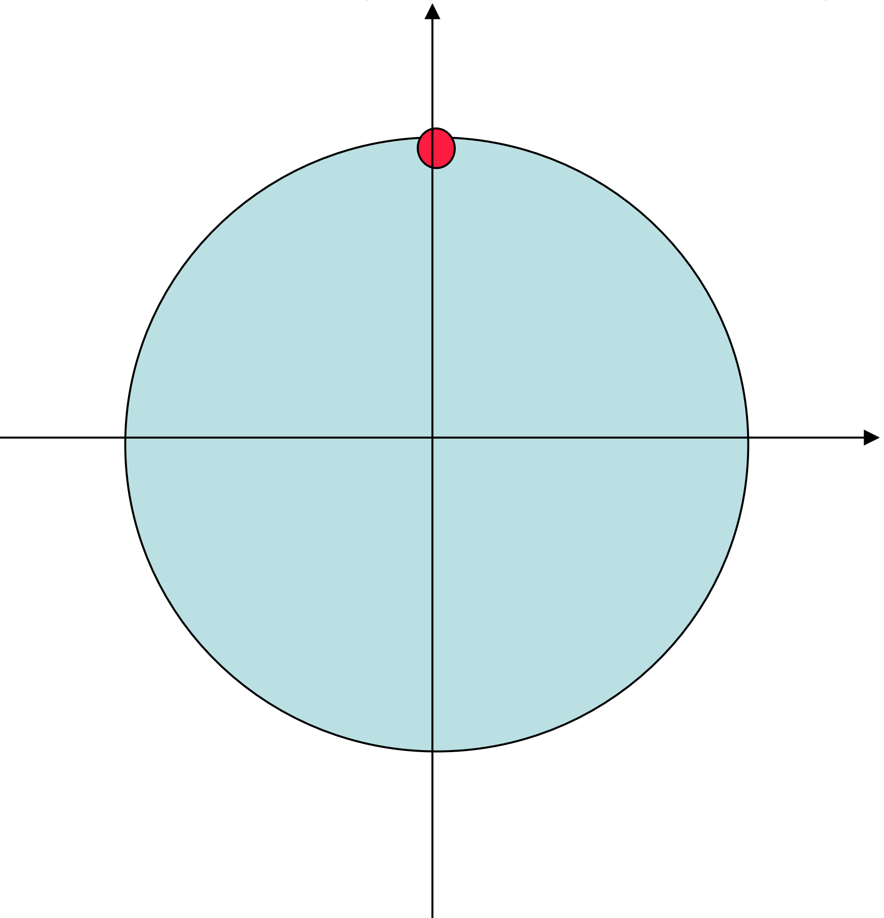
# Parte II: Movimentos periódicos em sistemas mecânicos

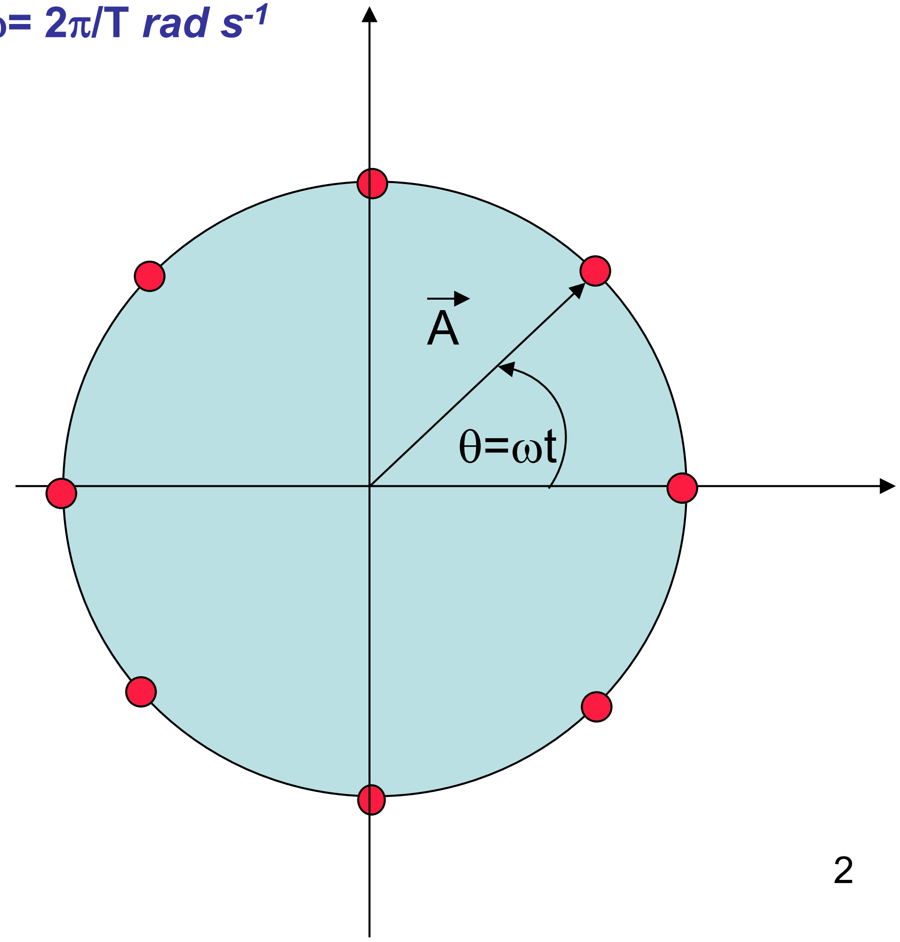
## Capítulo **II.1 Oscilações harmónicas**

universidade de aveiro

# Movimento oscilatório: relação entre o movimento circular uniforme e o movimento oscilatório harmónico simples

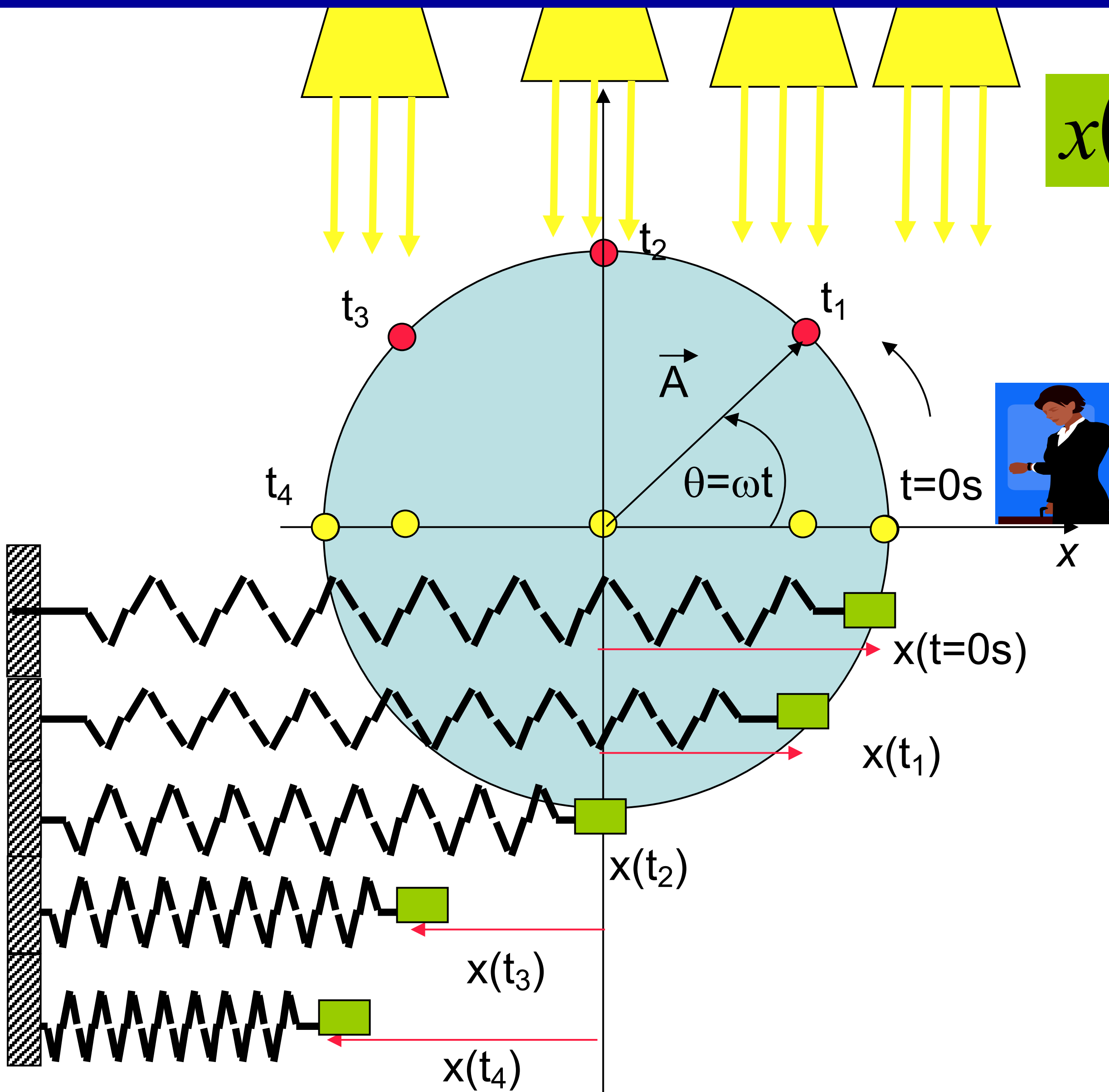
**Período angular de $2\pi$ *rad***
**Período temporal - T *s***
**Frequência f=1/T *Hz***
**Velocidade angular ou frequência angular $\omega = 2\pi/T$ *rad s*$^{-1}$**





- Movimento oscilatório: relação entre o movimento circular uniforme e o movimento oscilatório harmónico simples

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$



# M.H.S. – Energia no M.H.S

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

## Energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)$$

**Utilizando a identidade trigonométrica**

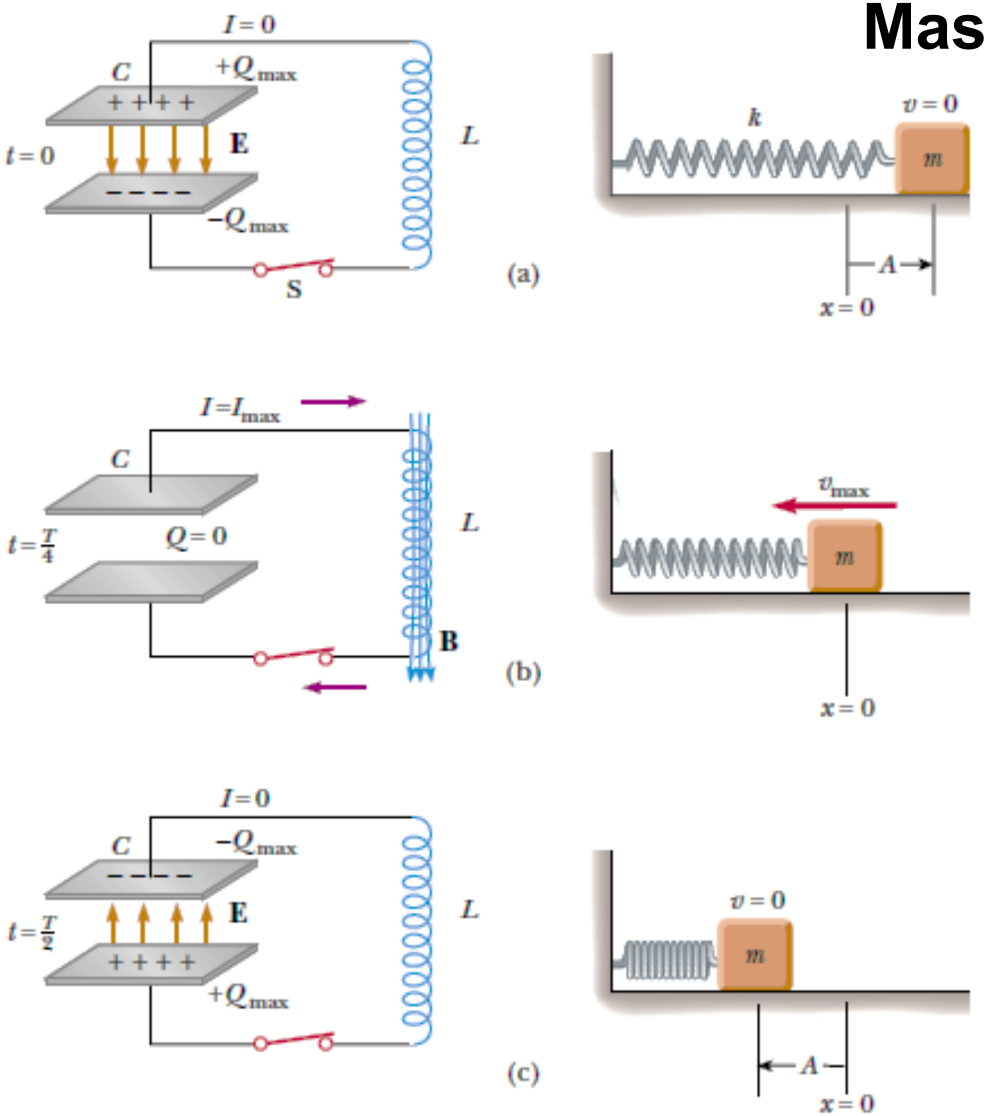
$$\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

## Obtém-se:

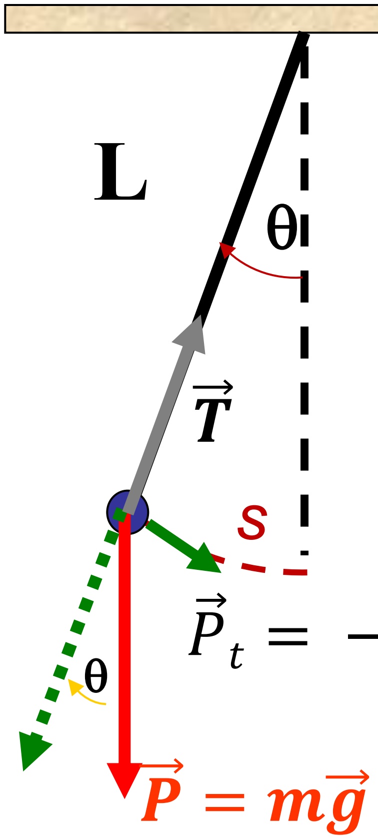
$$\Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1 - \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

# Comparação entre os sistemas elétrico e mecânico

**Circuito LC** **Massa/Mola**



# Exemplo : Pêndulo simples




$$\vec{P}_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{u}_t$$

$$\vec{P}_n = -mg\cos\theta\,\hat{u}_n$$

**Força restauradora**

$$P_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$s = L\theta \qquad \mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$

Válido para $\theta$ pequenos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\theta$$

$\omega^2$

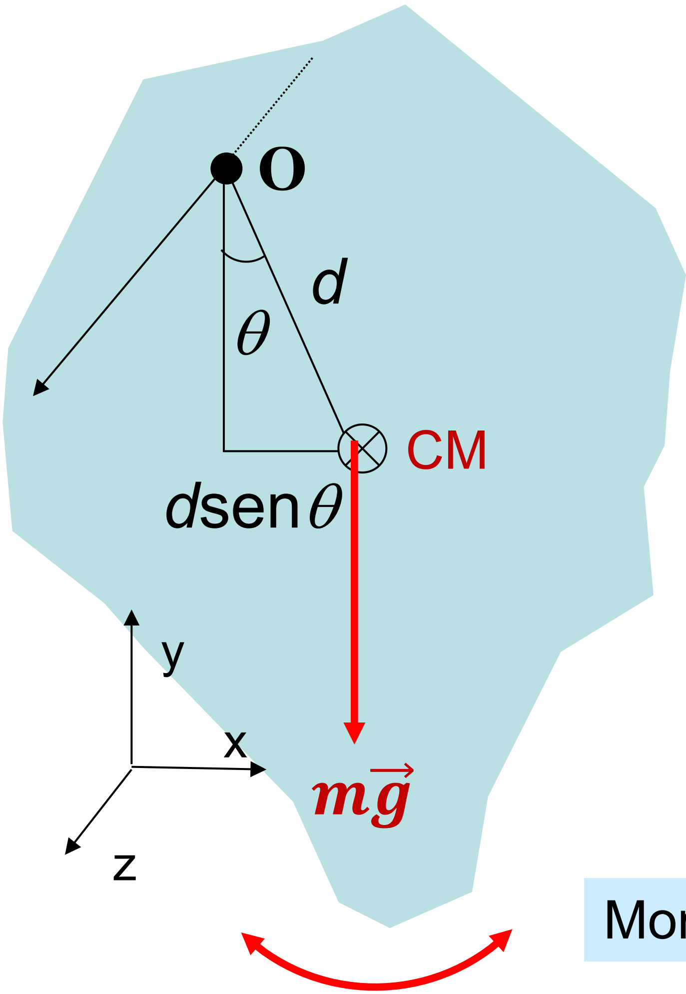
Semelhante a:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\omega^2\vec{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

# **Exemplo -** O Pêndulo físico (ou composto) (corpo rígido que oscila livremente em torno de um ponto O)




- **Afasta-se o corpo da posição de equilíbrio, abandonando-o.**
- **O Peso causa rotação: momento ( $\vec{\tau}$ ) do Peso em relação a O:**

$$\vec{\tau} = -mgdsen\theta\,\hat{k}$$

**Equação do movimento de rotação**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^O}{\mathrm{d}t} = \sum_i^n \vec{\tau}^O_{i,ext}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Leftrightarrow -mgd\theta \approx I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Momento de inércia

Aceleração angular

# M.H.S. - Pêndulo físico

$$\tau = I_z \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -mgd\theta \approx I_z \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I_z}\theta \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$$

**Equação diferencial cuja solução é:**

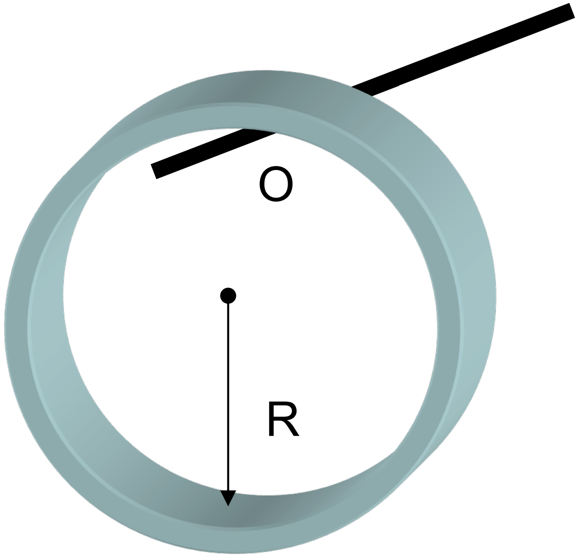
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

# Exercício Extra : MHS de um anel

Uma anel de 0,10 m de raio está suspenso como se ilustra na figura. Determine o período de oscilação.




Este é um exemplo de um pêndulo Físico discutido anteriormente. A equação do movimento leva à solução encontrada anteriormente para T.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{MgR}}$$

Pelo teorema de Steiner

$$I_0 = I_{CM} + MR^2$$

$$como \qquad I_{CM} = MR^2$$

$$I_0 = 2MR^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

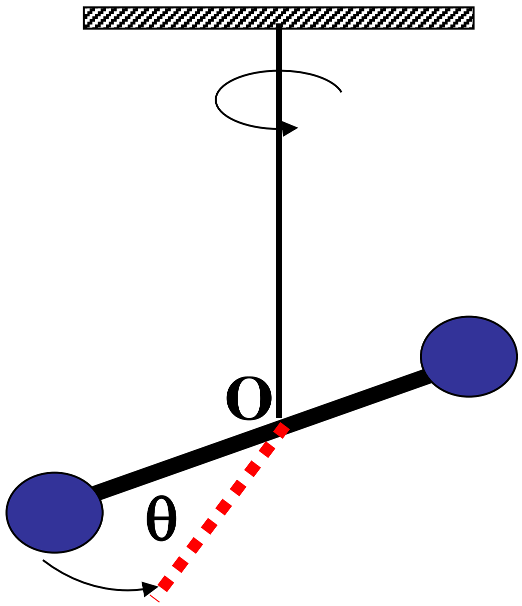
# M.H.S. - Pêndulo de torção

Corpo suspenso por um fio metálico (ou por uma fibra), cujo movimento no plano horizontal provoca a torção do fio (ou da fibra)

$$\vec{\tau} = -K\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

**onde *K* é o coeficiente de torção do fio**

## Equação do movimento de rotação




$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}^{O}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}^{\,O}_{i,ext}$$

$$I\alpha\,\hat{k} = -K\theta\,\hat{k} \Leftrightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{I}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Os sistemas mecânicos têm uma **frequência natural** de oscilação que depende de:

$$\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Corpo/mola**

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

**Pêndulo simples**

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

**Pêndulo físico**

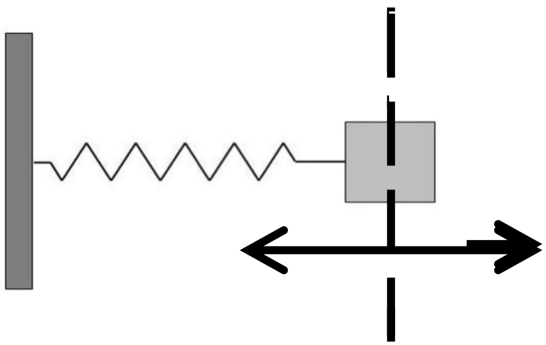
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

**Pêndulo de torção**

# Resolução do exercício 3 (capítulo II.1 e II.2)

3. Um corpo vibra com movimento harmónico simples com uma amplitude de 12 cm e frequência de vibração de 4 *vibrações/segundo*. Calcular:
   a) os valores da aceleração e velocidade máximas
   b) os valores da aceleração e velocidade quando o deslocamento for de 6 cm
   c) o tempo necessário para se afastar da posição de equilíbrio até um ponto situado a 8 cm dessa distância.

a)



Não sabemos a fase inicial, mas não importa

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$= -v_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega v_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 4 = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$a_0 = \omega^2 x_0 = (8\pi)^2 \times 12 \times 10^{-2} = 75{,}8 \text{ m/s}^2$$

$$v_0 = \omega x_0 = 8\pi \times 12 \times 10^{-2} = 3{,}02 \text{ m/s}$$

# Resolução do exercício 3 (capítulo II.1 e II.2)

b) $v(t)_{x=6\text{ cm}}$

$a(t)_{x=6\text{ cm}}$

$$x(t) = 0{,}12\cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -3{,}02\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -75{,}8\cos(\omega t + \phi)$$

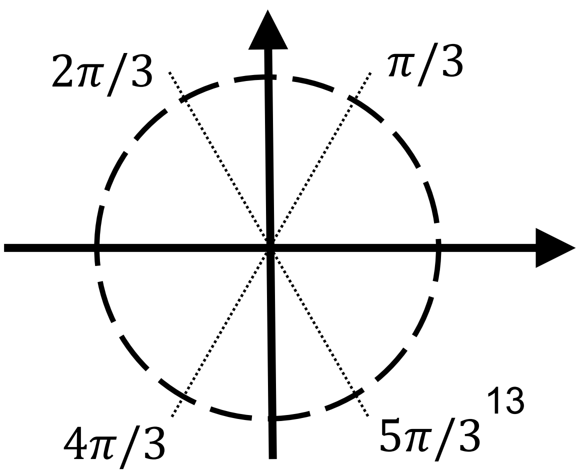
$$6\times 10^{-2} = 12\times 10^{-2}\cos(\underbrace{\omega t + \phi}_{\alpha}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}\text{ rad} \vee \alpha = \frac{5\pi}{2}\text{ rad}$$

O corpo pode estar em $x = 6\text{ cm}$ com duas situações:

i) afastando-se da origem ($\alpha = \frac{5\pi}{3}$ rad)

ii) aproximando-se da origem ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad)



# Resolução do exercício 3 (capítulo II.1 e II.2)

Hipótese i)
$(\alpha = \frac{5\pi}{3}\ \mathrm{rad})$

$$v = -3{,}02\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx 2{,}61\ \mathrm{m/s} \Rightarrow \vec{v} = +2{,}61\hat{e}_x\ \mathrm{m/s}$$

$$a = -75{,}8\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx -38{,}85\ \mathrm{m/s^2} \Rightarrow \vec{a} = -38{,}85\hat{e}_x\ \mathrm{m/s^2}$$

Hipótese ii)
$(\alpha = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad})$

$$v = -3{,}02\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -2{,}61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \vec{v} = -2{,}61\hat{e}_x\ \mathrm{m/s}$$

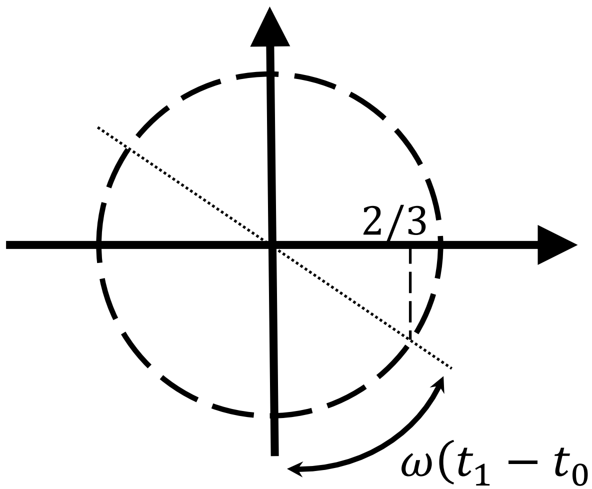
$$a = -75{,}8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -38{,}85\ \mathrm{m/s^2} \Rightarrow \vec{a} = -38{,}85\hat{e}_x\ \mathrm{m/s^2}$$

# Resolução do exercício 3 (capítulo II.1 e II.2)

c) $t_0$ - um instante em que passa na origem, deslocando-se de $x$ negativo para $x$ positivo
$t_1$ - um instante em que passa em $x = 8\ \mathrm{cm}$, vindo da origem

$$\begin{cases} 0 = 0{,}12\cos(\omega t_0 + \phi) \\ 0{,}08 = 0{,}12\cos(\omega t_1 + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(\omega t_0 + \phi) \\ \dfrac{2}{3} = \cos(\omega t_1 + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega t_0 + \phi = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ \omega t_1 + \phi = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$




$$\Rightarrow \omega(t_1 - t_0) = -\arccos\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 - t_0 = 0{,}029\ \mathrm{s}$$

$\omega(t_1 - t_0)$ = diferença entre estes dois ângulos

# Resolução do exercício 8 (capítulo II.1 e II.2)

8. * Uma partícula de massa 2 kg move-se ao longo do eixo dos *xx* atraída para a origem por uma força cuja intensidade é numericamente igual a $8x$. Se ela está inicialmente em repouso no ponto x = 20 m, determine:
   a) a equação diferencial e as condições iniciais que descrevem o movimento.
   b) a componente escalar da posição da partícula em qualquer instante.
   c) a componente escalar da velocidade em qualquer instante.
   d) a amplitude, o período e a frequência da vibração.

**Ver a resolução do problema 3**

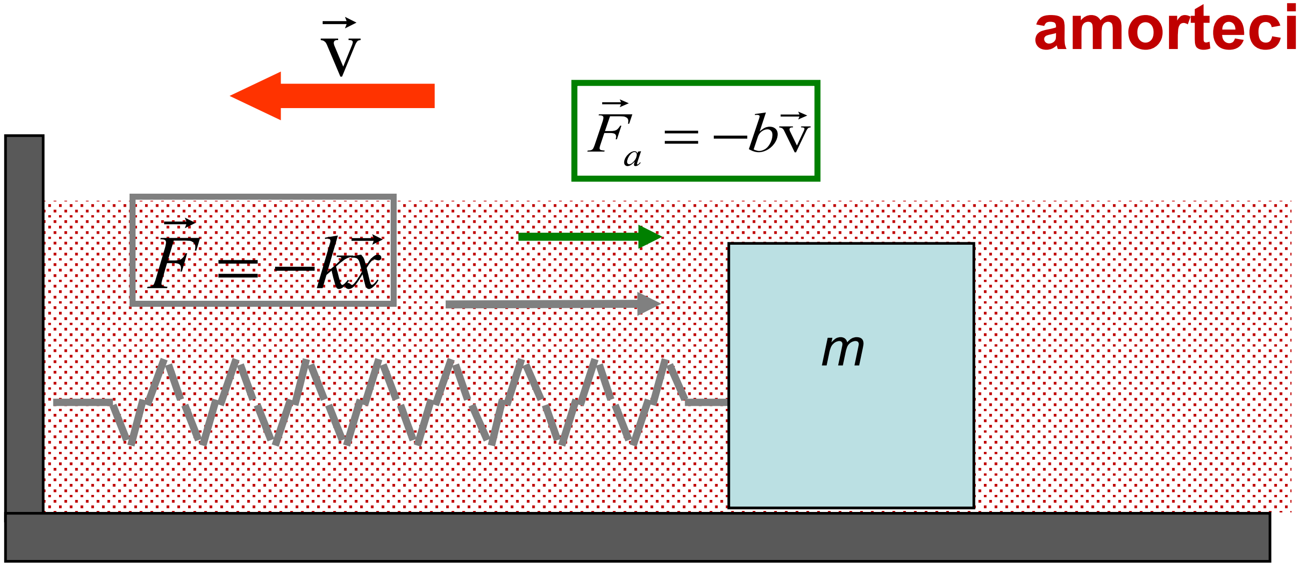
# Oscilações Amortecidas

**Exemplo de força dissipadora: Força devida à viscosidade de um fluido** $\vec{F}_a$

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

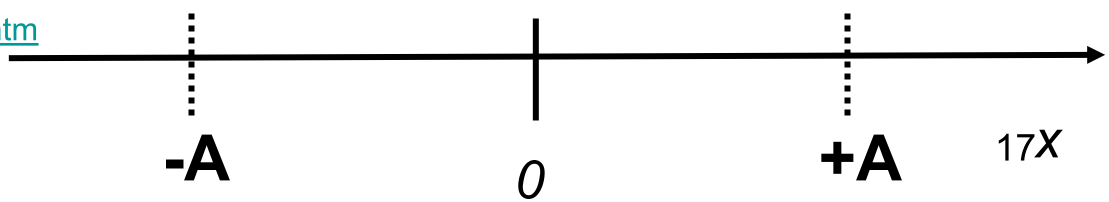
**Coeficiente de amortecimento**

**A mola oscila dentro de um fluido:**




http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/damped/d.htm

http://www.walter-fendt.de/ph14e/osccirc.htm



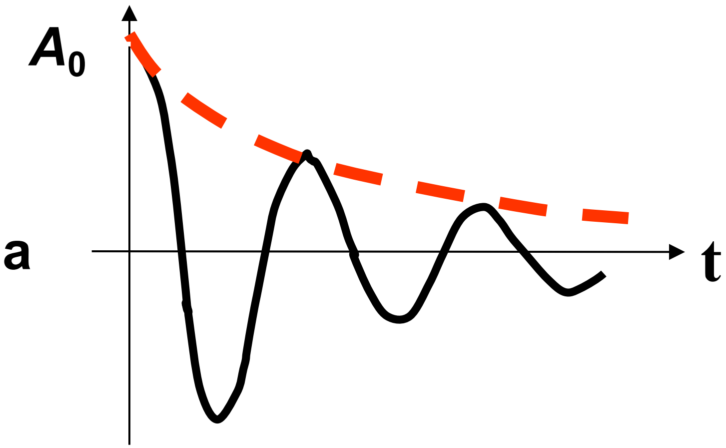
# Oscilações Amortecidas

**Aplicando 2ª Lei de Newton:**

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -kx - bv = ma_x \Leftrightarrow}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$ **equação (1)**

**Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico ($b_c$) esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo**



# Oscilações Amortecidas

**A solução é da equação (1) :**

$$\boxed{x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)}$$

**Verifique!!**

**E a frequência de oscilação é**

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

Esta solução só é válida se:

$$\boxed{\gamma = \frac{b}{2m} < \omega_o}$$

$$b < 2m\omega_0$$

$$b_c = 2m\omega_0$$

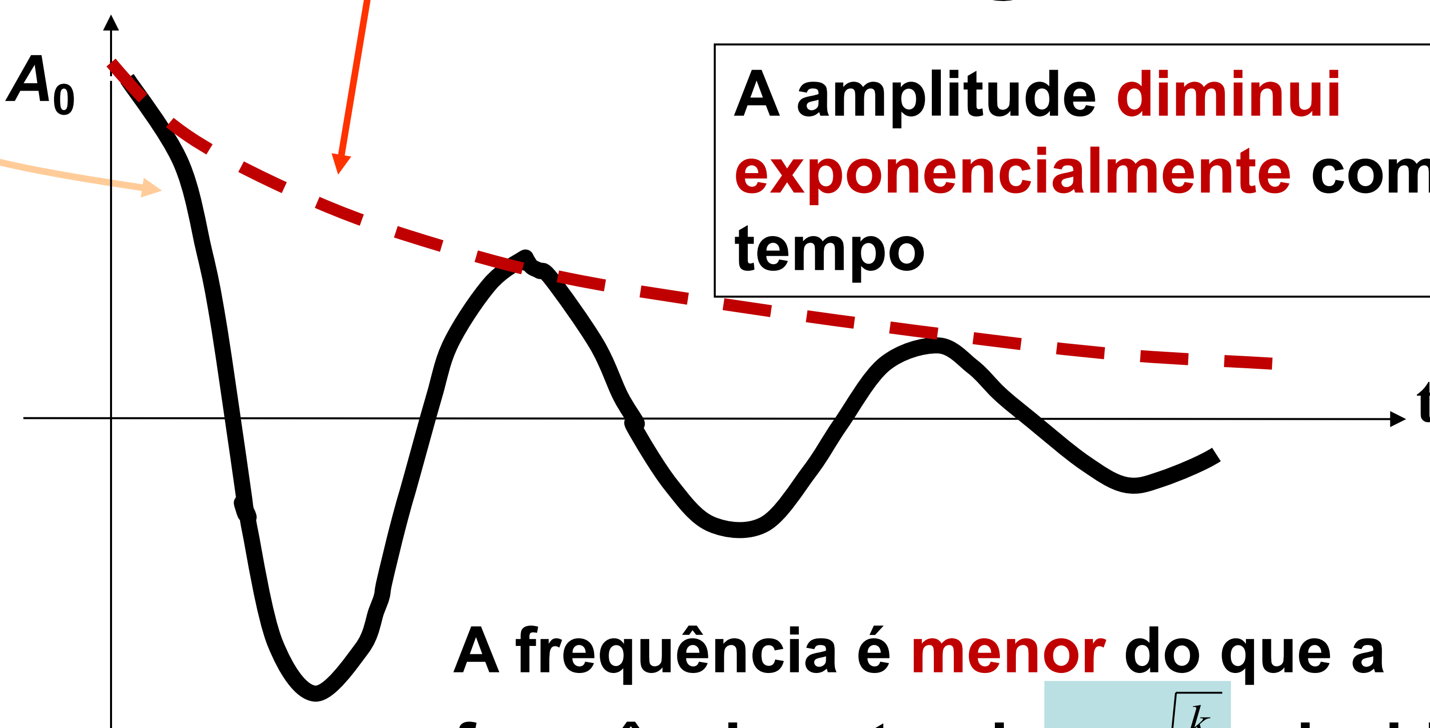
**Frequência natural**

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

**Coeficiente de amortecimento crítico ($b_c$)**

$$x = \boxed{A_o e^{-\frac{b}{2m}t}} \cos(\omega t + \phi)$$

= 0, neste caso




**A amplitude diminui exponencialmente com o tempo**

**A frequência é menor do que a frequência natural,** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$**, devido ao amortecimento**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

http://www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm

# A energia nas Oscilações Amortecidas

**Calcule-se a taxa de dissipação de energia num oscilador amortecido quando** $\gamma = \frac{b}{2m} < \omega_o$ e $\omega \cong \omega_o$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left[Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[-\gamma\, Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi) - A\omega_0 e^{-\gamma t} sen(\omega_0 t + \phi)\right]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[\gamma^2\, \mathrm{A}^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \mathrm{A}^2\omega^2 e^{-2\gamma t} sen^2(\omega_0 t + \phi)\right.$$
$$\left. - 2\gamma\, \mathrm{A}e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi) \times A\omega_0 e^{-\gamma t} sen(\omega_0 t + \phi)\right]$$

**Calculando a média temporal para um ciclo, temos:**

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m\left[\left\langle \gamma^2\, \mathrm{A}^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi)\right\rangle + \left\langle \mathrm{A}^2\omega^2 e^{-2\gamma t} sen^2(\omega_0 t + \phi)\right\rangle\right.$$
$$\left. - \left\langle 2\gamma\, Ae^{-2\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi) \times A\omega_0 e^{-2\gamma t} sen(\omega_0 t + \phi)\right\rangle\right]$$

# A energia nas Oscilações Amortecidas

Nota: $$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \Rightarrow \langle sen^2\theta\rangle = \langle cos^2\theta\rangle = \frac{1}{2};\ \langle sen\theta\, cos\theta\rangle = 0$$

**Energia Cinética média**

$$\langle E_c\rangle \cong \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

**Energia Potencial média**

$$\langle E_p\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} cos^2(\omega_0 t + \phi)\right\rangle \cong \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

**Potência média dissipada**

$$\langle P_{dissipada}\rangle = -\frac{d}{dt}\langle E\rangle = -\frac{d}{dt}\langle E_c + E_p\rangle$$

$$\langle P_{dissipada}\rangle \cong 2\gamma \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$$

**Fator de qualidade**

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia armazenada}}{\langle \text{energia dissipada por período}\rangle}$$

$$Q = \frac{2\pi E}{\langle P_{dissipada}\rangle T} = \frac{E}{\langle P_{dissipada}\rangle}\omega$$

# Oscilações Forçadas

**Considere força harmónica:**

$$F_{ext} = F_0 sen\left(\omega_f t\right)$$

**A intensidade da força varia harmonicamente com *t* entre**

**$-F_0$ e $+F_0$, com uma frequência angular $\omega_f$**

**2ª Lei de Newton:**

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{x} - b\vec{v} + \vec{F}_0 sen\left(\omega_f t\right)$$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + b\frac{d\vec{x}}{dt} + k\vec{x} = \vec{F}_0 sen\left(\omega_f t\right)$$

**Equação (2)**

# Oscilações Forçadas

- **Para se manter um sistema a oscilar, na presença de forças dissipadoras, é necessário fornecer-lhe energia aplicando uma nova força externa.**
- **Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa aplicada.**
- **Isto fará com que ao fim de algum tempo a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, e assim a amplitude mantém-se constante, e o seu valor dependerá da frequência externa.**

**Este movimento designa-se**

**oscilação forçada**

# Oscilações Forçadas

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0 sen\left(\omega_f t\right)$$

A solução completa:

$$x(t)=Ce^{-\frac{b}{2m}t}sen\left(\omega_a t+\phi_a\right)+Asen\left(\omega_f t+\varphi\right)$$

**Termo transiente**
**que decai com o tempo**

**Termo estacionário**
**que descreve o oscilador após o termo transiente deixar de influenciar**

# Oscilações Forçadas: discussão do termo estacionário

**Equação diferencial , cuja solução é:**

$$x = Asen\left(\omega_f t + \varphi\right)$$

**Verifique que é solução !!**

**Onde:**

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

**Sendo $\omega_o$ frequência do sistema quando sujeito apenas a uma força restauradora**

**O desfasamento $\varphi$ entre a posição e a força é:**

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b\omega_f}{m\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)}$$

**ATENÇÃO: $\varphi$ não é fase inicial!!!**

# Oscilações Forçadas: discussão do termo estacionário

$$F_{ext} = F_0 sen(\omega_f t)$$

$$x = A sen(\omega_f t + \varphi)$$

$$\mathbf{v} = \omega_f A cos(\omega_f t + \varphi)$$

**Conclusões:**

- A velocidade está 90º mais avançada do que x(t)
- Quando $\varphi$=-90º , v(t) e F(t) estão em fase
- Quando a diferença de fase entre x(t) e F(t) é igual a $\varphi$=-90º , x(t) está com atraso em relação a F(t)

# Oscilações Forçadas

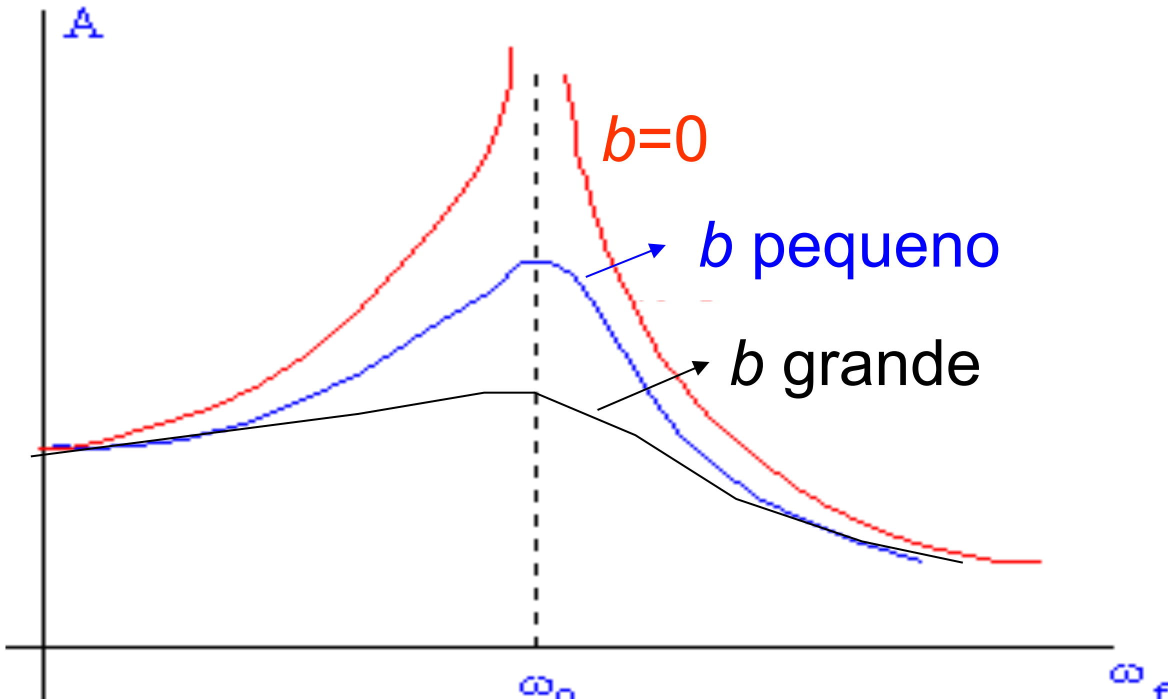
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

**Sistema oscila com $\omega = \omega_{\mathrm{f}}$**

***A* é constante em *t***

***A* é máximo quando $\omega_f \cong \omega_o$**

**ressonância**




**Na ausência de amortecimento**

**$A \longrightarrow \infty$**

**quando $\omega_{\mathrm{f}} \longrightarrow \omega_{\mathrm{o}}$**

# Ressonância

**Quando $\omega_f \rightarrow \omega_0$, *A* aumenta**

**A energia é transferida para o sistema em condições mais favoráveis.**

**Relembrar:**

$$\mathbf{v} = \omega_f A\cos(\omega_f t + \varphi)$$

$$P = \vec{F} \bullet \vec{\mathbf{v}}$$

**Potência = energia transferida por unidade de tempo**

**Na ressonância, *v* está em fase com $F_{ext}$ ($\varphi$ = -90º) e o trabalho por unidade de tempo (Potência) realizado por $F_{ext}$ é máximo.**

# Ressonância

**Na ausência de amortecimento (*b* = 0), quando $\omega_f \to \omega_0$ , é transferida energia para o sistema.**

**Como não há dissipação de energia, *A* $\to \infty$**

$$A = \frac{\dfrac{F}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega_f}{m}\right)^2}} = \frac{\dfrac{F}{m}}{\sqrt{\underbrace{\left(\omega_0^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2}_{=0} + \underbrace{\left(\dfrac{0.\omega_0}{m}\right)^2}_{=0}}} \to \infty$$

***A* aumenta até um limite determinado pelas propriedades físicas do sistema**

http://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=kODOL-QBzSM&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=Qf0t4qIVWF4&feature=related

# Resolução do exercício 13 (capítulo II.1 e II.2)

13. *Uma força externa periódica actua sobre um corpo de massa 6 kg suspensa pela extremidade inferior duma mola vertical cuja constante elástica é de 50 N/m. A força de amortecimento é proporcional à velocidade instantânea do corpo e tem uma intensidade de 8 N quando o valor da velocidade é de 2 m/s. Determine a frequência na qual a ressonância ocorre.

Trata-se de movimento harmónico forçado com amortecimento, cuja equação do movimento é : $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\mathrm{sen}(\omega_f t)$ e cuja solução em regime estacionário é: $x = A\mathrm{sen}(\omega_f t + \varphi)$

onde $A = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_f\right)^2}}$, com $\frac{k}{m} = \omega_0{}^2$ e $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b\omega_f}{m\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)}$.

A frequência de ressonância atinge-se para o valor de $\omega_f$ que torna a amplitude A máxima, o que acontece quando o denominador $\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_f\right)^2$ é mínimo

# Resolução do exercício 13 (capítulo II.1 e II.2)

Assim, determinar a $\omega_{ress}$ implica determinar os extremos de uma função $y(\omega_f) = \left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_f\right)^2$, ou seja, é necessário derivar em ordem a $\omega_f$ e igualar a zero , $\frac{dy}{d\omega_f} = 0$. Para simplificar a notação considere-se $\omega_f = z$.

$$\frac{dy}{dz} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left[(z^2 - \omega_0{}^2)^2 + \left(\frac{b}{m}z\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow 4z(z^2 - \omega_0{}^2) + 2z\frac{b^2}{m^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4z^2 - 4\omega_0{}^2 + 2\frac{b^2}{m^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 = \omega_0{}^2 - \frac{b^2}{2m^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Finalmente tem-se $z = \omega_{ress} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$.

Considerando os dados do problema:

$k = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $\left\|\vec{F}_a\right\| = b\|\vec{v}\| = 8$ N; $\|\vec{v}\| = 2\mathrm{m/s}$ e $\mathrm{m} = 6$ kg, calcula-se o coeficiente de amortecimento $b$ e a $\omega_{ress}$.

$$b = \frac{8}{2} = 4\ \mathrm{kg}.s^{-1};\quad \omega_{ress} = \sqrt{\frac{50}{6} - \frac{4^2}{2\times 6^2}} \cong 2{,}8\ \mathrm{rad}.s^{-1}$$

# Resolução do exercício 14 (capítulo II.1 e II.2)

14. *Uma massa ligada a uma mola está em repouso. É posta em movimento com uma velocidade 10 cm/s. Sabe-se que $K_{mola}$=5 dine/cm, $m$ = 200g e $\gamma$ = 1/40 $s^{-1}$. (1 newton = $10^5$ dine).

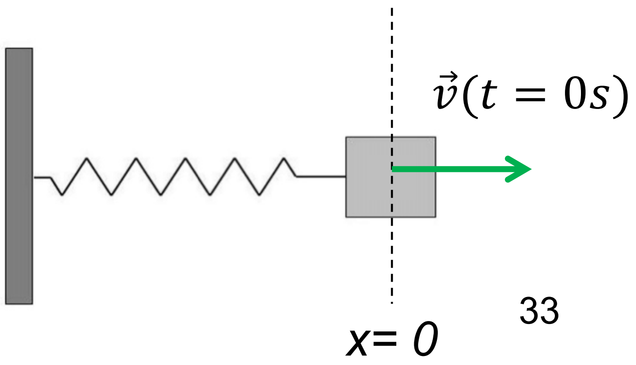
a) Determine a sua posição ao fim de 2 s.

b) Calcule a amplitude e estabeleça a correspondente equação do movimento, uma vez atingido o regime estacionário, quando se aplica ao sistema uma força excitadora cuja componente escalar é dada por: $F_e(t)$=10 cos (0,15 t) c.g.s.

a) Trata-se de movimento harmónico amortecido, cuja equação do movimento é : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ cuja solução é $x = x_o e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \phi)$,

onde $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \cong 0,156\ \mathrm{rad.}\, s^{-1}$

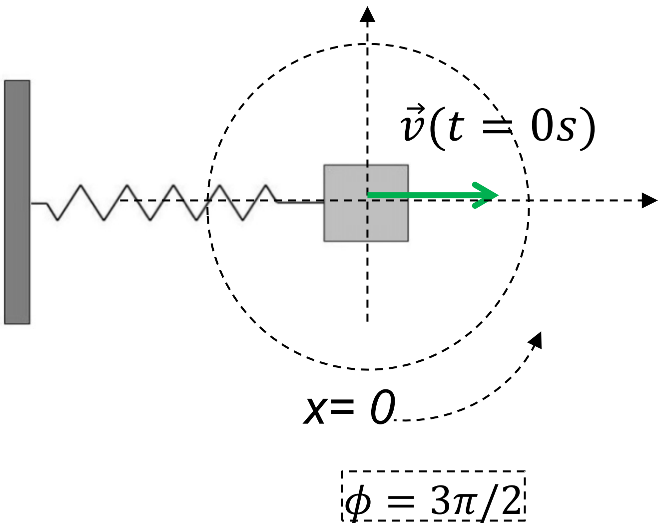
De acordo com o problema a mola parte da posição de equilíbrio (porque estava em repouso), com uma velocidade de 10 cm/s. Assumamos que a velocidade tem sentido positivo de *OX*.



# Resolução do exercício 14 (capítulo II.1 e II.2)

a)(cont.)

Considerando a figura ao lado facilmente se conclui que a fase inicial é $\phi = 3\pi/2$. Para responder à questão é necessário determinar as restantes grandezas que constam de $x = x_o e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \phi)$. Assim, usando a informação sobre a posição e velocidade no instante t=0s calcula-se $x_o$.




$$\begin{cases} x = x_o e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \phi) \\ v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\gamma x_o e^{-\gamma t}\cos(\omega_a t + \phi) - x_o e^{-\gamma t}\omega_a \mathrm{sen}(\omega_a t + \phi) \end{cases}$$

para t=0s vem:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_o\cos(\phi) \\ 10 = -\gamma x_o\cos(\phi) - x_o\omega_a\mathrm{sen}(\phi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_o\cos(\phi) \\ 10 = -\gamma x_o\cos(\phi) - x_o\omega_a\mathrm{sen}(\phi) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = x_o\cos(\phi) \\ 10 = -\gamma x_o\cos(\phi) - x_o\omega_a\mathrm{sen}(\phi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \\ 10 = -x_o\omega_a\mathrm{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \dfrac{3\pi}{2} \\ x_o = 64\ \mathrm{cm} \end{cases}$$

# Resolução do exercício 14 (capítulo II.1 a  II.3)

a)(cont.)
Um vez determinados as grandezas em falta
é possível determinar a posição em t = 2 s

$$x(t) = 64\, e^{-\frac{1}{40}t} \cos\left(0{,}156t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$x(2s) = 64\, e^{-\frac{1}{20}} \cos\left(0{,}312 + \frac{3\pi}{2}\right) \cong 18{,}5 \text{ cm}$$

b) Neste caso passamos a ter movimento harmónico com forçamento cuja equação geral do movimento é : $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_O}{m}\mathrm{sen}(\omega_f t)$ e cuja solução em regime estacionário é: $x = A\mathrm{sen}(\omega_f t + \varphi)$ onde

$$A = \frac{\frac{F_O}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_f\right)^2}},\ \text{com}\ \frac{k}{m} = \omega_0{}^2,$$

Neste caso $F_{ext}(t) = 10\times10^{-5}\cos(0{,}15t)$ N. Note-se que $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}15t\right) = \cos(0{,}15t)$.
Substituindo os valores das grandezas na expressão da amplitude obtém-se:
$A = 0{,}063$ m.

# Parte II: Movimentos periódicos em sistemas mecânicos

## II.2. Oscilações acopladas

# Sobreposição de dois MHS

- Mesma direção e sentido e mesma frequência

$$x_1 = OP_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \theta)$$

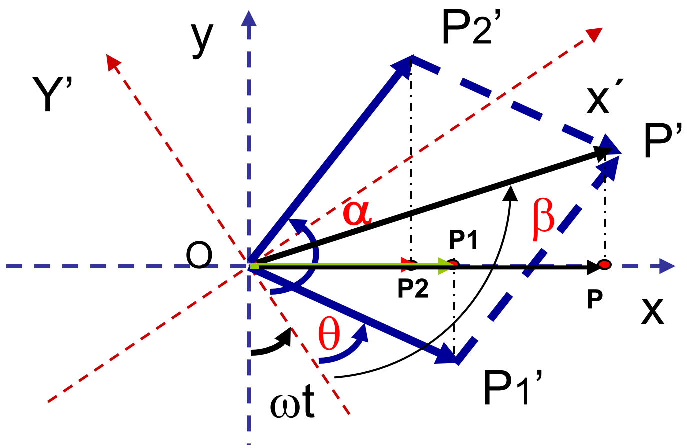
$$x_2 = OP_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Qual o deslocamento total ?

$$X = x_1 + x_2 = OP = A_1 \text{sen}(\omega t + \theta) + A_2 \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

**P2'** e **P1**' são vetores girantes

$$x = OP = A \text{sen}(\omega t + \beta)$$




Determinação da amplitude e fase inicial

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta}$$

$$tg\beta = \frac{A_1 sen\theta + A_2 sen\alpha}{A_1 \cos\theta + A_2 \cos\alpha}$$

# Sobreposição de dois MHS

Casos particulares:

i) $\alpha = \theta \Rightarrow \delta = 0$

Interferência construtiva

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{e} \quad \beta = \theta$$

vetores girantes paralelos

ii) $\alpha = \theta + \pi \Rightarrow \delta = \pi$

Interferência destrutiva

$$A = A_1 - A_2 \quad \text{e} \quad \beta = \theta$$

vetores girantes antiparalelos

iii) $\alpha = \theta + \pi/2 \Rightarrow \delta = \pi/2$

MHS em quadratura

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{e} \quad \beta = \theta + artg\,\frac{A_2}{A_1}$$

vetores girantes perpendiculares

# Sobreposição de dois MHS: Batimentos

- Mesma direção e sentido e frequências diferentes

Seja $\theta = \alpha = 0$

$$x_1 = OP_1 = A_1 \text{sen}(\omega_1 t) \qquad x_2 = OP_2 = A_2 \text{sen}(\omega_2 t)$$

***P2'*** e ***P1'*** são vetores girantes com velocidades angulares diferentes

$$x = OP = A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t)$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}}$$

Implicações:

O vetor girante $\overrightarrow{\text{OP'}}$ não tem amplitude constante e não gira com velocidade angular constante

A amplitude varia no tempo entre o

$A=A_1+A_2$ quando $\boxed{(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi}$

$A=A_1-A_2$ quando $\boxed{(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi}$

Amplitude modulada

$$\boxed{f_b = \frac{|\omega_1 - \omega_1|}{2\pi} = |f_1 - f_2|}$$

# Sobreposição de dois MHS

- Caso particular: Mesma direção, igual amplitude e frequências diferentes

$$x = A_1 \mathrm{sen}(\omega_1 t) + A_1 \mathrm{sen}(\omega_2 t)$$

$$x = 2A_1 \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}\mathrm{t} \;\; \mathrm{sen}\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t$$

Amplitude modulada

Velocidade angular do movimento oscilatório resultante

# Figuras de Lissajous

Caso Geral:

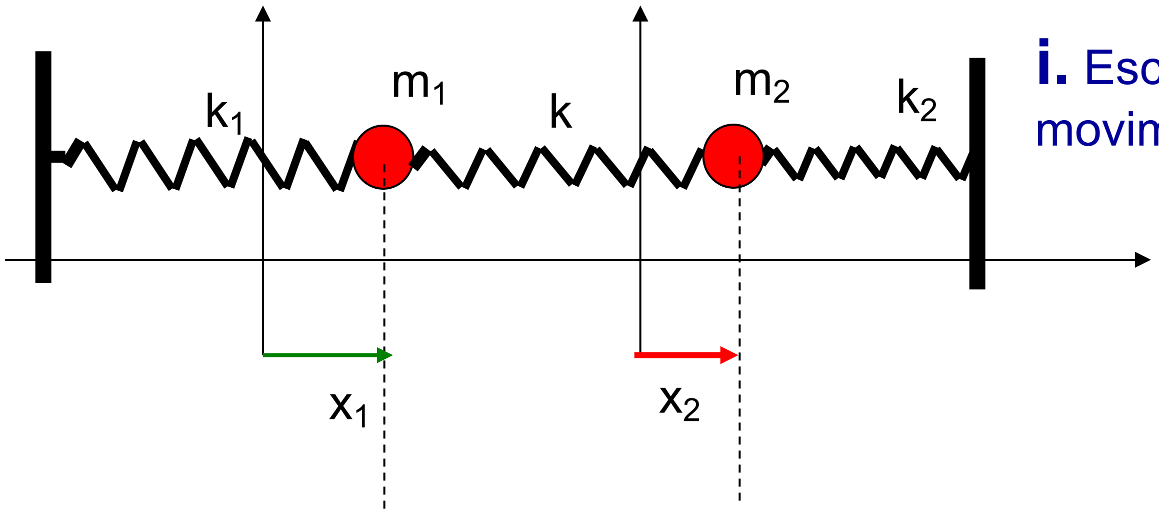
$$x = A\text{sen}(\omega_1 t)$$

$$y = B\text{sen}(\omega_2 t + \delta)$$

A trajetória resultante depende da razão $\omega_2/\omega_1$ e da diferença de fase $\delta$

http://www.angelfire.com/falcon/geodoubek/port.htm
https://ngsir.netfirms.com/englishVersion.htm

# Exemplo: Oscilações acopladas




**i.** Escrever a equação do movimento para cada oscilador.

**Analisar a dinâmica de cada uma das massas supondo a outra fixa na posição de equilíbrio**

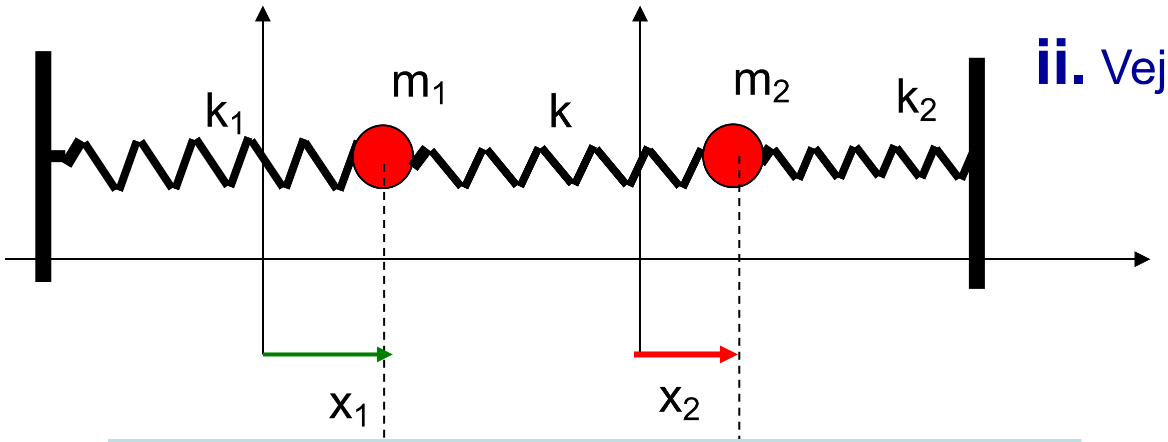
$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + \dfrac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \dfrac{k}{m_1} x_2 \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + \dfrac{k_2 + k}{m_2} x_2 = \dfrac{k}{m_2} x_1 \end{cases}$$

Termos de acoplamento

http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/coupled/osc2.htm

# Exemplo: Oscilações acopladas




**ii.** Vejamos a soluções seguintes:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t) \\ x_2 = B\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 A\cos(\omega t) + \dfrac{k_1+k}{m_1} A\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_1} B\cos(\omega t) \\ -\omega^2 B\cos(\omega t) + \dfrac{k_2+k}{m_2} B\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_2} A\cos(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right) A - \dfrac{k}{m_1} B = 0 \\ -\dfrac{k}{m_2} A - \left(\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right) B = 0 \end{cases}$$

**Recordar a utilização de matrizes na resolução de sistemas de equações**

# Determinação das frequências normais de vibração pelo método matricial

Recordar a utilização de matrizes na resolução de sistemas de equações lineares

$$\begin{cases}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right)A-\dfrac{k}{m_1}B=0\\[2ex] -\dfrac{k}{m_1}A+\left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)B=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1}\\[2ex] -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\[2ex] B\end{bmatrix}=0$$

**As soluções não triviais são aquelas em que o determinante da matriz dos coeficientes A=[($a_{ij}$)] é nulo.**

$$\begin{vmatrix}\left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1}\\[2ex] -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left(-\omega^2+\dfrac{k_1+k}{m_1}\right)\times\left(-\omega^2+\dfrac{k_2+k}{m_2}\right)-\left(-\dfrac{k}{m_1}\times\left(-\dfrac{k}{m_2}\right)\right)=0$$

# Determinação das frequências normais de vibração pelo método matricial

No caso em que $m_1 = m_2$ e $k_1 = k = k_2$ a expressão anterior simplifica-se:

$$\left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) \times \left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) - \left(\frac{k^2}{m^2}\right) = 0$$

$$\omega^4 - 4\omega^2 \frac{k}{m} + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

como $\quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 (4 \pm 2)}{2}$$

**O sistema tem duas frequências próprias de vibração**

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \omega_1^{\,2} = \omega_0^2 \\ \text{ii)} \quad \omega_1^{\,2} = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

**Qual a relação entre B e A em cada situação?**

i) A =B as massas oscilam em fase

ii) A =-B as massas oscilam em oposição de fase

http://www.walter-fendt.de/ph14br/cpendula_br.htm

http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html

# Coordenadas normais, graus de liberdade e modos normais de vibração

- As coordenadas normais conduzem a equações do movimento que tomam a forma de um conjunto de equações diferenciais com coeficientes constantes em que cada equação tem apenas uma variável dependente.
- Uma vibração que envolve apenas uma variável dependente X ou Y é designada de modo normal de vibração e tem a sua frequência própria de vibração. Em cada modo normal de vibração cada componente oscila com a mesma frequência.
- A importância do modo normal de vibração é que cada um é inteiramente independente do outro. A energia de um modo normal nunca é transferida para o outro modo normal de vibração.
- Cada processo independente pelo qual o sistema adquire energia é designado de grau de liberdade . O número destes processos define o nº de graus de liberdade e o nº de coordenadas normais de vibração.
  - Cada oscilador harmónico tem dois processos independentes de adquirir energia por energia potencial ( coordenada X); por energia cinética ( derivada da coordenada X)

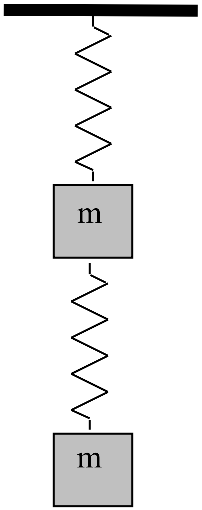
# Resolução do exercício 15 (capítulo II.1 e II.2)

15. Duas molas iguais de constante $K_{mola}$ estão penduradas e ligadas a corpos de massa $m$ como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.

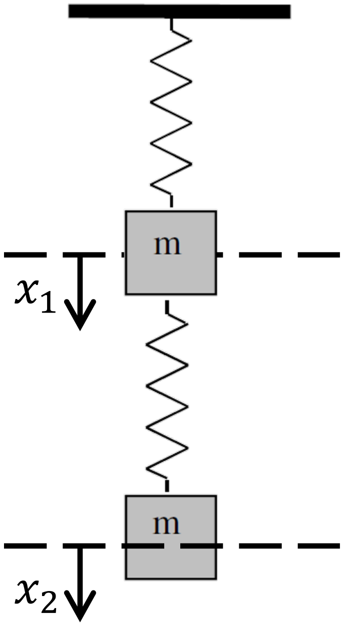


# Resolução do exercício 15 (capítulo II.1 e II.2)

a)

i) Escrever a equação do movimento para <u>cada massa</u>

ii) Assumamos que o peso não contribui para a oscilação, pensemos apenas na força elástica a que está sujeita cada massa




$$m_1 \rightarrow \begin{cases} m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \leftarrow m_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + kx_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

# Resolução do exercício 15 (capítulo II.1 e II.2)

Suponhamos que cada uma das equações tem como solução
$$x_1 = A\cos\omega t$$
$$x_2 = B\cos\omega t$$

Substituindo, temos
$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -A\omega\cos\omega t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos\omega t$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -B\omega\cos\omega t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -B\omega^2\cos\omega t$$

Substituindo no sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} m(-A\omega^2\cos\omega t) + 2kA\cos\omega t - kB\cos\omega t = 0 \\ m(-B\omega^2\cos\omega t) + kB\cos\omega t - kA\cos\omega t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -mA\omega^2 + 2kA - kB = 0 \\ -mB\omega^2 + kB - kA = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(k - m\omega^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução trivial deste sistema seria $A = B = 0$, que significa não haver oscilação (dado que as amplitudes seriam nulas). Para haver outra solução além desta, o determinante da matriz tem de ser nulo.

# Resolução do exercício 15 (capítulo II.1 e  II.2)

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 2km\omega^2 - km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Aplicando a fórmula resolvente das equações polinomiais de segundo grau:

$$\omega^2 = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} = \frac{3k \pm \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{k}{2m}\left(3 + \sqrt{5}\right) \\ \omega_2^2 = \dfrac{k}{2m}\left(3 - \sqrt{5}\right) \end{cases}$$

(frequências dos modos normais de vibração do sistema)

# Resolução do exercício 15 (capítulo II.1 e II.2)

b) Para cada solução, $\omega_1$ e $\omega_2$, temos de encontrar a relação entre as amplitudes ($A$ e $B$). Isso faz-se substituindo, cada $\omega$ no sistema. Recordar que, como o determinante da matriz é nulo, vamos obter a mesma relação entre amplitudes independentemente da equação que escolhamos para substituir $\omega$. Vamos usar, por exemplo, a primeira equação.

$$\text{Sistema: } \begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{2m}\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

$$A(2k - m\omega_1^2) - kB = 0 \Leftrightarrow A\left(2k - \frac{k}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)\right) = kB \Leftrightarrow \frac{A}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) = B \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$$

Negativo → oposição de fase

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{k}{2m}\left(3 - \sqrt{5}\right)}$$

$$A(2k - m\omega_2^2) - kB = 0 \Leftrightarrow A\left(2k - \frac{k}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)\right) = kB \Leftrightarrow \frac{A}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = B \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

Positivo → oscilação em fase