

# Modelos Preditivos

---

Departamento de Engenharia Informática (DEI/ISEP)

Fátima Rodrigues

[mfc@isep.ipp.pt](mailto:mfc@isep.ipp.pt)

# Raciocínio

---

Capacidade humana em trabalhar com conhecimento, factos e estratégias de resolução de problemas por forma a obter conclusões

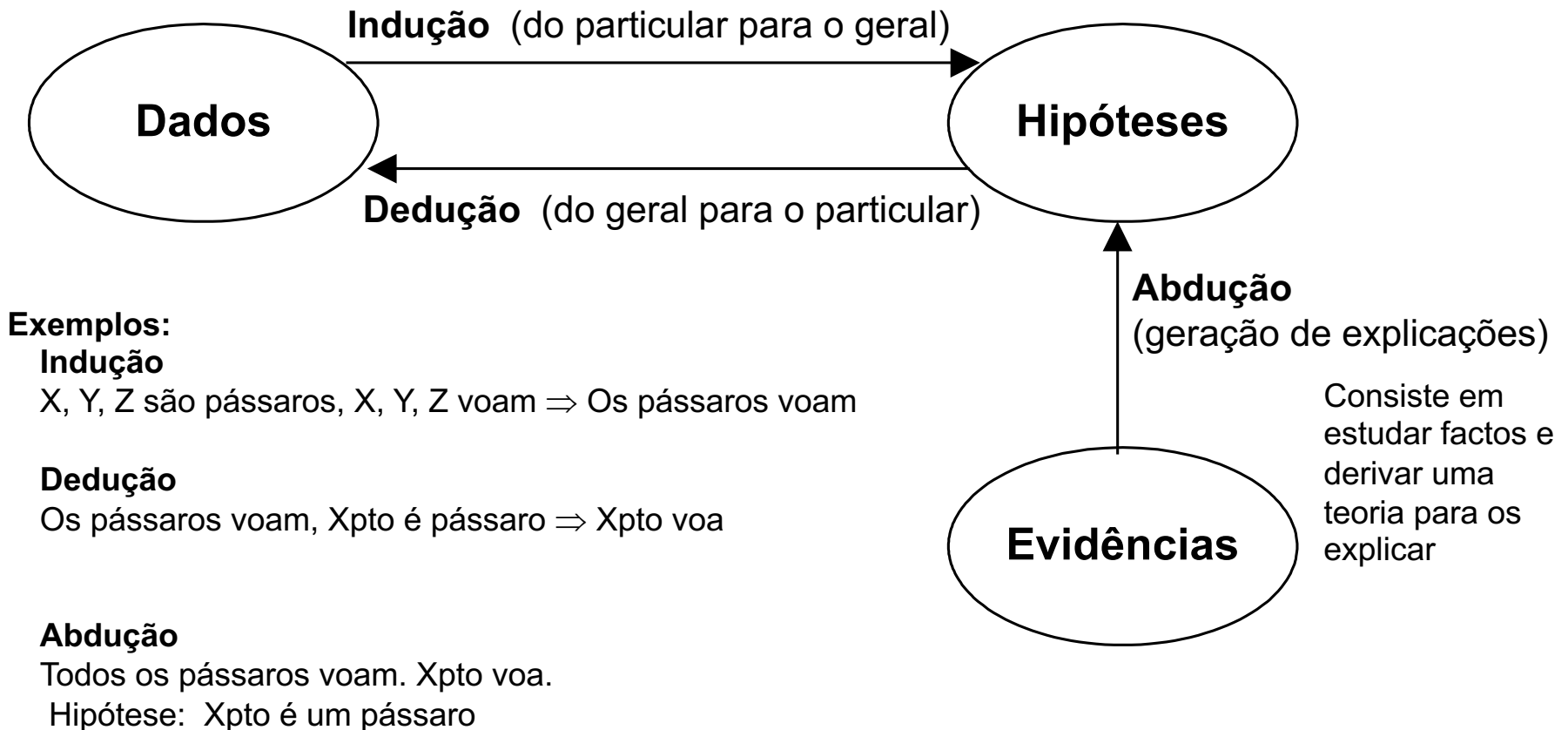
## Entender

- como os humanos raciocinam
- como trabalham com a informação relativa a um dado problema

## Permite

- delinear o processo de inferência num algoritmo de Data Mining

# Mecanismos de Raciocínio



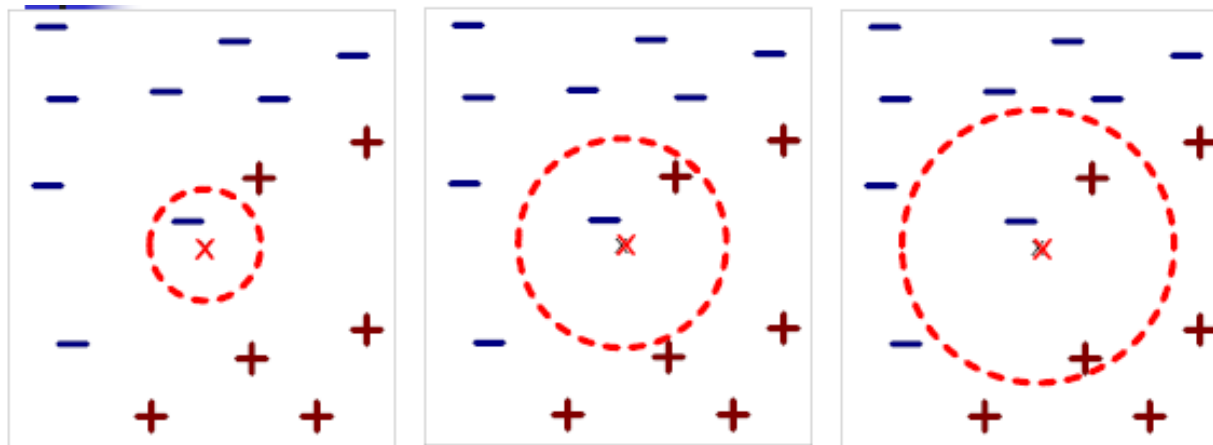
# **Aprendizagem Baseada em Instâncias**

# Aprendizagem Baseada em Instâncias

- Método dos k-vizinhos mais próximos
- Raciocínio Baseado em Memória

Método mais antigo (1967) e difundido

Prevê valores desconhecidos de registros num conjunto de dados baseando-se na combinação dos valores dos **k-registos mais próximos, mais similares** do conjunto de dados histórico



(a) 1-nearest neighbor

(b) 2-nearest neighbor

(c) 3-nearest neighbor

# Aprendizagem baseada em instâncias

---

A previsão de um valor (discreto/contínuo) é feita com base nos valores mais próximos

É baseada em dois conceitos fundamentais

- **Função de distância**

mede a distância entre dois registros

- **Função de combinação**

combina os resultados a partir dos vizinhos

# Distância entre exemplos

---

Se o conjunto de treino tem  $N$  atributos o novo exemplo a classificar  $x_q$  tem também  $N$  atributos  $x_q \in \mathcal{R}, t=1, \dots, N$

A distância entre dois pontos  $x_i$  e  $y_i$  é normalmente calculada usando a **distância euclidiana**

$$dist(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Os atributos devem ser **normalizados**

# Propriedades da Função de Distância

---

Para que uma função *possa* ser usada como função *distância* é necessário e suficiente que as seguintes condições para quaisquer objetos  $d, p, q$  sejam satisfeitas:

1.  $d(p, q) \geq 0$
2.  $d(p, p) = 0$
3.  $d(p, q) = d(q, p)$  (Simetria)
4.  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$  (desigualdade triangular)

As mais importantes funções nesta categoria são:

- Distância de Minkowski

$$dist(i, j) = \sqrt[q]{|x_{i1} - x_{j1}|^q + |x_{i2} - x_{j2}|^q + \dots + |x_{in} - x_{jn}|^q}$$

- Distância Euclidiana ( $q=2$ )
  - Distância de Manhattan ( $q=1$ )
-



# Algoritmo K-Vizinhos mais Próximos

---

Tendo  $N$  exemplos de treino  $(x_n, f(x_n))$   $n = 1, 2, \dots, N$

Para um novo registo  $x_q$

encontra os  $K$ -vizinhos mais próximos em  $(x_n, f(x_n))$

Se  $f(x_n)$  é discreto

$f(x_q)$  é a moda  $f(x_k)$  ( $k$ -vizinhos mais próximos)

Se  $f(x_n)$  é contínuo

$f(x_q)$  é a média ( $k$ -vizinhos mais próximos)

$$f(x_q) := \frac{\sum_{i=1}^k f(x_i)}{k}$$

# Problema da Dimensionalidade

---

Para calcular a distância entre os pontos, o método utiliza **todos** os atributos da instância

## Problema

Quando alguns destes atributos não são igualmente importantes?

Ao atribuir-se a mesma importância aos atributos, ou seja, se os atributos não forem distinguidos está-se a distorcer a noção de semelhança entre dois casos

$$dist(i, j) = \sqrt{w_1 |x_{i1} - x_{j1}|^2 + w_2 |x_{i2} - x_{j2}|^2 + \dots + w_n |x_{in} - x_{jn}|^2}$$
$$\sum_n w_i = 1$$

A determinação dos **pesos dos atributos** depende do objetivo da aprendizagem

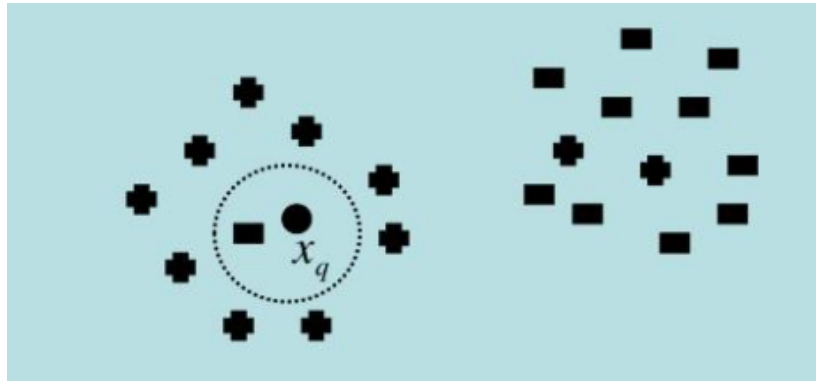
# Escolha K

---

Valores frequentes de K: 1, 3, 5, ....., valores ímpares

## Menores valores de K:

- pode aumentar a contribuição de exemplos *ruidosos*

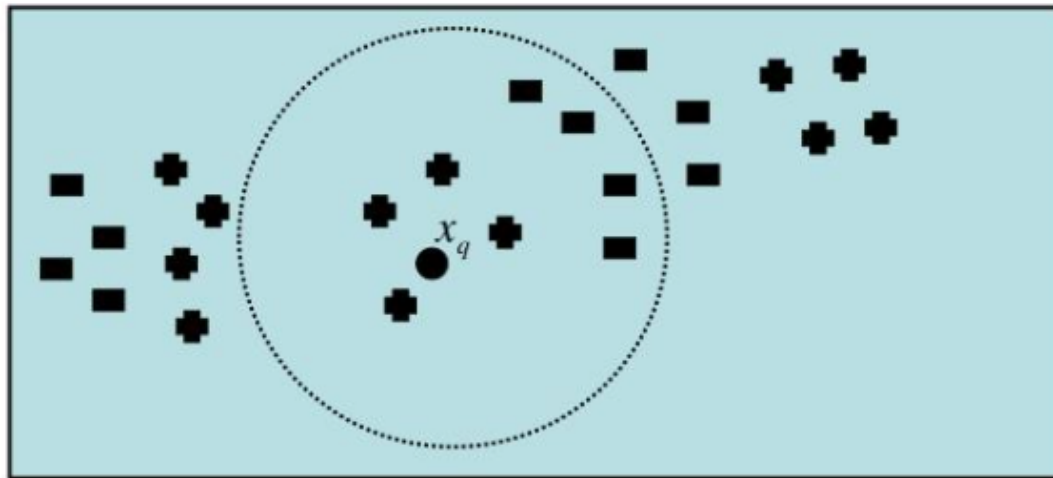


# Escolha K

---

## Valores elevados de K:

- pode aumentar a contribuição de exemplos pouco similares e logo, menos relevantes



- K deve ser estimado experimentalmente

# Vantagens / Desvantagens

---

- ✓ Processa qualquer número de variáveis dependentes
- ✓ Pode ser usada para prever quer valores contínuos quer valores discretos
- ✓ Qualquer função de distância pode ser usada
- ✓ Fácil de implementar
- ✓ Facilmente atualizado por expansão ou substituição do conjunto de treino
- ✓ É fácil entender os resultados
- ✗ Computacionalmente intensivo o calculo das distâncias entre casos
- ✗ Os resultados dependem da função distância usada, da função combinação e do número de vizinhos usados
- ✗ Necessita de grandes conjuntos de treino
- ✗ Sensibilidade a valores isolados e variáveis irrelevantes
- ✗ Ausência de qualquer modelo para “mostrar” ao utilizador

# **Aprendizagem Baseada em Probabilidades**

---

# Teoria Bayesiana - Motivação

---

## Aprendizagem Bayesiana

Usa dados acerca de eventos passados para estimar a probabilidade de eventos futuros

→ requer **Probabilidades à priori**

A Teoria Bayesiana faz duas assunções:

- *Os atributos são igualmente importantes*
  - *Os atributos são estatisticamente independentes* (sabendo a sua classe)
    - ♦ i.e., saber o valor de um atributo não diz nada acerca do valor de outro atributo (se a classe for conhecida)
- 
- Assunções de independência normalmente não são corretas!
  - No entanto ... no esquema de aprendizagem Bayesiana funciona bem

# **Teoria de Probabilidades**

---



# Teoria da Probabilidade

---

- É uma aproximação matemática para processar informação incerta
- Propõe a existência de um valor  **$P(E)$  – Probabilidade** - que consiste na possibilidade de ocorrência de um **evento  $E$**  a partir de uma sequência de **experiências de eventos aleatórios**
- Se uma determinada experiência for realizada um número considerável de vezes, então podemos ter quase a certeza que a frequência relativa do evento  **$E$**  é aproximadamente igual a  **$P(E)$**
- O conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência (eventos) é denominado **espaço da amostra  $S$**
- A probabilidade total de todos os possíveis resultados de um ensaio é sempre **100%**

# Probabilidade Discreta

---

Experiências com resultados discretos

$$P(E) = \frac{W(E)}{n}$$

A probabilidade de um evento discreto é dada pelo nº de vezes que esse evento correu dividido pelo nº total de experiências

## Exemplo

Se 10 mensagens em 50 forem spam  $\Rightarrow P(\text{spam}) = 10/50 = 20\%$

Para um espaço amostral com dois possíveis eventos: spam/não-spam

$$P(\text{não-spam}) = 1 - P(\text{spam}) = 1 - 0.20 = 80\%$$

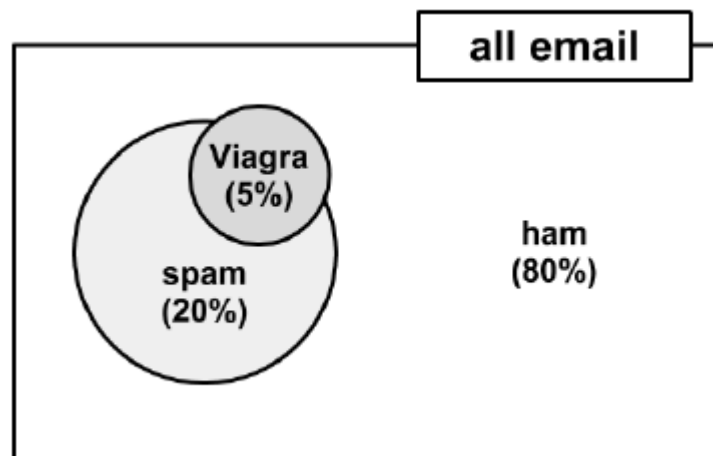
Isso funciona porque spam e não-spam são **mutuamente exclusivos** e **exaustivos**: os eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo e são os únicos resultados possíveis no espaço amostral

# Probabilidade Conjunta

- Muitas vezes, estamos interessados em monitorar vários eventos não mutuamente exclusivos no mesmo espaço amostral
- Se alguns eventos ocorrem simultaneamente com o evento de interesse, é útil usá-los para fazer previsões

## Exemplo

Considere, por exemplo, um segundo evento com base no resultado que a mensagem de e-mail contém a palavra Viagra



# Probabilidades Conjunta

---

- Pretende-se estimar a probabilidade de Spam e Viagra ocorrerem conjuntamente, ou seja  $P(\text{Spam} \cap \text{Viagra})$
- Se Spam e Viagra fossem dois **eventos independentes**

$$P(\text{Spam} \cap \text{Viagra}) = P(\text{Spam}) \times P(\text{Viagra})$$

$$P(\text{Spam}) = 20\%$$

$$P(\text{Viagra}) = 5\% \Rightarrow P(\text{Spam} \cap \text{Viagra}) = 0.20 \times 0.05 = 0.01 \text{ (1\%)}$$

Mas como a  $P(\text{Spam})$  e  $P(\text{Viagra})$  são altamente dependentes, significa que **o cálculo não é correto**

# Probab. Condicional – Teorema de Bayes

As relações entre os eventos dependentes podem ser descritas por meio do **Teorema de Bayes**, como mostrado na seguinte fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



A notação  $P(A|B)$  pode ser lido como a probabilidade do evento A, uma vez que o evento B ocorreu

Isto é conhecido como **probabilidade condicional**, uma vez que a probabilidade de A é dependente (isto é, é condicionada) pelo evento B

# Probabilidade Condicional

---

- Se uma mensagem for selecionada aleatoriamente da caixa de correio e essa mensagem contiver a palavra *Viagra* (evento B), qual é a probabilidade da mensagem ser Spam (evento A)?

Aplicando o teorema de Bayes calcula-se a **probabilidade posterior** que mede o quão provável a mensagem poderá ser Spam

Probab. marginal

Probab. à priori

$$P(\text{Spam} | \text{Viagra}) = \frac{P(\text{Viagra} | \text{Spam})P(\text{Spam})}{P(\text{Viagra})}$$

Probab. à posteriori

# Teorema de Bayes

---

Supondo que temos 100 mensagens (20 spam/80 ham) na nossa caixa de correio:

- 5 mensagens contêm a palavra *Viagra*, e se destas 4 forem Spam

$P(\text{Viagra}|\text{Spam}) = 4/20 = 0.20$  -> probabilidade marginal

$$P(\text{Spam} | \text{Viagra}) = \frac{P(\text{Viagra} | \text{Spam})P(\text{Spam})}{P(\text{Viagra})}$$

$$P(\text{Spam} | \text{Viagra}) = \frac{0.2 \times 0.2}{0.05} = 0.8$$

Portanto, **80%** é a probabilidade de uma mensagem ser spam, uma vez que contém a palavra *Viagra*

# Teorema de Bayes

Se adicionarmos mais termos ao nosso filtro de spam:

	Viagra		Dinheiro		Fitness		Unsubscribe		
Frequência	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	
Spam	4	16	10	10	0	20	12	8	20
Não Spam	1	79	14	66	8	72	23	57	80
Total									100

Qual a probabilidade de uma mensagem ser spam se Viagra = Sim, Dinheiro = Não, Fitness = Não, e Unsubscribe = Sim:

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{P(W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4 | \text{Spam})P(\text{Spam})}{P(W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4)}$$

Fórmula computacionalmente muito difícil de resolver !



# Classificador Bayesiano Naive (Ingénua)

## Suposição Naive Bayes

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n \mid v_j) = \prod_i P(a_i \mid v_j)$$

Ou seja, as variáveis  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , são independentes

Seja o valor  $v_j$  do atributo a prever de uma instância da amostra com  $n$  atributos previsores com valores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  **a probabilidade do valor  $v_j$  do atributo a prever é igual ao produto das probabilidades individuais de cada atributo**

Fazendo a substituição no Classificador Bayesiano Naive

$$V_{MPP} = \arg \max_{v_j \in V} P(v_j) \times \prod_i P(a_i \mid v_j)$$

**$V_{MPP}$  é o valor previsto pelo classificador Bayesiano**

# Suposição Naive Bayes

---

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{P(W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4 | \text{Spam})P(\text{Spam})}{P(W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4)}$$

**Naive Bayes** assume independência condicional de classe, o que significa que os **eventos são independentes** desde que **condicionados ao mesmo valor de classe**

Assumindo independência condicional a fórmula pode ser simplificada:

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{P(W_1 | \text{spam})P(\neg W_2 | \text{spam})P(\neg W_3 | \text{spam})P(W_4 | \text{Spam})P(\text{Spam})}{P(W_1)P(\neg W_2)P(\neg W_3)P(W_4)}$$

O resultado desta fórmula deve ser comparado com a probabilidade da mensagem ser não-spam

# Suposição Naive Bayes

	Viagra		Dinheiro		Fitness		Unsubscribe		
Frequência	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	
Spam	4	16	10	10	0	20	12	8	20
Não Spam	1	79	14	66	8	72	23	57	80
Total									100

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{4}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{20}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{20}{100} = 0.012$$

$$P(\text{não Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{1}{80} \times \frac{66}{80} \times \frac{72}{80} \times \frac{23}{80} \times \frac{80}{100} = 0.002$$

# Suposição Naive Bayes

---

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{4}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{20}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{20}{100} = 0.012$$

$$P(\text{não Spam} | W_1 \cap \neg W_2 \cap \neg W_3 \cap W_4) = \frac{1}{80} \times \frac{66}{80} \times \frac{72}{80} \times \frac{23}{80} \times \frac{80}{100} = 0.002$$

Convertendo estes números em probabilidades:

$$P(\text{spam}) = \frac{0.012}{(0.012 + 0.002)} = 0.857 \qquad P(\text{não spam}) = 1 - 0.857 = 0.143$$

Segundo o padrão de palavras da mensagem:

esta mensagem é spam com **85,7%** de probabilidade, e não-spam com **14,3%** de probabilidade

# Classificador Bayesiano: Problemas

---

Se a probabilidade condicional de um dos atributos for nula, a probabilidade da classe será também nula

Por outro lado se os exemplos de treino não cobrirem todos os valores possíveis dos atributos, não será possível classificar determinados registos

## Exemplo:

Considere-se outra mensagem com os termos: Viagra, Dinheiro, Fitness e Unsubscribe:

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \frac{4}{20} \times \frac{10}{20} \times \frac{0}{20} \times \frac{12}{20} \times \frac{20}{100} = 0$$

$$P(\text{não spam} | W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \frac{1}{80} \times \frac{14}{80} \times \frac{8}{80} \times \frac{23}{80} \times \frac{80}{100} = 0.00005$$

$$P(\text{spam}) = \frac{0}{(0 + 0.0099)} = 0$$

Contudo a mensagem contém muitos termos relacionados com spam!

# Estimativa Laplace

---

Este problema pode ser tratado usando a **estimativa Laplace** para cálculo das probabilidades condicionais

O estimador de Laplace essencialmente adiciona uma pequena quantidade a cada uma das contagens na tabela de frequência, o que assegura que cada característica tem uma probabilidade não nula

Tipicamente, o estimador de Laplace é ajustado para 1, o que garante que cada combinação de características da classe é encontrado nos dados pelo menos uma vez

# Estimativa Laplace

Tabela de frequência inicial

	Viagra		Dinheiro		Fitness		Unsubscribe		
Frequência	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	
Spam	4	16	10	10	0	20	12	8	20
Não Spam	1	79	14	66	8	72	23	57	80
Total									100

Tabela de frequência com a estimativa Laplace

	Viagra		Dinheiro		Fitness		Unsubscribe		
Frequência	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	
Spam	5	17	11	11	1	21	13	9	22
Não Spam	2	80	15	67	9	73	24	58	82
Total									104

# Estimativa Laplace

	Viagra		Dinheiro		Fitness		Unsubscribe		
Frequência	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	
Spam	5	17	11	11	1	21	13	9	22
Não Spam	2	80	15	67	9	73	24	58	82
Total									104

$$P(\text{Spam} | W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \frac{5}{22} \times \frac{11}{22} \times \frac{1}{22} \times \frac{13}{22} \times \frac{22}{104} = 0.00065$$

$$P(\text{não Spam} | W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \frac{2}{82} \times \frac{15}{82} \times \frac{9}{82} \times \frac{24}{82} \times \frac{82}{104} = 0.00011$$

O estimador de Laplace pode ser ajustado para qualquer valor, o valor 1 é o mais usado



# Teorema de Bayes

---

A aplicação do teorema de Bayes como classificador requer que se conheçam:

- duas probabilidades a priori -  $P(\text{decisão}_i)$
- uma probabilidade condicional -  $P(x|\text{decisão}_i)$

Este classificador é ótimo no sentido em que, em média, nenhum outro classificador pode obter melhores resultados usando a mesma informação

Na prática estas probabilidades são desconhecidas

- **Estimativas fiáveis** destas probabilidades a partir de um conjunto de exemplos **requerem um número infinito de exemplos**

Assumem-se simplificações no calculo de  $P(x|\text{decisão})$

Assume-se que os atributos são independentes da decisão

↪ **Classificador Bayesiano Naive**

# Classificador Bayesiano Naive: Exemplo

Tempo	Temperatura	Humidade	Vento	Joga ?
Sol	elev	elev	N	N
Sol	elev	elev	S	N
Nublado	elev	elev	N	S
Chuva	med	elev	N	S
Chuva	baixa	normal	N	S
Chuva	baixa	normal	S	N
Nublado	baixa	normal	S	S
Sol	med	elev	N	N
Sol	baixa	normal	N	S
Chuva	med	normal	N	S
Sol	med	normal	S	S
Nublado	med	elev	S	S
Nublado	elev	normal	N	S
Chuva	med	elev	S	N

→ Sol      baixa      elev      S      ?

Segundo o Classificador Bayesiano Naive é necessário calcular

$$v_{NB} = \underset{v_j \in V}{argmax} P'(v_j) \prod_{a_i \in x} P'(a_i | v_j)$$

# Classificador Bayesiano Naive: Exemplo

## Tabelas de Frequência

<i>Tempo</i>	Não	Sim
Sol	3	2
Nublado	0	4
Chuva	2	3

<i>Temper.</i>	Não	Sim
elev	2	2
med	2	4
baixa	1	3

<i>Humidade</i>	Não	Sim
elev	4	3
normal	1	6

<i>Vento</i>	Não	Sim
N	2	6
S	3	3

## Tabelas de Probabilidades

<i>Tempo</i>	Não	Sim
Sol	3/5	2/9
Nublado	0/5	4/9
Chuva	2/5	3/9

<i>Temp.</i>	Não	Sim
elev	2/5	2/9
med	2/5	4/9
baixa	1/5	3/9

<i>Humidade</i>	Não	Sim
elev	4/5	3/9
normal	1/5	6/9

<i>Vento</i>	Não	Sim
N	2/5	6/9
S	3/5	3/9

$$\begin{aligned}
 P(\text{jogar}=\text{Sim}|x) &= P(\text{jogar}=\text{Sim}) \times P(\text{Sol}|\text{Sim}) \times P(\text{baixa}|\text{Sim}) \times P(\text{elev}|\text{Sim}) \times P(\text{S}|\text{Sim}) \\
 &= 9/14 \times 2/9 \times 3/9 \times 3/9 \times 3/9 = 0.0053
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{jogar}=\text{Não}|x) &= P(\text{jogar}=\text{Não}) \times P(\text{Sol}|\text{Não}) \times P(\text{baixa}|\text{Não}) \times P(\text{elev}|\text{Não}) \times P(\text{S}|\text{Não}) \\
 &= 5/14 \times 3/5 \times 1/5 \times 4/5 \times 3/5 = \mathbf{0.021}
 \end{aligned}$$

$$P(\text{jogar}=\text{Não}|x) > P(\text{jogar}=\text{Sim}|x) \Rightarrow \text{Sol} \quad \text{baixa} \quad \text{elev} \quad \text{S} \quad \mathbf{N}$$

# Probabilidades a partir de Atributos Contínuos

## Atributos contínuos

- Discretizar
- Partição baseada em dois valores:  $(A < v)$  ou  $(A > v)$
- Estimativa baseada na densidade de Probabilidade :
  - Assume-se que o atributo segue uma distribuição normal ou binomial
  - Usa-se a amostra para estimar os parâmetros da distribuição

$$\text{média: } \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{desvio padrão: } \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

- e para estimar a Probabilidade condicional  $P(A_i | c_j)$

$$P(A_i | c_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}^2}} e^{-\frac{(A_i - \mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}$$

# Atributos Numéricos

Tempo	Temperatura	Humidade	Vento	Joga ?
Sol	85	85	N	N
Sol	80	90	S	N
Nublado	83	86	N	S
Chuva	70	96	N	S
Chuva	68	80	N	S
Chuva	65	70	S	N
Nublado	64	65	S	S
Sol	72	95	N	N
Sol	69	70	N	S
Chuva	75	80	N	S
Sol	75	70	S	S
Nublado	72	90	S	S
Nublado	81	75	N	S
Chuva	71	91	S	N

→ Sol 66 90 S ?

É necessário calcular

$$P(A_i | c_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}^2}} e^{-\frac{(A_i - \mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}}$$

# Classificador Bayesiano Naive: Exemplo

## Tabelas de Probabilidades

<i>Tempo</i>	Não	Sim
Sol	3/5	2/9
Nublado	0/5	4/9
Chuva	2/5	3/9

<i>Temper</i>	Não	Sim
$\mu = 74,6$	$\mu = 73,0$	
$\sigma = 7,893$	$\sigma = 6,164$	

<i>Humidade</i>	Não	Sim
$\mu = 86,2$	$\mu = 79,11$	
$\sigma = 9,731$	$\sigma = 10,126$	

<i>Vento</i>	Não	Sim
N	2/5	6/9
S	3/5	3/9

$$P(\text{Temper} = 66 \mid \text{Joga} = S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(6.164)^2}} e^{-\frac{(66-73)^2}{2 \times 6,164^2}} = 0.0590$$

$$P(\text{Temper} = 66 \mid \text{Joga} = N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(7.893)^2}} e^{-\frac{(66-74,6)^2}{2 \times 7,893^2}} = 0.0472$$

$$P(\text{Humidade} = 90 \mid \text{Joga} = S) = 0.041$$

$$P(\text{Humidade} = 90 \mid \text{Joga} = N) = 0.042$$

# Classificador Bayesiano Naive: Exemplo

## Tabelas de Frequência

<i>Tempo</i>	Não	Sim
Sol	3	2
Nublado	0	4
Chuva	2	3

<i>Temper.</i>	Não	Sim
	65	68
	71	75
	85	....
	80	69
	72	75

<i>Humidade</i>	Não	Sim
	70	70
	91	70
	85	....
	90	90
	95	90

<i>Vento</i>	Não	Sim
N	2	6
S	3	3

## Tabelas de Probabilidades

<i>Tempo</i>	Não	Sim
Sol	3/5	2/9
Nublado	0/5	4/9
Chuva	2/5	3/9

<i>Temper</i>	Não	Sim
	$\mu = 74,6,0$	$\mu = 73,0$
	$\sigma = 7,89$	$\sigma = 6,16$

<i>Humidade</i>	Não	Sim
$\mu = 86,2$	$\mu = 79,11$	
$\sigma = 9,73$	$\sigma = 10,22$	

<i>Vento</i>	Não	Sim
N	2/5	6/9
S	3/5	3/9

$$P(\text{jogar}=\text{Sim}|x) = P(\text{jogar}=\text{Sim}) \times P(\text{Sol}|\text{Sim}) \times P(66|\text{Sim}) \times P(90|\text{Sim}) \times P(S|\text{Sim})$$

$$= 9/14 \times 2/9 \times 0,0590 \times 0,041 \times 3/9 = 0.00012$$

$$P(\text{jogar}=\text{Não}|x) = P(\text{jogar}=\text{Não}) \times P(\text{Sol}|\text{Não}) \times P(66|\text{Não}) \times P(90|\text{Não}) \times P(S|\text{Não})$$

$$= 5/14 \times 3/5 \times 0.0472 \times 0.042 \times 3/5 = \mathbf{0.00025}$$

$$P(\text{jogar}=\text{Não}|x) > P(\text{jogar}=\text{Sim}|x) \Rightarrow \text{Sol} \quad 66 \quad 90 \quad S \quad N$$

# Classificador Naive Bayes - Vantagens

---

- Robusto no **tratamento de valores isolados**
  - Valores isolados afetam pouco o cálculo das probabilidades
- Robusto no **tratamento de atributos irrelevantes**
  - Atributos afetam pouco as probabilidades relativas entre classes
- Fácil de implementar
- Capaz de classificar amostras com valores ausentes
- Considera todos os atributos como igualmente importantes
- Complexidade computacional linear em todas as variáveis do problema



# Classificador Naive Bayes - Desvantagens

---

- Cálculo de um número muito elevado de probabilidades
- Amostras suficientemente representativas (elevada dimensão) para se obterem probabilidades precisas
  - Deve ser usado se disponível um conjunto de treino médio ou grande
- Suposição de independência condicional
- Não capta dependências entre variáveis
- Desempenho pode ser afetado pela presença de atributos correlacionados