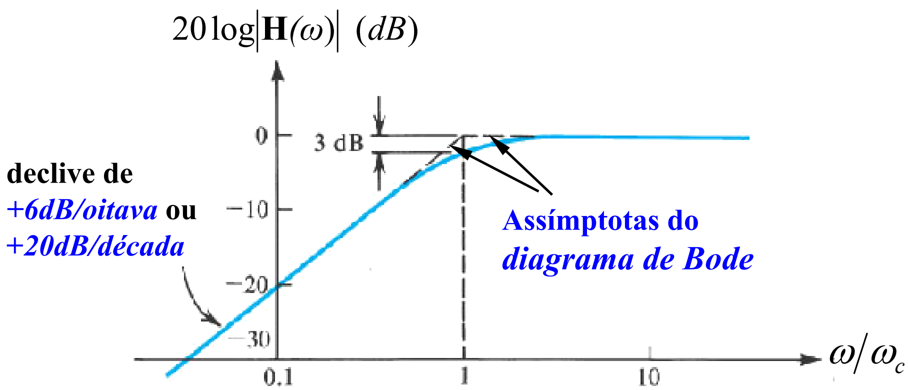


Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode

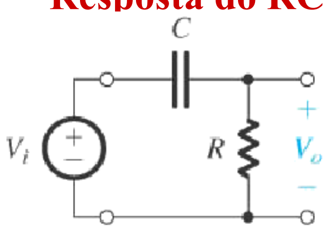


$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega)^2}} \qquad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- **Para a resposta em amplitude o *Diagrama de Bode* é**

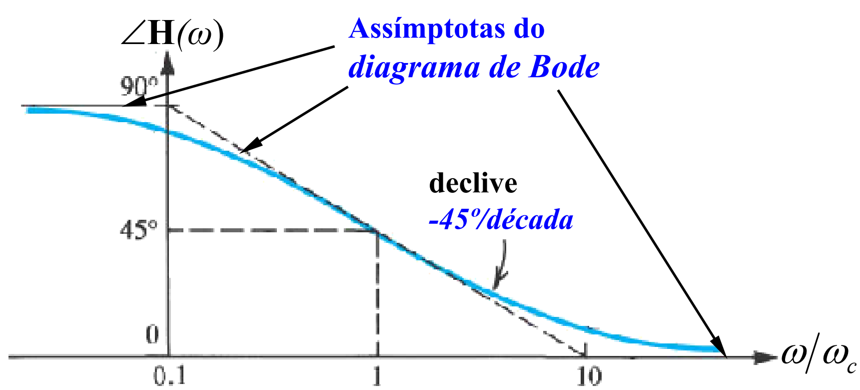


Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode



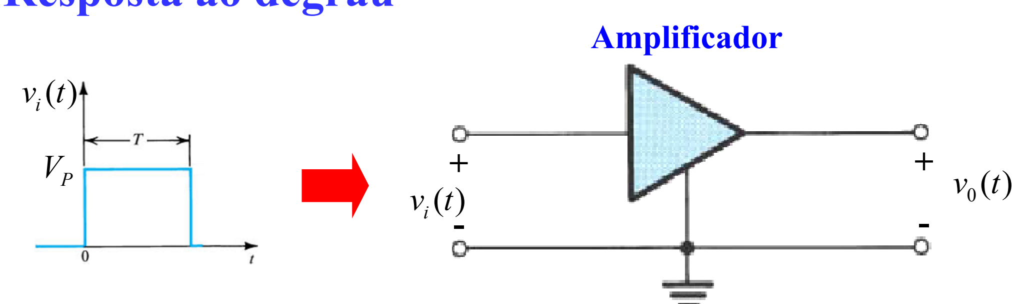
$$\angle\mathbf{H}(\omega) = arctg(\omega_c/\omega) \qquad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- **Para a resposta de fase o *Diagrama de Bode* é**



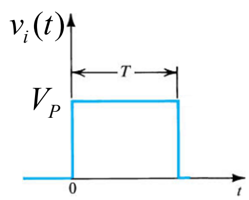
Resposta ao degrau

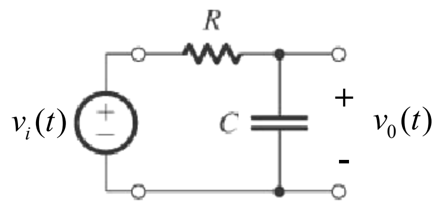
Resposta ao degrau



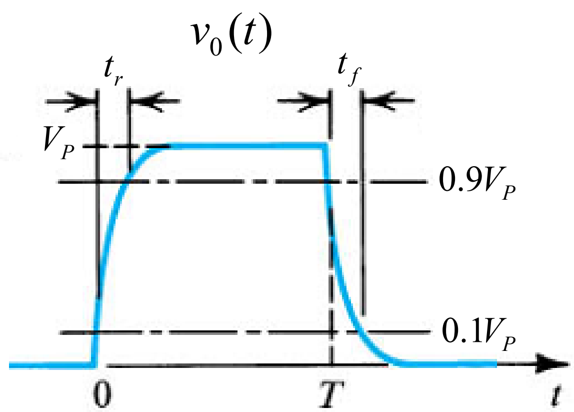
- **Traduz a forma com o sistema reage quando lhe é aplicado na entrada um *sinal em degrau*: variação abrupta entre dois valores;**
- **Na prática o que se faz é aplicar, não um degrau, mas um impulso ou uma onda quadrada;**
- **A resposta ao degrau permite inferir sobre a resposta em frequência.**

Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo





- **A velocidade com que o circuito responde ao degrau é quantificada pelo *tempo de subida*, t_r;**
- **t_r - tempo que $v_0(t)$ leva para subir de *10%* de V_P até *90%;***
- **t_f – *tempo de descida* – define-se de forma identica (*90* a *10%*).**

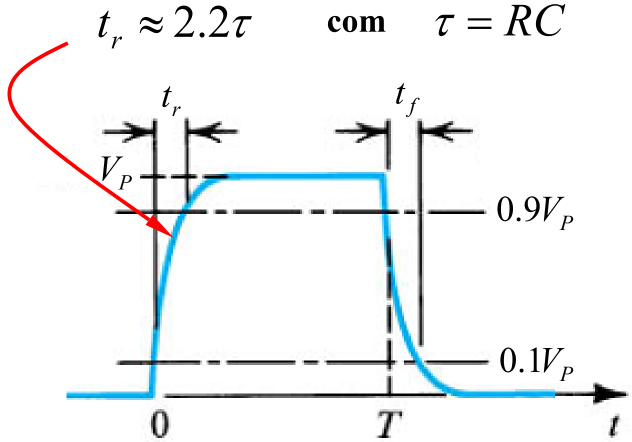


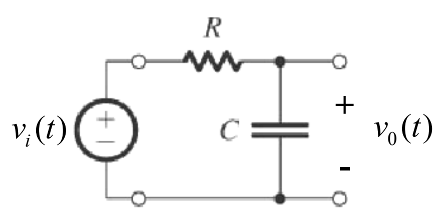
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo

- **Do estudo da carga do condensador é possível mostrar que …**

$$t_r \approx 2.2\tau \quad \textbf{com} \quad \tau = RC$$



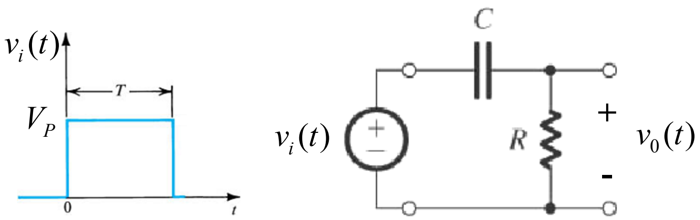


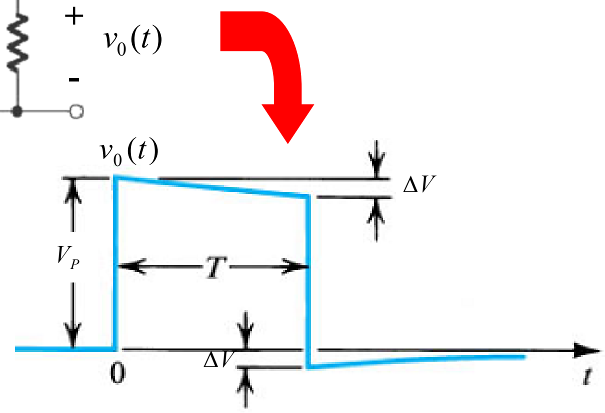
Ora, como $\tau = RC = 1/\omega_c$

então $t_r = \dfrac{2.2}{\omega_c}$

- **Portanto a resposta ao degrau é tão mais rápida quanto maior for ω_c.**

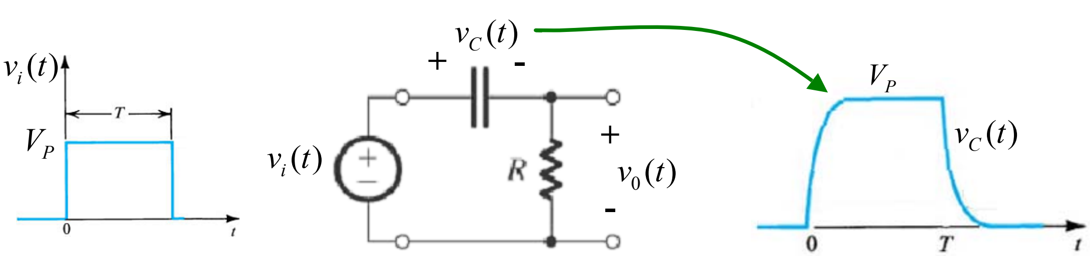
Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



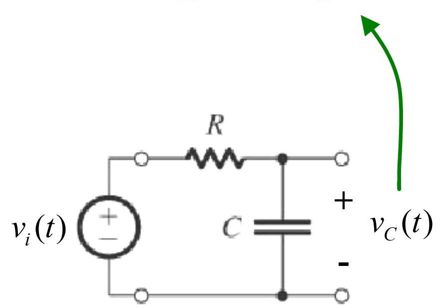


- Como responde bem às altas frequências, o circuito reproduz fielmente as transições rápidas do sinal ($t_r = 0$);
- … mas como responde mal às frequências baixas (incluindo DC), não reproduz bem as partes planas do sinal;
- Vejamos primeiro porque razão $v_0(t)$ tem esta forma.

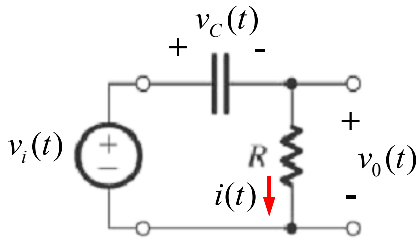
Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



- Para se perceber a forma de $v_0(t)$, reparemos, primeiro, que o circuito é também um RC série, logo $v_C(t)$ deve ser igual à tensão de saída do RC passa-baixo.



Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto

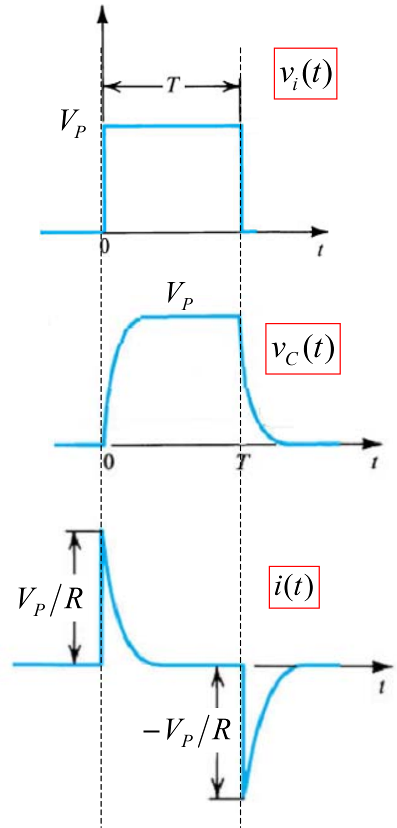


- A corrente no circuito, *i(t)*, deverá ter a forma…

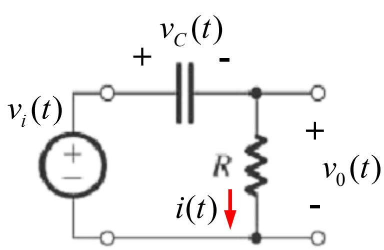
- Em $t = 0$, como o condensador está descarregado $i(t=0^+) = \dfrac{V_P}{R}$

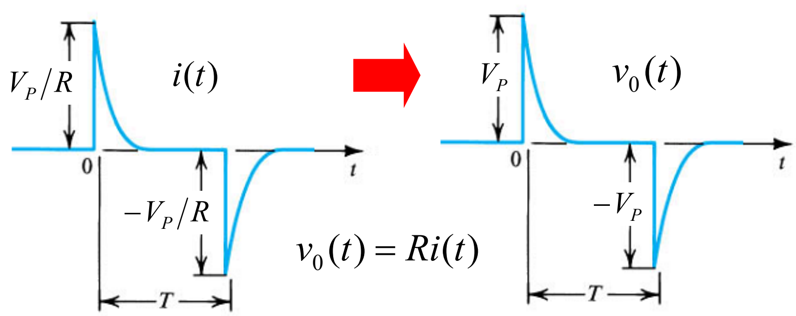
- Em $t = T^+$, $v_i(t = T^+) = 0V$ e $v_C(t = T^+) = V_P$ pelo que

$$i(t = T^+) = -\frac{V_P}{R}$$



Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto





- Mas note-se que esta é a resposta se $T >> \tau$

Se *T* for mais baixo, obtemos