Prova 1 - CDI 2 10/12/2020

Aluna: Alice Sgrott

1. Calcule:

a) $\int_1^2 x^4 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x}\, dx$

Resolução:

Integrando termo a termo

$$= \int_1^2 x^4\,dx - \int_1^2 \sqrt[5]{x}\,dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + \left(-\frac{5x^{6/5}}{6}\right)\Big|_1^2 + \left(-3\ln(x)\right)\Big|_1^2$$

Substituindo os limitantes, temos

$$= \frac{211}{30} - \frac{5\sqrt[5]{2}}{3} - \ln(8) \approx 3,0394$$

1. b) $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{\tan(\ln x)}{x}\,dx$

Resolução:

Substituição simples

$u = \ln(x)$, $du = \frac{dx}{x}$, logo

$= \int \tan(u)\,du$

$= -\ln|\cos(u)| + C$

Como $u = \ln(x)$

$= -\ln|\cos(\ln x)|$

Colocando os limitantes, temos

$= \boxed{\frac{\ln(2)}{2}} \approx 0{,}34657$

1\. c) $\int_0^3 x^3 e^{x^2}\, dx$

Resolução:

Fazendo a substituição simples

$$u = x^2 \text{ logo } du = 2x\, dx$$

A integral fica da forma

$$= \frac{1}{2}\int_0^9 e^u u\, du$$

Os limitantes mudaram pois

$$u = 3^2 = 9$$

Integração por partes, essa integração é dada da forma

$$\int f dg = fg - \int g df$$

As escolhas são

$$f = u,\ dg = e^u du$$
$$df = du,\ g = e^u$$

A integral pode ser reescrita da forma

$$= \left.\frac{e^u u}{2}\right|_0^9 - \frac{1}{2}\int_0^9 e^u du$$

Resolvendo os primeiros limitantes

$$\left.\frac{e^u u}{2}\right|_0^9 = \frac{e^9 9}{2} - \frac{e^0 0}{2} = \frac{9e^9}{2}$$

continuação 1.c

Resolvendo o segundo termo

$$= \frac{9e^9}{2} - \frac{1}{2}\int_0^9 e^u \, du$$

$$= \frac{9e^9}{2} + \left(-\frac{e^u}{2}\right)\Bigg|_0^9$$

Substituindo os limitantes

$$\left(-\frac{e^u}{2}\right)\Bigg|_0^9 = \left(-\frac{e^9}{2}\right) - \left(-\frac{e^0}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - e^9)$$

Logo

$$= \frac{9e^9}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^9)$$

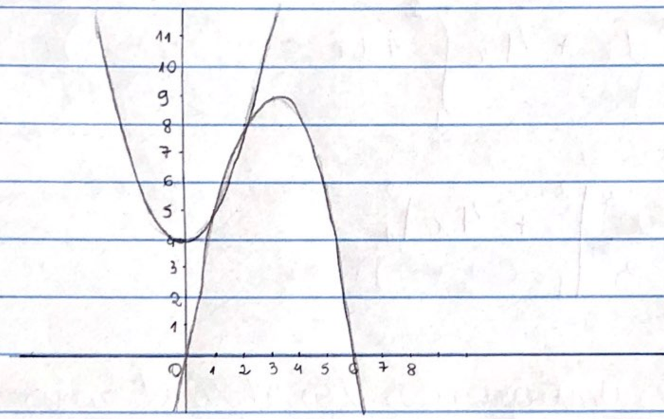
Por fim $\displaystyle\int_0^3 x^3 e^{x^2} dx = \boxed{\frac{1}{2} + 4e^9} \approx 32412,83571$

2. Encontre o valor da área da região R delimitada pelas seguintes curvas:

a) $y = x^2 + 4 \quad y = -x^2 + 6x$

Resolução:

As curvas são dadas por



A área entre as curvas vai dos pontos $x=1$ a $x=2$, isso é obtido igualando as equações,

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 36 - 32$

$\Delta = 4$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{6 \pm 2}{4}$

Temos as duas raízes: $x' = 1$

$x'' = 2$

Obtemos também $y = 5$

$y = 8$

⇒

Continuação

Continuação 2.a

Logo, a área pode ser dada pela diminuição das integrais da forma

$$-\int_1^2 (x^2+4)\,dx + \int_1^2 (-x^2+6x)\,dx$$

Resolvendo a primeira integral termo a termo

$$= \int_1^2 x^2\,dx + 4x\int_1^2 1\,dx$$

Logo $= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + 4x\Big|_1^2$

Resolvendo os integrandos dos dois termos

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$4x\Big|_1^2 = 4\times 2 - 4\times 1 = 4$$

Assim a 1ª integral $\int_1^2 (x^2+4)\,dx$ é $= \frac{19}{3}$

Pela mesma lógica, a 2ª integral $\int_1^2 (-x^2+6x)\,dx$ é

Logo $= \frac{20}{3}$

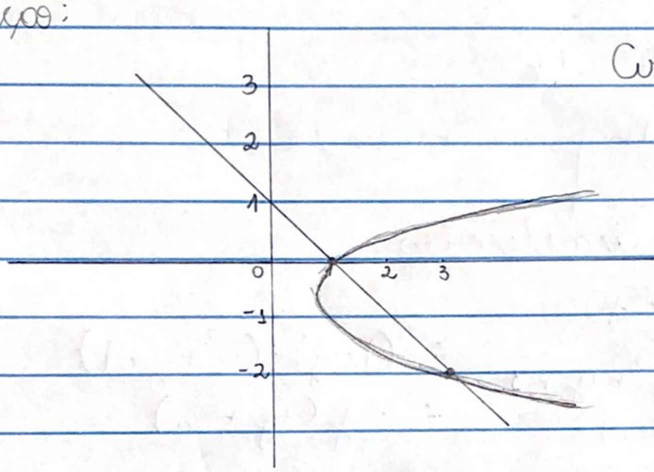
$$-\int_1^2 (x^2+4)\,dx + \int_1^2 (-x^2+6x)\,dx = -\frac{19}{3} + \frac{20}{3}$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}}$$

2. b) $x + y = 1$ $\quad y^2 + y - x + 1 = 0$

Resolução:

As curvas são:



Isolando x nas funções dadas $\quad x = 1 - y$

$$x = y^2 + y + 1$$

Encontrando os valores de y onde as funções se encontram, temos os pontos de integração, conseguimos isso igualando as funções

$$1 - y = y^2 + y + 1$$

Simplificando

$$-y(y+2) = 0$$

$$-y^2 - 2y = 0$$

$\Delta = 4 \quad y = \frac{-2 \pm 2}{2} \quad y' = -2 \quad y'' = 0$

Logo, a integral dupla pode ser dada por

$$\int_{-2}^{0} \int_{y^2+y+1}^{1-y} dx\,dy$$

$\Rightarrow$

Continuação

continuação 2.b

Resolvendo primeiro

$$\int_{y^2+y+1}^{1-y} dx$$

Aplicando os limitantes

$$= x \Big|_{y^2+y+1}^{1-y} = (1-y)-(y^2+y+1)$$
$$= -y(y+2)$$

Logo, para finalizar, resolvemos

$$\int_{-2}^{0} (-y(y+2))\,dy$$

Por substituição simples temos

$$u = y+2 \quad e \quad du = dy$$

Logo

$$= -\int_{0}^{2} (u-2)\,u\,du$$

Escrevendo a soma das integrais

$$= -\int_{0}^{2} u^2\,du + 2\int_{0}^{2} u\,du$$

$$= \left(-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2} + u^2\Big|_{0}^{2}$$

$\Rightarrow$

Continuação

Continuação 2.b

Aplicando os integrantes

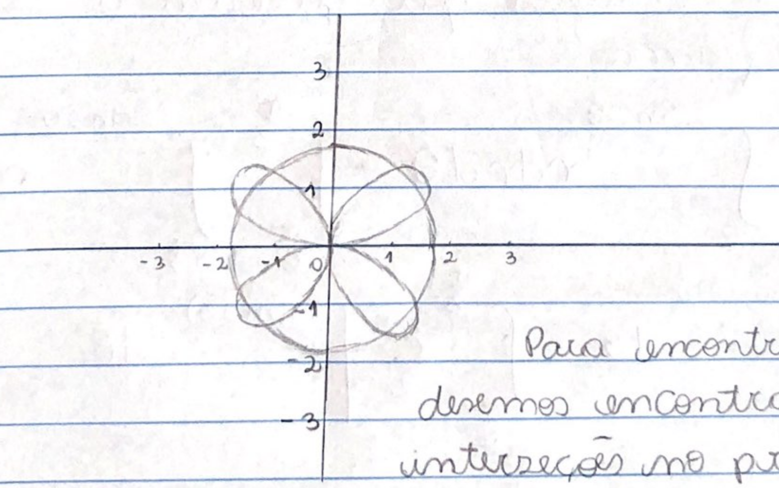
$$\left(-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3}\right) - \left(-\frac{0^3}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$u^2\Big|_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$$

Somando os resultados temos $\boxed{= \frac{4}{3}}$

2. c) $r = 2\sin 2\theta$, $r = \sqrt{3}$ (interior à ambas)
(em coordenadas polares)

A área fica da forma



Para encontrar a área, devemos encontrar as duas interseções no primeiro quadrante, encontrar a área e multiplicar por 4.

Igualando as duas equações

$$\sqrt{3} = 2\sin 2\theta$$

Simplificando $\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta = \frac{1}{3}(3\pi n + \pi)$$

$$\theta = \frac{1}{6}(6\pi n + \pi)$$

$\Rightarrow$ continuação

continuação 2.c

Logo, como estamos interessados apenas no 1º quadrante, queremos $n = 0$, assim os ângulos de interseção no 1º quadrante são

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Verificamos que a área é dada integrando toda uma folha da rosácea de 0 a $\frac{\pi}{2}$, porém diminuindo a área que fica para fora da circunferência, essa área se encontra entre $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Logo, nossa integral que calcula a área fica da forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin 2\theta} r\,dr\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\sqrt{3}}^{2\sin 2\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\sin(2\theta)} d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}\Big|^{2\sin(2\theta)} d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2(2\theta)\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2(2\theta) - \frac{3}{2}\,d\theta$$

Ambas as integrais são resolvidas por substituição simples, logo $u = 2\theta$ e $du = 2d\theta$

$\Rightarrow$

continuação

Continuação 2.c

Logo, temos as integrais da forma

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)\right) du - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2(u)\, du + \frac{3}{2} \times \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) \approx 1,399583012 70$$

Na verdade tem que multiplicar por 4 para ter a área das 4 pétalas.

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{12}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\right)$$

$$\approx 5,598332051$$

3. Calcule o comprimento do gráfico da função:

$f: [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 3x$

Achando o comprimento de $f(x) = x^2 + 3x$

Sabendo que o comprimento do arco é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Como a derivada é $f(x) = 2x+3$ e queremos de $x = 0$ a $x = 2$

$$l = \int_0^2 \sqrt{1+(2x+3)^2}\, dx$$

Resolvendo por substituição simples

$u = 2x+3$ e $du = 2$

Logo

$$= \frac{1}{2}\int_3^7 \sqrt{u^2+1}\, du$$

Por substituição trigonométrica

$u = \tan(s)$ e $du = \sec^2(s)ds$

Logo

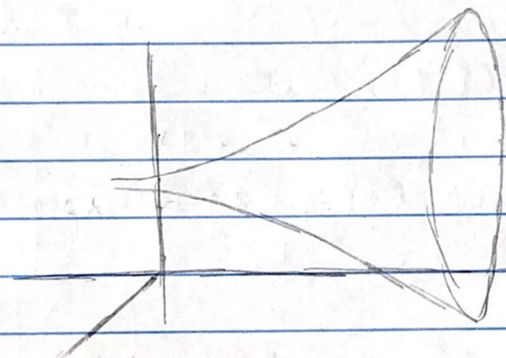
$$l = \frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}(3)}^{\tan^{-1}(7)} \sec^3(s)\, ds$$

$$l = \frac{35 - 3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\left(\ln(7+5\sqrt{2}) - \ln(3+\sqrt{10})\right)$$

$$l \approx 10,209$$

3. Calcule o volume do sólido de revolução da curva C: $y = x^2 - 3x + 10$, $1 \leq x \leq 3$ em torno do eixo

a) ox $\quad V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$



Para o nosso caso $f(x) = y = x^2 - 3x + 10$ limitando em $1 \leq x \leq 3$.
Logo, substituindo na equação do volume temos

$$V = \pi \int_1^3 [x^2 - 3x + 10]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^3 (x^4 - 6x^3 + 29x^2 - 60x + 100) dx$$

$$= \pi \int_1^3 x^4 dx - 6\pi \int_1^3 x^3 dx + 29\pi \int_1^3 x^2 dx$$

$$- 60\pi \int_1^3 x dx + 100\pi . \int_1^3 1 dx$$

$$V = \frac{\pi x^5}{5}\Big|_1^3 + \left(-\frac{3\pi x^4}{2}\right)\Big|_1^3 + \frac{29\pi x^3}{3}\Big|_1^3 + (-30\pi x^2)\Big|_1^3 + 100\pi x\Big|_1^3$$

$$V = \frac{2096\pi}{15}$$

3.b Oy $V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$

$y = x^2 - 3x + 10$ em y

$1 \leq x \leq 3$

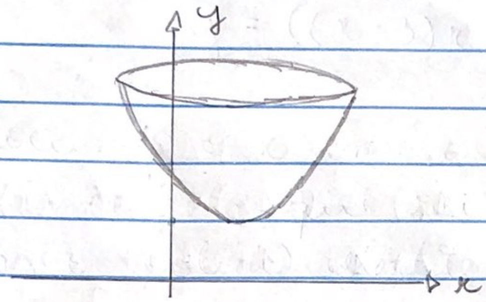
$y = x^2 - 3x + 10$

$y = 1 - 3 + 10$

$y = 8$

$y = 3^2 - 3 \cdot 3 + 10$

$y = 10$



$y = x^2 - 3x + 10$

$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 10$

$y - \frac{31}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$\sqrt{y - \frac{31}{4}} + \frac{3}{2} = x$

$V = \pi \int_8^{10} \sqrt{y - \frac{31}{4}} + \frac{3}{2} \, dy$

$V = \pi \int_8^{10} \frac{1}{2} \sqrt{4y - 31} + \int_8^{10} \frac{3}{2} \, dy$

$V = \pi \cdot \frac{1}{2} \int_8^{10} \frac{\sqrt{u}}{4} \, du$

$u = 4y - 31$

$du = 4 \, dx$

$\frac{du}{4} = dx$

$V = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_8^{10} \sqrt{u} \, du$

$V = \frac{\pi}{8} \int_8^{10} u^{\frac{1}{2}} \, du$

$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_8^{10}$

$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(4y - 31)^3} \Big|_8^{10}$

$V = \frac{\pi}{12} \sqrt{(4y - 31)^3} \Big|_8^{10}$

$V = \frac{\pi}{12} \sqrt{(4y - 31)^3} + \frac{3}{2} y \Big|_8^{10}$

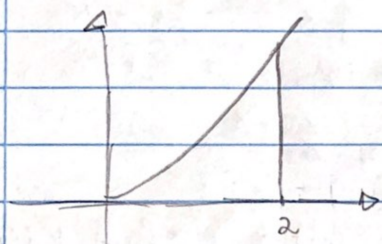
$V = \frac{\pi}{12} \sqrt{(40 - 31)^3} - \frac{\pi}{12} \sqrt{(32 - 31)^3} + (15 - 12$

$V = \frac{\pi}{12} \cdot 27 - \frac{\pi}{12} + 3$

$V = \frac{26\pi}{12} + 3 \rightarrow V = \frac{26 + 36\pi}{12}$

$\rightarrow \frac{31\pi}{6}$ u.v

4. Determine $\overline{S}(f,P)$ em $[0,2]$ onde $f(x)=x^3+x$



$$\Delta x = \frac{2-0}{n}$$

$$\overline{S} = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$\overline{S} = \Delta x\left[(\Delta x)^3 + (\Delta x) + (2\Delta x)^3 + (2\Delta x) + \dots + (n\Delta x)^3 + (n\Delta x)\right]$$

$$\overline{S} = \Delta x\left[\Delta x^3\cdot(1^3+2^3+\dots n^3) + \Delta x\cdot(1+2+3+\dots+n)\right]$$

$$\overline{S} = \Delta x\left[\Delta x^3\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \Delta x\cdot\frac{n(1+n)}{2}\right]$$

$$\overline{S} = \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{2}{n}\cdot\frac{(n+n^2)}{2}\right]$$

$$\overline{S} = \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} + \frac{2n}{2n} + \frac{2n^2}{2n}\right]$$

$$\overline{S} = \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n}\frac{(n^2+2n+1)}{4} + 1 + n\right]$$

$$\overline{S} = \frac{2}{n}\left[\frac{8n^2}{4n} + \frac{16n}{4n} + \frac{8}{4n} + 1 + n\right]$$

$$\overline{S} = \frac{16n^2}{4n^2} + \frac{32n}{4n^2} + \frac{16}{4n^2} + \frac{2}{n} + 2$$

$$\overline{S} = 4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n} + 2$$

$$\overline{S} = \frac{4}{n^2} + \frac{10}{n} + 6$$

$$\int_0^2 (x^3+x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\cancel{\frac{4}{n^2}} + \cancel{\frac{10}{n}} + 6\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{6\ u.a}$$