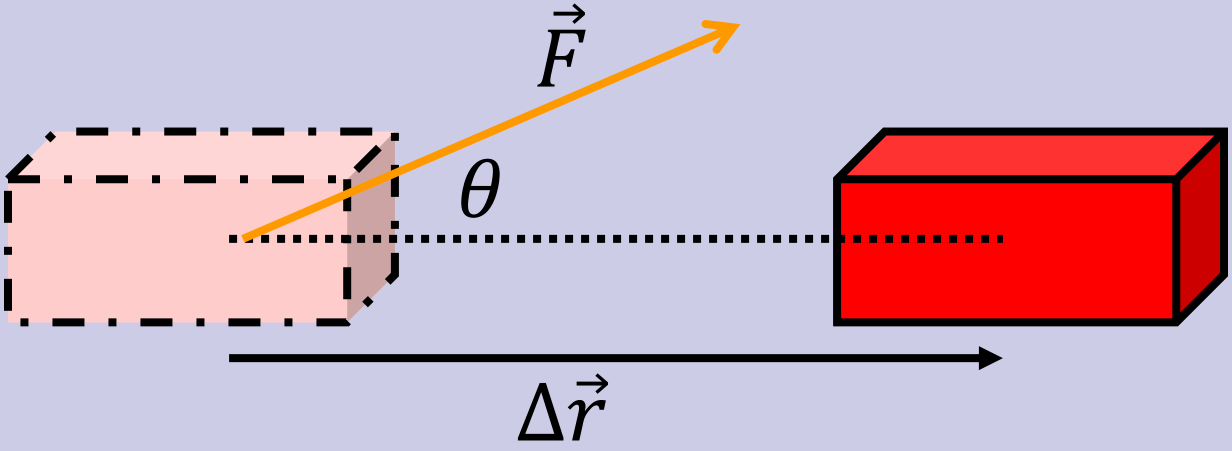
Parte I: Fundamentos de Mecânica Clássica

Capítulo I.2 Trabalho e Energia

universidade de aveiro

Trabalho de uma força constante

- Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a ação duma força $\vec{F}$ constante



O trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ durante o deslocamento $\Delta\vec{r}$ é dado pelo produto

$$W = \|\vec{F}\| \|\Delta\vec{r}\| \cos\theta$$

Ou com o produto interno (escalar)

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Trabalho de uma força constante

Em geral, para uma força constante com componentes cartesianas

$$\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}$$

E um deslocamento:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath} + \Delta z\,\hat{k}$$

O trabalho de $\vec{F}$ **durante o deslocamento é**

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Trabalho de forças constantes

Uma força realiza trabalho nulo se:

$$W = 0\ J \begin{cases} \text{O deslocamento é nulo} \\ \text{A força é perpendicular ao deslocamento} \end{cases}$$

No S. I. a unidade fundamental de trabalho é o joule (J)

Quando várias forças são aplicadas a um corpo, o trabalho total (da resultante) calcula-se usando a propriedade distributiva:

$$W(\vec{F}_R) = \left(\sum_i^n \vec{F}_i\right).\Delta\vec{r} = \vec{F}_1.\Delta\vec{r} + \vec{F}_2.\Delta\vec{r} + \cdots \vec{F}_n.\Delta\vec{r}$$

O trabalho da resultante é igual à soma dos trabalhos de todas as forças

Definição de Potência

Potência é a taxa temporal com que é realizado trabalho

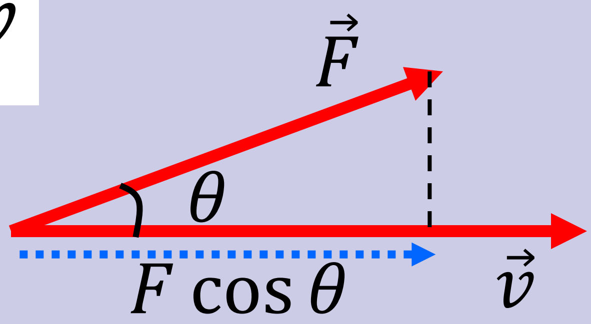
Realizando um trabalho W num intervalo de tempo Δt

$$P_{média} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

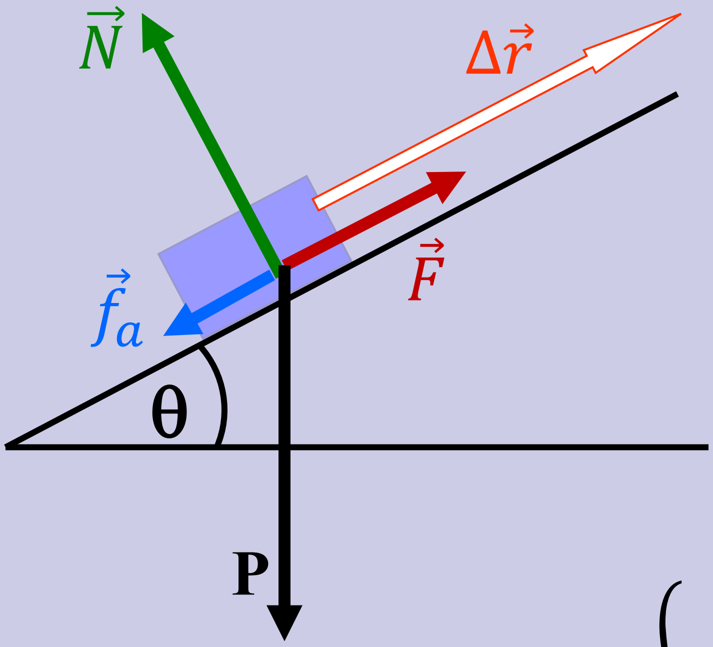
$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}.\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$P(t) = \|\vec{F}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$



Exemplo de cálculo do trabalho de forças constantes

Um corpo ($m = 1$ kg) sobe um plano inclinado ($\theta = 30^{\text{o}}$) , com atrito ($\mu = 0{,}2$) , deslocando-se$\|\Delta\vec{r}\| = 1$ m, sob a ação duma força de intensidade 10 N paralela ao plano



$$\begin{cases} W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = 10\times 1\times \cos 0° = 10 \text{ J} \\ W(\vec{N}) = \vec{N}\cdot\Delta\vec{r} = N\times 1\times \cos 90° = 0 \\ (\text{pois } \vec{N}\perp\Delta\vec{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r} = \|\vec{P}\|\times\|\Delta\vec{r}\|\times \cos 120° \\ W(\vec{P}) = 9{,}8\times 1\times(-\cos 30°) = -4{,}9 \text{ J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{f}_a = \mu\|\vec{N}\| = \mu\, m\, g \cos 30° = 1{,}7 \text{ N} \\ W(\vec{f}_a) = \vec{f}_a\cdot\Delta\vec{r} = 1{,}7\times 1\times \cos 180° = -1{,}7 \text{ J} \end{cases}$$

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força depende da posição?

Considere-se um deslocamento segundo x e $F_x(x)$ a componente da força nessa direção

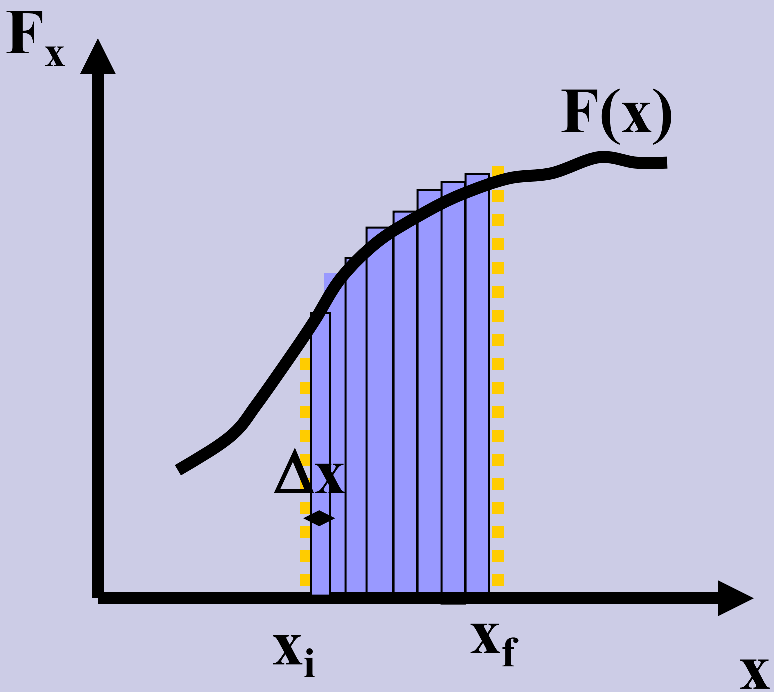
Para um deslocamento $\Delta\vec{x}$

$$\Delta W = F_x(x)\,\hat{\imath}\cdot\Delta x\,\hat{\imath}$$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,\hat{\imath}\cdot\Delta x\,\hat{\imath}$$

No limite $\Delta x \to 0$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



Trabalho de forças variáveis: Generalização

Deslocamento não retilíneo

Contribuem as componentes da força segundo x, y e z, cada uma delas dependendo dos pontos x,y,z da trajetória.

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\,.\,d\vec{r} = \int_A^B F_y(x,y,z)dx + F_y x,y,z)dy + F_z x,y,z)dz$$

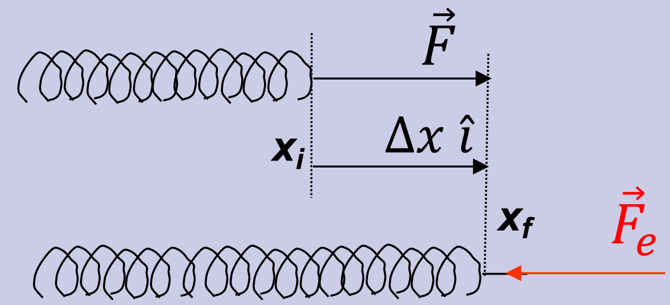
$$W = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x,y,z)dx + \int_{r_i}^{r_f} F_y(x,y,z)dy + \int_{r_i}^{r_f} F_z(x,y,z)dz$$

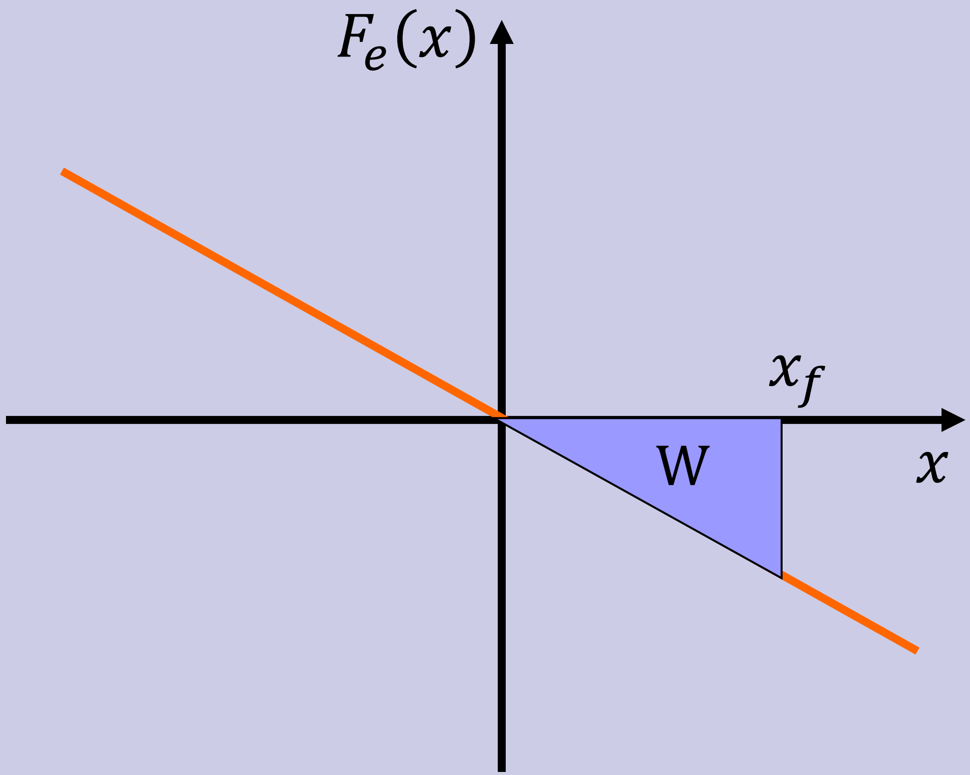
Integral de caminho (linha)

O trabalho será dado pela **soma de três integrais**, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas são reescritas à custa da variável de integração, usando a equação que descreve a trajetória.

Trabalho realizado por uma mola

$$\vec{F}_e = F_e(x)\,\hat{\imath} = -kx\,\hat{\imath}$$





Trabalho realizado PELA mola

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_e(x)\,\mathrm{d}x$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,\mathrm{d}x$$

$$W = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho realizado PELA mola

$$x_i = 0 \Rightarrow W = -\frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho e Energia

Como descrever o movimento de um corpo relacionado diretamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo?

Seja $\vec{F}_R$ a resultante de um conjunto de forças que atuam numa partícula. Para um deslocamento segundo *xx,* o trabalho realizado é:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

Usando a 2ª Lei de Newton pois $\vec{F}_R$ é resultante

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right) \times \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \times v$$

Pela regra da derivada da função composta, elimina-se t e explicita-se a velocidade

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv\left(\frac{d\mathrm{v}}{dx}\right)dx = \int_{x_i}^{x_f} m\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right)dx$$

Lembrando que:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_i^2$$

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

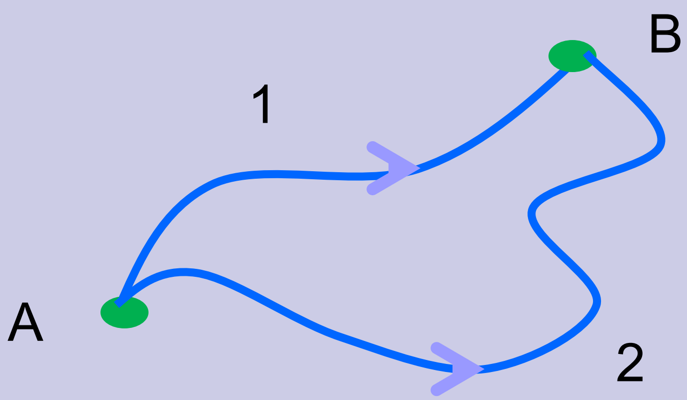
TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA

Este resultado é válido em geral, para uma trajetória arbitrária

Forças Conservativas

Uma força é CONSERVATIVA se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for INDEPENDENTE do caminho seguido entre esses pontos

Nestas condições, o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento



F conservativa

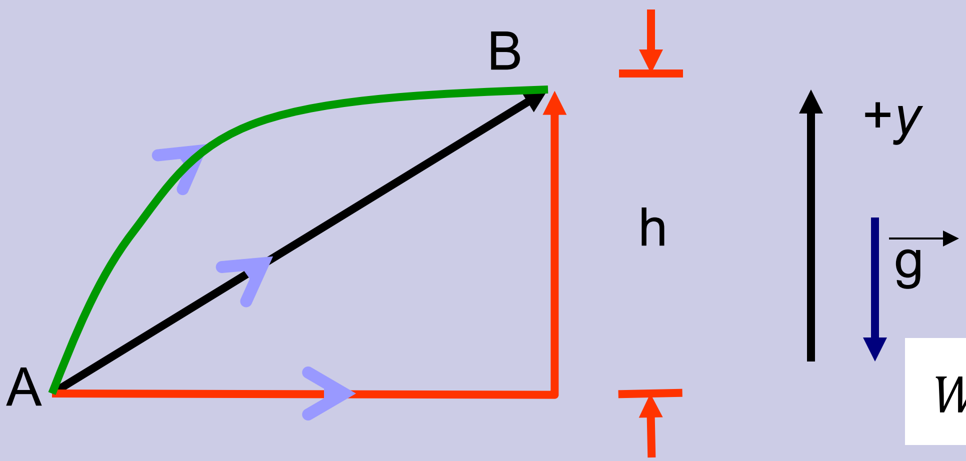
$$W_{AB}(caminho\ 1) = W_{AB}(caminho 2)$$

Ainda, o trabalho realizado ao longo dum percurso FECHADO é NULO

Forças Conservativas

- *Gravítica*
- *Eletrostática*
- *Elástica duma mola*

No caso da **força gravítica** (junto à superfície da Terra) em que é constante g, o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial. **Porquê?**



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \,.\, d\vec{r} = \int_A^B F_y dy \Leftrightarrow$$

$$W_{AB} = -\int_A^B mg\, dy = -mg(y_B - y_A)$$

Para qualquer trajeto de A→B $W_{AB} = -mg\left(y_B - y_A\right)$

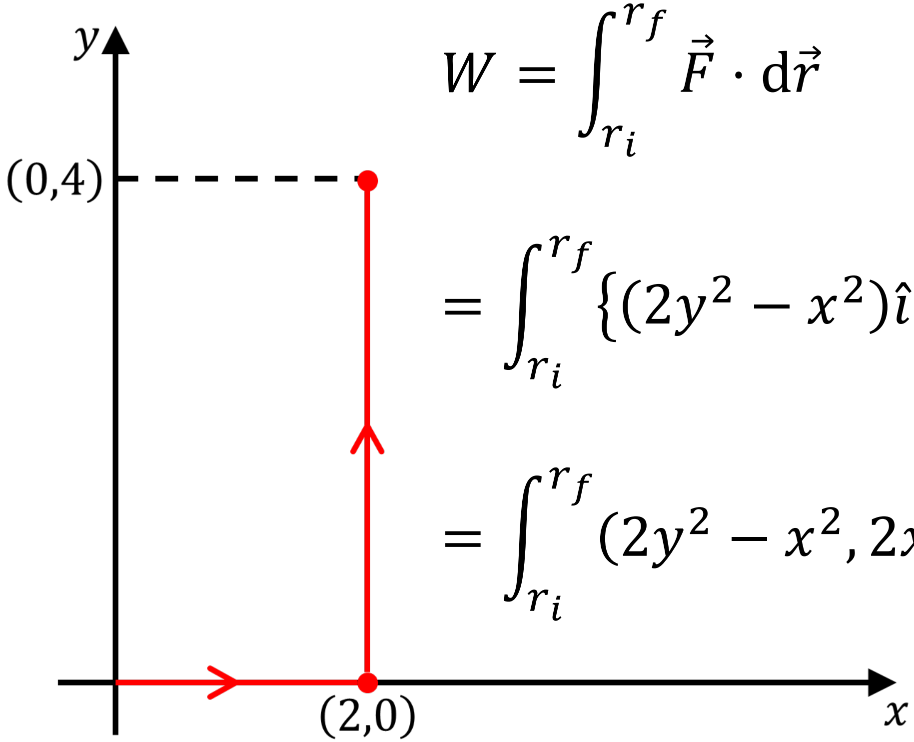
Exercício 3 (capítulo I.2)

3* - Uma partícula está sujeita a uma força $\vec{F} = (2y^2 - x^2)\hat{\imath} + 2xy\,\hat{j}$. Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se move da origem (0,0) para o ponto (2,4) ao longo dos seguintes caminhos:

a) ao longo do eixo dos x de (0,0) até (2,0) e depois paralelo a y até (2,4).
b) ao longo do eixo dos y de (0,0) até (0,4) e depois paralelo a x até (2,4).
c) ao longo do segmento de reta que une os dois pontos.
d) ao longo da parábola $y=x^2$.
e) Que conclui sobre a força poder ser conservativa? Justifique.

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

a)



$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} \{(2y^2 - x^2)\hat{\imath} + (2xy)\hat{\jmath} + 0\hat{k}\} \cdot \{\mathrm{d}x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}z\,\hat{k}\}$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} (2y^2 - x^2, 2xy, 0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

Como estamos em coordenadas cartesianas,

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}z\,\hat{k}$$

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

$$= \int_{x_i}^{x_f} (2y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{y_i}^{y_f} 2xy\,\mathrm{d}y$$

$$= \underbrace{\int_0^2 (2y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x}_{y=0} + \underbrace{\int_0^4 2xy\,\mathrm{d}y}_{x=2} = \int_0^2 -x^2\mathrm{d}x + \int_0^4 4y\,\mathrm{d}y$$

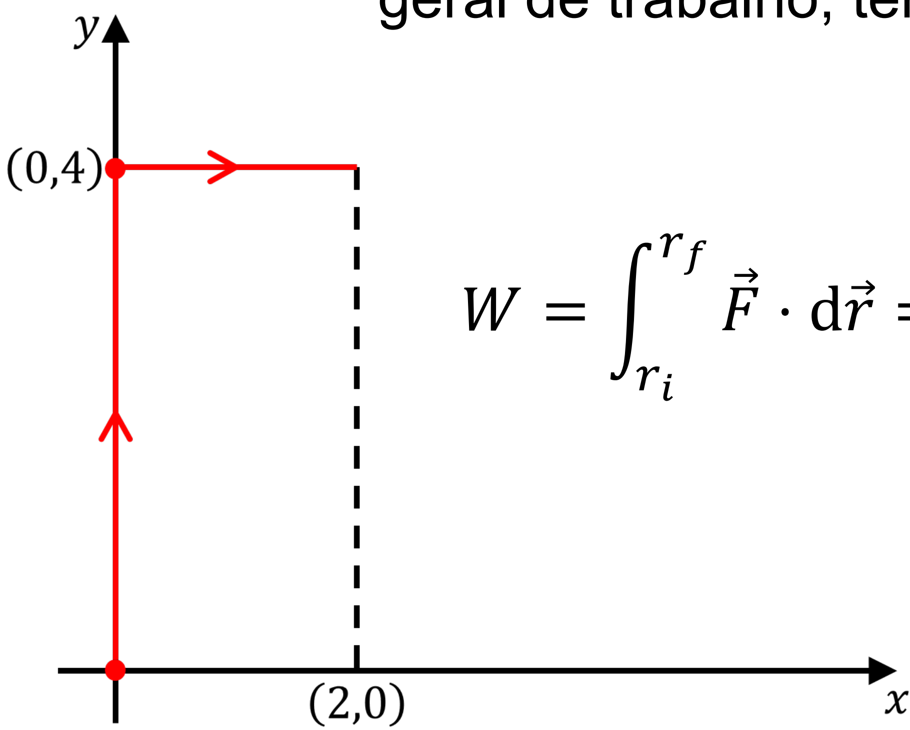
$$= -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 4\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = -\frac{8}{3} + 2\times 16$$

$W = \dfrac{88}{3}$ J > 0, logo o sistema recebe energia da vizinhança

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

b)

Vejamos agora o que acontece quando é descrita outra trajetória. Aplicando novamente o conceito geral de trabalho, temos:



$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \underbrace{\int_0^2 (2y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x}_{y\,=\,4} + \underbrace{\int_0^4 2xy\,\mathrm{d}y}_{x\,=\,0}$$

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

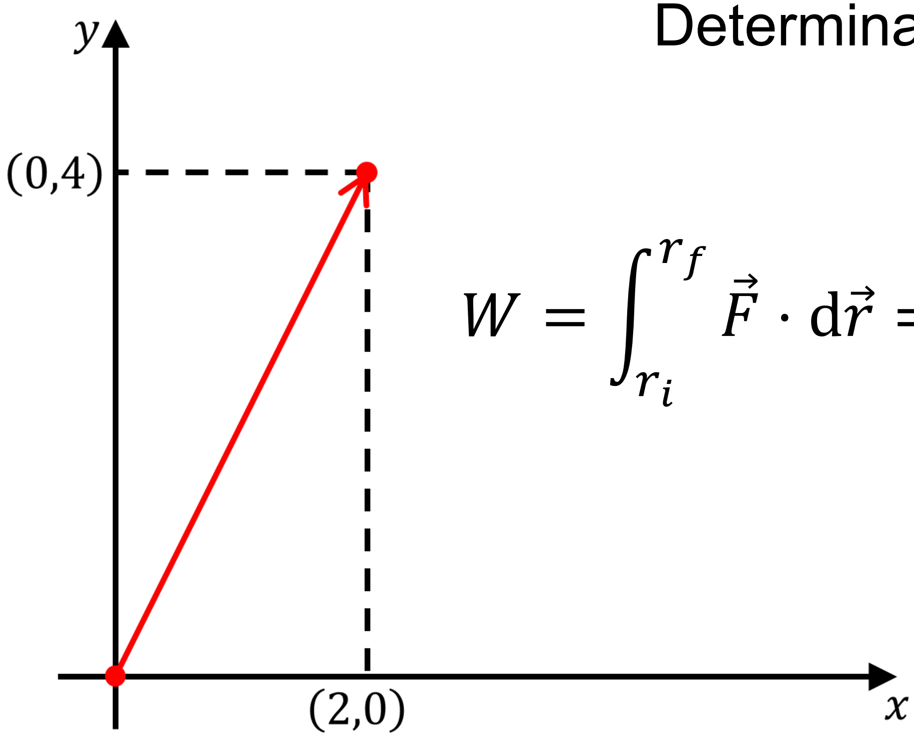
$$= \int_0^2 (2\times4^2 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^4 2\times0y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 (32 - x^2)\,\mathrm{d}x = 32x - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = 32\times2 - \frac{8}{3} = 64 - \frac{8}{3} = \frac{184}{3}\ \mathrm{J}$$

Conclusão: apesar de o corpo ter atingido a mesma posição, o custo energético para a vizinhança é <u>diferente</u>

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

c) W calculado ao longo do segmento de reta que une ambos os pontos



Determinar a equação da trajetória:

$$y = mx + b$$

$$y = 2x$$

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \underbrace{\int_0^2 (2y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x}_{\substack{y = f(x) \\ y = 2x}} + \underbrace{\int_0^4 2xy\,\mathrm{d}y}_{\substack{x = f(y) \\ x = \frac{y}{2}}}$$

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

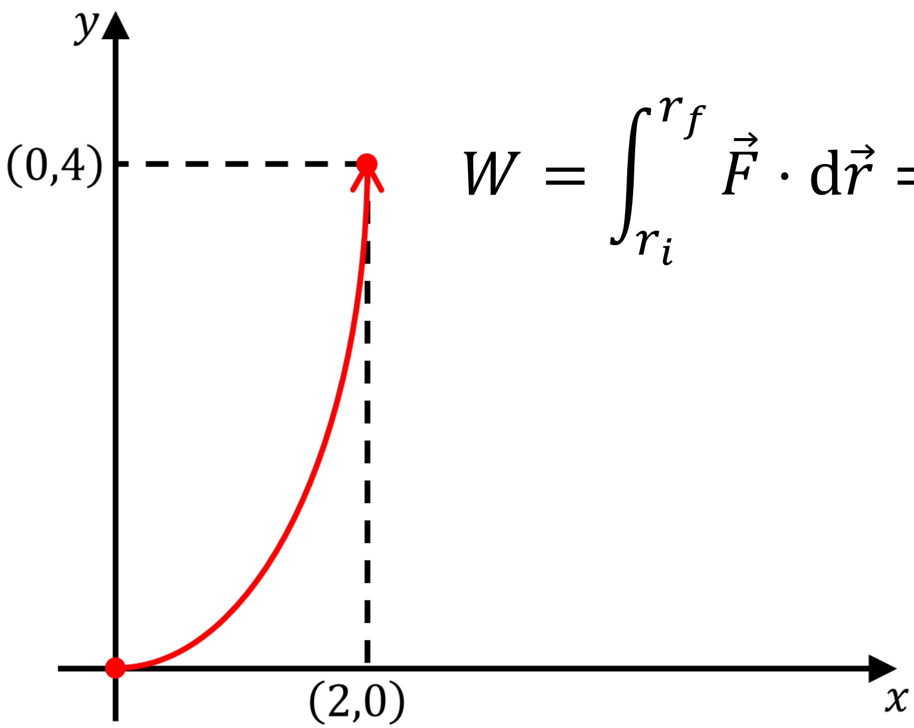
$$= \int_0^2 (2\times(2x)^{\,2} - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^4 2\left(\frac{y}{2}\right) y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 (8x^2 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^4 y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^2 7x^2\,\mathrm{d}x + \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4$$

$$= 7\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4 = \frac{7}{3}\times 8 + \frac{64}{3} = 40\ \mathrm{J}$$

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

d) W ao longo da parábola $y = x^2$



$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \underbrace{\int_0^2 (2y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x}_{y = x^2} + \underbrace{\int_0^4 2xy\,\mathrm{d}y}_{x = \sqrt{y}}$$

Resolução do exercício 3 (capítulo I.2)

$$= \int_0^2 (2x^4 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^4 2\sqrt{y}\times y\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 + 4\frac{y^5}{5}\bigg|_0^4 = 7\times\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 4\times\frac{4^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}\times 32 = \frac{536}{15}\ \mathrm{J}$$

e) Como o trabalho realizado por $\vec{F}$ depende da trajetória, então $\vec{F}$ não é uma força conservativa

Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto ou de posição) designada de ENERGIA POTENCIAL satisfazendo:

$$W_{Fcons} = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$E_{potencial}$ no ponto inicial (A)

$E_{potencial}$ no ponto final (B)

O trabalho realizado por uma força conservativa duma posição inicial para uma final é o *simétrico* da variação da ENERGIA POTENCIAL nesse trajeto

Energia potencial e forças conservativas

A variação de energia potencial num deslocamento é dada pelo simétrico do integral de caminho da força (conservativa)

$$W_{Fcons} = \int_A^B \vec{F}\,.\,d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Se soubermos a energia potencial em cada ponto, poderemos saber a força correspondente?

$$W_{Fcons} = \int_A^B F_{cons}\, dr cos\theta = -\int_A^B dE_p$$

$$F_{cons} dr cos\theta = -dE_p$$

É a componente da força na direção do deslocamento

$$F_{cons} cos\theta = -\frac{dE_p}{dr}$$

Derivada direcional de *E*$_P$

Energia potencial e forças conservativas

No caso geral em que a E_p depende da posição, (x, y, z), as componentes cartesianas da força são calculadas através de :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} E_p(x,y,z)\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} E_p(x,y,z)\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} E_p(x,y,z)\,\hat{k}\right)$$

Como $E_p(x, y, z)$ é uma grandeza escalar, $\vec{F}$ é dada pelo produto do vetor *nabla* $\vec{\nabla}$ ou grad com E_p

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}$$

Diz-se então que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\,\mathrm{grad}\, E_p$,

A Força é o simétrico do gradiente da E_p

Energia Potencial Gravítica

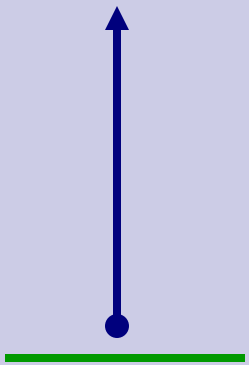
Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{\vec{P}} = \int_A^B \vec{P}\,.\,d\vec{r} = -(mgy_B - mgy_A)$$

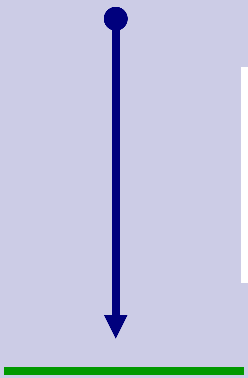
Energia potencial gravítica (junto à superfície da Terra)

$$E_{p,g} = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, o zero da $E_{p,g}$



$$\Delta E_{p,g} > 0$$
$$W < 0$$



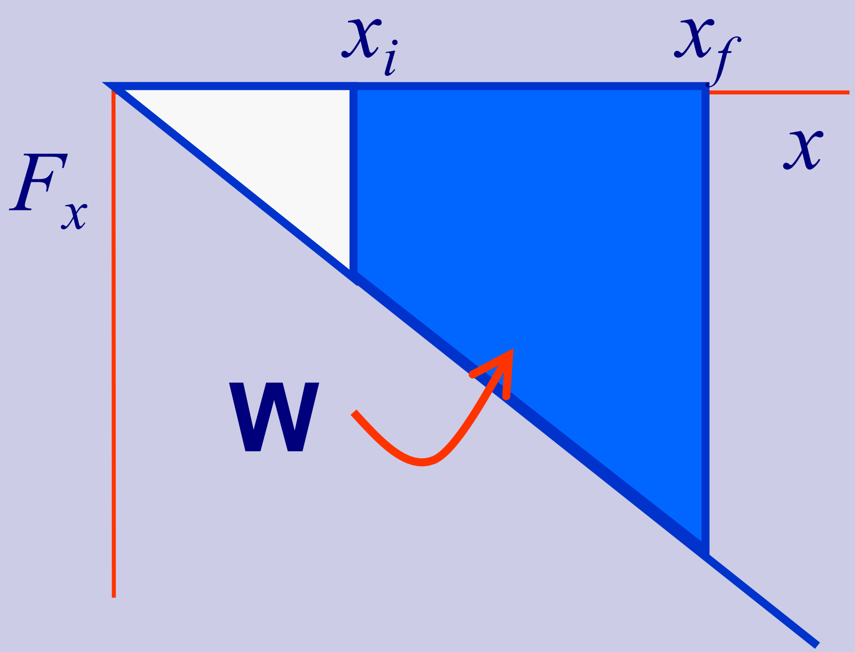
$$\Delta E_{p,g} < 0$$
$$W > 0$$

Energia Potencial Elástica

No regime elástico, em que $\vec{F} = -kx\,\hat{\imath}$

O trabalho de x_i até x_f é:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$



Define-se a energia potencial elástica duma mola como

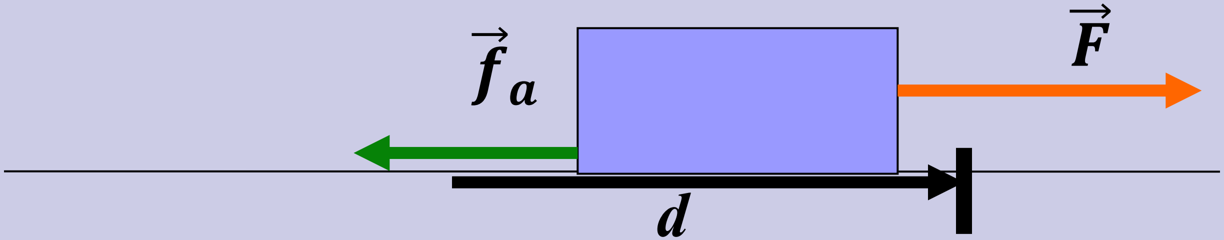
$$E_{p,e} = \frac{1}{2}kx^2$$

Atenção: x = 0 é a posição de equilíbrio, não é arbitrária.

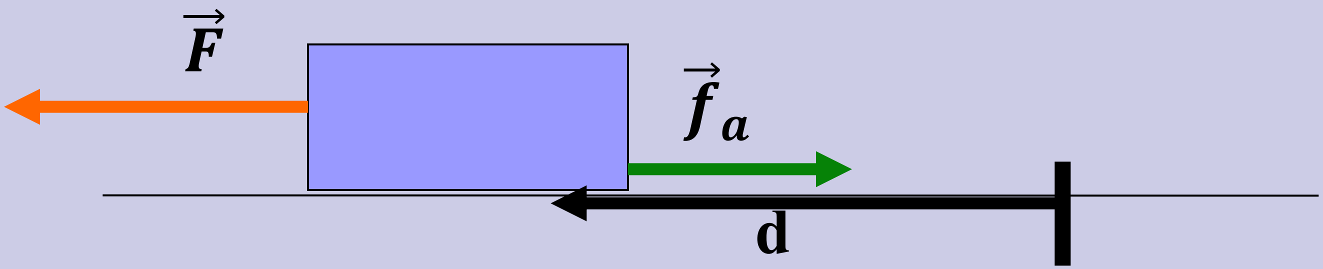
Forças não - conservativas: atrito

No caso de forças não-conservativas, o trabalho realizado num trajeto fechado não é nulo, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito $\boldsymbol{f_a}$



Trabalho da força de atrito A→B $W_{AB} = -f_a d$



Trabalho da força de atrito B→A $W_{BA} = -f_a d$

$$W_{AA}(ida\,e\,volta) = -2f_a d \neq 0$$

Energia Mecânica: Generalização

Em geral, a uma partícula estarão aplicadas forças conservativas e não conservativas. Podemos escrever, para a resultante das forças:

$$\vec{F}_R = \sum \left(\vec{F}_{Cons} + \vec{F}_{NCons} \right)$$

Num deslocamento de *A* para *B*

$$W_{A \to B}\left(\vec{F}_R\right) = \Delta E_C$$

Por outro lado

$$W_{A \to B}\left(\sum \vec{F}_{cons}\right) = -\sum_i \Delta E_{P_i}$$

$$W_{A \to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = W_{A \to B}\left(\vec{F}_R\right) - W_{A \to B}\left(\sum \vec{F}_{Cons}\right) =$$

$$W_{A \to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = \Delta E_C - \left(-\sum_i \Delta E_{P_i}\right) = \Delta E_C + \sum_i \Delta E_{P_i}$$

$$W_{A \to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = \Delta E_M$$

Conservação de Energia

Quando temos forças não-conservativas a realizar trabalho, a energia inicial vai surgir noutras formas não mecânicas, por exemplo, energia térmica devido ao atrito. Genericamente, designamos por energia interna U.

$$\boxed{\Delta E_c + \Delta E_P + \Delta U = 0}$$

Energia convertida noutras formas

A energia total dum sistema isolado é constante.

Há apenas transformações em diversas formas de energia

Exercício #5 (capl.2)

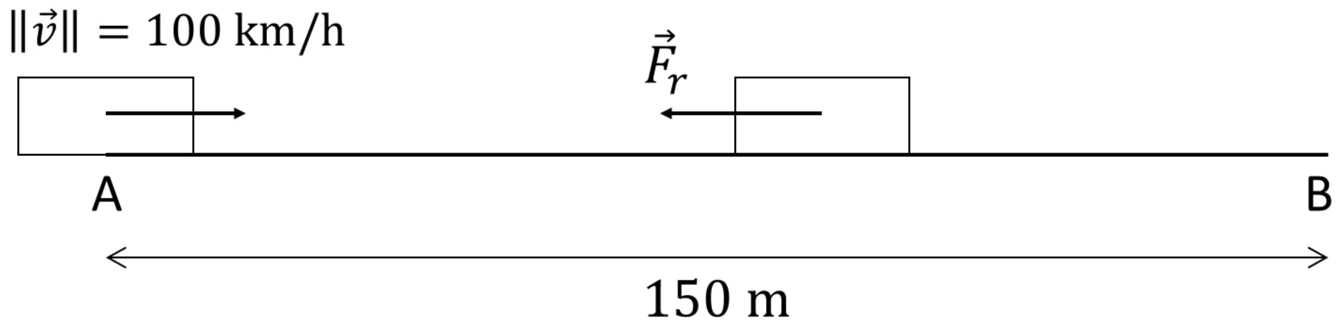
5* - Em estradas com descidas muito acentuadas existem zonas de travagem de emergência, com cascalho e pedras, para as quais o condutor pode orientar o veículo (sem travões, p. ex.) para o imobilizar em segurança. Suponha que um camião, de massa 5000 kg, entra numa zona de travagem de emergência, horizontal, com a velocidade de 100 km/h, parando numa distância de 150 m.

a) Qual a norma da força média exercida pelo piso, que trava o camião?

b) Se a zona de travagem só pudesse ter uma extensão de 100 m, qual a inclinação que deveria haver para o camião poder ser travado?

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

a)



$$v = 100\ \mathrm{km/h} = \frac{100 \times 10^3}{3600} = 27{,}8\ \mathrm{m/s}$$

Pelo teorema da energia cinética

$$\Delta E_c = W\left(\vec{F}_r\right)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2} \times 5000 \times (0 - 27{,}8^2) \approx -1{,}93 \times 10^6\ \mathrm{J}$$

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

$$\Delta E_c = W\left(\vec{F}_r\right) = \int_A^B \vec{F}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r} \Leftrightarrow -1{,}92\times 10^6 = F_{r,m} \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -1{,}92\times 10^6 = F_{r,m}\times 150$$

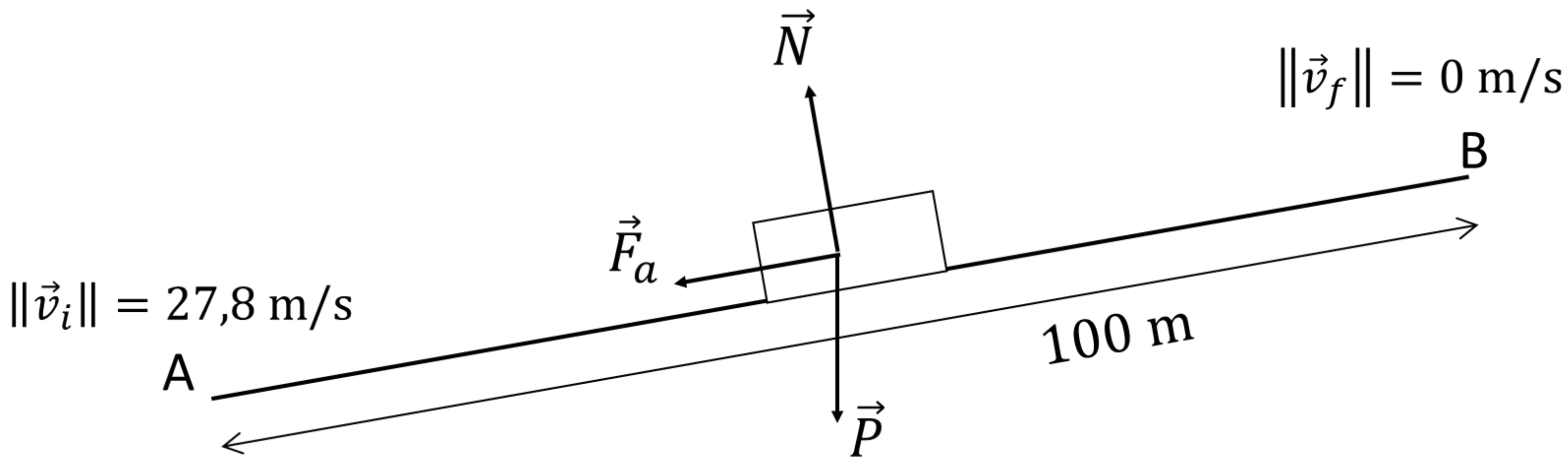
$$\Leftrightarrow F_{r,m} = -1{,}29\times 10^4 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{r,m} = -1{,}29\times 10^4 \hat{e}_x \text{ (N)}$$

$$\left(F_a = \|\vec{N}\|\mu \Rightarrow \mu = \frac{1{,}29\times 10^4}{5000\times 9{,}8} = 0{,}26\right)$$

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

b)



Começamos por representar as forças que atuam no corpo no movimento ao longo do plano inclinado de A até B

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

$$\vec{F}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_a = -mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{e}_x - mg\cos\alpha\;\hat{e}_y + N\hat{e}_y + \vec{F}_a$$

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2}mv_i^2 = -1{,}92\times10^6\ \mathrm{J}$$

$$\vec{F}_r = (-mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F_a)\,\hat{e}_x + (-mg\cos\alpha + N)\,\hat{e}_y$$

$$\|\vec{F}_r\| = \frac{\Delta E_c}{100\ \mathrm{m}} = \frac{1{,}92\times10^6}{100} = 1{,}92\times10^4\ \mathrm{N}$$

Duas hipóteses de resolução!

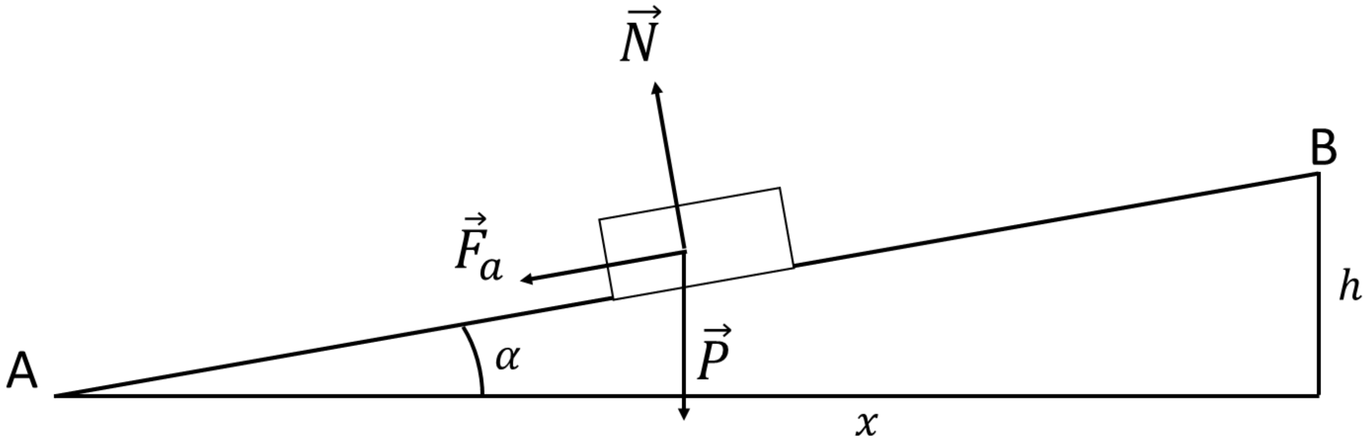
<u>Hipótese 1: Considerando que o atrito não varia em relação à alínea a)</u>

$$\vec{F}_r = -1{,}92\times10^4\hat{e}_x = (-5000\times9{,}8\times\mathrm{sen}\,\alpha - 1{,}29\times10^4)\hat{e}_x$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = 0{,}128 \Rightarrow \alpha \cong 7{,}4^{\mathrm{o}}$$

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

Hipótese 2: não considerar que o atrito é o mesmo da alínea a)



$$x^2 + h^2 = d^2$$

$$x = (d^2 - h^2)^{1/2}$$

$$x = d\cos\alpha$$

$$h = d\sin\alpha$$

$$W(\vec{F}_a) = \Delta E_m$$

$$\|\vec{F}_a\| = \mu\|\vec{N}\| = \mu m g\cos\alpha$$

Usamos o μ calculado em a)

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

$$-F_a d = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$\Leftrightarrow -\mu m g \cos\alpha\, d = -\frac{1}{2} m v_i^2 + mgh$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{h}{\mu} + \frac{v_i^2}{2\mu g}$$

$$\Leftrightarrow (d^2 - h^2)^{1/2} = -\frac{h}{\mu} + \frac{v_i^2}{2\mu g}$$

$$\Leftrightarrow d^2 - h^2 = \frac{h^2}{\mu^2} - \frac{h v_i^2}{\mu^2 g} + \frac{v_i^4}{4\mu^2 g^2}$$

Rearranjando de forma a ficar na forma $ah^2 + bh + c = 0$

$$h^2\left(\frac{1}{\mu^2} + 1\right) - \frac{v_i^2}{\mu^2 g} h + \left(-d^2 + \frac{v_i^4}{4\mu^2 g^2}\right) = 0$$

Resolução do exercício 5 (capítulo I.2)

$$h^2\left(\frac{1}{\mu^2}+1\right)-\frac{v_i^2}{\mu^2 g}h+\left(-d^2+\frac{v_i^4}{4\mu^2 g^2}\right)=0$$

$$a=\frac{1}{\mu^2}+1=15{,}79 \qquad b=-\frac{v_i^2}{\mu^2 g}h=-1166{,}586$$

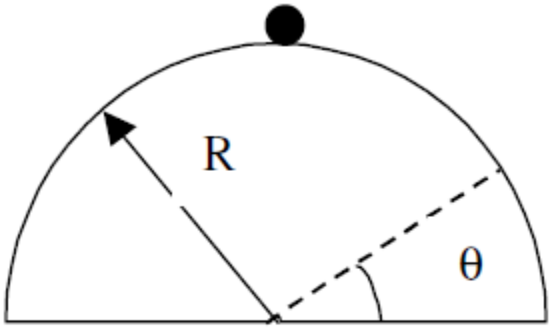
$$c=-d^2+\frac{v_i^4}{4\mu^2 g^2}=12{,}99\times 10^3$$

$$h=\frac{1166{,}586\pm\sqrt{1{,}3609\times 10^6-4\times 15{,}79\times 12{,}99\times 10^3}}{31{,}58}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} h\cong 13{,}51\ \mathrm{m} \\ h\cong 36{,}9\ \mathrm{m}\end{cases}\Leftrightarrow \alpha\cong\begin{cases}\mathrm{arcsen}\,\dfrac{13{,}51}{100}\cong 7{,}8^{\mathrm{o}} \\ \mathrm{arcsen}\,\dfrac{36{,}9}{100}\cong 21{,}7^{\mathrm{o}}\end{cases}$$

Exercício 8 (capítulo I.2)

8* - Uma partícula de massa m, encontra-se, em repouso no topo duma cúpula hemisférica, de raio R, onde pode deslizar, sem atrito

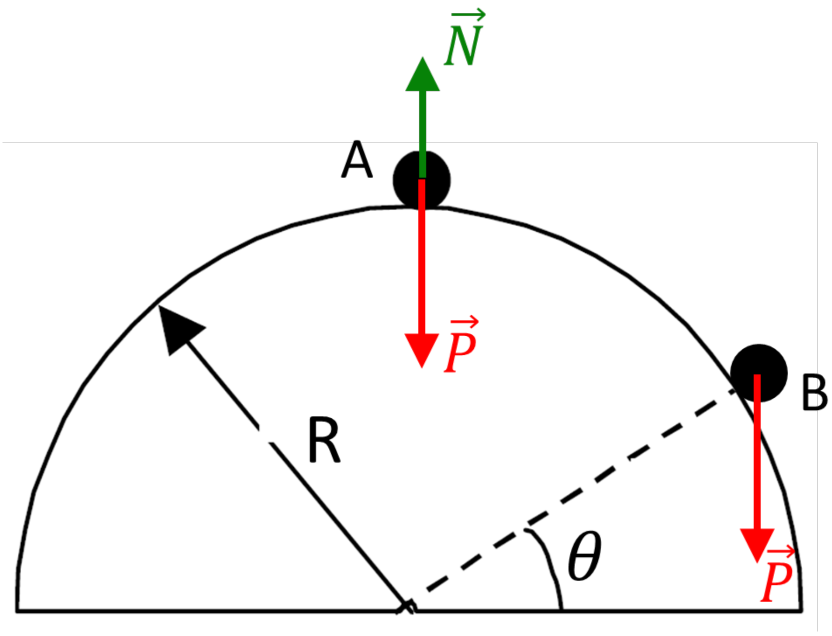


a) Depois de largada, qual o ponto em que a partícula deixa de estar em contacto com a cúpula?

b) Com que velocidade deve ser lançada, horizontalmente, para que não deslize sobre a cúpula?

Resolução do exercício 8 (capítulo I.2)

a)



Informação a retirar do enunciado:

i) Ausência de atrito:

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m^A = E_m^B$$

ii) No ponto em que deixa de tocar na cúpula, a força exercida pela superfície é <u>zero</u>

Resolução do exercício 8 (capítulo I.2)

O que queremos saber é a altura a que a partícula deixa de estar em contacto

$$\begin{cases} E_c^A + E_{p_g}^A = E_c^B + E_{p_g}^B \\ \sum \vec{F}_i^B = m\vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \\ \vec{P} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2gR = v_B^2 + 2gh \\ mg\cos\theta\,\hat{u}_t + mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{u}_n = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2gh + 2gR = v_B^2 \\ m\vec{a}_t = mg\cos\theta\,\vec{u}_t \\ m\vec{a}_n = mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u}_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(-2R\,\mathrm{sen}\,\theta + 2R) = v_B^2 \\ \vec{a}_t = g\cos\theta\,\vec{u}_t \\ \frac{v_B^2}{R} = g\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

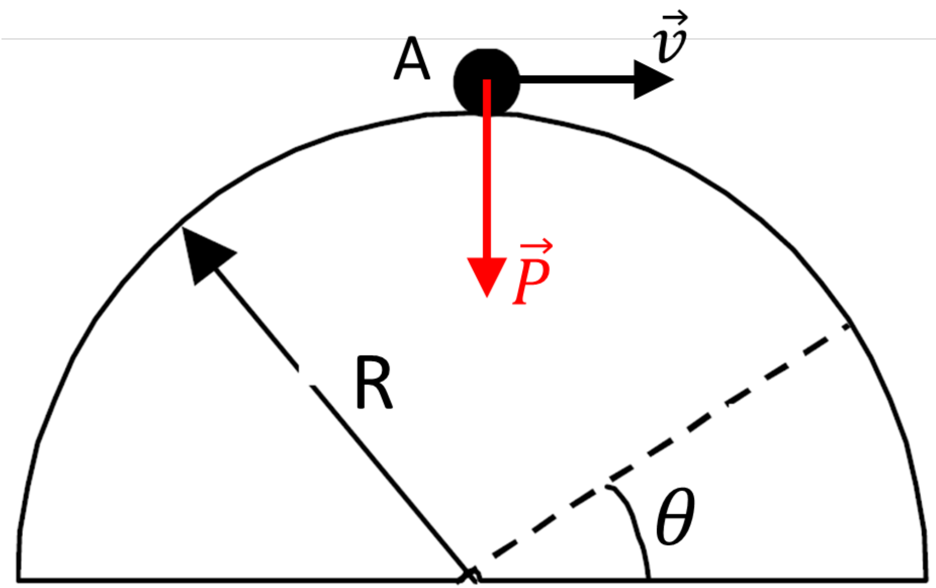
Resolução do exercício 8 (capítulo I.2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_B^2 = 2gR(1 - \operatorname{sen}\theta) \\ - \\ \dfrac{2gR(1 - \operatorname{sen}\theta)}{R} = g\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ 2 - 2\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ \theta = \operatorname{arcsen}\dfrac{2}{3} \approx 42^{\mathrm{o}} \end{cases} \Rightarrow h = R\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}R$$

Resolução do exercício 8 (capítulo I.2)

b)



Para que não deslize sobre a cúpula, temos de considerar que, no ponto A, a componente centrípeta da aceleração é igual <u>apenas ao peso</u>

No ponto de lançamento, o peso $\vec{P} = mg\vec{u}_n$ aponta para o centro de curvatura, i.e., atua como uma força centrípeta

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{gr}$$

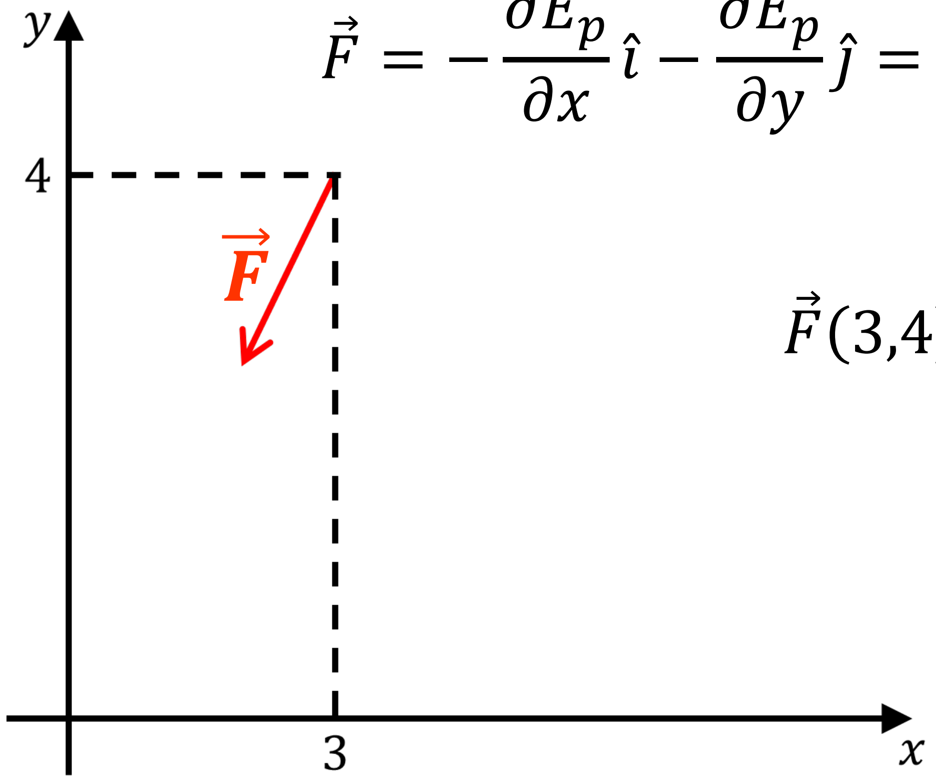
Exercício 13 (capítulo I.2)

13* - Uma partícula de massa M=1kg está sujeita a uma força $\vec{F}$ que resulta de uma energia potencial $U(x,y) = K(x^2 + y^2)$ (x, y em m).

a) Determine $\vec{F}$ (x,y). Represente para alguns pontos do plano xy.
b) Qual a posição de equilíbrio?
c) Supondo que a partícula possui uma trajetória circular em torno da origem, determine o respetivo raio quando a energia total é de 2 J. Que tipo de movimento se verifica?

Resolução do exercício 13 (capítulo I.2)

a)



$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} = -2Kx\hat{\imath} - 2Ky\hat{\jmath} \qquad \text{(N)}$$

$$\vec{F}(3,4) = -6K\hat{\imath} - 8K\hat{\jmath}$$

Resolução do exercício 13 (capítulo I.2)

b) A posição de equilíbrio corresponde a $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$. Se apenas temos $\vec{F}$, então

$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (-2Kx)\hat{\imath} + (-2Ky)\hat{\jmath} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

Outro processo é usar a própria energia potencial e ver para que valores de x e y a E_p é mínima

Resolução do exercício 13 (capítulo I.2)

c) Se a partícula possui uma trajetória circular, então estamos perante um movimento curvilíneo

$$E_m = U(x, y) + E_c$$

$$E_m = K(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$2 = KR^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

Precisamos de outra equação, uma vez que temos duas variáveis

Resolução do exercício 13 (capítulo I.2)

$$\vec{F} = (-2Kx)\hat{\imath} + (-2Ky)\hat{\jmath} = (-2KR\cos\theta)\hat{\imath} + (-2KR\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\jmath}$$

$$\vec{F} = 2KR(-\cos\theta\,\hat{\imath} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) = (2KR)\hat{u}_n$$

concluímos que $\vec{F}$ é uma força central (tem a direção centrípeta)

$$(2KR)\hat{u}_n = (ma_n)\hat{u}_n$$

$$2KR = m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

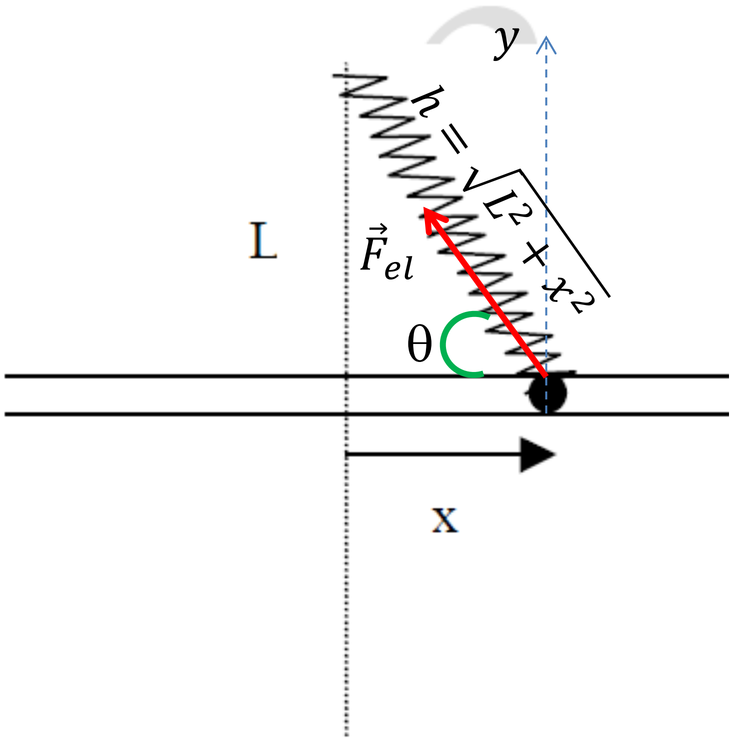
Resolução do exercício 13 (capítulo I.2)

Usando as equações (1) e (2), temos

$$\begin{cases} 2 = KR^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ 2KR = m\frac{v^2}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = KR^2 + KR^2 \\ \frac{mv^2}{2} = KR^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{\sqrt{K}} \\ - \end{cases}$$

Como a única força aplicada (e, portanto, a aceleração) apenas tem componente centrípeta, a norma da velocidade é constante. Assim, o movimento é circular uniforme.

14 - Um corpo de massa m = 1 kg pode deslocar-se, sem atrito, numa calha horizontal, ao longo do eixo dos x. O corpo está ligado a uma mola elástica, de comprimento natural L e constante elástica K, como representado na figura.



a) Se o corpo for deslocado de uma distância x em relação à origem, mostre que a energia potencial é dada por

$$U(x) = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2L^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2}\right)$$

b) Determine $F(x)$, a força resultante sobre a partícula

c) Represente graficamente $U(x)$ e $F(x)$. Qual a posição de equilíbrio?

Resolução do exercício 14 (capítulo I.2)

a) A Força elástica é conservativa, então $W\left(\vec{F}_{cons}\right) = -\Delta E_p$

$$\vec{F}_{el} = \left\|\vec{F}_{el}\right\| \left[\cos\theta\, \hat{e}_x + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_y\,\right]$$

$$\vec{F}_{el} = -k\left(\sqrt{L^2+x^2} - L\right)\left[\cos\theta\, \hat{e}_x + \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_y\,\right]$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}};\ \operatorname{sen}\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$W\left(\vec{F}_{el}\right) = \int_A^B \vec{F}_{el}.\, d\vec{r} = \int_0^x F_{el,x} dx = \int_0^x -k\left(\sqrt{L^2+x^2} - L\right)\cos\theta\, dx$, substituindo

$$W\left(\vec{F}_{el}\right) = \int_0^x -k\left(\sqrt{L^2+x^2} - L\right)\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}dx = -\int_0^x k\, x\, dx + \int_0^x \frac{k\, L\, x}{\sqrt{L^2+x^2}}dx \Leftrightarrow$$

$$W\left(\vec{F}_{el}\right) = -\mathrm{k}\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{k\, L\, 2\, x}{2\sqrt{L^2+x^2}}dx \Leftrightarrow$$

$$W\left(\vec{F}_{el}\right) = -\mathrm{k}\frac{x^2}{2} + \frac{kL}{2}\frac{\left(L^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{1/2}\Bigg]_0^x$$

Resolução do exercício 14 (capítulo I.2)

$$\Leftrightarrow W\left(\vec{F}_{el}\right) = -\mathrm{k}\frac{x^2}{2} + kL\sqrt{L^2 + x^2}\,\Big]_0^x$$

$$\Leftrightarrow W\left(\vec{F}_{el}\right) = -\mathrm{k}\frac{x^2}{2} + kL\sqrt{L^2 + x^2} - kL^2$$

$$\Leftrightarrow W\left(\vec{F}_{el}\right) = -\frac{k}{2}\left[x^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2} + 2L^2\right]$$

$$W\left(\vec{F}_{cons}\right) = -\Delta E_p$$

Vem finalmente,

$$U(x) = E_p(x) = \frac{k}{2}\left[x^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2} + 2L^2\right]$$

b)

$$\vec{F}_{el,x} = -\vec{\nabla} E_p(x) = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x}\,\hat{e}_x = -kx\left[1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right]\hat{e}_x$$

Para k= 1N/m e L = 1m

c)