Mecânica e Campo Eletromagnético

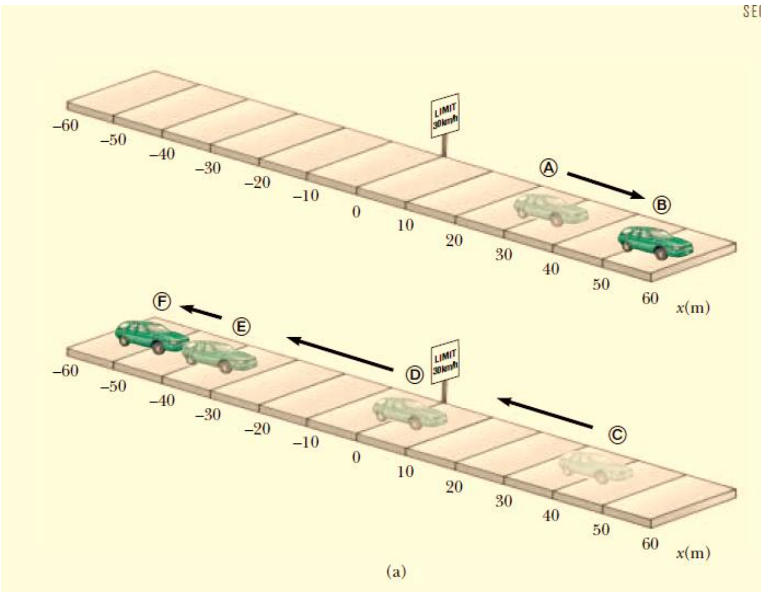
universidade de aveiro

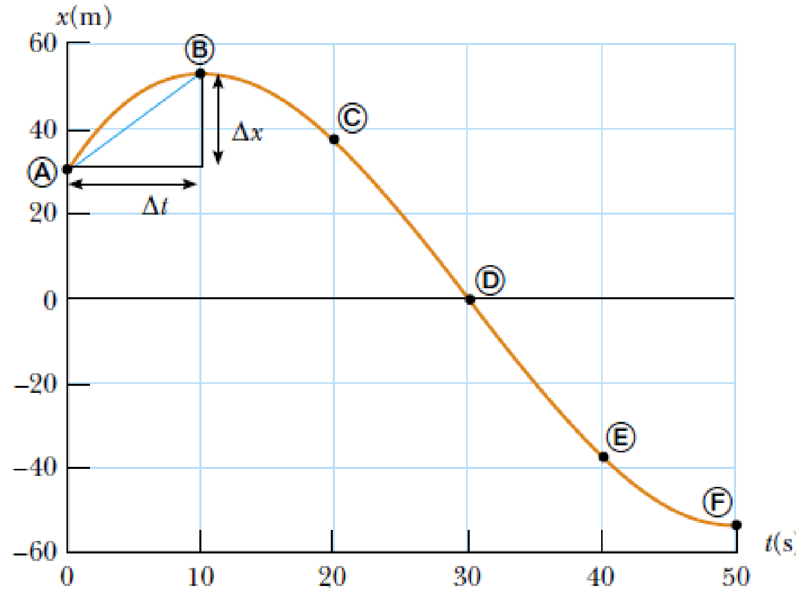
Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1
Cinemática da partícula

universidade de aveiro

Movimento a 1D





Vetor deslocamento

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_f - \vec{r}_i}$$

Vetor velocidade média

$$\boxed{\vec{v}_{média} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}}$$

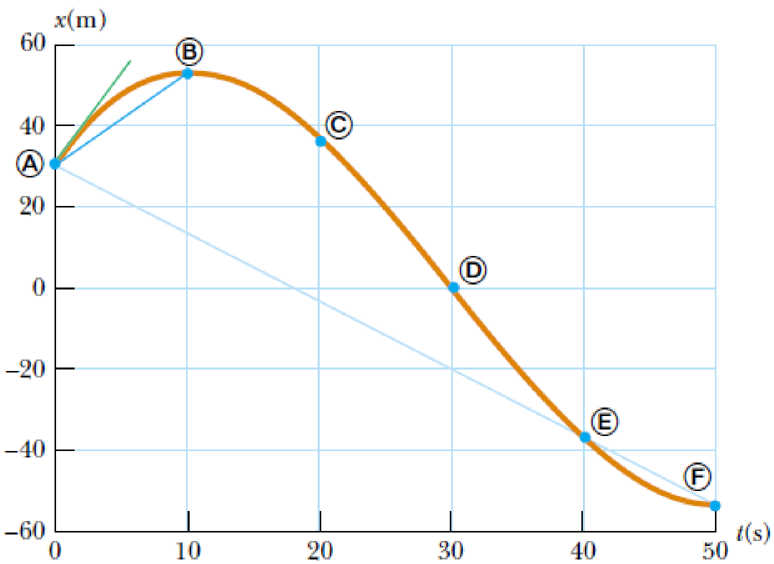
Movimento a 1D

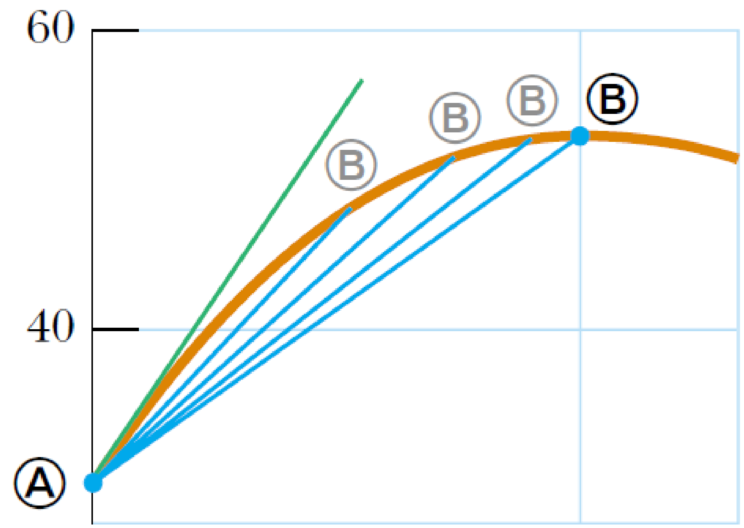
Distância percorrida ou espaço percorrido, *s*

$$\boxed{s = \left\|\vec{r}_{f1} - \vec{r}_{i1}\right\| + \left\|\vec{r}_{f2} - \vec{r}_{i2}\right\| \ldots}$$

Onde cada parcela corresponde a deslocamentos realizados em intervalos de tempo, onde sentido da velocidade se manteve constante.

Movimento a 1D: Velocidade instantânea





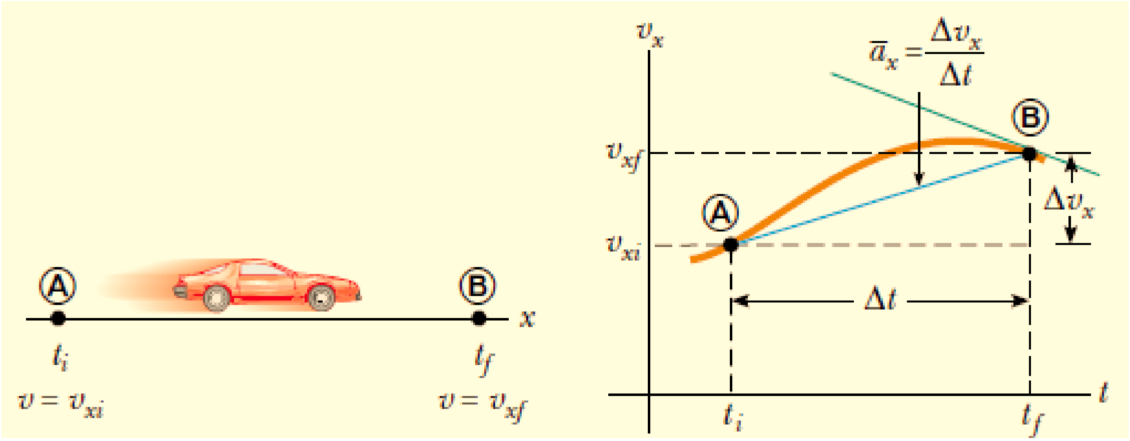
Vetor velocidade instantânea

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Movimento a 1D: aceleração média e instantânea

Vetor aceleração média

$$\boxed{\vec{a}_{média} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}}$$



Vetor aceleração instantânea

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

As equações cinemáticas derivadas do cálculo

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}} \Longrightarrow \boxed{\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) = \int_{t_i}^{t} \vec{a}(t)dt}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \Longrightarrow \boxed{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) = \int_{t_i}^{t} \vec{v}(t)dt}$$

Exercício #1 (cap I.1.1): movimento a 1D

A posição de um objeto que se move **segundo uma linha reta** é dada por: $x = 3{,}0\,t - 4{,}0\,t^2 + t^3$ em que x é expresso em metros e t em segundos.

a) Calcule a posição do objeto para t = 1, 2, 3 e 4 s.

b) Qual o espaço percorrido entre t = 0 e t = 4 s?

c) Qual a velocidade média no intervalo de tempo t = 2 e t = 4 s?

d) Determine a expressão para a velocidade em função do tempo.

Resolução (Exc.1)

a) $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x$:

$\vec{r}(0\text{ s}) = \vec{0}$; o corpo está na origem;

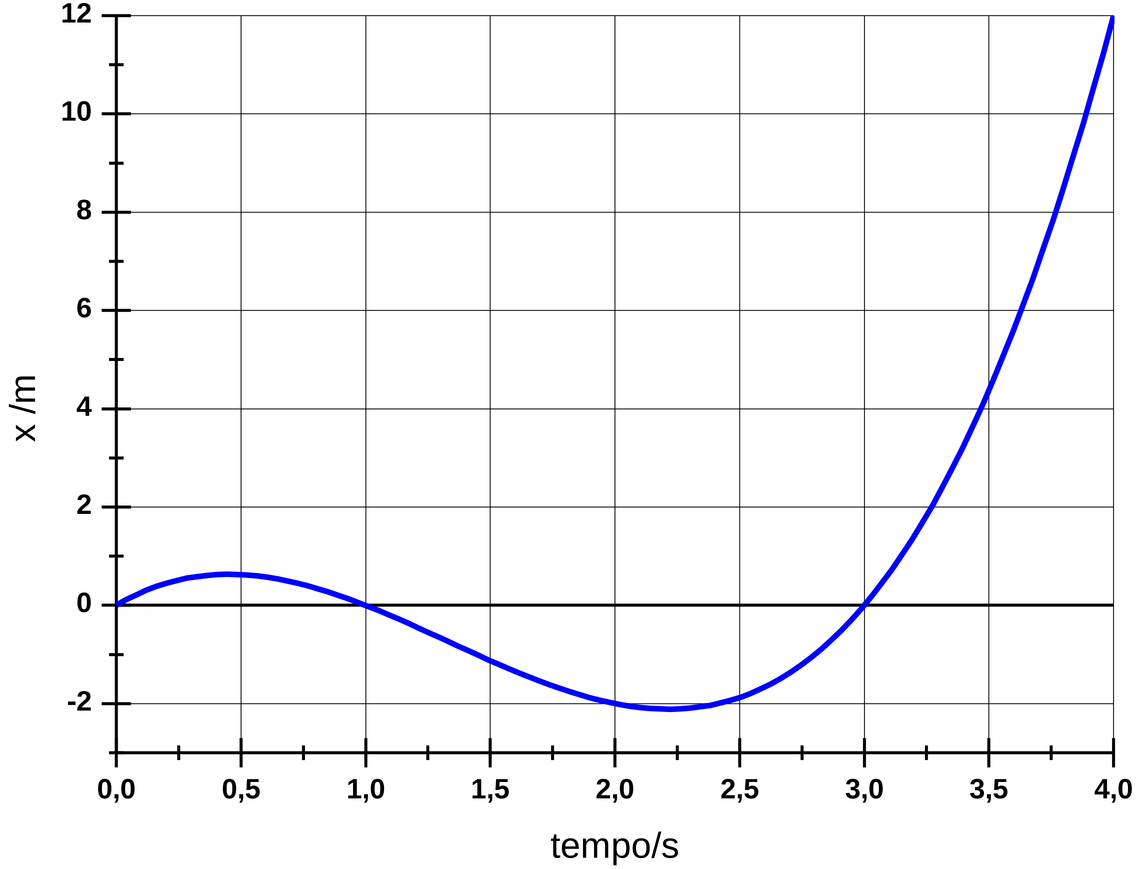
$\vec{r}(1\text{ s}) = \vec{0}$; o corpo está na origem

$\vec{r}(2\text{ s}) = -2\hat{e}_x\ (\text{m})$;

$\vec{r}(3\text{ s}) = \vec{0}$; o corpo está à origem

$\vec{r}(4\text{ s}) = 12\ \hat{e}_x\ (\text{m})$;

a) Gráfico x(t) versus t

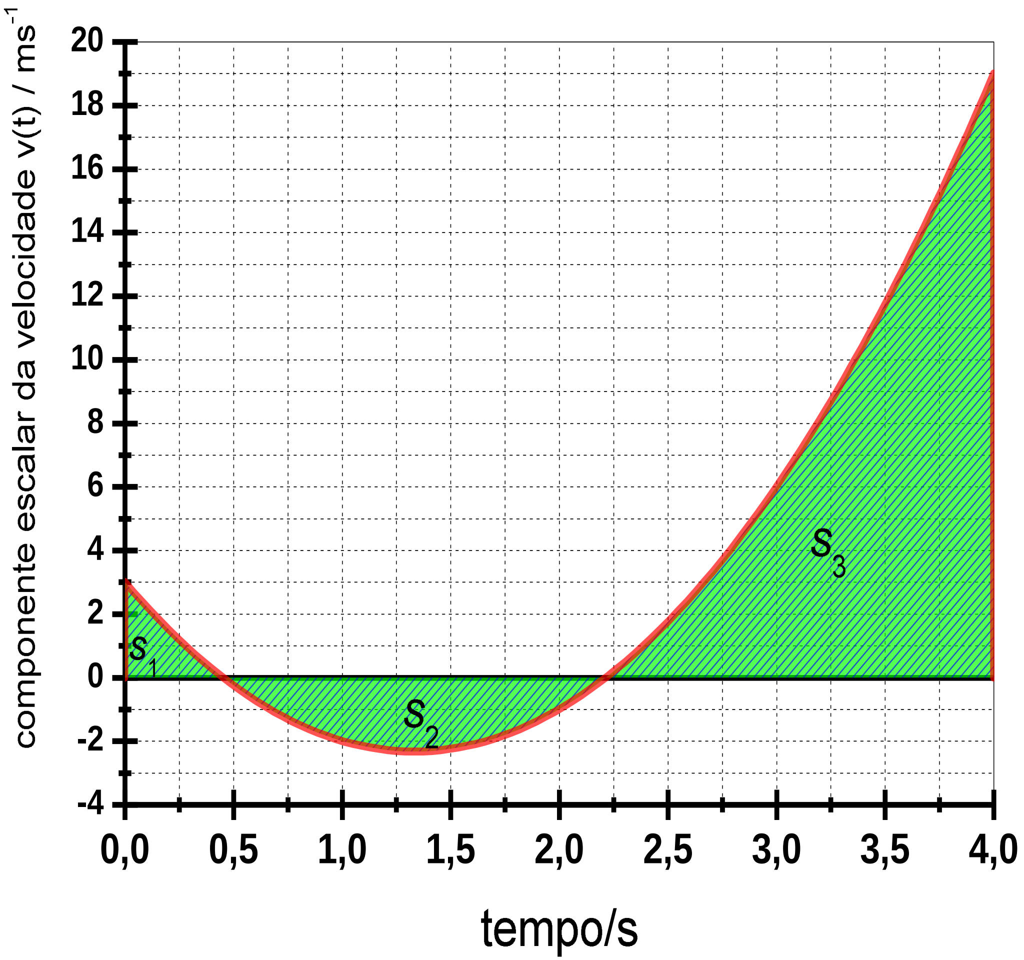


b&d) Gráfico v(t) versus t

Espaço percorrido

=

Área do gráfico v(t)
***versus* tempo**



Resolução (Exc.1)

b) Determinar os instantes em que pode ocorrer inversão de sentido.

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\ (3{,}0\ t\ - 4{,}0\ t^2 + t^3)\hat{e}_x$; como a direção se mantêm constante, então

$\vec{v}(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)\hat{e}_x\ (\mathrm{m/s})$

$v(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)\ (\mathrm{m/s});$

$v(t) = 0\ \Leftrightarrow (3{,}0\ - 8t + 3t^2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{t}_1 = 0{,}45\ \mathrm{s}\ \ \mathrm{e}\ \mathrm{t}_2 = 2{,}2\ \mathrm{s}$

$s = s_1 + s_2 + s_3 = \left|\int_0^{0,45}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right| + \left|\int_{0,45}^{2,2}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right|$

$+\left|\int_{2,2}^{4}(3{,}0\ - 8t + 3t^2)dt\ \right| \Leftrightarrow s =\ |0{,}63| + |-2{,}112 - 0{,}63| + |12{,}0 - (-2{,}112)| =$

$17{,}5\ \mathrm{m}$

c) $\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(4s) - \vec{r}(2s)}{\Delta t} = \frac{12\hat{e}_x - (-2\hat{e}_x)}{2} = 7\hat{e}_x$ (m/s)

d) $\vec{v}(t) = (3{,}0\ - 8t + 3t^2)\hat{e}_x\ (\mathrm{m/s})$

Exercício 2 (cap I.1.1):movimento a 2D com aceleração constante

Um projétil é lançado com uma velocidade de 100 ms^{-1} fazendo um ângulo de 60º com a horizontal. Calcule:

a) O alcance do projétil.
b) A altura máxima.
c) A velocidade e a altura 10 s após o lançamento.

Exercício #2 (capl.1.1):Resolução

Equações gerais do movimento obtidas a partir do cálculo integral:

interação Terra/corpo-> $\vec{a} = \vec{g} = -9{,}8\hat{e}_y$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (-9{,}8\hat{e}_y)dt = \vec{v} - \vec{v}_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [-9{,}8\,(t - t_0)]\,\hat{e}_y = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - 9{,}8\,(t - t_0)]\,\hat{e}_y$$

se t_0=0, então: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - (9{,}8\,t)\hat{e}_y$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 - (9{,}8\,(t - t_0))\hat{e}_y)dt = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + [\vec{v}_0(t - t_0)] - \left(\frac{9{,}8}{2}(t - t_0)^2\right)\hat{e}_y$$

se t_0=0, então: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\hat{e}_y$

a) O alcance significa que o vetor posição só tem componente horizontal. Então partindo de $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \left(\frac{9,8}{2} t^2\right) \hat{e}_y$ calcula-se o instante $t_{alcance}$.

No caso deste problema: $\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{0} \\ \vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \left[(\cos 60°)\hat{e}_x + (\sin 60°)\hat{e}_y\right] \end{cases}$

$$\vec{r}(t) = \left(100\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\hat{e}_x + \left(100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t - \left(\frac{9,8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$$

$\vec{r}(t_{alcance}) = (50 t_{alcance})\hat{e}_x$,

em que $t_{alcance}$ é calculado fazendo $50\sqrt{3}t - \left(\frac{9,8}{2}t^2\right) = 0 \Leftrightarrow t_{alcance} \cong 17,67\ \mathrm{s}$

$\vec{r}(t_{alcance}) \cong 884\hat{e}_x (\mathrm{m})$

Exercício 2 (capl.1.1):Resolução

b) A altura máxima corresponde à coordenada vertical do vetor posição quando a componente vertical da velocidade se anula (v_y=0). Então nesse instante tem-se

$\vec{v}(t_{hmáxima}) = \|\vec{v}_0\|(\cos 60°)\hat{e}_x = (50)\hat{e}_x$, em que $t_{hmáximo}$ é calculado fazendo

$\left(50\sqrt{3} - 9{,}8t\right)\hat{e}_y = 0 \Leftrightarrow t_{hmáxima} \cong 8{,}8$ s,

Substituindo, em $\vec{r}(t) = \left(100\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\hat{e}_x + \left(100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$ tem-se

$$\vec{r}(t_{hmáxima}) \cong (442)\hat{e}_x + (383)\hat{e}_y(\mathrm{m})$$

$h_{máxima}$= 383 m

Exercício #6 (cap I.1.1):Resolução

c) t=10 s, substituindo nas equações

$$\vec{r}(t) = (50t)\hat{e}_x + \left(50\sqrt{3}\,t - \left(\frac{9{,}8}{2}t^2\right)\right)\hat{e}_y$$

$$\vec{v}(t) = 50\hat{e}_x + (50\sqrt{3} - 9{,}8\,t]\,\hat{e}_y$$

Obtém-se

$$\vec{r}(10\text{ s}) = (500)\hat{e}_x + (376)\hat{e}_y(\text{m})$$

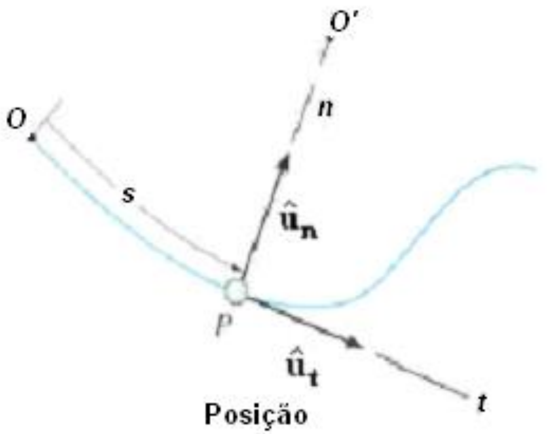
Então h=376 m

$$\vec{v}(10\text{ s}) \cong 50\hat{e}_x - 11\hat{e}_y(\text{m/s})$$

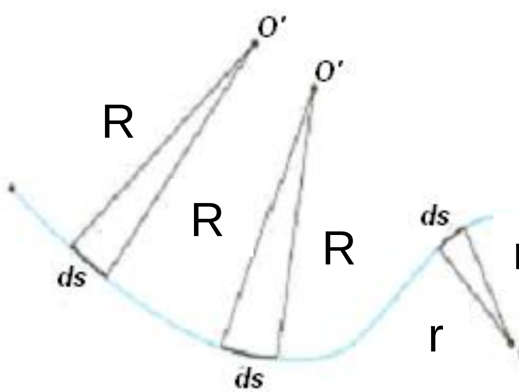
Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- O centro de curvatura O' localiza-se sempre do lado côncavo da trajetória; o raio de curvatura ρ é definido como a distância, medida na perpendicular, da curva ao centro de curvatura num dado ponto.



- A posição da partícula, em qualquer instante, pode ser descrita por uma só coordenada medida sobre a curva a partir de uma origem fixa, igual ao comprimento do arco, **s(t).**



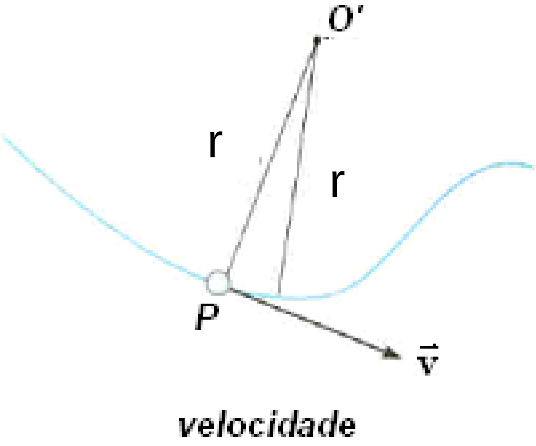
Versores unitários $\hat{u}_n, \hat{u}_t$

Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- A velocidade da partícula tangente à trajetória em qualquer instante será:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_t = v\,\hat{u}_t$$



Movimento curvilíneo geral

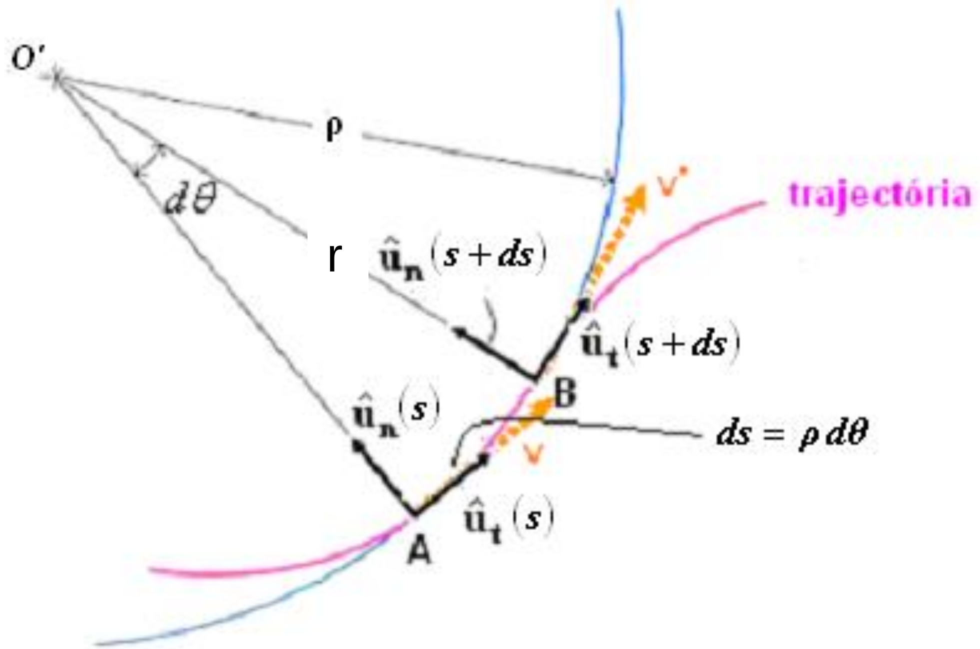
Componentes tangencial e normal

- Num dado intervalo de tempo ***dt*** a partícula movimenta-se de **A** para **B**
- O incremento da variável da **trajetória** corresponde a

$$ds = R d\theta$$

- O valor da velocidade é então

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$



- O ***vetor velocidade*** é tangente à trajetória em qualquer instante

$$\vec{v}(t) = v\,\hat{u}_t$$

Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

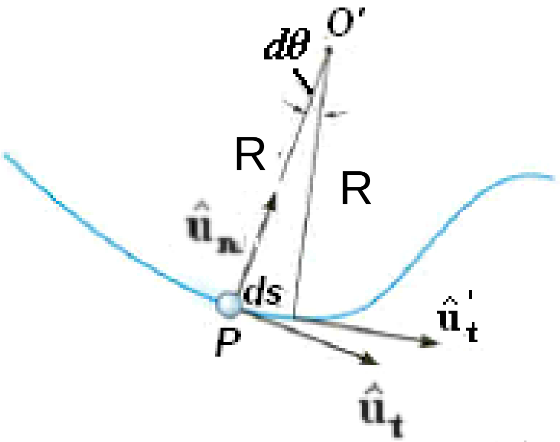
$$\boxed{d\hat{u}_t = d\theta\,\hat{u}_n}$$

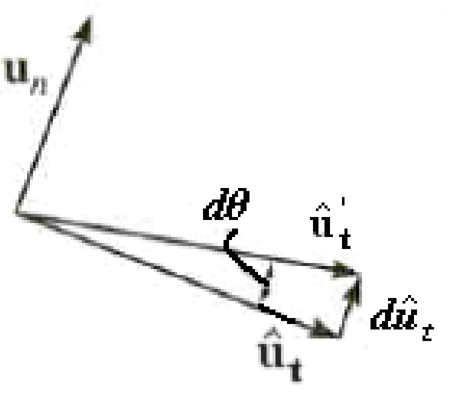
- Para determinar o vetor aceleração temos que diferenciar o vetor velocidade.

- O vetor aceleração reflete a alteração no ***valor, direção e sentido da velocidade***

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\,\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$





Movimento curvilíneo geral

Componente normal da aceleração (outro processo de cálculo de $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$)

$$\hat{u}_t = [\cos\theta\,]\hat{e}_x + [\text{sen}\,\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\hat{u}_n = [\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2})]\,\hat{e}_x + [\text{sen}(\theta + \tfrac{\pi}{2})]\,\hat{e}_y$$

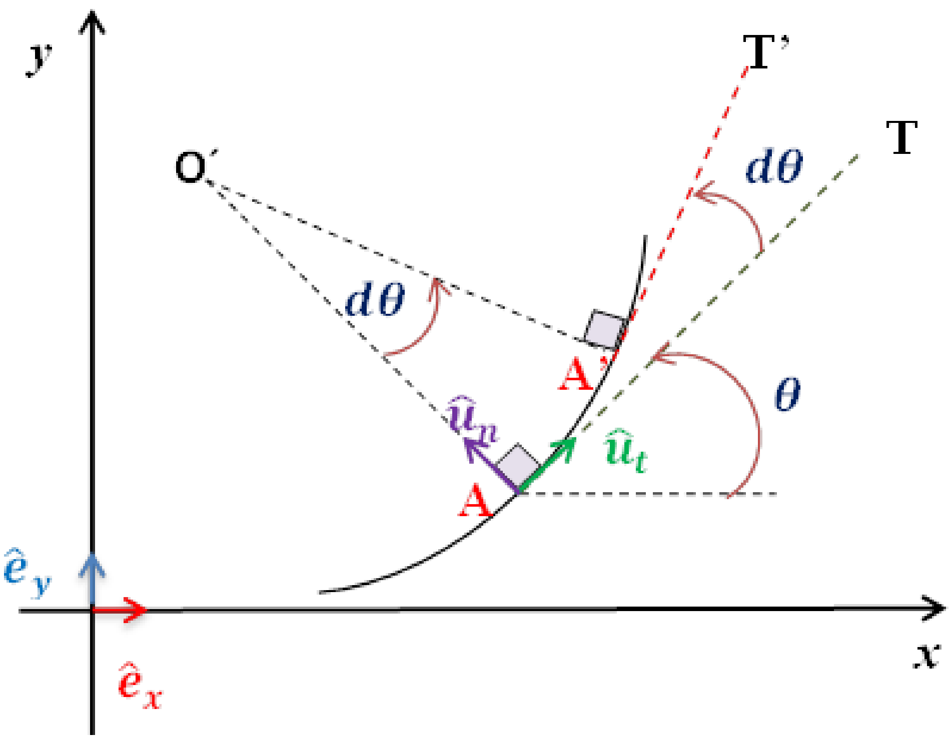
$$\hat{u}_n = [-\,\text{sen}\,\theta]\,\hat{e}_x + [\cos\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = [\frac{d\theta}{dt}\,(-sen\,\theta)\,]\hat{e}_x + [\frac{d\theta}{dt}\cos\theta]\,\hat{e}_y$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \{[-sen\,\theta\;\;]\hat{e}_x + [\cos\theta]\,\hat{e}_y\}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_n = \frac{1}{r}\,\frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}\,\hat{u}_n$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_n = \frac{1}{r}\,v(t)\,\hat{u}_n$$



Movimento curvilíneo geral

Componentes tangencial e normal

- Assim, e como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}$ então

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

com

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Componente tangencial

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Componente normal ou centrípeta

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

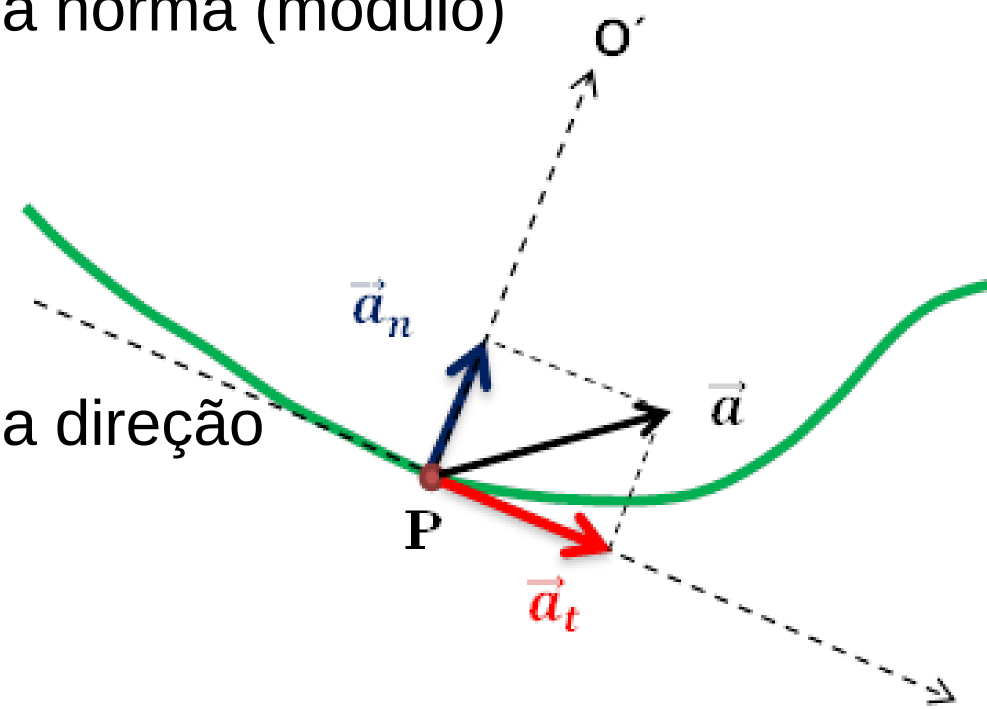
Componentes tangencial e normal do vetor aceleração

$\vec{a}_t$

- Traduz a variação na norma (módulo) do vetor velocidade

$\vec{a}_n$

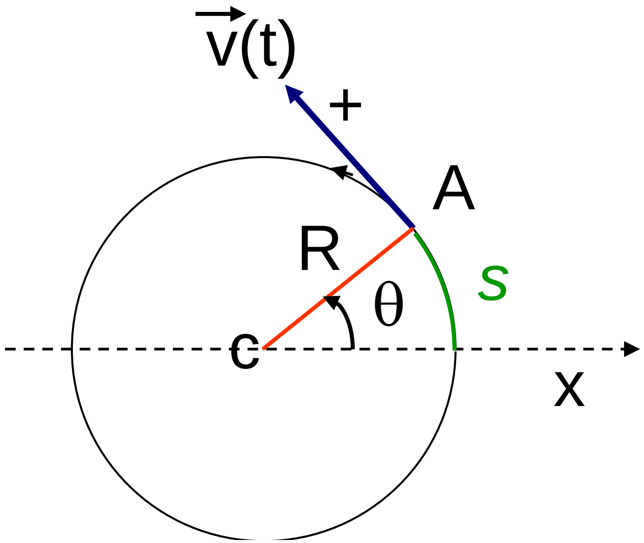
- Traduz a variação na direção do vetor velocidade

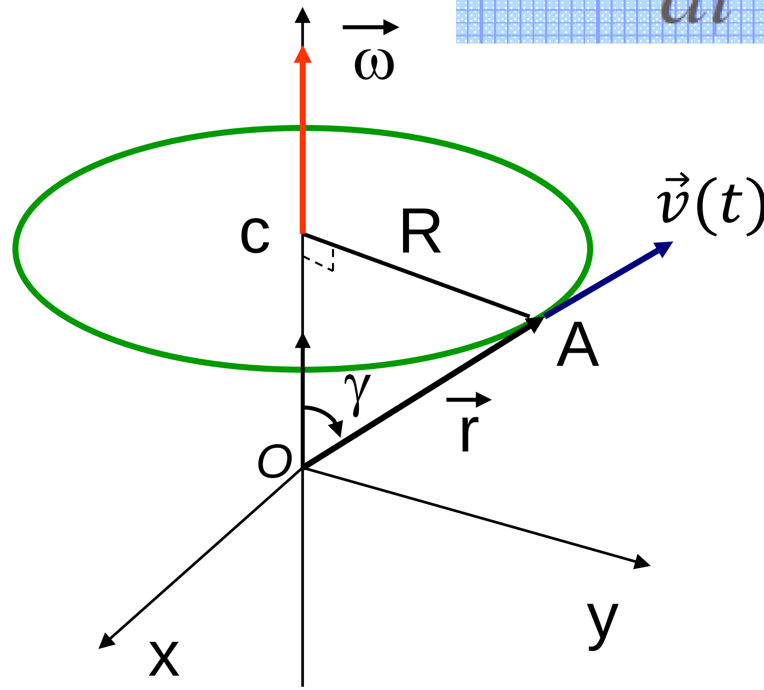


Movimento circular

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$$

Velocidade angular





$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Se $||\vec{r}||$ e γ constantes

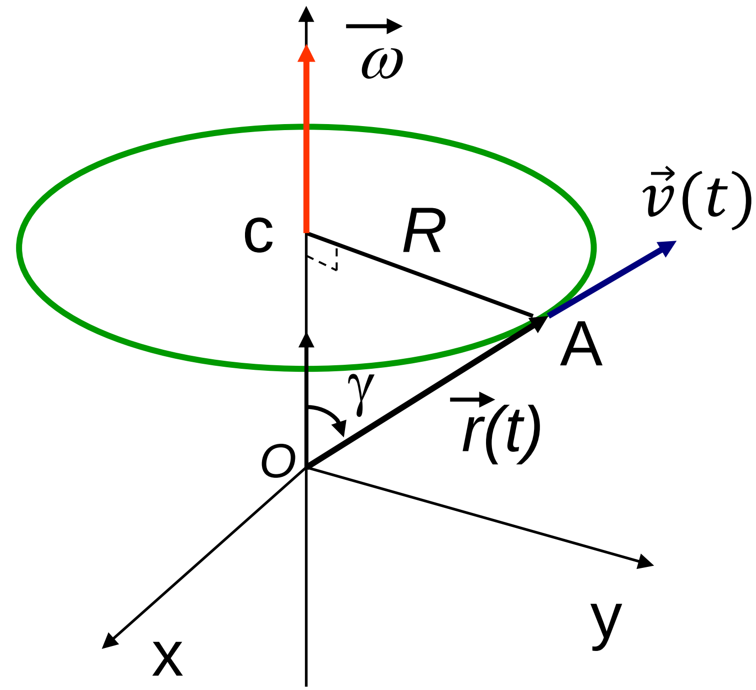
$$v = \omega\, r\, sen\gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Movimento circular: aceleração angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

aceleração angular



Como no movimento circular, a velocidade angular não varia em direção, então a componente escalar de $\vec{\alpha}$ é dada por:

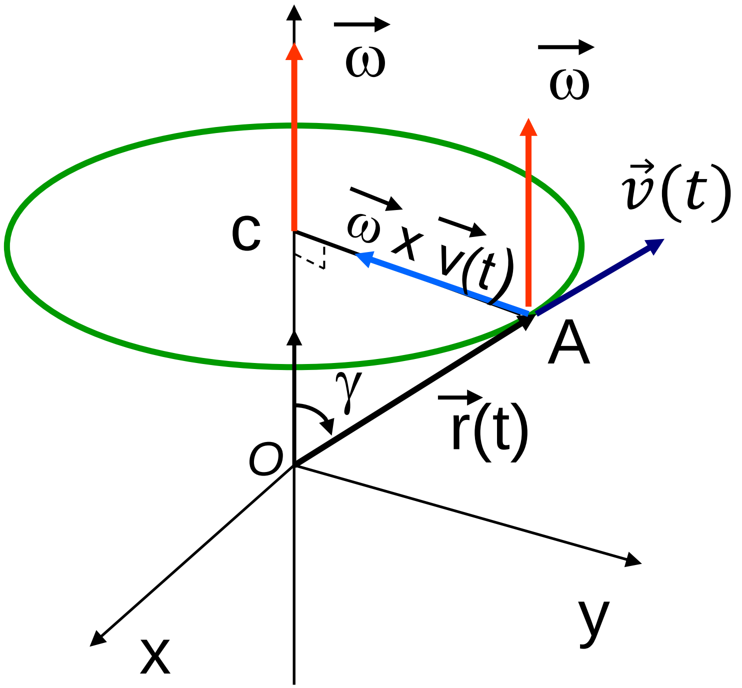
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Movimento circular e uniforme

aceleração angular $\vec{\alpha} = 0$



$$a_T = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}, como\ \vec{\omega} = const$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Exercício 3 (Cap I.1.1) Movimento 2D

Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio r = 1,0 m no plano *OXY*, centrada em (-1,0), obedecendo à seguinte lei: $s(t) = 2t - t^2$. Em t = 0 s encontra-se na origem (0,0) e o sentido positivo de $s(t)$ é no sentido anti-horário (direto). Determine, usando coordenadas cartesianas:

a) O vetor de posição da partícula em qualquer instante.

b) O vetor velocidade em qualquer instante.

c) O vetor aceleração em qualquer instante.

d) As componentes, tangencial e normal da aceleração em t = 0,5 s.

e) A distância percorrida até t = 2 s. Qual a posição?

Resolução

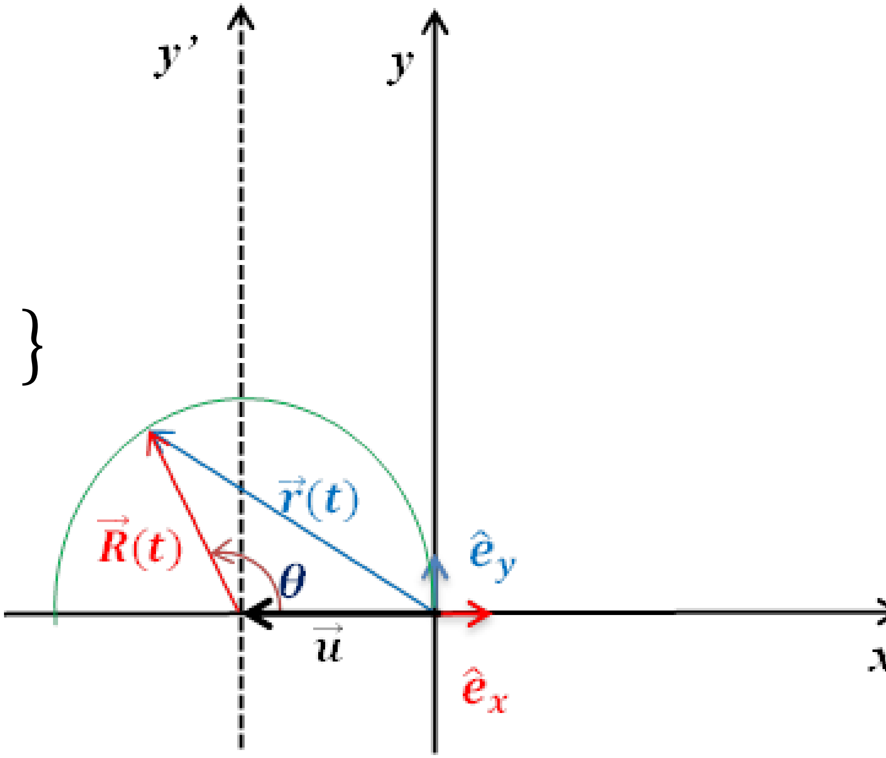
a) $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{u}$

$$\vec{u}(t) = -1\,\hat{e}_x$$

$$\vec{R}(t) = \|\vec{R}\|\{[\cos\theta\ ]\hat{e}_x + [\operatorname{sen}\theta]\,\hat{e}_y\}$$

$$s(t) = \|\vec{R}\|\theta(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = \frac{(2t - t^2)}{1}$$



$$\vec{r}(t) = [\cos(2t - t^2) - 1\ ]\hat{e}_x + [\operatorname{sen}(2t - t^2)]\,\hat{e}_y$$

Ex#7 (Cap I.1.1) Resolução

b)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left\{[\cos(2t - t^2) - 1\ ]\hat{e}_x + [\,\mathrm{sen}(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}$$

$$\vec{v}(t) = (2 - 2t)\left\{[-\mathrm{sen}(2t - t^2)\ ]\hat{e}_x + [\,\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(2 - 2t)^2} = |2 - 2t| \text{ m/s}$$

c)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left\{(2 - 2t)\left\{[-\mathrm{sen}(2t - t^2)\ ]\hat{e}_x + [\,\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_y\right\}\right\}$$

$$\vec{a}(t) = [2\mathrm{sen}(2t - t^2) - (2 - 2t)^2\cos(2t - t^2)]\,\hat{e}_x +$$
$$[-2\cos(2t - t^2) - (2 - 2t)^2\,\mathrm{sen}(2t - t^2)]\,\hat{e}_y$$

Ex#7 (Cap.I.1.1) Resolução

d) Num referencial móvel, de versores $(\hat{u}_t, \hat{u}_n)$

$$\vec{v}(t) = v(t)\widehat{u}_t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v(t) = \frac{d}{dt}(2t - t^2) \Leftrightarrow v(t) = 2 - 2t$$

$$\vec{v}(t) = (2 - 2t)\widehat{u}_t \text{ (m/s)}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}v(t)\hat{u}_t + \frac{v^2(t)}{R}\hat{u}_n$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}(t) = -2\hat{u}_t + \frac{(2-2t)^2}{1}\hat{u}_n$$

$$\vec{a}(5\ s) = -2\hat{u}_t + 1\hat{u}_n$$

e) Determinar o instante em que $\vec{v}(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \text{t} = 1s.$

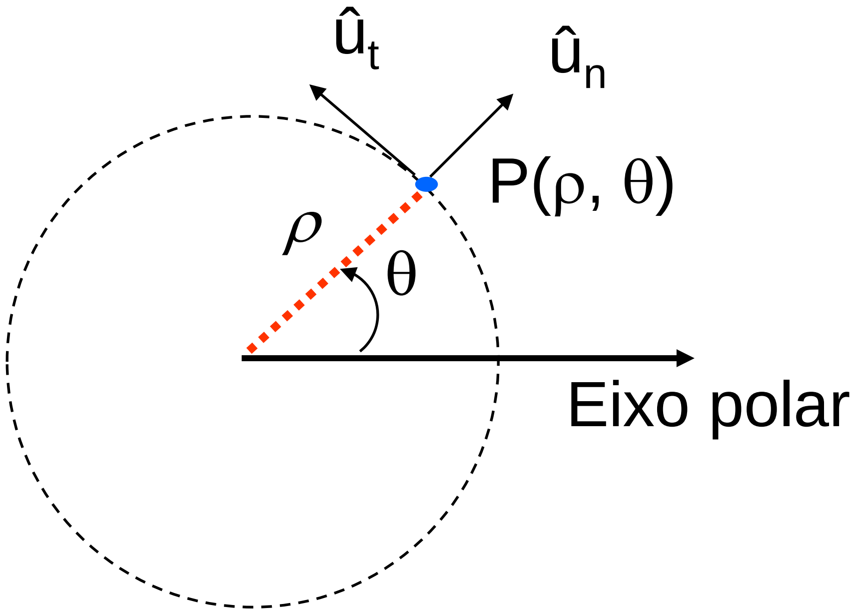
$$d = \left|\int_0^1 v(t)dt\right| + \left|\int_1^2 v(t)dt\right| = \left|\int_0^1 (2-2t\ )dt\right| + \left|\int_1^2 (2-2t\ )dt\right| = \left|(2t-t^2)\Big|_0^1\right| + \left|(2t-t^2)\Big|_1^2\right|$$

$$\Leftrightarrow d = 2\ m$$

$$\vec{r}(2s) = 0\hat{e}_x + 0\ \hat{e}_y$$

Sistemas de Coordenadas curvilíneas

- coordenadas polares (ρ, θ)



- **Relação com as coordenadas cartesianas**

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \, sen\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = arctg \frac{y}{x}$$