Prova II CDI 2001 - B

Aluna: Julia Retore

① Verifique a convergência ou divergência:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$

analisando os termos da série:

$\frac{e}{1} + \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{\sqrt[3]{e}}{16} + \dots + \frac{\sqrt[n]{e}}{n^2}$

Percebe-se que a série é 1) DECRESCENTE
2) CONTÍNUA
3) NÃO NEGATIVA

Assim, pode-se aplicar o teste da integral

$\hookrightarrow f(k) = \frac{e^{1/k}}{k^2} = a_k$

$\int_1^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} e^{1/k} \cdot \frac{1}{k^2}$

SUBSTITUIÇÃO
$u = \frac{1}{k}$
$du = -\frac{1}{k^2}dk$

$\frac{1}{1} \to 1$

$\frac{1}{\infty} \to 0$

$-\int_1^0 e^u du$

$\int_0^1 e^u du \to e^u \Big|_0^1 \to e^1 - e^0 \to \boxed{e - 1} < \infty$

$$\boxed{\text{Portanto, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} < \infty; \text{ é convergente!}}$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!+1}$ (teste da razão!) $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^{k+1}}{(k+1)!+1} \cdot \frac{k!+1}{2^k} \right| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} 2 \cdot \frac{k!+1}{(k+1)!+1} \Rightarrow$

observando que os "+1" no numerador e no denominador são insignificantes comparado com $k!$ (sabendo que $k \to \infty$), então pode retirá-los do termo:

$2 \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \Rightarrow 2 \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k!}}{(k+1)\cancel{k!}} \Rightarrow 2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{\infty} = 2 \cdot 0 = \boxed{0}$

Como $\lambda = 0$, e $\lambda < 1$, $\boxed{\text{então a série é CONVERGENTE!}}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\sqrt{k}}$ ⇒ analisando os termos:

$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \dots$

Percebe-se que: 1) $|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|$

↳ é decrescente

2) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k+\sqrt{k}}\right|$

$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}} = \frac{1}{\infty} = 0$

↳ $\lim x_n = 0$

$\boxed{\text{Portanto, é convergente!}}$

0,9

② Mostre que as séries abaixo são convergentes e calcule sua soma:

a) $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{4^{k+1}}{5^k}}\ + \underbrace{5\,\frac{7^k}{9^k}}$

$\underbrace{2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{5^k}}\ + \underbrace{5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^k}$

? 1,0

teste da série geométrica

$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k \cdot 4}{5^k}$

$8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k$

como $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$,

$\boxed{\text{então converge!}}$

soma $= 8 \cdot \frac{4/5}{1-4/5} = 8 \cdot \frac{4/5}{1/5}$

$8 \cdot \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{1} = \boxed{32}$ //

+

$5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^k \sim \left|\frac{7}{9}\right| < 1$, $\boxed{\text{então converge!}}$

soma $= 5 \cdot \frac{1^{\circ}\text{ termo}}{1-\text{razão}} = 5 \cdot \frac{7/9}{1-7/9} = 5 \cdot \frac{7}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{2}$

$5 \cdot \frac{7}{2} = \boxed{\frac{35}{2}}$ //

converge!

soma $= 32 + \frac{35}{2} = \frac{99}{2}$

b) $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K (2)^{2K}}{(2K)!}$ = 1) verificar convergencia absoluta

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^K 4^K}{2K!}\right| \Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} \frac{4^K}{2K!}$$

teste da razão

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left| \frac{\frac{4^{K+1}}{(2(K+1))!}}{\frac{4^K}{(2K)!}} \right| = \sum_{K=0}^{\infty} \left|\frac{4^{K+1}\cdot 2K!}{(2K+2)!\cdot 4^K}\right| = \sum_{K=0}^{\infty} \left|\frac{4^{\cancel{K}+1-\cancel{K}}\cdot \cancel{2K!}}{(2K+2)(2K+1)\,\cancel{2K!}}\right|$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \left|\frac{4}{2(K+1)(2K+1)}\right| = \sum_{K=0}^{\infty} \left|\frac{2}{(K+1)(2K+1)}\right|$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{2}{|K+1||2K+1|} = \frac{2}{\infty\cdot\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

como $L < 1$, então é convergente!

sabemos que a soma é $0 \leq S_n < |x_1|$

então sabe-se que a soma é menor que 1!

Podemos ainda, analisar os termos:

$$1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots$$

Essa é uma série conhecida: série de Maclaurin para cos(2)

Portanto, a soma é cos(2)

③ Dada a série de polinômios $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k3^k}$, determine:

a) seu raio de convergência:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^k \qquad r = \lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad x_0 - r < x < x_0 + r$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k3^k}(x+2)^k \rightarrow a_k = \frac{1}{k3^k}$$

$$x_0 = -2$$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)3^{k+1}}{k3^k}\right| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)\cancel{3^k}\cdot 3}{k\cdot \cancel{3^k}}\right| \Rightarrow 3 \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}$$

$$3 \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{k} \Rightarrow 3\cdot\Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty} 1}_{1} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}}_{0}\Big) \Rightarrow 3(1+0) = \boxed{3}$$

o raio de convergência é 3.

b) Calcule o intervalo de convergência.

$$-2-3 < x < -2+3$$

$$-5 < x < 1$$

verificar extremidades:

para $x = -5 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k3^k}$

teste série alternada: $\rightarrow \left|\frac{-3}{3}\right| > \left|\frac{9}{27}\right| > \cdots$

1) é decrescente!

2) $\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{3^k}}{\cancel{3^k}\,k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} =$

lim é = 0!

5 faz parte do intervalo, pois é convergente!

INTERVALO:

$$-5 \le x < 1$$

para $x = 1 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

é uma série harmônica, então diverge! E 1 não faz parte do intervalo.

(4) Escreva as funções abaixo como uma série de potências centradas em 0:

a) $f(x) = \dfrac{x}{(2-x)^3}$ $\quad -1 < x < 1$

encontrar série de potência para $\frac{1}{(1-x)^3}$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = (1+2x+3x^2+\dots)' =$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2+6x+12x^2+\dots = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k-1}$$

$$\frac{1}{(1-x^3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k$$

$$= 1+3x+6x^2+10x^3+\dots+$$

$$\frac{x}{(2(1-\frac{x}{2}))^3} = \frac{x}{8(1-\frac{x}{2})^3} =$$

$$\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3}$$

$u = \frac{x}{2}$

$$\frac{x}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-u)^3}$$

$$\frac{1}{(1-u)^3} = 1+3u+6u^2+10u^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k$$

substituindo u por $\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3} = 1+\frac{3x}{2}+\frac{6x^2}{2^2}+\frac{10x^3}{2^3}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} x^k$$

$$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3} = \frac{1}{2^3}+\frac{3x}{2^4}+\frac{6x^2}{2^5}+\frac{10x^3}{2^6}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+4}} x^k$$

$$\frac{x}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3} = \frac{x}{2^3}+\frac{3x^2}{2^4}+\frac{6x^3}{2^5}+\frac{10x^4}{2^6}+\dots \quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+4}} x^{k+1}}$$

1,0

$$f(x) = \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^4}$$

1) Encontrar a série de Mac Laurin para $\sin(x)$:

$f(0) = \sin(0)$ $\quad f'(0) = \cos 0 \quad f''(0) = -\operatorname{sen} 0 \quad f'''(0) = -\cos 0$

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- substituindo x por x^2:

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{1+2n}}{(2n+1)!}$$

- subtraindo x^2 em ambos os lados:

$$\operatorname{sen}(x^2) - x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots - x^2$$

$$\operatorname{sen}(x^2) - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{1+2n}}{(2n+1)!}$$

- multiplicando por $1/x^4$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(x^2) - x^2}{x^4} = \frac{-x^2}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \frac{x^{14}}{9!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x^2)^{1+2n}}{(2n+3)!}}$$

⑤ Com a soma dos cinco primeiros termos da série, encontre um valor aproximado para a integral:

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$$

1) Encontrar a série de Maclaurin para e^{x^2}:

↳ a partir de $f(x) = e^x$.

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e assim, temos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

trocando x por x^2, temos:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

subtraindo 1 e $-x^2$ de cada lado

$$e^{x^2} - 1 - x^2 = \cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \cancel{-1} \cancel{-x^2}$$

$$e^{x^2} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

multiplicando $1/x^4$ de cada lado:

$$\frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \frac{1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{5!} + \dots$$

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \left. \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 4!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!} + \frac{x^9}{9 \cdot 6!} \right|_0^2$$

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \frac{2}{2!} - 0 + \frac{2^3}{3 \cdot 3!} - 0 + \frac{2^5}{5 \cdot 4!} - 0 + \dots$$

Calculando os cinco primeiros termos:

$$\frac{2}{2!} + \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 4!} + \frac{2^7}{8 \cdot 5!} + \frac{2^9}{9 \cdot 6!} = 1 + \frac{8}{18} + \frac{32}{120} + \frac{128}{960} + \frac{512}{6480} = \boxed{1{,}9235}$$ //