# Localização de um ponto

**Leandro Baroni**

leandro.baroni@ufabc.edu.br

Laboratório de guiagem, navegação e controle

Problema 2 – Aula 1

Universidade Federal do ABC

## Objetivos – Atividade 1

- Revisão de alguns sistemas de coordenadas comumente utilizados em engenharia aeroespacial e obtenção das transformações entre eles
- Relação dos sistemas de coordenadas com o tempo
- Estudo dos diversos sistemas de medição do tempo utilizados na engenharia aeroespacial
- Aplicar na localização de um ponto

# Metodologia – Atividade 1

I. Dado um vetor em coordenadas geográficas (latitude geodésica, longitude e altitude), obter este vetor em coordenadas cartesianas terrestres
II. Dado o tempo em que ele foi medido obter o vetor normalizado em coordenadas cartesianas geocêntricas inerciais (SGI).

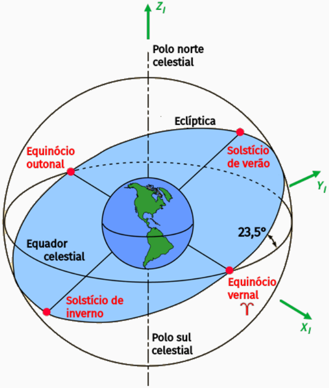
- Dado um vetor $\vec{R}_N$ em coordenadas geográficas (latitude geodésica, longitude e altitude), obter:
  - o mesmo vetor em coordenadas cartesianas terrestres $\vec{R}_E$
  - este vetor em coordenadas cartesianas geocêntricas inerciais $\vec{R}_I$

| | Ponto 1 | Ponto 2 | Ponto 3 |
|---|---|---|---|
| Latitude geodésica | $5^\circ\ 55'\ 23''$ S | $2^\circ\ 20'\ 20''$ S | $23^\circ\ 40'\ 37''$ S |
| Longitude | $35^\circ\ 09'\ 51''$ W | $44^\circ\ 24'\ 18''$ W | $46^\circ\ 33'\ 46''$ W |
| Altitude | 39 m | 44 m | 778 m |
| Tempo local | 15h 54min 10s 03/06/2025 | 11h 23min 10s 10/07/2024 | 21h 45min 25s 24/06/2025 |

# Sistemas de coordenadas

- **Sistema Geocêntrico Inercial**
- Este sistema tem origem no centro de massa da Terra
    - O eixo $X_I$ aponta para o equinócio Vernal (♈)
    - O eixo $Z_I$ aponta para o polo norte geográfico, coincidindo com o eixo de rotação da Terra
    - O eixo $Y_I$ forma o sistema dextrógiro

- Os eixos $X_I$ e $Y_I$ definem o plano do Equador terrestre que está inclinado de 23,5° com relação à Eclíptica
- Este sistema não gira com a Terra, é considerado inercial em relação as estrelas (exceto pela precessão dos equinócios)



# Sistema cartesiano terrestre

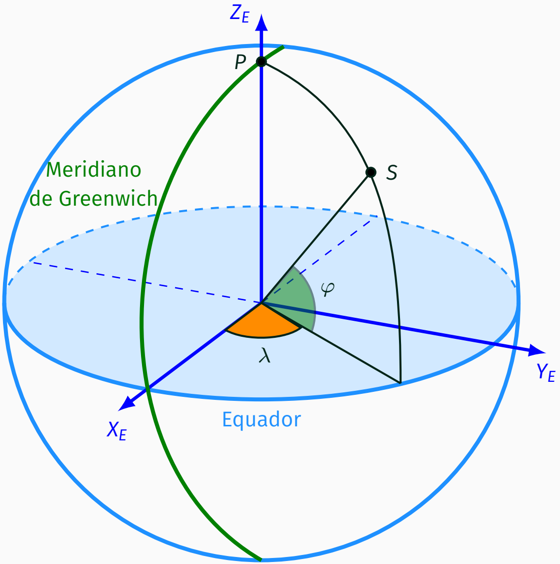
- **Sistema ECEF** (*Earth Centered-Earth Fixed*)
- A origem do sistema cartesiano terrestre é o centro de gravidade da Terra
- O eixo $Z_E$ está apontado para o polo norte (eixo de rotação terrestre)
- O eixo $X_E$ está direcionado ao ponto de interseção entre o meridiano de Greenwich e o equador
- O eixo $Y_E$ está a $90^\circ$ do eixo $X_E$ no sentido direto

# Sistema cartesiano terrestre

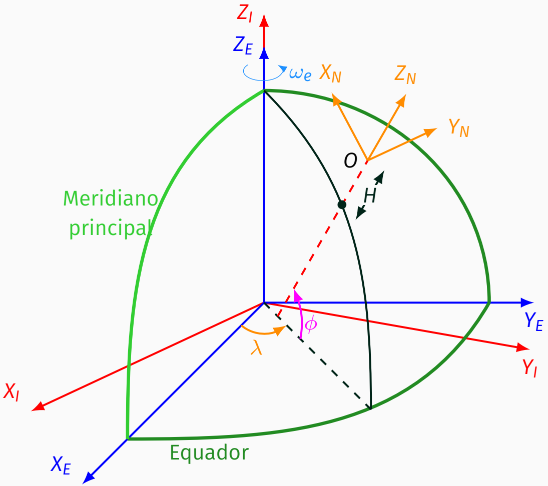
- As coordenadas cartesianas de um ponto no espaço podem também ser representadas por meio dos ângulos em coordenadas esféricas:
  - Longitude terrestre $\lambda$
  - Latitude geocêntrica $\varphi$

$$X_E = R \cos\lambda \cos\varphi$$
$$Y_E = R \,\mathrm{sen}\,\lambda \cos\varphi$$
$$Z_E = R \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

# Sistema cartesiano terrestre



# Sistemas de coordenadas: latitude, longitude e altitude




- Noureldin, A.; Karamat, T. B.; Georgy, J. *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration.* Springer, 2013. DOI 10.1007/978-3-642-30466-8

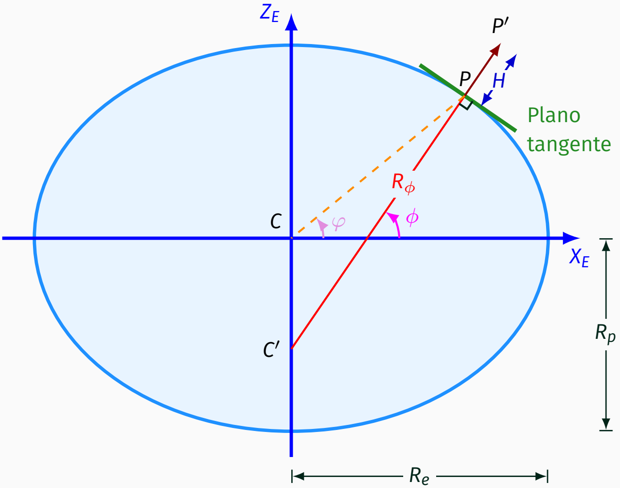
## Sistema geográfico

- Este sistema utiliza os mesmos eixos do sistema cartesiano terrestre
  - A Terra não é uma esfera perfeita $\rightarrow$ aproximação por um **elipsoide**
    - GRS80
    - WGS84
    - outros
- A localização de um ponto é especificada pela *latitude*, *longitude* e a *altitude* com relação ao elipsoide de referência
  - Necessário diferenciar **latitude geodésica** $\phi$ da **latitude geocêntrica** $\varphi$
    - A *latitude geodésica* $\phi$ mede o ângulo entre o plano do equador e a direção do ponto em questão, passando perpendicularmente pelo plano tangente à superfície do elipsoide, nesta direção
    - A *latitude geocêntrica* $\varphi$ mede o ângulo entre o plano do equador e a linha que liga o centro do elipsoide de referência e a intersecção da superfície do elipsoide e a normal ao plano tangente tocando a superfície
  - Murad, A. H.; Jang, K. D.; Atallah, G.; Karne, R.; Baras, J. *A Summary of Satellite Orbit Related Calculations*. ISR T.R. 95-107. Univ. of Maryland, 1995.

# Elipsoides GRS80 e WGS84

| | Ponto 1 | Ponto 2 | Ponto 3 |
|---|---|---|---|
| Latitude geodésica | $5^\circ\ 55'\ 23''$ S | $2^\circ\ 20'\ 20''$ S | $23^\circ\ 40'\ 37''$ S |
| Longitude | $35^\circ\ 09'\ 51''$ W | $44^\circ\ 24'\ 18''$ W | $46^\circ\ 33'\ 46''$ W |
| Altitude | 39 m | 44 m | 778 m |
| Tempo local | 15h 54min 10s 03/06/2025 | 11h 23min 10s 10/07/2024 | 21h 45min 25s 24/06/2025 |

# Sistema geográfico



# Sistema geográfico

- As coordenadas são

$$\begin{aligned} X'_E &= R_\phi \cos\phi \\ Z'_E &= \left(1 - e^2\right) R_\phi \operatorname{sen}\phi \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad R_\phi = \frac{R_e}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi}}$$

- Se o ponto de observação $P$ está a uma elevação $H$ acima da superfície do elipsoide, então devemos adicionar $H\cos\phi$ a $X'_E$ e $H\operatorname{sen}\phi$ a $Z'_E$. Assim,

$$\begin{aligned} X'_E &= \left(R_\phi + H\right)\cos\phi \\ Z'_E &= \left[\left(1 - e^2\right) R_\phi + H\right]\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

- O achatamento é definido por $f = \dfrac{R_e - R_p}{R_e}$
  - $R_e = a$ é o raio equatorial (semieixo maior) e $R_p = b$, o raio polar (semieixo menor)
- Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{R_e^2 - R_p^2}}{R_e}$

# Relação entre sistemas de coordenadas

# Sistema geográfico para coordenadas cartesianas terrestres

- As coordenadas cartesianas terrestres em função das coordenadas geográficas (latitude geodésica $\phi$, longitude $\lambda$ e altitude $H$) podem ser obtidas:

$$X_E = \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} + H \right) \cos\phi \cos\lambda$$

$$Y_E = \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} + H \right) \cos\phi \operatorname{sen}\lambda$$

$$Z_E = \left[ \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \left(1 - e^2\right) + H \right] \operatorname{sen}\phi$$

# Coordenadas cartesianas terrestres para sistema geográfico

- Conversão para latitude, longitude e altitude em função das coordenadas cartesianas terrestres $\rightarrow$ algoritmo iterativo

1. Inicialize: $H_0 = 0$
2. Escolha um valor arbitrário para a latitude ou inicialize:

$$\phi_0 = \text{arctg}\left[\frac{Z_E}{(1-e^2)\sqrt{X_E^2+Y_E^2}}\right]$$

3. Longitude:

$$\lambda = \text{arctg}\,\frac{Y_E}{X_E}$$

4. Para $i = 1, \ldots,$ faça a iteração:

$$R_{\phi,i} = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_{i-1}\right)^{1/2}}$$

$$H_i = \frac{\sqrt{X_E^2+Y_E^2}}{\cos\phi_{i-1}} - R_{\phi,i}$$

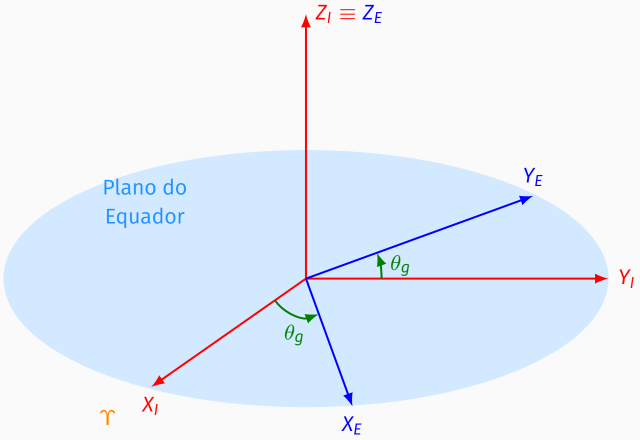
$$\phi_i = \text{arctg}\left[\frac{Z_E}{\sqrt{X_E^2+Y_E^2}}\,\frac{R_{\phi,i}+H_i}{R_{\phi,i}(1-e^2)+H_i}\right]$$

5. Compare $\phi_i$, $\phi_{i-1}$ e $H_i$, $H_{i-1}$. Se teve convergência, pare.

# Relação entre os sistemas inercial e cartesiano terrestre

- Se relacionam pelo movimento de rotação da Terra: a cada um dia completo eles tornam-se momentaneamente correspondentes
  - Exceto por pequenas correções devido as irregularidades do movimento de rotação da Terra, da nutação e da precessão do eixo polar, e de pequenas oscilações relacionadas ao movimento da crosta terrestre.
  - Essas irregularidades são medidas a partir de observações astronômicas, e é de alguns segundos
- A orientação do sistema cartesiano terrestre em relação ao sistema inercial é determinada pelo ângulo entre os eixos $X_I$ e $X_E$
  - Este ângulo entre o meridiano de Greenwech (eixo $X_E$) e o equinócio vernal (eixo $X_I$) é chamado de ângulo horário $\theta_g$

# Relação entre os sistemas inercial e cartesiano terrestre



# Relação entre os sistemas inercial e cartesiano terrestre

- Assim

$$\vec{v}_E = \mathbf{A}_I^E \vec{v}_I$$

e

$$\mathbf{A}_I^E = \begin{bmatrix} \cos\theta_g & \operatorname{sen}\theta_g & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_g & \cos\theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - $\mathbf{A}_E^I = \left(\mathbf{A}_I^E\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}_I^E\right)^T$
- Então, o problema agora é determinar o valor de $\theta_g$
- Neste momento, faz-se necessário o estudo de sistemas de tempo