Problema de dois corpos

Leandro Baroni

leandro.baroni@ufabc.edu.br

Laboratório de guiagem, navegação e controle

Problema 1 – Aula 1

Universidade Federal do ABC

Objetivo

Conhecer e visualizar a órbita que um veículo espacial descreve em torno da Terra em coordenadas cartesianas considerando o problema dinâmico de dois corpos.

Movimento orbital

Leis de Newton:

1.ª lei Um corpo continua no seu estado de repouso, ou movimento uniforme em linha reta, a menos que seja compelido a mudar seu estado pela ação de forças aplicadas a ele.

2.ª lei A taxa de variação no tempo do momento linear de um objeto é igual a força a ele aplicada.

3.ª lei Quando um corpo A exerce uma força num corpo B, o corpo B exerce uma força igual em A, porém de sentido contrário.

Lei de Newton da Gravitação Universal

- A força da gravidade entre dois corpos (M e m) é diretamente proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre elas

$$\vec{F}_g = \frac{GMm}{r^2}\left(-\hat{r}\right)$$

  - Constante gravitacional universal: $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
  - Para a Terra: $\mu = GM_T \approx 3{,}986 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2} = 3{,}986 \cdot 10^{5}\ \mathrm{km^3/s^2}$

As equações do movimento orbital

- As principais forças atuando em um veículo espacial orbitando a Terra:
  - Gravidade terrestre
  - Perturbação gravitacional do 3.º corpo
  - Arrasto atmosférico
  - Impulso
  - Pressão de radiação solar direta
  - Albedo
  - Outras...
- Somando todas as forças e aplicando a 2.ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

- Assim, modelando cada força aplicada no veículo espacial, ou seja, obtendo as expressões matemáticas para cada força e resolvendo é possível determinar a posição e a velocidade do veículo em função do tempo.
  - Esta equação é complexa e apresenta somente solução numérica.
- Solução $\rightarrow$ simplificar o problema

As equações do movimento orbital

- Considerando simplificações pode-se combinar a 2.ª lei de Newton com a lei da Gravitação Universal, obtém-se a equação do movimento para o problema restrito de dois corpos

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_g = m\vec{a}$$

sendo

$$\vec{F}_g = \frac{\mu m}{r^2}\left(-\hat{r}\right)$$

- Assim,

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \tag{1}$$

  - EDO não linear de ordem 2

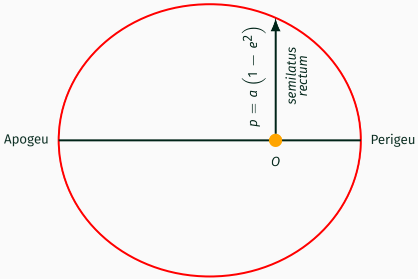
A solução da equação (1) fornece a trajetória do veículo espacial.

Solução analítica

Solução analítica da equação:

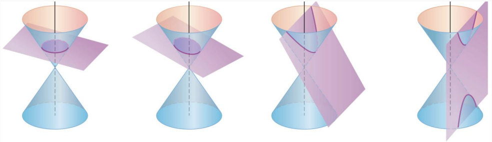
$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

- r: magnitude do vetor posição
- p: *semilatus rectum*
- a: semieixo maior
- e: excentricidade
- f: ângulo polar medido no eixo principal da órbita (anomalia verdadeira)



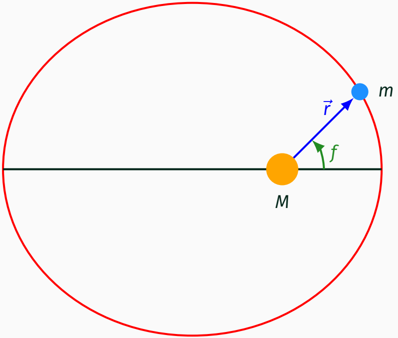
Solução analítica

- Esta solução é a equação das cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole) em um sistema de coordenadas polares fixo ao corpo primário
- A excentricidade define o tipo de órbita:
    - $e = 0$: círculo;
    - $0 < e < 1$: elipse;
    - $e = 1$: parábola,
    - $e > 1$: hipérbole.



Solução analítica

- Considerando o ponto *P* a posição do corpo secundário de massa *m* e que o corpo primário de massa *M* está no foco da cônica, então:



$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos f}$$

- Estes parâmetros descrevem a órbita polar do corpo secundário ao redor do corpo primário no plano da órbita.

Constantes do movimento orbital

- Na ausência de outras forças que não a gravitacional, duas quantidades se mantém constante em uma órbita:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r}$$

1. *Definição*: Energia mecânica específica, $\epsilon = \dfrac{E}{m}$

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} + \frac{\mu}{r}$$

- Energia (constante) da órbita independente da massa
- ϵ como função única do semieixo maior, a:

$$\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

Constantes do movimento orbital

2. Momento angular, $\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$

- *Definição*: Momento angular específico, $\vec{h} = \dfrac{\vec{H}}{m}$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

- Para maiores detalhes da solução analítica veja:
  - Solução da EDO (INPE)
  - Curtis, H. D. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier, 2005.
  - Buscas na internet

Leis de Kepler

1.ª lei **Lei das órbitas elípticas**

- As órbitas dos planetas são elipses com o Sol como foco
- Generalizando, a órbita de um corpo num campo de força central é uma cônica (elipse, hipérbole, parábola) com o foco no centro de atração

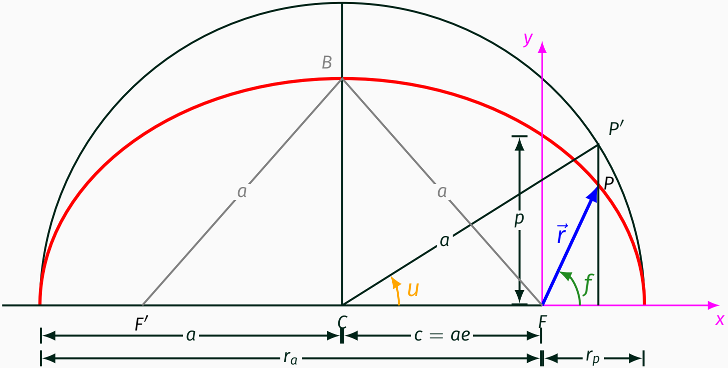
2.ª lei **Lei das áreas**

- O raio vetor de cada planeta com relação ao Sol como origem, varre áreas iguais em tempos iguais
- Esta é de fato uma propriedade de seções cônicas, expressa por $\dot{A} = \text{cte}$, onde A é a área

3.ª lei **Lei harmônica**

- A relação dos quadrados dos períodos entre 2 planetas é igual à relação do cubo do semieixo maior de suas órbitas
- Assim, seja o planeta p_i com período T_i e semieixo maior a_i. Vale então $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3 = \text{cte}$

Movimento elíptico



- Equação da elipse: $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$
- Relação entre f e u: $\mathrm{tg}^2\,\dfrac{f}{2} = \dfrac{1+e}{1-e}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{u}{2}$
    - f: anomalia verdadeira; u: anomalia excêntrica

- Coordenadas cartesianas de posição referidas ao sistema *Oxy*:

$$x = r\cos f = a\left(\cos u - e\right)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\, f = a\,\mathrm{sen}\, u\left(1 - e^2\right)^{1/2}$$

- Coordenadas cartesianas de velocidade, com $r = a\left(1 - e\cos u\right)$:

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r}\,\mathrm{sen}\, u$$
$$\dot{y} = \frac{na^2}{r}\cos u\left(1 - e^2\right)^{1/2}$$

- $n = \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{1/2}$: movimento médio (*mean motion*, velocidade angular média do movimento orbital)
- Anomalia média: $M = n(t - T) = nt + M_0$
  - T é o tempo de passagem pelo perigeu
  - M_0 é a anomalia média inicial
- Equação de Kepler (relaciona M e u):

$$M = u - e\,\mathrm{sen}\, u$$

Elementos keplerianos

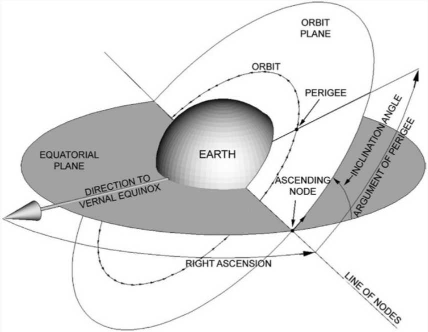
- Os elementos keplerianos ou clássicos constituem coordenadas que posicionam completamente o satélite e sua órbita

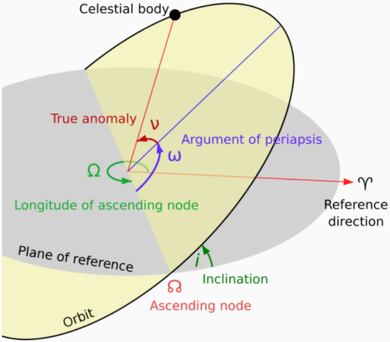
1. a: semieixo maior
2. e: excentricidade
3. M: anomalia média
    - definem a elipse e localizam o satélite no plano da elipse.
4. i: inclinação da órbita em relação ao Equador ($0^\circ \leq i \leq 180^\circ$)
5. Ω: ascensão reta do nodo ascendente ($0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$)
6. ω: argumento do perigeu ($0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$)
    - definem a órbita no espaço

Problema direto

Obter as coordenadas cartesianas inerciais X, Y, Z, $\dot{X}$, $\dot{Y}$ e $\dot{Z}$ a partir dos elementos keplerianos

Elementos keplerianos

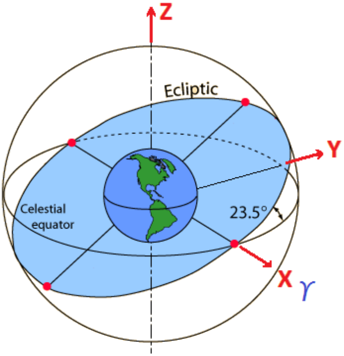




Sistema de coordenadas inercial

Sistema inercial: (ECI, *Earth-Centered Inertial*)

- origem no centro da Terra
- eixo Z_I paralelo ao eixo de rotação da Terra e aponta para o norte geográfico
- eixo X_I aponta para o equinócio vernal Υ
- eixo Y_I completa um sistema ortogonal dextrógiro.



Problema direto

1. Calcular a anomalia média: $M = M_0 + nt$
2. Resolver[1] a equação de Kepler para se obter u: $M = u - e \operatorname{sen} u$
3. Calcular o semi eixo maior a através de $n^2 a^3 = \mu$, e a distância geocêntrica: $r = a(1 - e \cos u)$
4. Calcular as coordenadas no plano orbital Oxy

$$
\begin{aligned}
x &= a\left(\cos u - e\right) \\
y &= a \operatorname{sen} u \left(1 - e^2\right)^{1/2} \\
z &= 0 \\
\dot{x} &= -\frac{na^2}{r} \operatorname{sen} u \\
\dot{y} &= \frac{na^2}{r} \cos u \left(1 - e^2\right)^{1/2} \\
\dot{z} &= 0
\end{aligned}
$$

[1] Murad, A. H.; Jang, K. D.; Atallah, G.; Karne, R.; Baras, J. *A Summary of Satellite Orbit Related Calculations*. ISR T.R. 95-107. University of Maryland, 1995.

Problema direto

5. Dada a orientação da órbita i, Ω e ω, existe uma matriz de rotação $\mathbf{R}$ que produz a transformação:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega)\mathbf{x} = \mathbf{R}_Z(-\Omega)\mathbf{R}_X(-i)\mathbf{R}_Z(-\omega)\mathbf{x}$$

- Matrizes $\mathbf{R}_Z(\theta)$ e $\mathbf{R}_X(\theta)$ são definidas por:

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

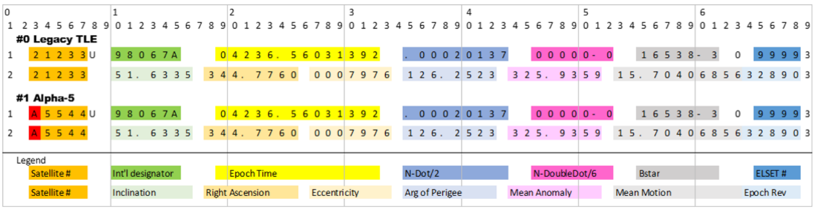
- Logo:

$$\mathbf{R}(i, \Omega, \omega) = \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \operatorname{sen}\Omega\cos i\operatorname{sen}\omega & -\cos\Omega\operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\Omega\cos i\cos\omega & \operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen}\Omega\cos\omega + \cos\Omega\cos i\operatorname{sen}\omega & -\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen}\omega + \cos\Omega\cos i\cos\omega & -\cos\Omega\operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} i\operatorname{sen}\omega & \operatorname{sen} i\cos\omega & \cos i \end{bmatrix}$$

6. Componentes da velocidade:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}(i, \Omega, \omega)\dot{\mathbf{x}}$$

- O conjunto de elementos de duas linhas (TLE, *Two-Line Element set*) é um formato de dados que codifica uma lista de elementos orbitais de um objeto orbitando a Terra em um determinado tempo (época)
  - https://www.space-track.org/documentation#/tle
  - https://celestrak.org/NORAD/documentation/tle-fmt.php



- TLEs de objetos em órbita terrestre podem ser obtidos de *sites* como:
  - Heavens Above
  - Space-Track.org
  - Celestrak
  - N2YO