# CDI II - 2ª PROVA 04/03/2021

Aluna: Alice Sgrott    Turma da noite

1. Verifique a convergência ou divergência das seguintes séries reais:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3}$

Devemos resolver pelo teste da comparação que diz que tendo duas séries, se uma converge ou diverge, a outra converge ou diverge se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

Para a nossa série de comparação vamos adoptar a anterior para:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Essa série é a geométrica, e sabemos que ela converge, logo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{k+1}{k^3}}{\frac{1}{k^2}} > 0$$

Logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3}$ converge. //

b) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{K!+1}$

Pela mesma ideia da anterior, compararemos com: $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{K!}$

Pois há semelhança no infinito. Aqui vamos utilizar o critério da razão

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

onde,

(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$;

(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$;

(iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Logo $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{K+1}}{(K+1)!}}{\frac{2^K}{K!}}$

assim

$$L = \frac{2K!}{(K+1)!} = \frac{2(K)!}{(K+1)(K)!}$$

Ou seja, os termos circulados se cortam e temos

$$L < 0$$

Logo a série converge, e por comparação a $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{2^K}{K!+1}$ também converge. //

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin k^k)^k}{(k!+1)^{2k+1}}$

Esta série é claramente comparável com

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin k)^k}{(k!)^{2k+1}}$$

Já vimos que séries com fatorial (e exponencial) no denominador convergem. Como a função seno tem imagem limitada a -1 e 1, então essa soma também converge! //

2. Mostre que as séries abaixo são convergentes e calcule sua soma:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{1}{3^k} - 4\left(\frac{4}{5}\right)^k$

Notemos que essa série pode ser dividida em

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

A primeira é uma série p-harmônica, a segunda é uma série geométrica.

A série p-harmônica é convergente se $p > 0$, como nosso $p = 3$, ela é convergente.

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ é convergente se $|q| < 1$

(pois $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 q^n}{q-1} + \lim - \frac{a_1}{(q-1)} = \frac{-a_1}{(q-1)}$ )

⇒ continuação

Continuação 2. a)

Logo, a nossa p-harmônica é

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{-1}{1-p}$$

logo, no nosso caso

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/5}}\,dx = \frac{-1}{1-4/5} = 4$$

Para a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}, \text{ logo } \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{1}{1-3}$$

Assim

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k} - 4\left(\frac{4}{5}\right)^k\right) = -15$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

Como essa é uma série alternada, temos que utilizar o Teorema de Leibnitz. Considere uma série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

tal que

(i) $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\Rightarrow$ continuação

continuação 2.b)

Então são válidas as seguintes conclusões:

(a) A série alternada é convergente
(b) A soma parcial $S_n$ da série alternada é tal que $0 < S_n < u_1$.

Nesta atividade, já vimos que uma série com fatorial no denominador é convergente, logo, pela comparação temos que nossa série também é convergente. Sabemos que:

$$\frac{1}{e} = \frac{2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k}{k!}}$$

Logo, para o nosso caso

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \quad //$$

3. Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potência abaixo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$$

Para encontrar centro e raio de convergência, usaremos o método de Cauchy.

Devido ao termo $x^k$, podemos utilizar a técnica comparando com a série genérica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x-a)^k \quad \Rightarrow$$

continuação

Continuação 3.

Como o nosso $a=0$, temos que o centro da série é em $x=0$. Agora, utilizando a técnica de Cauchy, temos

$$p = \lim_{K \to +\infty} \left| \frac{U_K + 1}{U_K} \right|$$

Onde $U_K$ é a nossa série. Logo, para o nosso caso

$$p = \lim_{K \to +\infty} \left| \frac{\frac{2^{K+1} x^{K+1}}{(K+1)^2}}{\frac{2^K x^K}{K^2}} \right|$$

Simplificando

$$p = \lim_{K \to +\infty} 2 \left| \frac{K^2 x}{(K+1)^2} \right|$$

$$p = |2x| \lim_{K \to +\infty} \frac{K^2}{(K+1)^2}$$

Esse limite é resolvido da forma

$$\lim_{K \to \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{K}} \right|^2$$

Logo

$$\lim_{K \to +\infty} \frac{\frac{2^{K+1} x^{K+1}}{(K+1)^2}}{\frac{2^K x^K}{K^2}} = 1 \to p = |2x|$$

Com esse tipo de teste nos mostra que converge para $p < 1$, temos que $p = |2x| < 1$

⇨

Continuação

Continuação 3.

Agora, devemos resolver a desigualdade

$$|2x| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|x| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Logo,

* temos que o intervalo de convergência é de $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ //

Assim, como o centro é em $x = 0$, o raio é

* $r = \frac{1}{2}$ //

4. Escreva como uma série de potências

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

$$x \cdot \frac{1}{x^2-4} = x \cdot \frac{1}{-4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} = -\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$$

$$-\frac{x}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k = -\frac{x}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4^{k+1}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx$

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) \dots$$

$$x - \sin x = -\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) x - x$$

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = -\left(\frac{-1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^5}{7!} + \frac{x^7}{9!} \dots\right)$$

$$\int \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx = \int \frac{1}{3!}\, dx - \int \frac{x^2}{5!} + \int \frac{x^5}{7!} - \int \frac{x^7}{9!}$$

$$\int \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx = \frac{1}{6} x - \frac{x^3}{5!3} + \frac{x^5}{7!5} \dots$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}$$