Grafos Dirigidos (Digrafos)

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Conteúdo

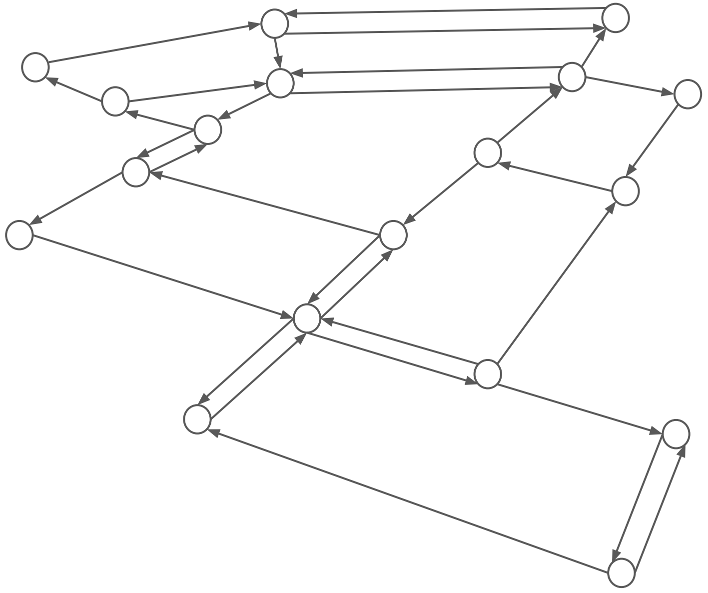
- Motivação
- Grafos dirigidos
- Conceitos básicos de grafos dirigidos
- Referências

Motivação

- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
  - Temos um mapa de vias (ruas ou rodovias) e estamos interessados nos caminhos que podemos percorrer neste mapa
  - Uma via que conecta um ponto *x* a um ponto *y* pode ter apenas a mão de *x* para *y*, apenas a mão de *y* para *x* ou ambas as mãos
  - Podemos representar este mapa como um grafo onde cada **aresta** tem uma direção e representa **uma mão de uma via**

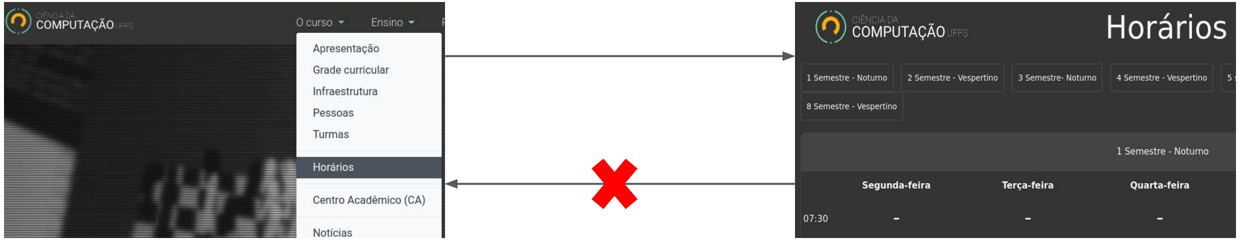
Motivação

- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
  - Temos um mapa de vias (ruas ou rodovias) e estamos interessados nos caminhos que podemos percorrer neste mapa
  - Uma via que conecta um ponto *x* a um ponto *y* pode ter apenas a mão de *x* para *y*, apenas a mão de *y* para *x* ou ambas as mãos
  - Podemos representar este mapa como um grafo onde cada **aresta** tem uma direção e representa **uma mão de uma via**



Motivação

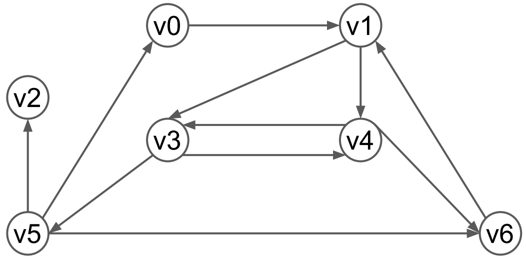
- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
  - Temos um conjunto de páginas web e estamos interessados nos links que existem entre estas páginas web
  - Podemos representar esta situação como um grafo onde uma aresta de *x* para *y* representa que, na página web *x*, existe um link para a página web *y*



Grafo dirigido – Digrafo

- Um **grafo dirigido** ou **digrafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
  - um conjunto de **vértices** V e
  - um conjunto de **arestas** E, sendo cada aresta um par ordenado (v_i, v_j) de vértices de G
    - note que (v_i, v_j) ≠ (v_j, v_i)

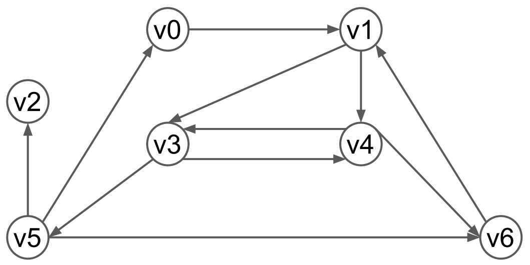
- Exemplo:
  - G = (V, E), onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
      $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
      $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
      $(v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Grafo dirigido – Digrafo

- Um **grafo dirigido** ou **digrafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
  - um conjunto de **vértices** V e
  - um conjunto de **arestas** E, sendo cada aresta um par ordenado (v_i, v_j) de vértices de G
    - note que (v_i, v_j) ≠ (v_j, v_i);
    - denominamos v_i a **cauda** da aresta e v_j a **cabeça** da aresta

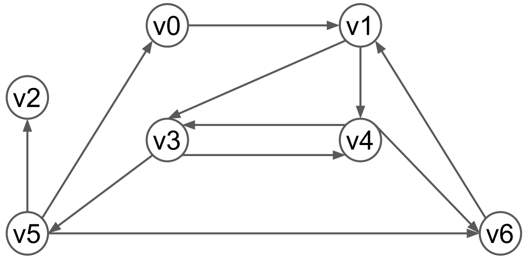
- Exemplo:
  - G = (V, E), onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
    - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
    - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

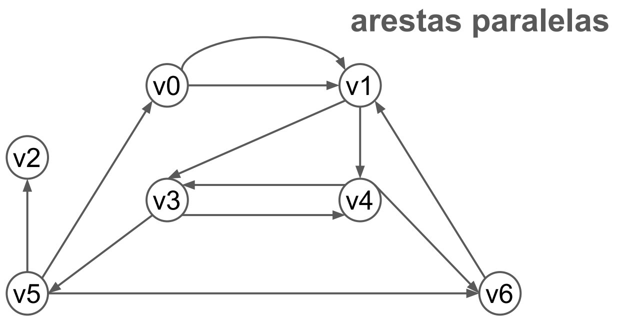
- Exemplo:
    - $G = (V, E)$, onde
        - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
        - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
          $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
          $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
          $(v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

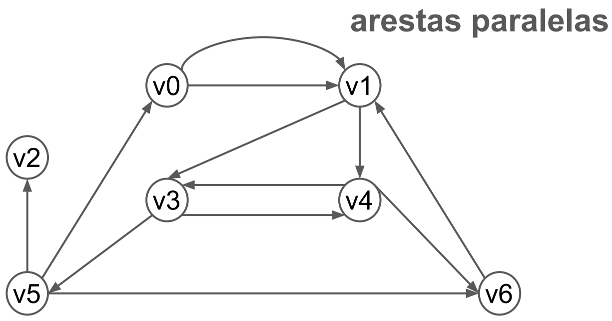
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

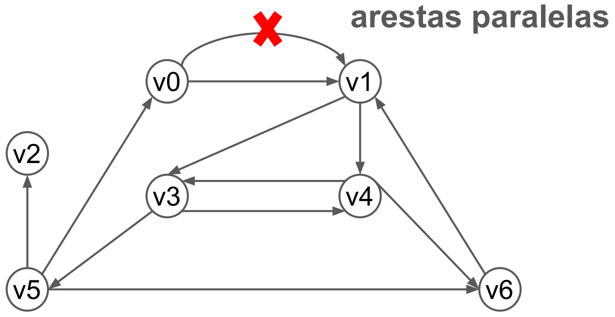
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_0, v_1)} \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

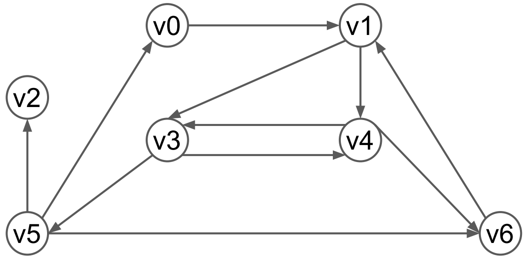
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
      $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
      $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
      $(v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_0, v_1)} \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

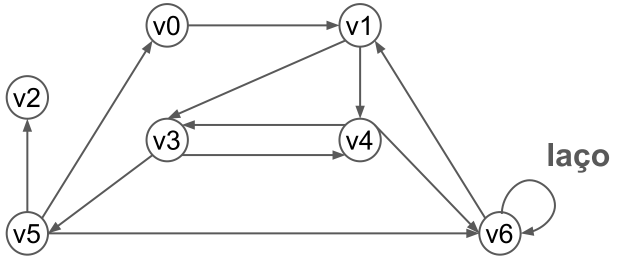
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
      $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
      $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
      $(v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

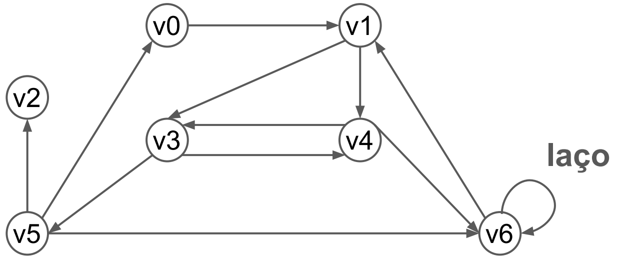
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

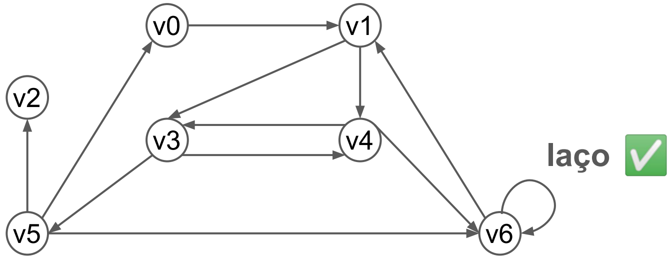
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_6, v_6)} \}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_6, v_6)} \}$ ✅

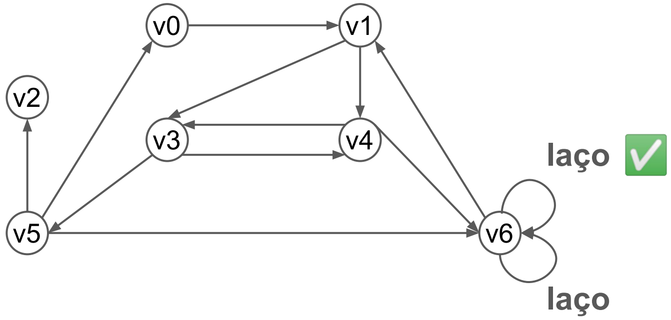


Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_6, v_6)} \}$

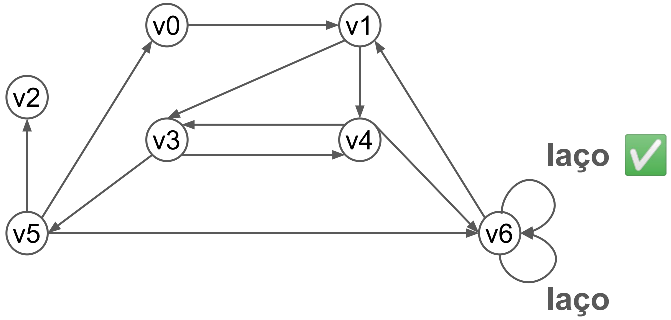
✅



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

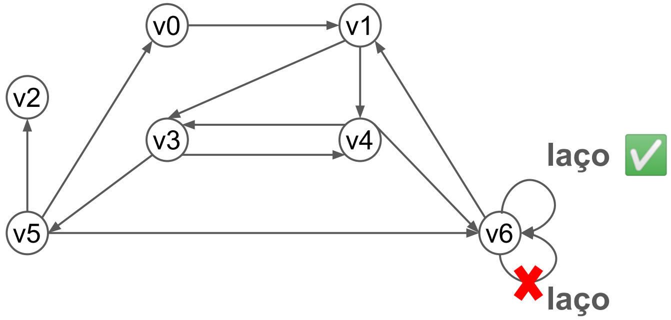
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
      $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
      $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
      $(v_5, v_6), (v_6, v_1), \mathbf{(v_6, v_6), (v_6, v_6)} \}$
      ✅



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

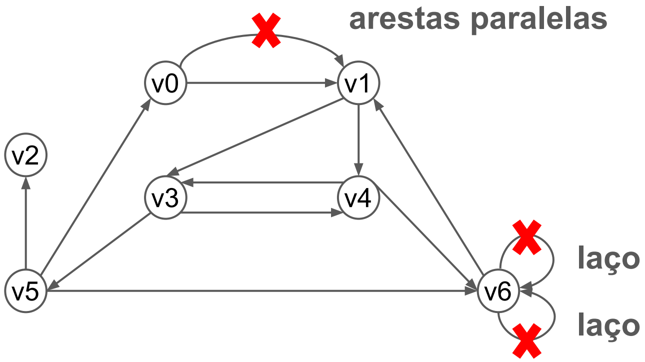
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
    - $E = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4),$
      $(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3),$
      $(v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2),$
      $(v_5, v_6), (v_6, v_1), \boldsymbol{(v_6, v_6)}, \cancel{\boldsymbol{(v_6, v_6)}} \}$
      ✅



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Para definir um digrafo simples, fazemos uma simplificação adicional: um digrafo é **simples** se não contém arestas paralelas nem laços



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Para definir um digrafo simples, fazemos uma simplificação adicional: um digrafo é **simples** se não contém arestas paralelas nem laços

- A não ser que seja dito o contrário, os digrafos que vamos considerar são simples

Exercícios

1. Um digrafo (simples) possui no máximo quantas arestas?

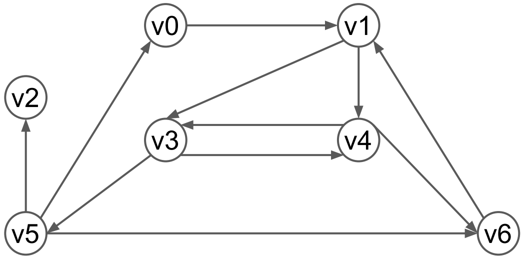
Exercícios

1. Um digrafo (simples) possui no máximo quantas arestas?
   Resposta:
   - Para cada vértice, a quantidade máxima de arestas saindo do vértice é $|V| - 1$.
   - O somatório de todas estas quantidades é $|V| (|V| - 1)$.
   - (Note que não estamos contando nenhuma aresta mais de uma vez.)
   - Portanto, G possui no máximo $|V| (|V| - 1)$ arestas. □

Ordem e tamanho

- Dado um digrafo $G = (V, E)$, denotamos por
  - $V(G)$ o conjunto de vértices de G, ou seja, $V(G) = V$ e
  - $E(G)$ o conjunto de arestas de G, ou seja, $E(G) = E$
- Dizemos que
  - a **ordem** de G é o número de vértices de G, ou seja, $|V(G)|$, e
  - o **tamanho** de G é o número de arestas de G, ou seja $|E(G)|$

- Exemplo:
  - A ordem do digrafo ao lado é 7 e o seu tamanho é 11

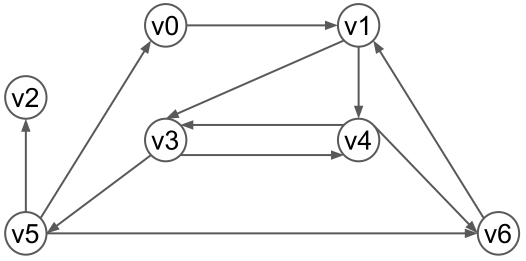


Vizinhança e grau

- Por simplicidade, também denotamos uma aresta (v_i , v_j) como $v_i v_j$
- Dada uma aresta $v_i v_j$, os vértices v_i e v_j são os **extremos** desta aresta

- Se $v_i v_j$ é uma aresta de um digrafo G, então
  - a aresta $v_i v_j$ **sai** de v_i e **entra** em v_j ,
  - v_i é **vizinho de entrada** de v_j em G e
  - v_j é **vizinho de saída** de v_i em G

- Exemplo:
  - No digrafo ao lado, v_1 é vizinho de saída de v_0 e v_0 é vizinho de entrada de v_1. Os vizinhos de saída de v_5 são v_0, v_2 e v_6. A aresta $v_1 v_4$ sai de v_1 e entra em v_4

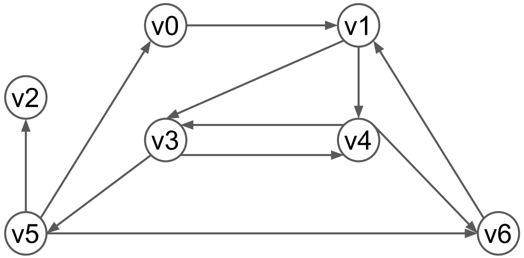


Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um digrafo G,
  - a **vizinhança de saída** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de saída de v_i em G,
  - a **vizinhança de entrada** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de entrada de v_i em G,
  - o **grau de saída** de v_i em G é o número de arestas de G que saem de v_i e
  - o **grau de entrada** de v_i em G é o número de arestas de G entram em v_i
- Denotamos por
  - $N_G^+(v_i)$, ou simplesmente $N^+(v_i)$, a vizinhança de saída de v_i em G,
  - $N_G^-(v_i)$, ou simplesmente $N^-(v_i)$, a vizinhança de entrada de v_i em G,
  - $d_G^+(v_i)$, ou simplesmente $d^+(v_i)$, o grau de saída de v_i em G e
  - $d_G^-(v_i)$, ou simplesmente $d^-(v_i)$, o grau de entrada de v_i em G
- Note que $d_G^+(v_i) = | N_G^+(v_i) |$ e $d_G^-(v_i) = | N_G^-(v_i) |$

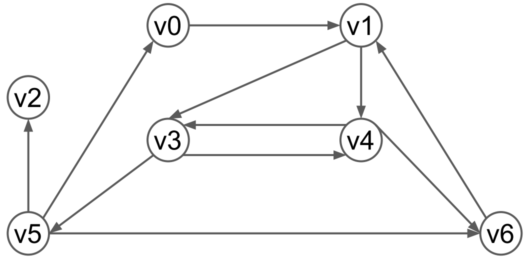
Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N^+(v_0) = \{\quad\}$ e $N^-(v_1) = \{\quad\}$ e
    - $d^+(v_4) =\quad$, $d^-(v_4) =\quad$, $d^+(v_6) =\quad$, $d^-(v_6) =\quad$, $d^+(v_2) =\quad$ e $d^-(v_2) =$



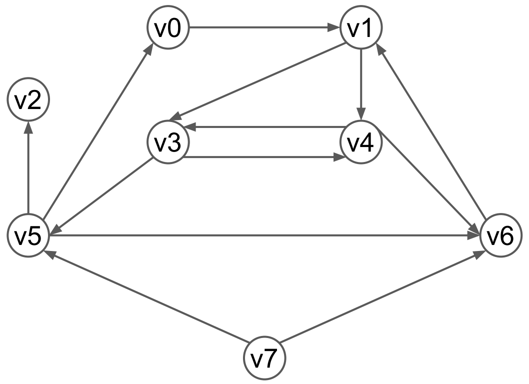
Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N^{+}(v_0) = \{ v_1 \}$ e $N^{-}(v_1) = \{ v_0, v_6 \}$ e
    - $d^{+}(v_4) = 2$, $d^{-}(v_4) = 2$, $d^{+}(v_6) = 1$, $d^{-}(v_6) = 2$, $d^{+}(v_2) = 0$ e $d^{-}(v_2) = 1$



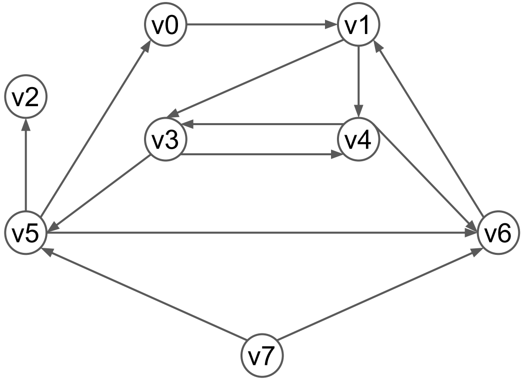
Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^{-}(v_7) =$



Vizinhança e grau

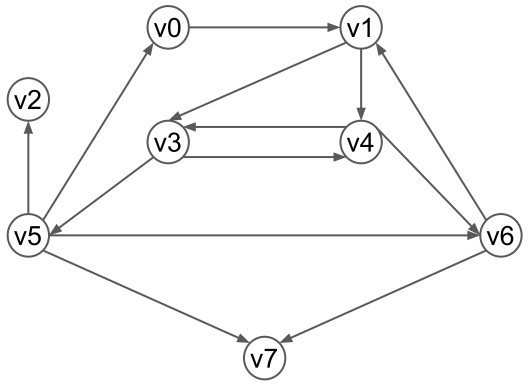
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^{-}(v_7) = 0$



Chamamos de **fonte** um vértice v_i tal que $d^{-}(v_i) = 0$

Vizinhança e grau

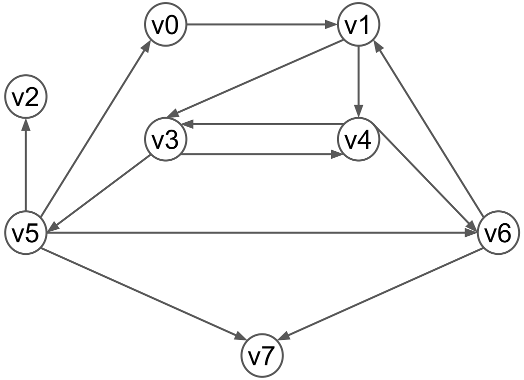
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^+(v_7) =$



Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^+(v_7) = 0$

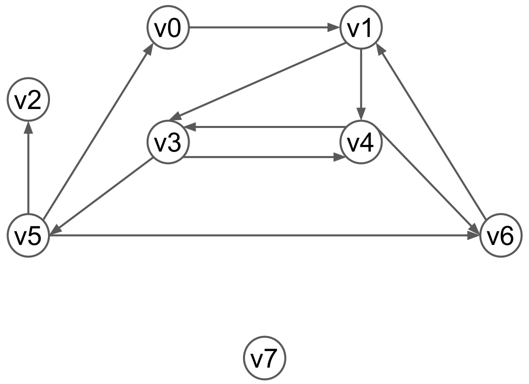
Chamamos de **sorvedouro** um vértice v_i tal que $d^+(v_i) = 0$



Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^{+}(v_7) = 0$ e $d^{-}(v_7) = 0$

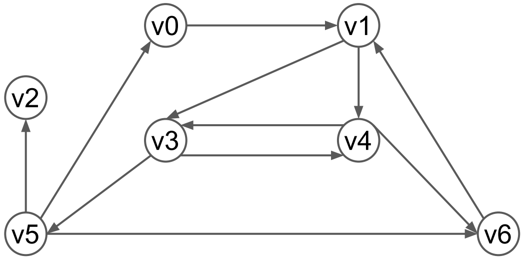
Chamamos de vértice **isolado** um vértice v_i tal que $d^{+}(v_i) = 0$ e $d^{-}(v_i) = 0$



Grau de saída mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau de saída mínimo** de G, denotado por $\delta^+(G)$, é o menor grau de saída de um vértice de G, ou seja, $\delta^+(G) = \min\{\, d^+(v_i) : v_i \in V(G) \,\}$
  - o **grau de saída máximo** de G, denotado por $\Delta^+(G)$, é o maior grau de saída um vértice de G, ou seja, $\Delta^+(G) = \max\{\, d^+(v_i) : v_i \in V(G) \,\}$

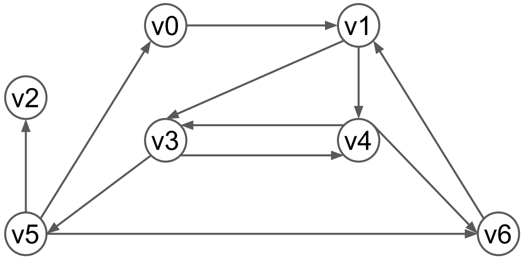
- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta^+(G) =$ e $\Delta^+(G) =$



Grau de saída mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau de saída mínimo** de G, denotado por $\delta^+(G)$, é o menor grau de saída de um vértice de G, ou seja, $\delta^+(G) = \min\{ d^+(v_i) : v_i \in V(G) \}$
  - o **grau de saída máximo** de G, denotado por $\Delta^+(G)$, é o maior grau de saída um vértice de G, ou seja, $\Delta^+(G) = \max\{ d^+(v_i) : v_i \in V(G) \}$

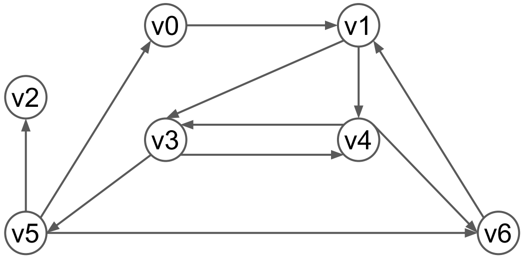
- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta^+(G) = 0$ e $\Delta^+(G) = 3$



Grau de entrada mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau de entrada mínimo** de G, denotado por $\delta^{-}(G)$, é o menor grau de entrada de um vértice de G, ou seja, $\delta^{-}(G) = \min\{ d^{-}(v_i) : v_i \in V(G) \}$
  - o **grau de entrada máximo** de G, denotado por $\Delta^{-}(G)$, é o maior grau de entrada um vértice de G, ou seja, $\Delta^{-}(G) = \max\{ d^{-}(v_i) : v_i \in V(G) \}$

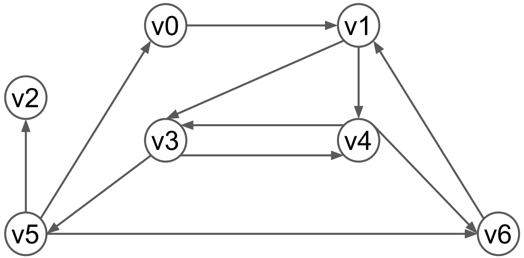
- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta^{-}(G) =$ e $\Delta^{-}(G) =$



Grau de entrada mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau de entrada mínimo** de G, denotado por $\delta^{-}(G)$, é o menor grau de entrada de um vértice de G, ou seja, $\delta^{-}(G) = \min\{ d^{-}(v_i) : v_i \in V(G) \}$
  - o **grau de entrada máximo** de G, denotado por $\Delta^{-}(G)$, é o maior grau de entrada um vértice de G, ou seja, $\Delta^{-}(G) = \max\{ d^{-}(v_i) : v_i \in V(G) \}$

- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta^{-}(G) = 1$ e $\Delta^{-}(G) = 2$



Exercícios

2. É possível construir um digrafo tal que $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2 \}$ e $d^+(v_0) = 1$, $d^-(v_0) = 1$; $d^+(v_1) = 1$, $d^-(v_1) = 2$; e $d^+(v_2) = 2$, $d^-(v_2) = 2$?

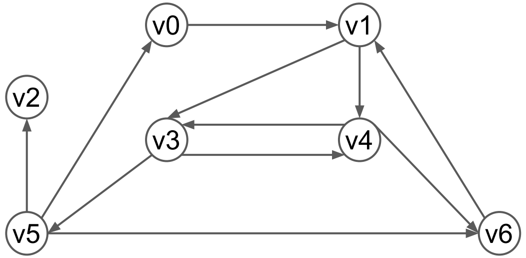
Digrafo (simples)

- **Propriedade:** Para um digrafo (simples) $G = (V, E)$, $\sum_{v \in V(G)} d^{+}(v) = \sum_{v \in V(G)} d^{-}(v) = |E|$.

Passeio

- Um **passeio** em um digrafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em G do seu antecessor

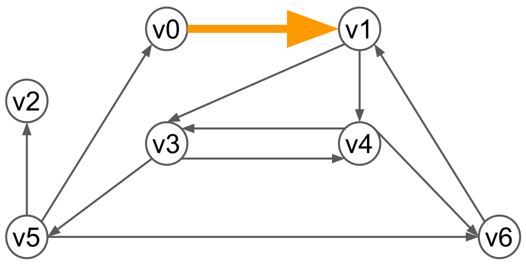
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em *G* do seu antecessor

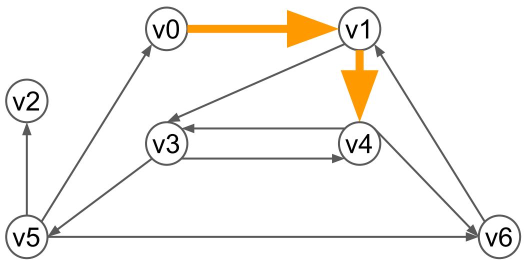
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em G do seu antecessor

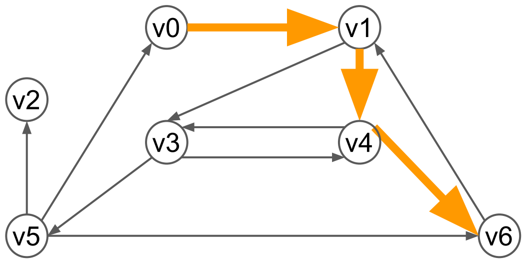
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em *G* do seu antecessor

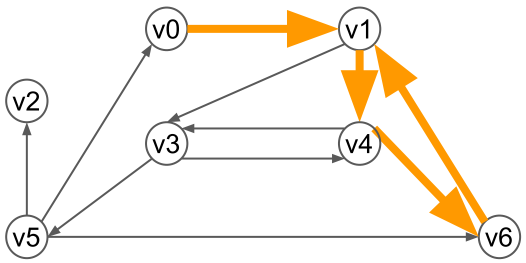
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em G do seu antecessor

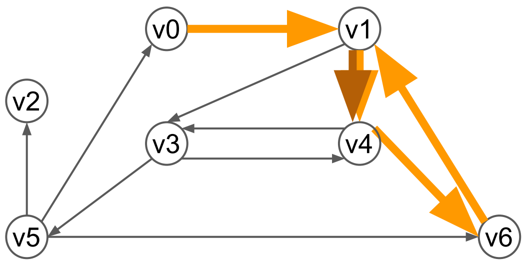
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em *G* do seu antecessor

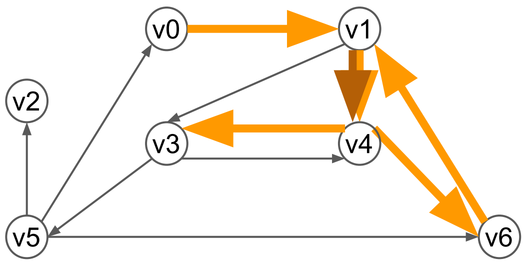
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em G do seu antecessor

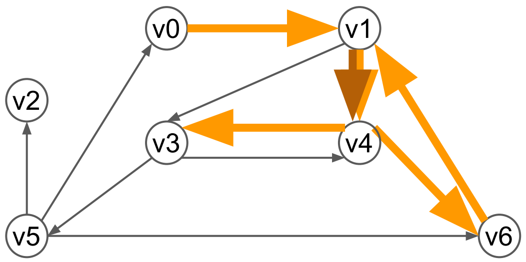
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um digrafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em *G* do seu antecessor

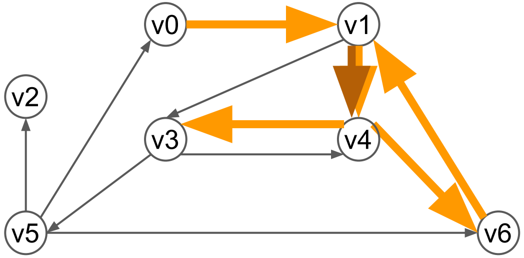
- Exemplo:
    - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_4v_3$ é um passeio no digrafo ao lado



- Em um passeio, especificamos os vértices, mas as arestas envolvidas também estão implicitamente especificadas
- Por isso, podemos nos referir às **arestas de um passeio**

Passeio

- Um **passeio** em um digrafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em *G* do seu antecessor

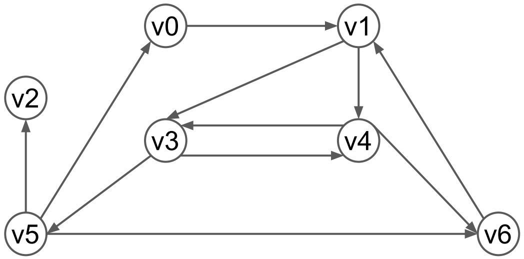


- Chamamos um passeio $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik-1}v_{ik}$ de um $v_{i0}v_{ik}$-passeio e dizemos que
  - v_{i0} e v_{ik} são os **extremos** do passeio;
  - v_{i0} é a **origem** do passeio e v_{ik} é o **destino** do passeio;
  - $v_{i1}, \ldots, v_{ik-1}$ são os **vértices internos** do passeio;
  - o **comprimento** do passeio é *k*, ou seja, a quantidade de arestas percorridas;
  - o passeio é **par** se o seu comprimento é par e é **ímpar** caso contrário e
  - o passeio é **fechado** se $v_{i0} = v_{ik}$ e é **aberto** caso contrário

Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

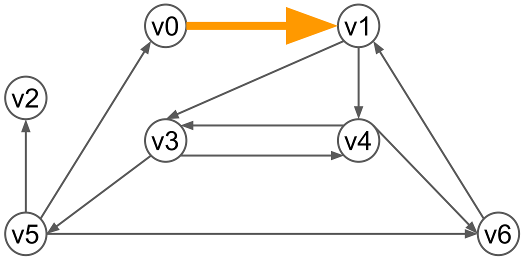
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

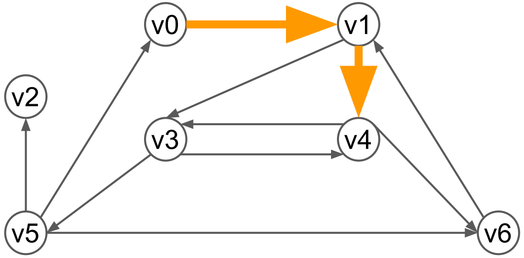
- Exemplo:
  - A sequência $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

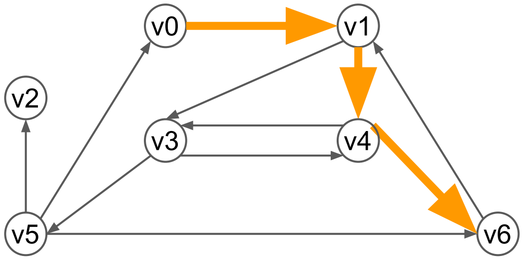
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

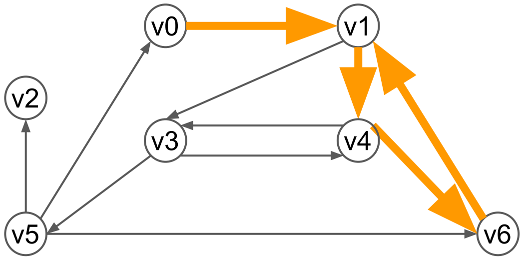
- Exemplo:
    - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

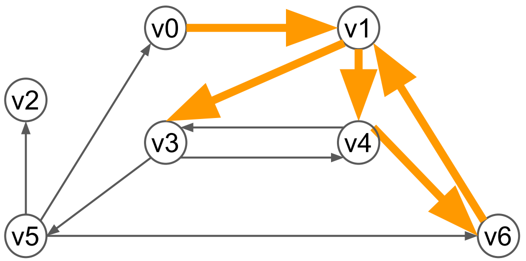
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

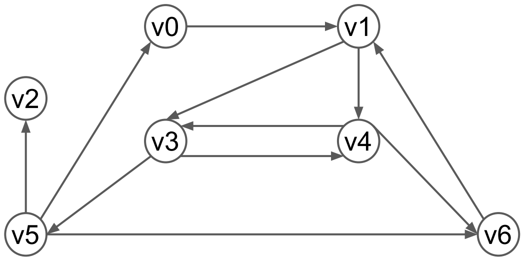
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_6v_1v_3$ é uma trilha no digrafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
    - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

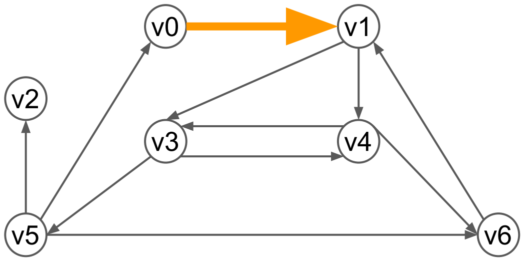
- Exemplo:
    - A sequência $v_0v_1v_4v_3$ é um caminho no digrafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

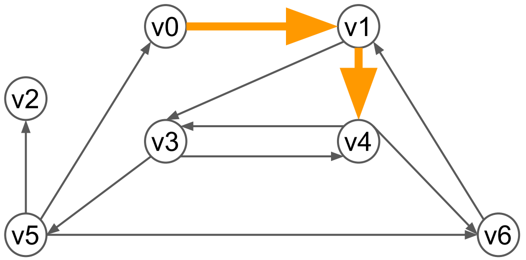
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_3$ é um caminho no digrafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

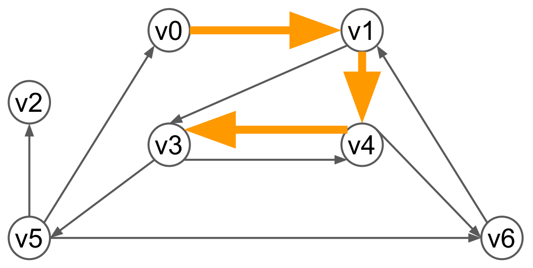
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_3$ é um caminho no digrafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

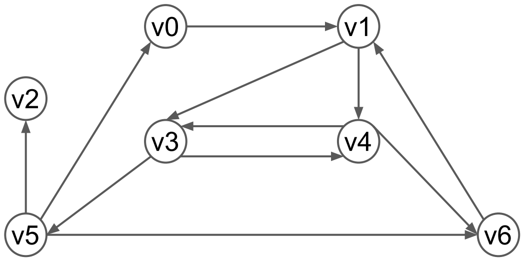
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_3$ é um caminho no digrafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um digrafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

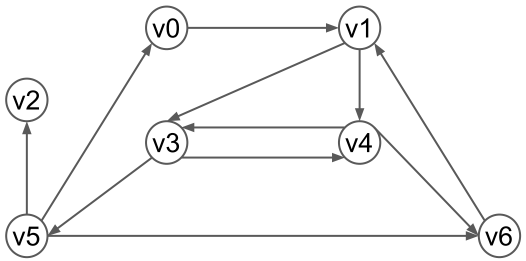
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_6$
    não é um caminho no digrafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos

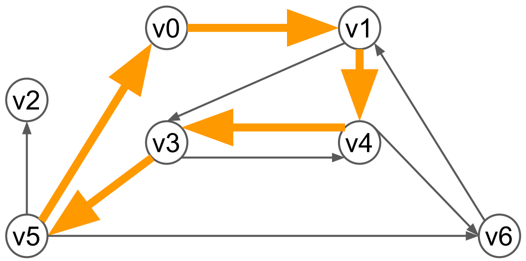
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_3v_5v_0$ é um ciclo no digrafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo G é um passeio fechado em G, com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos

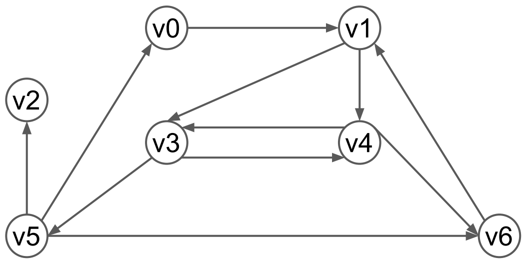
- Exemplo:
  - A sequência $v_0v_1v_4v_3v_5v_0$ é um ciclo no digrafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos

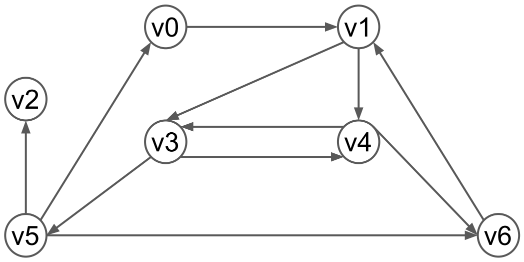
- Exemplo:
  - A sequência $v_1 v_4 v_3 v_1$ **não** é um ciclo no digrafo ao lado



Distância

- A **distância** de um vértice v_i para um vértice v_j em um digrafo G, denotada por $d(v_i\ , v_j)$, é
  - o menor comprimento de um v_iv_j-caminho em G ou
  - ∞ (infinita) caso não exista um v_iv_j-caminho em G
- Note que, em geral, $d(v_i\ , v_j) \neq d(v_j\ , v_i)$

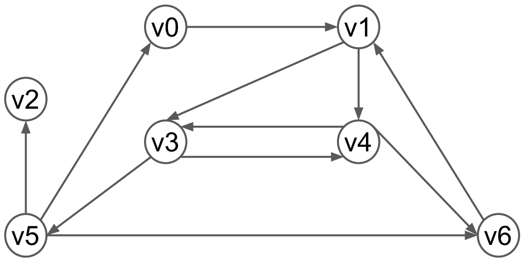
- Exemplo:
  - No digrafo ao lado,
    - $d(v_0, v_4) =$ e $d(v_4, v_0) =$,
    - $d(v_5, v_6) =$ e $d(v_6, v_5) =$,
    - $d(v_4, v_4) =$ e
    - $d(v_3, v_2) =$ e $d(v_2, v_3) =$



Distância

- A **distância** de um vértice v_i para um vértice v_j em um digrafo G, denotada por $d(v_i , v_j)$, é
  - o menor comprimento de um v_iv_j-caminho em G ou
  - ∞ (infinita) caso não exista um v_iv_j-caminho em G
- Note que, em geral, $d(v_i , v_j) \neq d(v_j , v_i)$

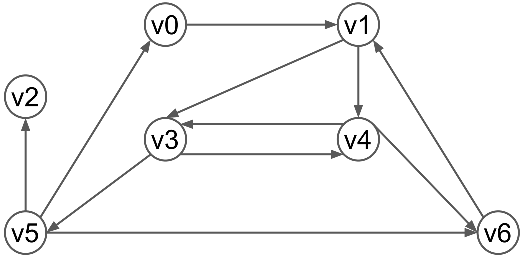
- Exemplo:
  - No digrafo ao lado,
    - $d(v_0, v_4) = 2$ e $d(v_4, v_0) = 3$,
    - $d(v_5, v_6) = 1$ e $d(v_6, v_5) = 3$,
    - $d(v_4, v_4) = 0$ e
    - $d(v_3, v_2) = 2$ e $d(v_2, v_3) = \infty$



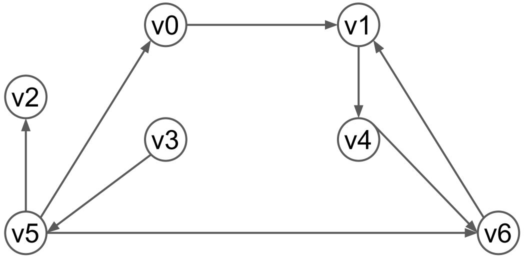
Subgrafo

- Um **subgrafo** de um digrafo *G* é um digrafo *H* tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Exemplo:

G



H



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
- $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$

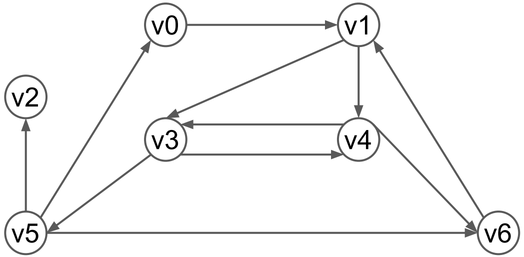
- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
- $E(H) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$

Subgrafo

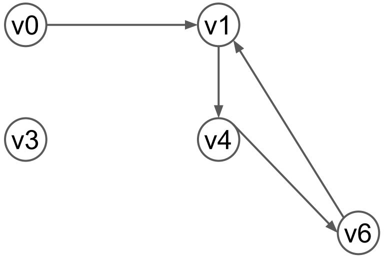
- Um **subgrafo** de um digrafo G é um digrafo H tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

- Exemplo:

G



H



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
- $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$

- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_3, v_4, v_6 \}$ e
- $E(H) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_4, v_6), (v_6, v_1) \}$

Subgrafo

- Um **subgrafo** de um digrafo G é um digrafo H tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

- Usamos as seguintes expressões de forma equivalente:
  - H é um subgrafo de G
  - H está **contido** em G
  - $H \subseteq G$
  - G é um **supergrafo** de H
  - G **contém** H
  - $G \supseteq H$

Subgrafo gerador e induzido

- Um subgrafo H de um digrafo G é **gerador** se $V(H) = V(G)$

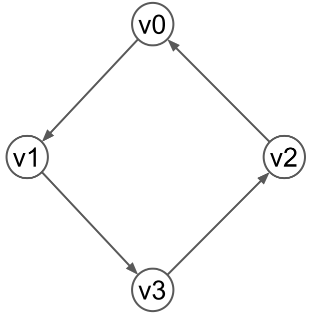
- Dado um subconjunto S de vértices de um digrafo G, o **subgrafo de *G* induzido por *S*** é o subgrafo $G[S]$ tal que
  - $V(G[S]) = S$
  - $E(G[S])$ consiste em todas as arestas de G cujos ambos os extremos estão em S

Conexidade (forte)

- Um digrafo G é **fortemente conexo** se, para todo par de vértices v_i, v_j de G, existe em G um v_iv_j-caminho (um caminho cuja origem é v_i e cujo destino é v_j) e um v_jv_i-caminho (um caminho cuja origem é v_j e cujo destino é v_i)

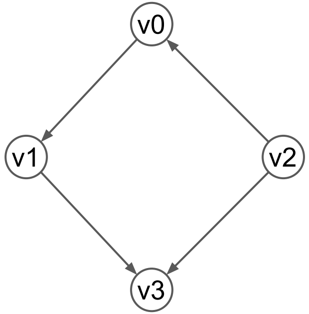
- Exemplo:

G_1



Digrafo fortemente conexo

G_2



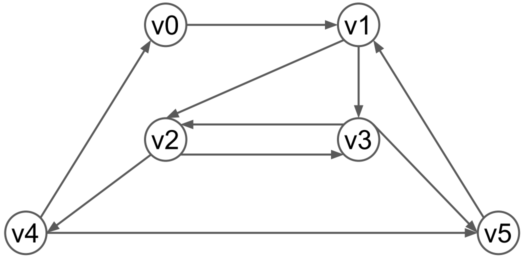
~~Digrafo fortemente conexo~~

Conexidade (forte)

- Um digrafo *G* é **fortemente conexo** se, para todo par de vértices v_i , v_j de *G*, existe em *G* um $v_i v_j$-caminho (um caminho cuja origem é v_i e cujo destino é v_j) e um $v_j v_i$-caminho (um caminho cuja origem é v_j e cujo destino é v_i)

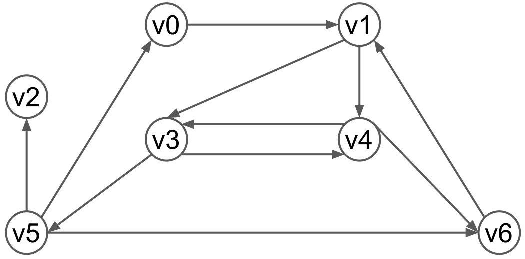
- Exemplo:

G_1



Digrafo fortemente conexo

G_2



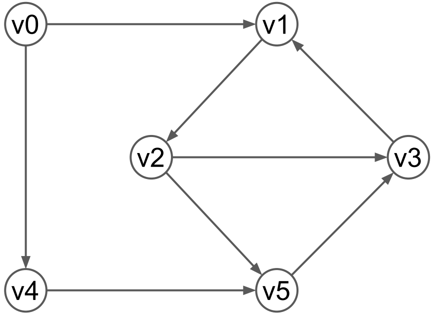
Digrafo fortemente conexo

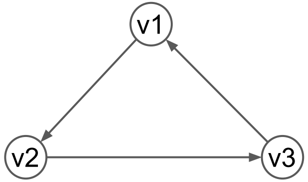
Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo *G* é um subgrafo de *G* que é fortemente conexo

- Exemplo:

G





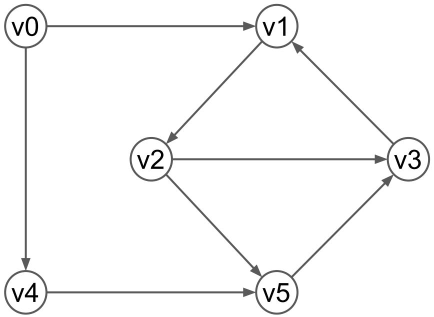
Subgrafo fortemente conexo

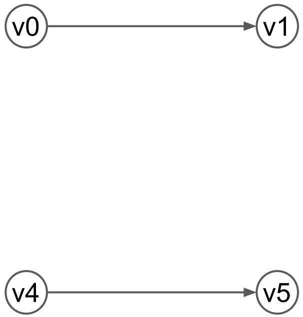
Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo *G* é um subgrafo de *G* que é fortemente conexo

- Exemplo:

G





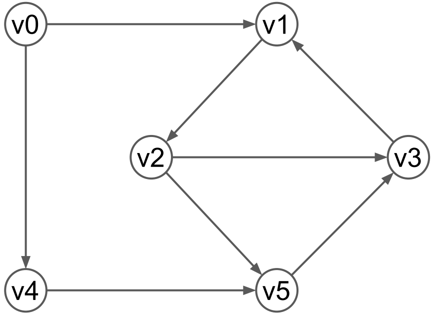
~~Subgrafo fortemente conexo~~

Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo *G* é um subgrafo de *G* que é fortemente conexo

- Exemplo:

G



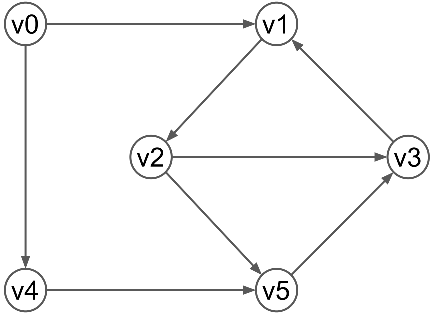
~~Subgrafo fortemente conexo~~

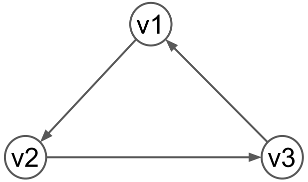
Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo maximal** de um digrafo *G* é um subgrafo fortemente conexo de *G* que não está contido em outro subgrafo fortemente conexo de *G*

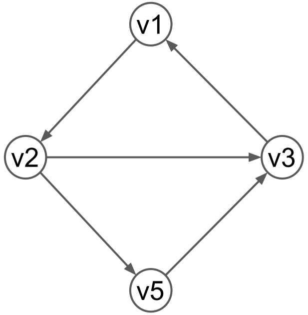
- Exemplo:

G





~~Subgrafo fortemente conexo maximal~~



Subgrafo fortemente conexo maximal

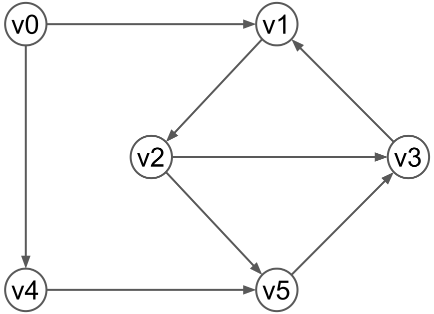
Conexidade (forte)

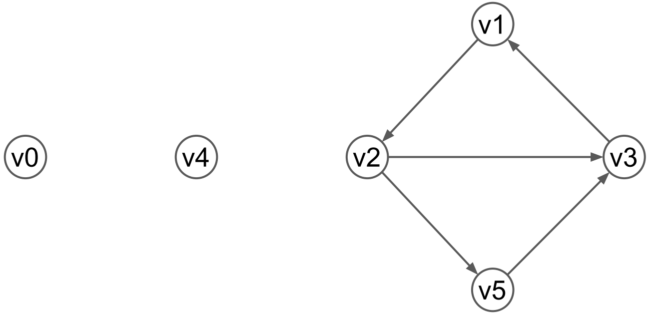
- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo *G* são os subgrafos fortemente conexos maximais de *G*

- Exemplo:

Componentes fortemente conexas de *G*

G





3 componentes fortemente conexas

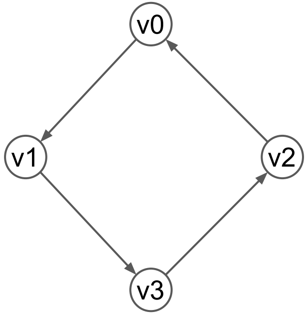
Conexidade (forte)

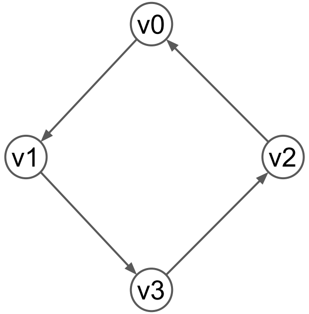
- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo *G* são os subgrafos fortemente conexos maximais de *G*

- Exemplo:

Componentes fortemente conexas de *G*

G





1 componente fortemente conexa

Conexidade (forte)

- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo *G* são os subgrafos fortemente conexos maximais de *G*

- Um **grafo fortemente conexo** (com pelo menos um vértice) tem exatamente **uma componente fortemente conexa**

Conexidade (forte)

- Vimos anteriormente um algoritmo para determinar as componentes conexas de um grafo não-dirigido G
- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo G?

Conexidade (forte)

- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo *G*?
- Ideia:
  1. Faça $i = 0$
  2. Enquanto houver vértices não visitados no digrafo *G*:
  3. Realize uma busca em profundidade no digrafo *G* começando por um vértice não visitado; quando um vértice *v* e seus vizinhos de saída tiverem sido visitados, faça $fin(v) = i$ e $i = i + 1$
  4. Construa o digrafo *G'* dado pelo digrafo *G* com as direções das arestas de *G* invertidas
  5. Enquanto houver vértices não visitados no digrafo *G'*:
  6. Realize uma busca em profundidade no digrafo *G'* começando por um vértice não visitado *v* para o qual $fin(v)$ seja máximo
- Cada busca em profundidade realizada nos Passos 5-6 determina uma componente fortemente conexa do digrafo *G*

Conexidade (forte)

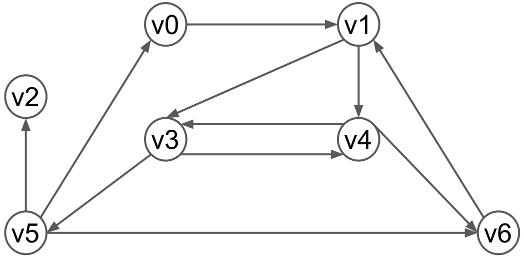
- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo G?
- Ver
    - a Seção 22.5 do livro
      Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.
    - a Seção 19.8 do livro
      Sedgewick, R. Algorithms in C++ – Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed. Addison-Wesley, 2002.

Grafo subjacente

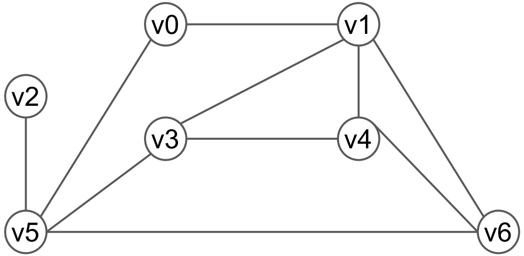
- O **grafo subjacente** de um digrafo *G* é o grafo obtido
  - removendo os laços de *G* e
  - transformando cada aresta restante de *G* de um par ordenado para um conjunto de dois vértices

- Exemplo:

G



Grafo subja-
cente de *G*



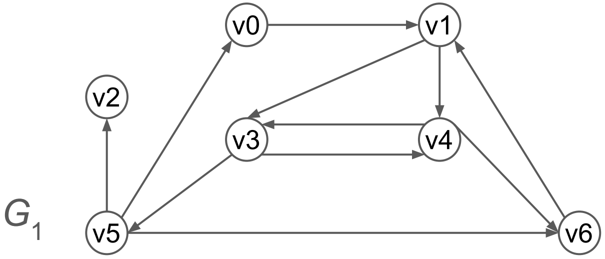
  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
  - $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$

  - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ e
  - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_5 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_1, v_6 \}, \{ v_2, v_5 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \{ v_4, v_6 \}, \{ v_5, v_6 \} \}$

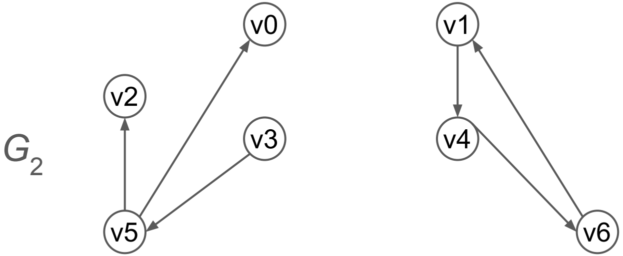
Conexidade (fraca)

- Um digrafo *G* é **(fracamente) conexo** se o seu grafo subjacente é conexo; *G* é **desconexo** caso contrário

- Exemplo:



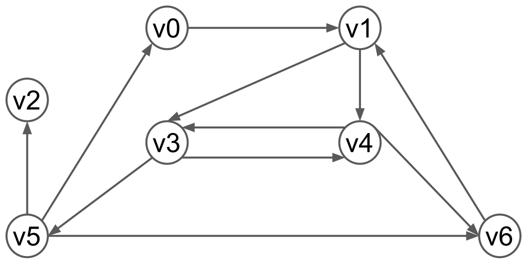
Digrafo conexo



Digrafo desconexo

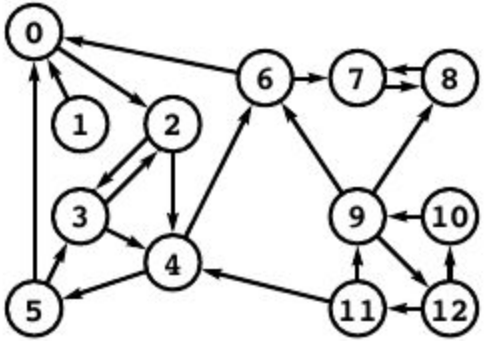
Exercícios

3. Quais são as componentes fortemente conexas do digrafo abaixo?



Exercícios

4. Responda às seguintes questões:
    a. O digrafo abaixo é fortemente conexo?
    b. Caso o digrafo abaixo não seja fortemente conexo, quais são as suas componentes fortemente conexas?



Exercícios

5. Considere o Problema H da Primeira Fase da Maratona de Programação 2022. Como podemos usar o conceito de componentes fortemente conexas de um digrafo na resolução deste problema?

Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina