ÁLGEBRA LINEAR

André Ricardo Rocha da Silva

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS

Introdução ao estudo das matrizes

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Definir matriz e seus elementos, classificação e relacioná-la com tabelas utilizadas no dia a dia.
- Realizar as operações de adição, subtração, produto por escalar, transposição e multiplicação de matrizes.
- Resolver problemas aplicados envolvendo operações com matrizes.

Introdução

As matrizes são ferramentas matemáticas muito úteis para organizar e processar informações. Por isso, elas estão frequentemente presentes em várias áreas da ciência.

Neste capítulo, você aprenderá a construir e classificar uma matriz, bem como manipulá-la algebricamente por meio das operações de soma, subtração e multiplicação (entre um escalar e uma matriz e entre matrizes). A partir disso, você aplicará esse conhecimento na resolução de problemas cotidianos por meio de matrizes.

Definição e classificação de matrizes

Para que você desenvolva uma intuição inicial sobre matrizes, considere o seguinte exemplo hipotético: você e uma amiga são agentes autônomos e atuam em um escritório ofertando produtos financeiros a clientes que queiram investir na formação de poupança. Os produtos financeiros são: fundos de renda fixa (RF), fundos multimercado (M) e planos de previdência (P). Para o mês de janeiro, você e sua amiga elaboraram um quadro com o quantitativo (Quadro 1) que cada um ofertou desses produtos.

Quadro 1. Quantidade de cada produto financeiro ofertado

	RF	M	P
Você	14	10	12
Amiga	20	8	16

Os números apresentados nesse quadro podem ser representados como:

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 20 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

O arranjo acima corresponde a uma **matriz**, e cada número desse arranjo é denominado de **elemento da matriz**. Cada linha representa o quanto de cada produto financeiro você e sua amiga ofertaram — por exemplo, na segunda linha, é visto que sua amiga ofertou 20 fundos de renda fixa, 8 fundos multimercado e 16 planos de previdência. Já cada coluna representa o quanto você e sua amiga ofertaram de cada tipo de produto financeiro — por exemplo, a primeira coluna mostra que você ofertou 14 fundos de renda fixa, e sua amiga ofertou 20 fundos desse mesmo tipo.

Dessa forma, uma matriz é simplesmente um agrupamento retangular de números dispostos regularmente em linhas e colunas.

O tamanho de uma matriz é definido pelo número de linhas e colunas que ela contém. Assim, uma matriz é dita ser do tipo $m \times n$ (leia-se m por n) quando ela tem m linhas e n colunas. No exemplo anterior, a matriz que representa o quantitativo de produtos financeiros ofertados por você e sua amiga no mês de janeiro é do tipo 2×3 ($m = 2$ e $n = 3$). Consequentemente, pode-se desenvolver uma classificação de diferentes tipos de matrizes baseada no tamanho delas.

Matriz retangular

É aquela na qual o número de linhas e colunas é diferente, isto é, $m \neq n$. A matriz a seguir é retangular, pois é do tipo 2×3:

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 20 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo desse tipo de matriz seria o seguinte, que é uma matriz do tipo 3×2:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

É aquela que contém o mesmo número de linhas e colunas, isto é, $m = n$. Esse é o caso de uma matriz do tipo 2×2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz coluna

É um caso particular de matriz retangular, composta por uma única coluna. Por isso, é do tipo $m \times 1$. O exemplo a seguir mostra uma matriz coluna do tipo 3×1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fique atento

Uma matriz coluna pode representar as componentes de um vetor e, por isso, também é conhecida por **vetor coluna**.

Matriz linha

É outro caso particular de matriz retangular, pois é composta por uma única linha e, por isso, do tipo $1 \times n$. O exemplo a seguir mostra uma matriz linha do tipo 1×2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Fique atento

Uma matriz linha também pode representar as componentes de um vetor e, por isso, é conhecida por **vetor linha**.

Outra classificação importante de matrizes envolve os elementos da matriz. Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

O elemento que aparece na intersecção da primeira linha, $i = 1$, com a segunda coluna, $j = 2$, é o número 0. Assim, ele pode ser representado de forma mais geral como $a_{12} = 0$. Dessa maneira, cada elemento da matriz é representado por uma "coordenada de localização" na matriz dada por a_{ij}, em que o índice i indica a linha, e o índice j indica a coluna em que se pode localizar um determinado elemento da matriz.

Neste exemplo, os elementos da matriz são identificados como: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 6$ e $a_{22} = 4$. Ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Para a matriz do tipo 2×3 dada por:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

os elementos da matriz são identificados como: $a_{11} = –1$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = –2$ e $a_{23} = 3$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Os elementos da diagonal principal de uma matriz são aqueles em que $i = j$, ou seja, a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc.

Uma matriz quadrada em que os elementos fora da diagonal principal são todos nulos, isto é $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é dita ser diagonal. No exemplo a seguir, a matriz B é diagonal, pois os elementos b_{21} e b_{12} são nulos.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Há dois tipos de matriz triangular: a superior, em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

e a inferior, em que os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

É uma matriz diagonal em que todos os elementos são iguais.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

É um caso particular da matriz escalar, pois todos seus elementos da diagonal principal são iguais à unidade, isto é, $a_{jj} = 1$ para $i = j$. Uma notação convencional para a matriz identidade é rotulá-la por I. A matriz identidade do tipo 3 × 3 é:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz identidade do tipo 2 × 2 é:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Dada uma matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

do tipo 2 × 3, a matriz transposta de A, denotada por A^T, é obtida pela transposição entre a primeira linha e a primeira coluna, e entre a segunda linha e a segunda coluna, resultando em uma matriz do tipo 3 × 2:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Exemplo

A matriz transposta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ é $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

A matriz transposta de $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ é $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Matriz simétrica

Uma matriz quadrada é simétrica quando $A^T = A$, o que implica na seguinte relação entre os elementos da matriz fora da diagonal principal: $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz a seguir é simétrica, uma vez que $a_{12} = a_{21} = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Em contrapartida, uma matriz quadrada é **antissimétrica** se $A^T = -A$. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é antissimétrica, pois:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Matriz nula

É aquela matriz em que todos os elementos são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para qualquer valor de i e j.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Depois de conhecidos os diferentes tipos de matrizes, você aprenderá como efetuar algumas operações importantes com matrizes, tais como: adição, subtração, multiplicação por um escalar e, finalmente, multiplicação entre matrizes.

Igualdade

Duas matrizes são iguais quando elas têm o mesmo tamanho, e seus elementos são todos iguais. Se as matrizes quadradas A e B do tipo 2×2 são iguais, então $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo

Se a matriz quadrada B do tipo 2 × 2, dada por $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, for igual à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, então é verdadeiro que:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

implicando que $b_{11} = 1$, $b_{12} = 0$, $b_{21} = 6$ e $b_{22} = 4$.

Se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for igual à matriz $C = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

implicando que $x = 1$ e $y = 2$.

Adição

A operação de adição entre duas matrizes A e B de mesmo tamanho é realizada por meio da soma direta dos elementos de cada matriz, que estão localizados em uma mesma linha e uma mesma coluna, ou seja, $a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo

Dadas duas matrizes quadradas do tipo 2 × 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, então o resultado da soma dessas duas matrizes, $A + B$, é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Observe que:

- $a_{11} + b_{11} = 1 + 2 = 3$
- $a_{12} + b_{12} = 2 + 5 = 7$
- $a_{21} + b_{21} = 3 + 3 = 6$
- $a_{22} + b_{22} = 4 + 3 = 7$

A operação de adição tem duas propriedades importantes, descritas a seguir.

Propriedade comutativa

Dadas duas matrizes A e B, o resultado das somas $A + B$ e $B + A$ é igual.

$$A + B = B + A$$

Propriedade associativa

Dadas três matrizes A, B e C, o resultado da soma $(A + B)$ com C é igual ao da soma de A com $B + C$.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Subtração

A operação de subtração entre duas matrizes A e B de mesmo tamanho é realizada por meio da subtração direta dos elementos de cada matriz, que estão localizados em uma mesma linha e uma mesma coluna, ou seja, $a_{ij} - b_{ij}$.

Exemplo

Dadas duas matrizes quadradas do tipo 2×2, $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, então o resultado da subtração de A por B, $A - B$ é:

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que:

- $a_{11} - b_{11} = 4 - 2 = 2$
- $a_{12} - b_{12} = 8 - 5 = 3$
- $a_{21} - b_{21} = 3 - 3 = 0$
- $a_{22} - b_{22} = 5 - 3 = 2$

Saiba mais

A matriz resultante de operações de adição ou subtração terá sempre o mesmo tamanho das matrizes que foram usadas nessas operações.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Um **escalar** é simplesmente um número puro (que também pode ser visto como uma matriz 1 × 1). Então, a multiplicação de uma matriz A por um escalar c qualquer implica que cada elemento da matriz será multiplicado pelo escalar, c isto é, ca_{ij}. Por exemplo, se $c = 2$, então:

$$cA = \mathbf{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \cdot 1 & \mathbf{2} \cdot 3 \\ \mathbf{2} \cdot 2 & \mathbf{2} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que, nesse processo de multiplicação, a matriz resultante tem o mesmo tamanho da matriz original A.

A operação de multiplicação de uma matriz por um escalar apresenta algumas propriedades, que são descritas a seguir.

- Dadas duas matrizes A e B e um escalar c, o resultado da multiplicação do escalar pela soma das matrizes, $c(A + B)$, é igual à soma das matrizes já multiplicadas individualmente pelo escalar, $cA + cB$.

$$c(A + B) = cA + cB$$

- Dada uma matriz A e dois escalares c e d, o resultado da soma dos escalares multiplicado pela matriz, $(c + d)A$, é igual à soma da matriz multiplicada individualmente por cada um dos escalares, $cA + dA$.

$$(c + d)A = cA + dA$$

- Dada uma matriz A e dois escalares c e d, o resultado da multiplicação de um escalar pela matriz já multiplicada pelo outro escalar, $c(dA)$, é igual ao produto dos escalares multiplicado pela matriz, $(cd)A$.

$$c(dA) = (cd)A$$

Multiplicação entre matrizes

A multiplicação entre matrizes exigirá de você um pouco mais de atenção. A única condição necessária para que se possa multiplicar duas matrizes, A e B, é que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B. Assim, se a matriz A é do tipo $m \times n$, e a matriz B é do tipo $p \times q$, então o produto AB entre as matrizes somente ocorre se $n = p$. Além disso, o resultado final dessa multiplicação entre as matrizes A e B será uma nova matriz do tipo $m \times q$, ou seja, com o mesmo número de linhas da matriz A, mas com o mesmo número de colunas da matriz B. Em particular, para o caso de duas matrizes quadradas de mesmo tamanho, a matriz resultante do produto entre elas será do mesmo tamanho que elas.

A existência dessa relação entre o número de colunas de uma matriz com o número de linhas da outra decorre da necessidade de se envolver um mesmo número de elementos para multiplicação entre as matrizes.

Considere o seguinte exemplo: uma matriz A do tipo 2×3, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e uma matriz B do tipo 3×1, dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o número de colunas de A, que é 3, é igual ao número de linhas de B, que também é 3, essa multiplicação é possível. Observe também que a multiplicação de uma matriz do tipo 2×3 (A) por uma matriz do tipo 3×1 (B) resulta em uma matriz do tipo 2×1 (AB).

Operacionalmente, a multiplicação ocorre da seguinte maneira: multiplica-se a primeira linha da matriz A pela coluna da matriz B, elemento por elemento na ordem que estão dispostos — primeiro elemento da primeira linha de A, 1, com o primeiro elemento da coluna de B, **2**, segundo elemento da primeira linha de A, 1, com o segundo elemento da coluna de B, **3**, e assim por diante — somando-se os produtos individuais desses elementos, $1 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{1} = 7$, cujo resultado será o primeiro elemento da matriz coluna resultante do produto entre A e B. Repete-se o mesmo procedimento para a segunda linha da matriz A, multiplicando-a com a primeira coluna da matriz B, cujo resultado, $2 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{3} + 3 \cdot \mathbf{1} = 13$, corresponderá ao segundo elemento da matriz coluna resultante do produto entre A e B. Veja:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{1} \\ 2 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{3} + 3 \cdot \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Agora, considere uma nova matriz A do tipo 1×2, dada por:

$$[\mathbf{1} \quad \mathbf{3}]$$

e uma nova matriz B do tipo 2×2, dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, o resultado da multiplicação da matriz A pela matriz B será uma matriz do tipo 1×2. Agora, para você calcular o produto AB, deve multiplicar a linha da matriz A pela primeira coluna da matriz B, $\mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{3} \cdot 2 = 8$, cujo resultado fornece o primeiro elemento da matriz linha resultante do produto entre A e B. O segundo elemento dessa matriz é obtido pela multiplicação da linha da matriz A com a segunda coluna da matriz B, $\mathbf{1} \cdot 3 + \mathbf{3} \cdot 1 = 6$. Veja:

$$AB = [\mathbf{1} \quad \mathbf{3}] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [(\mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{3} \cdot 2) \quad (\mathbf{1} \cdot 3 + \mathbf{3} \cdot 1)] = [8 \quad 6]$$

O último tipo de multiplicação de matrizes relevante é a multiplicação entre duas matrizes quadradas. Considere duas matrizes do tipo 2×2, dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A matriz resultante do produto AB também será uma matriz quadrada do tipo 2×2 e é operacionalmente obtida como:

$$AB = \begin{bmatrix} (\text{primeira linha } A \times \textbf{primeira coluna } \boldsymbol{B}) & (\text{primeira linha } A \times \textbf{segunda coluna } \boldsymbol{B}) \\ (\text{segunda linha } A \times \textbf{primeira coluna } \boldsymbol{B}) & (\text{segunda linha } A \times \textbf{segunda coluna } \boldsymbol{B}) \end{bmatrix}$$

Logo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot \mathbf{0} + 1 \cdot \mathbf{3}) & (1 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{1}) \\ (2 \cdot \mathbf{0} + 3 \cdot \mathbf{3}) & (2 \cdot \mathbf{2} + 3 \cdot \mathbf{1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo

1. A multiplicação de uma matriz quadrada A pela matriz identidade I de mesmo tamanho é igual à própria matriz A. Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, então o produto AI fica sendo:

$$AI = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Considere duas matrizes quadradas do tipo 3×3, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$. Então, o resultado produto entre elas, AB, é:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot (\mathbf{-1}) + 1 \cdot \mathbf{0} + 3 \cdot (\mathbf{-2}) & 2 \cdot \mathbf{3} + 1 \cdot \mathbf{5} + 3 \cdot \mathbf{2} & 2 \cdot \mathbf{0} + 1 \cdot \mathbf{1} + 3 \cdot \mathbf{2} \\ 1 \cdot (\mathbf{-1}) + 0 \cdot \mathbf{0} + 1 \cdot (\mathbf{-2}) & 1 \cdot \mathbf{3} + 0 \cdot \mathbf{5} + 1 \cdot \mathbf{2} & 1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot \mathbf{2} \\ 4 \cdot (\mathbf{-1}) + 2 \cdot \mathbf{0} + 3 \cdot (\mathbf{-2}) & 4 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{5} + 3 \cdot \mathbf{2} & 4 \cdot \mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{1} + 3 \cdot \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -8 & 17 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -10 & 28 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Se uma matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ multiplica uma matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que contém uma coluna (ou uma linha) inteira com elementos nulos, então o resultado será igual a uma matriz que também contém uma coluna (ou uma linha) inteira com elementos nulos:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A operação de multiplicação entre matrizes apresenta algumas propriedades importantes. Considere três matrizes A, B e C, cujos tamanhos permitem realizar as operações de soma e multiplicação para cada situação de interesse.

Propriedade associativa

O resultado da multiplicação da matriz A pelo produto das matrizes B e C é igual ao produto das matrizes A e B multiplicado pela matriz C:

$$A(BC) = (AB)C$$

Propriedade distributiva

À direita: o resultado da multiplicação da soma das matrizes A e B pela matriz C é igual à soma dos produtos das matrizes A com C e B com C:

$$(A + B)C = AC + BC$$

À esquerda: o resultado da multiplicação da matriz A pela soma das matrizes B e C é igual à soma dos produtos das matrizes A com B e A com C:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Contudo, vale a pena observar que, em geral, o produto entre duas matrizes **não é comutativo**, isto é, $AB \neq BA$ (note que o produto entre dois escalares é sempre comutativo, ou seja, $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$).

Para que você entenda isso, considere duas matrizes quadradas do tipo 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

O produto AB é dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{bmatrix}$$

O produto BA é dado por:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12}) & (a_{12} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12}) \\ (a_{11} \cdot b_{21} + a_{21} \cdot b_{22}) & (a_{12} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{bmatrix}$$

Logo, quando você compara elemento por elemento em cada uma das matrizes resultantes de AB e BA (por exemplo, $(AB)_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + \boldsymbol{a_{12} \cdot b_{21}} \neq a_{11} \cdot b_{11} + \boldsymbol{a_{21} \cdot b_{12}} = (BA)_{11}$), você percebe que eles são todos diferentes.

No entanto, a partir desse tratamento geral para o produto de duas matrizes, é possível extrair algumas condições particulares que possibilitam gerar $AB = BA$. Uma primeira condição surge quando uma das matrizes é a matriz identidade. Por exemplo, se $B = I$, então o produto entre A e I será comutativo:

$$AI = IA = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

(Faça $b_{11} = b_{22} = 1$ e $b_{12} = b_{21} = 0$ nos resultados acima de AB e BA.)

A segunda condição particular é aquela em que as duas matrizes são diagonais, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$. Nesse caso, o produto entre as duas matrizes é comutativo, pois:

$$AB = BA = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

(Faça $a_{12} = a_{21} = 0$ e $b_{12} = b_{21} = 0$ nos resultados acima de AB e BA.)

Equação matricial

Uma equação matricial é uma relação de igualdade entre duas ou mais matrizes, assim como ocorre com os escalares — por exemplo, $2x - 4 = 0$.

Algumas equações matriciais típicas são: $A + B = C$; $A - 2B = 3C$; $AX = B$; $A^2 = X$; e assim por diante.

Exemplo

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, é possível encontrar os valores dos elementos da matriz B que satisfaçam a equação matricial $2A + B = C$. Veja:

$$2A + B = C \rightarrow 2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 + x & 4 + y \\ -2 + z & 10 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, como os elementos da matriz do lado esquerdo devem ser iguais aos da matriz do lado direito, você tem simplesmente quatro equações escalares para as variáveis x, y, z e t: $6 + x = 0$, então $x = -6$; $4 + y = -1$, então $y = -5$; $-2 + z = 1$, então $z = 3$; e $10 + t = 2$, então $t = -8$.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, a equação matricial $AX = B$ resulta em um sistema de duas equações lineares para as variáveis x e y. Veja:

$$AX = B \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Um exemplo típico desse tipo de sistema é o seguinte:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

onde, nesse caso, você pode identificar a matriz A como sendo $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, e a matriz B como sendo $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Aplicações com matrizes

Reconsidere o exemplo discutido no início deste capítulo, em que você e sua amiga são agentes autônomos. A matriz que representa o quantitativo de produtos financeiros ofertados por você e sua amiga no mês de janeiro é:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 20 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Para o mês de fevereiro, o quantitativo de produtos financeiros ofertados por você e sua amiga é:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 15 \\ 10 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Portanto, a quantidade de diferentes produtos financeiros que vocês ofertaram nesses dois meses é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 20 & 8 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 14 & 15 \\ 10 & 16 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 27 \\ 30 & 22 & 28 \end{bmatrix}$$

Logo, você ofertou 24 fundos de renda fixa e fundos multimercado, enquanto sua amiga ofertou 30 fundos de renda fixa e 22 fundos multimercados.

Agora, considere que vocês recebem uma comissão para cada produto financeiro ofertado. Para fundos de renda fixa, a comissão é de R$ 100,00 por produto ofertado. Já para os fundos multimercados e os planos de previdência, as comissões são, respectivamente, de R$ 120,00 e R$ 150,00 por produto ofertado. Para saber o valor total que cada um de vocês receberá de comissão ao final desses dois meses, basta primeiro criar uma matriz do tipo 3 × 1, em que cada elemento será o valor da comissão para cada produto. Assim:

$$C = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Depois, você pode multiplicar o resultado da soma das matrizes *A* e *B*, ou seja, *A* + *B*, com a matriz *C*:

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 27 \\ 30 & 22 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \cdot 100 + 24 \cdot 120 + 27 \cdot 150 \\ 30 \cdot 100 + 22 \cdot 120 + 28 \cdot 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9330 \\ 9840 \end{bmatrix}$$

Portanto, nesses dois meses, você receberá um total de R$ 9.330,00 de comissão, e sua amiga receberá um total R$ 9.840,00.

Exemplo

Como exemplo adicional de multiplicação de matrizes, considere uma matriz A do tipo 2×2 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e a matriz identidade I, também do tipo 2×2:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, o resultado do produto AI será:

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $AI = A$. Esse resultado é válido para qualquer tipo de matriz quadrada A, do tipo $m \times m$, desde que a matriz identidade também tenha o mesmo tamanho. Verifique também que $IA = A$.

Referências

ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra linear contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

CRISPINO, M. L. *320 questões resolvidas de álgebra linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS