1-> Cálcule:

a) $\int_1^3 x^3 - 2x\,dx$

$$\int_1^3 x^3 - 2x\,dx = \int_1^3 x^3 dx - \int_1^3 2x\,dx = \frac{x^4}{4} - x^2 \Big|_1^3$$

$$= \frac{3^4}{4} - 3^2 - \left(\frac{1^4}{4} - 1^2\right) = \boxed{12} \; //$$

b) $\int_2^7 \sqrt{3x+2x}\,dx$

$$\int_2^7 \sqrt{3x+2x}\,dx = \int_2^7 (3x+2x)^{1/2} dx = \int_2^7 (5x)^{1/2} dx = \int_2^7 5^{1/2} x^{1/2}\,dx$$

$$= 5^{1/2} \int_2^7 x^{1/2}\,dx = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{x^{1/2-1}}{\frac{1}{2}-1} \Bigg|_2^7 \right) = \sqrt{5} \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_2^7 \right)$$

$$= \sqrt{5} \cdot \left(\frac{2x^{3/2}}{3} \Bigg|_2^7 \right) = \sqrt{5} \left(\frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} \Bigg|_2^7 \right) = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{x^2 \cdot x}}{3} \Bigg|_2^7 \right)$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{2 \cdot \sqrt{x} \cdot |x|}{3} \Bigg|_2^7 \right) = \sqrt{5} \left(\frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot |7|}{3} - \frac{2\sqrt{2} \cdot |2|}{3} \right)$$

$$= \frac{14\sqrt{35}}{3} - \frac{4\sqrt{10}}{3} = \boxed{\frac{14\sqrt{35} - 4\sqrt{10}}{3}} \; //$$

c) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Fazendo $u = e^{x^2}$, tem-se $u' = (e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2} 2x$

$\frac{du}{dx} = u' \iff \frac{du}{dx} = e^{x^2} 2x \iff du = e^{x^2} 2x dx$

$dx = \frac{du}{e^{x^2} 2x}$

Assim

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \cancel{x} \cancel{e^{x^2}} \frac{du}{\cancel{e^{x^2}} 2\cancel{x}} = \int_0^1 \frac{1}{2} du = \frac{u}{2}\Big|_0^1$$

Voltando à expressão original

$$= \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \boxed{\frac{e-1}{2}}$$

Integração por Substituição

Dada uma integral $\int v \, dv$, faz-se:

- $u = v$
- u'
- $\frac{du}{dx} = u'$

d) $\int_1^3 \ln(x)\,dx$

Resolvendo o indefinido

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$$

Sabendo que $x' = 1$, e que $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, e tomando $u = \ln(x)$, tem-se:

$u = \ln(x) \qquad v = x$

$du = \frac{1}{x} \qquad dv = 1$

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{dv}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{x}\,dx}_{du} = \ln(x)\,x - \int 1\,dx$$

$$= \ln(x)\,x - x$$

Substituindo o valor encontrado para o indefinido na expressão original

$$= \left(\ln(x) - x \Big|_1^8 \right) = 8\ln(8) - 8 - (\ln(1) - 1)$$

$$= 8\ln(8) - 7$$

Integração por Partes

Dada uma integral da forma $\int u\,dv$, com produto de duas funções, utiliza-se a fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- Ao escolher $\int v\,du$, escolhe-se uma função fácil de integrar

- Macete para escolher u

u

L - função logarítmica (log, ln, ...)

I - funções trigonométricas inversas (arcsen, ...)

A - funções algébricas (x^2, ...)

T - funções trigonométricas (sen, cos, ...)

E - funções exponenciais (e^x, a^x, ...)

v

e) $\int_0^4 \cos(e^x)\, e^x \, dx$