Perturbações orbitais

Leandro Baroni

leandro.baroni@ufabc.edu.br

Laboratório de guiagem, navegação e controle

Problema 1 – Aula 4

Universidade Federal do ABC

Potencial gravitacional terrestre

$$U(r, \lambda, \Phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda) P_{nm}(\operatorname{sen} \Phi)$$

- C_{nm} e S_{nm} são coeficientes dos harmônicos esféricos
- μ é a constante geogravitacional ($\approx 3{,}986 \cdot 10^5\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$)
- a_e é o raio equatorial da Terra
- O potencial é avaliado no ponto localizado pelo módulo do raio vetor (distância) r, pela latitude geocêntrica Φ e pela longitude geocêntrica λ
- P_{nm} são polinômios associados de Legendre

- H. K. Kuga; V. Carrara; K. R. Rao. *Satélites artificiais – Movimento orbital*. São José dos Campos: INPE, 2011.

- Separar a somatória em suas diversas componentes:

$$U = \frac{\mu}{r} -$$

Potencial do corpo central

$$- \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \overline{J}_n \overline{P}_n(\operatorname{sen} \Phi) +$$

Coeficientes zonais ($m = 0$)

$$+ \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \left(\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \operatorname{sen} m\lambda \right) \overline{P}_{nm}(\operatorname{sen} \Phi)$$

Coeficientes tesserais

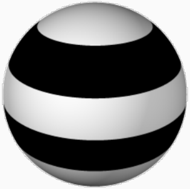


Figura 2.6 – Harmônicos zonais

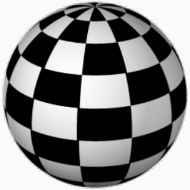


Figura 2.7 – Harmônicos tesserais

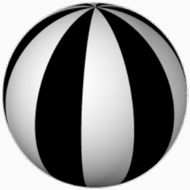
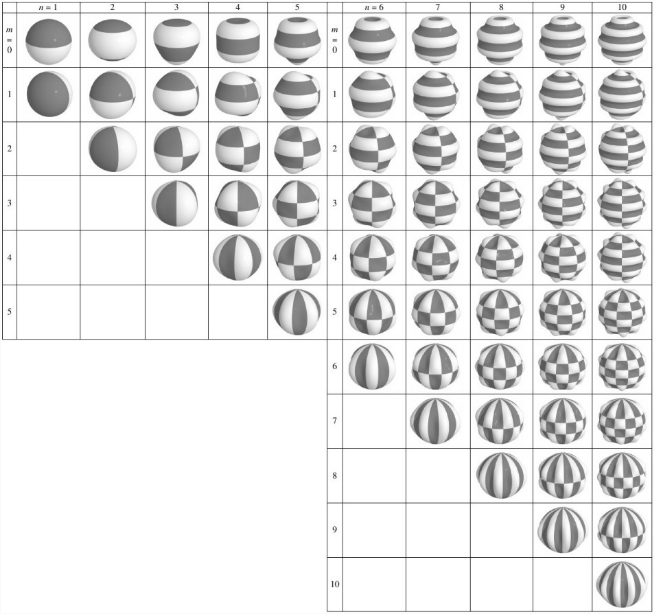


Figura 2.8 – Harmônicos setoriais

Potencial gravitacional terrestre



Potencial gravitacional terrestre

- Coeficientes normalizados (GEM-09):
  - Zonais (10^{-6}):

n	$\bar{C}_{n0} = -\bar{J}_n$
1	0
2	$-484{,}16555$
3	$0{,}95848$

  - Tesserais (10^{-6}):

n	m	$\bar{C}_{nm}$	$\bar{S}_{nm}$
1	1	0	0
2	1	$-0{,}00021$	$-0{,}00406$
2	2	$2{,}4340$	$-1{,}39786$
3	1	$2{,}02826$	$0{,}25244$
3	2	$0{,}89198$	$-0{,}62241$
3	3	$0{,}70256$	$1{,}41140$

Achatamento terrestre – coeficiente zonal J_2

- O harmônico zonal J_2 é o termo mais significante
- Os harmônicos zonais são termos que não dependem da longitude
  - Descrevem um campo simétrico em relação ao eixo polar O_z
- $J_2 = 1{,}08263 \cdot 10^{-3}$ (não normalizado)

$$
\begin{aligned}
U_{J_2} &= -J_2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left(\frac{3\,\mathrm{sen}^2\,\Phi - 1}{2}\right) && \text{(coordenadas esféricas)} \\
&= -\mu a_e^2 \left[\frac{J_2}{2} \left(\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - 1\right)\right] && \text{(coordenadas retangulares)}
\end{aligned}
$$

Achatamento terrestre – coeficiente zonal J_2

- Força por unidade de massa devido ao achatamento J_2:

$$a_{J_2,x} = \frac{3}{2} J_2 \mu \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{5z^2}{x^2+y^2+z^2} - 1\right)\frac{x}{r^3}\right]$$

$$a_{J_2,y} = \frac{3}{2} J_2 \mu \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{5z^2}{x^2+y^2+z^2} - 1\right)\frac{y}{r^3}\right]$$

$$a_{J_2,z} = \frac{3}{2} J_2 \mu \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 \left[\left(\frac{5z^2}{x^2+y^2+z^2} - 3\right)\frac{z}{r^3}\right]$$

- Tiago Pôrto Brito. *Estudo da evolução de detritos espaciais sujeitos às perturbações do potencial terrestre, J_2 e J_{22}, luni-solar, pressão de radiação solar e do arrasto atmosférico*. Dissertação (Mestrado) – UFABC, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2019

Movimento orbital com o efeito do coeficiente J_2

- Da equação (1) da aula 1:

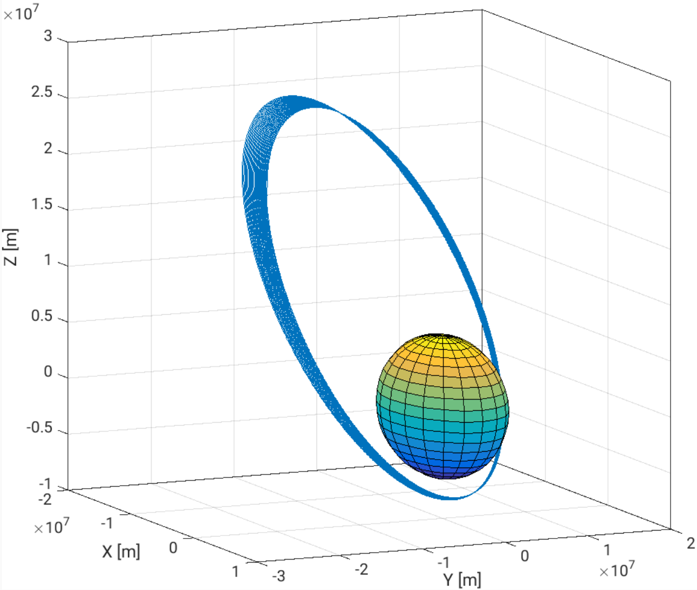
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{J_2} = m\vec{a}$$

- Assim,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} + \vec{a}_{J_2} \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = \vec{a}_{J_2}$$

  - EDO não linear de ordem 2
  - Solução por integração numérica

Movimento orbital com o efeito do coeficiente J_2



Equações planetárias de Lagrange

- Corpo sujeito somente à atração gravitacional do corpo central $\rightarrow$ movimento kepleriano (elementos orbitais são constantes)
- Quando perturbações orbitais são consideradas, estes elementos variam no tempo $\rightarrow$ equações planetárias de Lagrange

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M}$$
$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega}$$
$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial R}{\partial \omega}$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial R}{\partial i}$$
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\, i}\frac{\partial R}{\partial i}$$
$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}$$

- R é a função perturbadora ($U = R$)
  - Forças perturbativas derivadas de um potencial

Equações planetárias de Lagrange

- Potencial devido ao coeficiente J_2

$$U_{J_2} = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2\, i\right)\left(1 - e^2\right)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 0 \\
\frac{de}{dt} &= 0 \\
\frac{di}{dt} &= 0 \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{nJ_2}{(1-e^2)^2}\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\left(3 - \frac{15}{4}\,\mathrm{sen}^2\, i\right) \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2}\frac{nJ_2}{(1-e^2)^2}\left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \cos i \\
\frac{dM}{dt} &= n + 3\frac{nJ_2}{(1-e^2)^{3/2}}\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2\, i\right)
\end{aligned}$$

- Maria Lívia Galhego T. X. da Costa. *Cálculo da variação dos elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da Lua*. Relatório final, INPE, 2013.
- Thaís Helena Oliveira Ferreira. *Satélites artificiais: perturbações orbitais*. Relatório final, INPE, 2018.

Propagação numérica

- Modelo SGP4
    - Simplificação dos modelos gravitacional e atmosférico
- Modelo SDP4
    - Extensão do SGP4 a ser usado em satélites de espaço profundo
- Modelo SGP8
    - Integra as equações diferenciais de uma maneira muito diferente do SGP4
- Modelo SDP8
    - Extensão do SGP8 a ser usado em satélites de espaço profundo

- Compatíveis com TLE
- Documentação é códigos:
    - https://celestrak.org/NORAD/documentation/
    - https://celestrak.org/publications/AIAA/2006-6753/
    - Python – https://pypi.org/project/sgp4/