CDI II - 3ª PROVA 25/03/2021

Aluna: Alice Sgrott Turma da noite

1. Verifique se o limite abaixo existe. Em caso afirmativo calcule seu valor e prove-o.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{3x^2+y}$$

• Para verificar se este limite existe, é necessário fazer o teste, procurando algumas curvas para ver se o limite vai ser o mesmo, ou diferente.

$\gamma(t) = (t, Kt)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{3t^2+Kt} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{3t+K} = 0$$

limites diferentes

$\gamma(t) = (t, Kt^2)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{3t^2+Kt^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3+K} = \frac{1}{3+K}$$

NÃO TEM LIMITE!

//

$\gamma(t) = (t, Kt^3)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{3t^2+Kt^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3+Kt} = \frac{1}{3}$$

2. Encontre os pontos críticos da função abaixo e classifique-os, se possível, como pontos de máximo, mínimo ou de sela.

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 + 4xy - 9x$$

• Precisamos classificar a função. Para isso devemos fazer as primeiras derivadas

$$fx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} + 4xy - 9x - y^2\right) = x^2 + 4y - 9$$

$$fy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + 4xy - 9x - y^2\right) = 4x - 2y$$

Para encontrar os PONTOS CRÍTICOS

$$x^2 + 4y - 9 = 0$$
$$4x - 2y = 0$$

Manipulando a segunda equação e somando com a primeira, temos

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 64 - 4.1.-9$

$\Delta = 64 + 36$

$\Delta = 100$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

$$x' = \frac{-8 - 10}{2} = -9$$

$$x'' = \frac{-8 + 10}{2} = 1$$

⇒ continuação

Resultado da equação de segundo grau

$$x' = -9$$
$$x'' = 1$$

Substituindo na segunda equação

Se $x = -9$, $y = -18$
Se $x = 1$, $y = 2$

Substituindo na função $f(x, y)$ encontramos os dois pontos críticos da função

$$P_1 (-9, -18)$$

$$P_2 (1, 2)$$

Para verificar se são pontos de máximo, mínimo ou sela, devemos fazer a matriz jacobiana.

$$H(x,y) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$

Então

(i) Se $H(x_0,y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é ponto de mínimo;
(ii) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de máximo;
(iii) Se $H(x_0,y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de sela.
(iv) Se $H(x_0,y_0) = 0$ nada podemos afirmar.

• Primeiro devemos encontrar as segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

• Para o ponto P1

$$H(-9,-18) = \det \begin{vmatrix} -18 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$-16 \quad 36$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -18 < 0$$

Pelas regras, o ponto $(-9,-18)$ é um ponto de MÁXIMO. //

• Para o ponto P_2

$$H(1,2) = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

$-16 \quad -4$

Como $H(1,2) < 0$, o ponto é de SELA. //

3. Utilize a diferencial total para calcular um valor aproximado do módulo do vetor (7,1; 5,7; 6,2)

O diferencial total pode ser dado da forma

$$\Delta f \approx \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Delta z$$

Como queremos o módulo do vetor

$$f = (7,1;\ 5,7;\ 6,2)$$

Sabemos que a equação do módulo de um vetor é

$$|f| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ao analisar as coordenadas do vetor, temos que

$$\Delta x = 0,1$$
$$\Delta y = -0,3$$
$$\Delta z = 0,2$$

E as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow$$

continuação

Substituindo os valores (7, 6, 6), Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{7}{\sqrt{121}} \qquad \sqrt{7^2 + 6^2 + 6^2}$$

$$\sqrt{121}$$

$$11$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{\sqrt{121}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{6}{\sqrt{121}}$$

Aplicando na equação do diferencial total

$$df(\Delta v) \approx \frac{7}{\sqrt{121}} \times 0{,}1 + \frac{6}{\sqrt{121}} \times -0{,}3 + \frac{6}{\sqrt{121}} \times 0{,}2$$

Resolvendo

$$df(\Delta v) \approx 0{,}009091$$

Como o problema nos pede o módulo

$$\approx fv + df(\Delta v) = \sqrt{7^2 + 6^2 + 6^2} + 0{,}009091$$

$$|v + \Delta v| = f(v + \Delta v) \approx f(v) + df(\Delta v) = 11 + \frac{0{,}1}{11}$$

$$\approx 11{,}009091$$