Solução numérica do problema de dois corpos

Leandro Baroni

leandro.baroni@ufabc.edu.br

Laboratório de guiagem, navegação e controle

Problema 1 – Aula 2

Universidade Federal do ABC

Introduzindo o problema

- Utilizando o problema restrito de dois corpos, obter a solução numérica da equação do movimento em coordenadas cartesianas utilizando o Matlab e o integrador numérico `ode45` (ou equivalentes), dadas as condições iniciais de posição e velocidade no sistema geocêntrico inercial
- Condições iniciais:

$$\vec{r} = -157{,}631\,\vec{i} + 4648{,}587\,\vec{j} + 4954{,}215\,\vec{k} \qquad [\mathrm{km}]$$

$$\vec{v} = -6{,}860\,\vec{i} - 2{,}590\,\vec{j} + 2{,}210\,\vec{k} \qquad [\mathrm{km/s}]$$

Solucionando o problema numericamente

- Obtenha a equação de movimento em coordenadas cartesianas (no sistema geocêntrico inercial)

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ &= -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \\ &= -\frac{\mu}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solucionando o problema numericamente

- Tem-se um sistema de 3 equações diferenciais de ordem 2, cuja solução dá o movimento do satélite sujeito apenas à atração gravitacional terrestre
  - $\rightarrow$ $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = -\mu \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} \\ \dfrac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} \\ \dfrac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

Solucionando o problema numericamente

- Os integradores numéricos são dedicados à solução de equações e sistemas de equações diferenciais de 1.ª ordem, do tipo $\dot{y} = f(t, y)$ e condição inicial $y(t_0) = y_0$
- Assim, deve ser feita as adequações necessárias na equação do movimento orbital para usar esses integradores, ou seja, reescreva o problema para utilizar um integrador numérico

Solucionando o problema numericamente

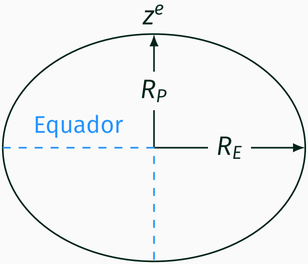
- Matlab possui vários integradores numéricos
- Primeira escolha: `ode45`[1]
  - `ode45`: integrador para EDO's de 1.ª ordem, do tipo $\dot{y} = f(t, y)$
  - *Problema*: resolver um sistema com 3 equações em $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ de 2.ª ordem
  - *Solução*: transformá-las em um sistema de equações de 1.ª ordem
    - Para tanto, criar as variáveis $x_4 = \dot{x}_1$, $x_5 = \dot{x}_2$, $x_6 = \dot{x}_3$
- Dessa maneira, o sistema de 3 equações diferenciais de 2.ª ordem pode ser escrito como um sistema de 6 equações de 1.ª ordem

$$\ddot{x} = a_x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = a_x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_x \end{cases}$$

[1] Veja o documento "Introdução ao MATLAB" para implementar o integrador `ode45`

Modelo da Terra

- WGS 84 é um modelo de elipsoide
  - Raio equatorial $R_E = 6378137{,}0\,\text{m}$
  - Raio polar $R_P = 6356752{,}3142\,\text{m}$
  - Excentricidade $e = \sqrt{1 - \frac{R_P^2}{R_E^2}} = 0{,}0818191908426$
  - Achatamento $f = \frac{R_E - R_P}{R_E} = \frac{1}{298{,}257223563}$



Solucionando o problema numericamente

- Apresente o resultado em recurso gráfico 3D para as coordenadas da posição obtidas e a Terra ao fundo (função `TerraWGS84.m`)
  - Tempo de integração de 1 período orbital
  - Tempo de integração de 50 período orbital