# Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

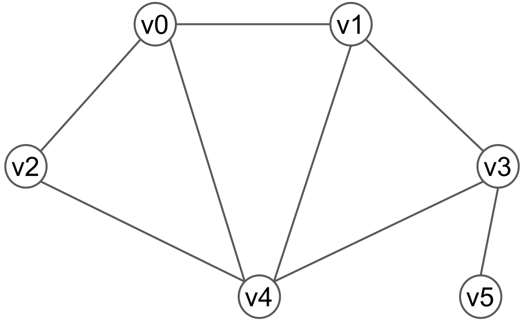
# Conteúdo

- Conceitos básicos
- Exercícios
- Referências

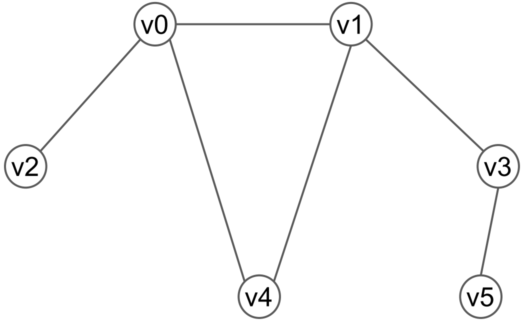
# Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo $G$ é um grafo $H$ tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Exemplo:

$G$




$H$



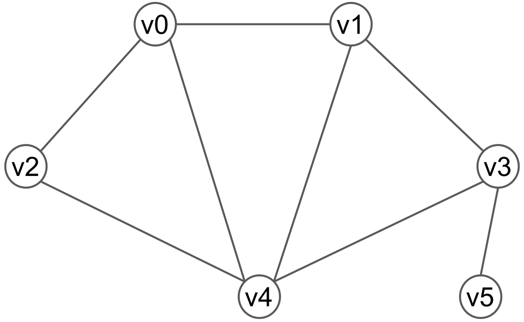

- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

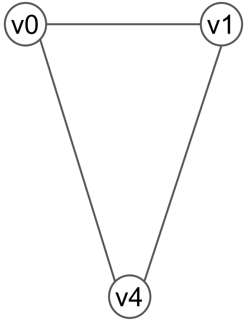
# Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo *G* é um grafo *H* tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Exemplo:

*G*




*H*




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V(H) = \{ v_0, v_1, v_4 \}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_4 \} \}$

# Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo $G$ é um grafo $H$ tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

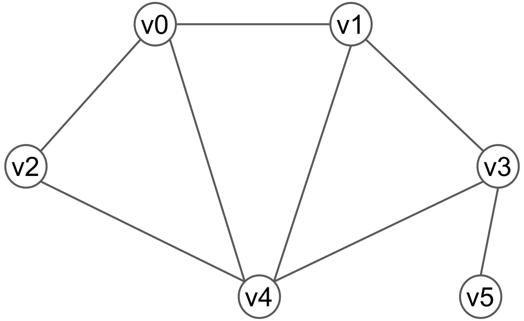
- Usamos as seguintes expressões de forma equivalente:
  - $H$ é um subgrafo de $G$
  - $H$ está **contido** em $G$
  - $H \subseteq G$
  - $G$ é um **supergrafo** de $H$
  - $G$ **contém** $H$
  - $G \supseteq H$

# Subgrafo gerador

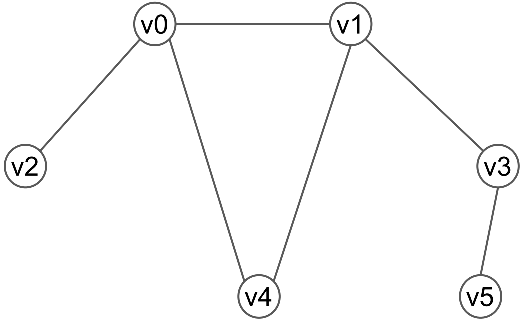
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se $V(H) = V(G)$

- Exemplo:

*G*




*H*




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

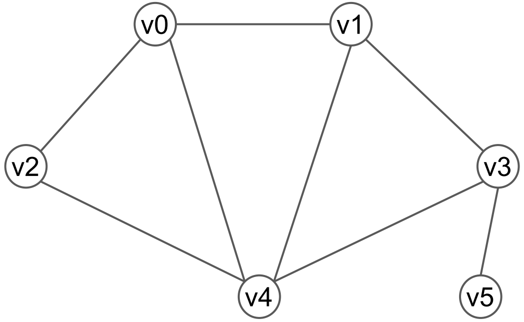
  - $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

# Subgrafo gerador

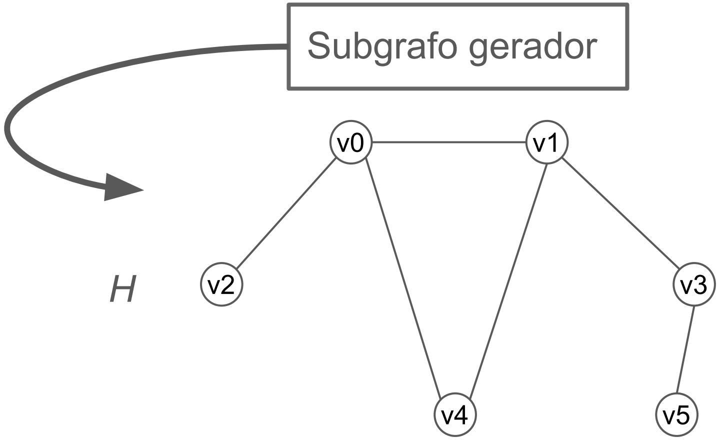
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se *V*(*H*) = *V*(*G*)

- Exemplo:

*G*




*H*




  - $\boldsymbol{V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

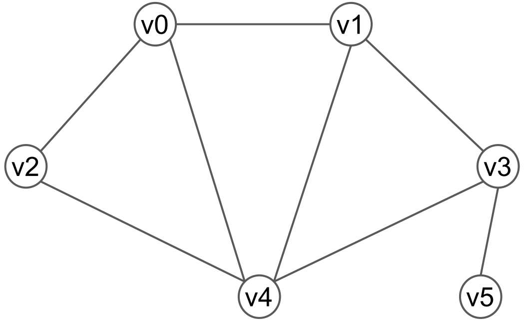
  - $\boldsymbol{V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

# Subgrafo gerador

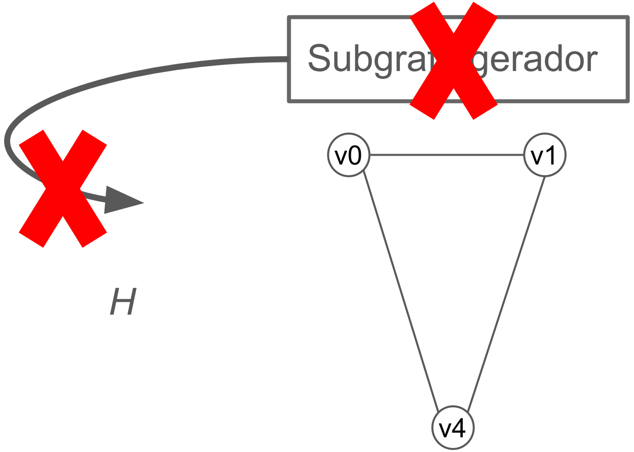
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se $V(H) = V(G)$

- Exemplo:

*G*




*H*




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V(H) = \{ v_0, v_1, v_4 \}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_4 \} \}$

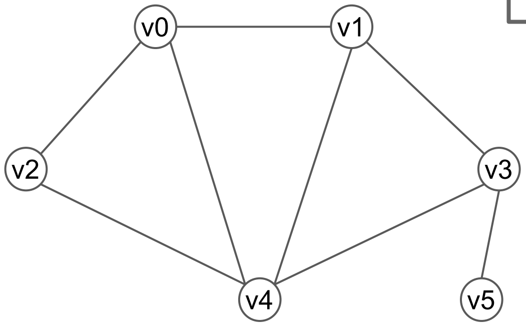
# Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto *S* de vértices de um grafo *G*, o **subgrafo de *G* induzido por *S*** é o subgrafo *G*[*S*] tal que
  - *V*(*G*[*S*]) = *S* e
  - *E*(*G*[*S*]) consiste em todas as arestas de *G* cujos ambos os extremos estão em *S*

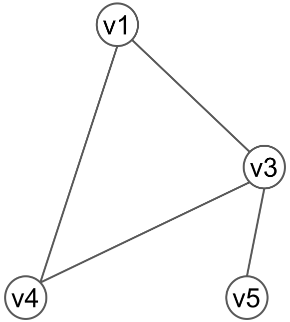
- Exemplo:

$S = \{ v_1, v_3, v_4, v_5 \}$

*G*




*G*[*S*]



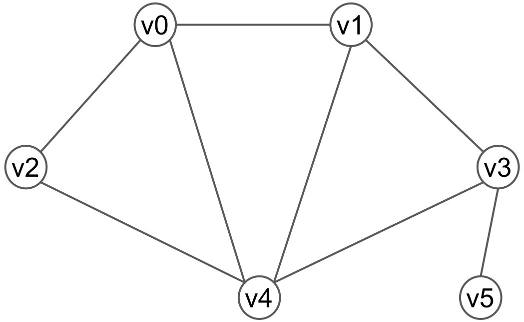
# Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto $S$ de vértices de um grafo $G$, o **subgrafo de $G$ induzido por $S$** é o subgrafo $G[S]$ tal que
  - $V(G[S]) = S$ e
  - $E(G[S])$ consiste em todas as arestas de $G$ cujos ambos os extremos estão em $S$

- Exemplo:

$S = \{ v_2, v_3 \}$

$G$



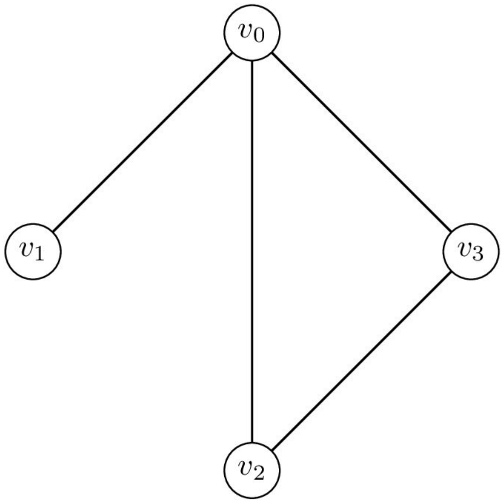

$G[S]$

# Exercícios

1. (Ref. 1) Suponha que $H$ é um subgrafo de $G$. Se $V(H) = V(G)$, é verdade que $H$ é igual a $G$? Se $E(H) = E(G)$, é verdade que $H$ é igual a $G$?

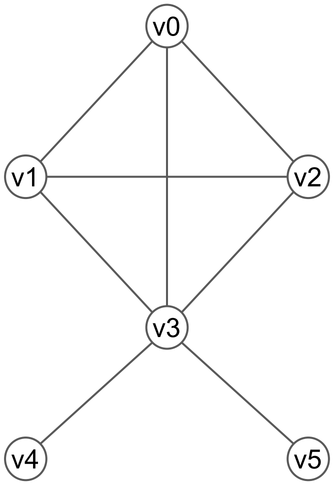
# Exercícios

2. Apresente um subgrafo do grafo abaixo que não seja um subgrafo induzido.



# Exercícios

3. Determine um subconjunto de vértices *S* do grafo *G* abaixo tal que o subgrafo induzido *G*[*S*] possua 4 arestas.

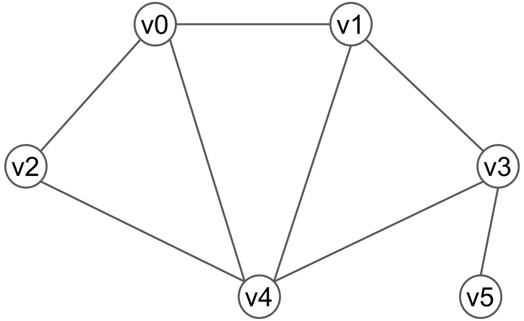


# Remoção de arestas

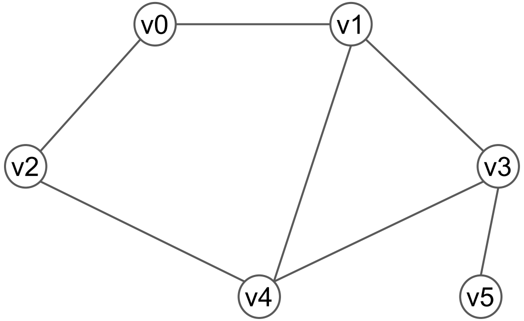
- Dado um grafo $G$ e uma aresta $\{ v_i , v_j \} \in E(G)$, denotamos por $G \setminus \{ v_i , v_j \}$ o grafo obtido pela **remoção da aresta** $\{ v_i , v_j \}$ de $G$

- Exemplo:

$G$




$G \setminus \{ v_0, v_4 \}$




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V( G \setminus \{ v_0, v_4 \} ) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E( G \setminus \{ v_0, v_4 \} ) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

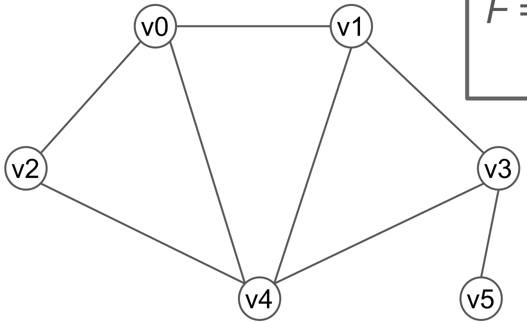
# Remoção de arestas

- Dado um grafo $G$ e um subconjunto de arestas $F \subseteq E(G)$, denotamos por $G \setminus F$ o grafo obtido pela **remoção das arestas** em $F$ de $G$

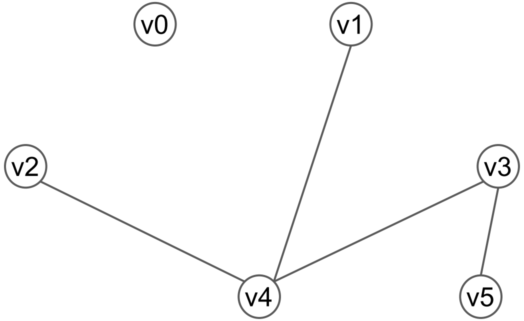
- Exemplo:

$$F = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \} \}$$

$G$




$G \setminus F$




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

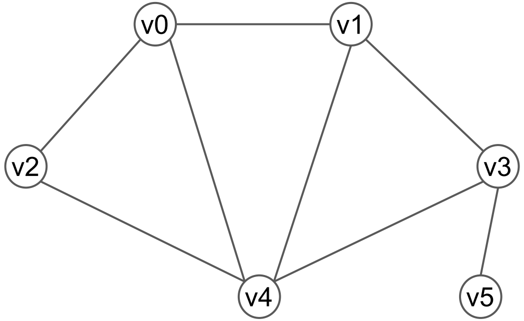
  - $V( G \setminus F ) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E( G \setminus F ) = \{ \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

# Remoção de vértices

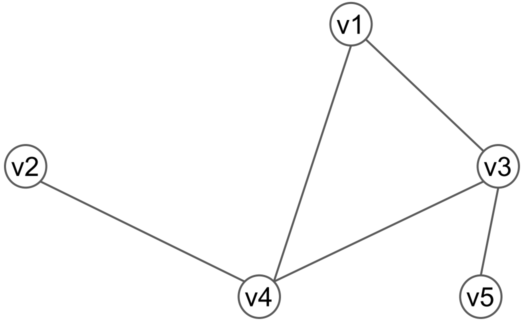
- Dado um grafo *G* e um vértice $v_i \in V(G)$, denotamos por $G - v_i$ o grafo obtido pela **remoção do vértice** $v_i$ **junto** com **todas as arestas incidentes em** $\boldsymbol{v_i}$ de *G*

- Exemplo:

*G*




$G - v_0$




  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V( G - v_0 ) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E( G - v_0 ) = \{ \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

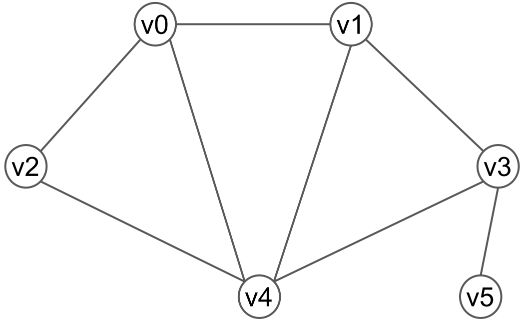
# Remoção de vértices

- Dado um grafo $G$ e um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G - S$ o grafo obtido pela **remoção dos vértices** em $S$ **junto** com **todas as arestas incidentes nos vértices** em $S$ de $G$

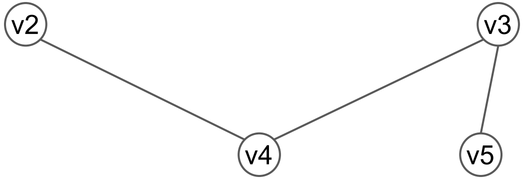
- Exemplo:

$S = \{ v_0, v_1 \}$

$G$




$G - S$

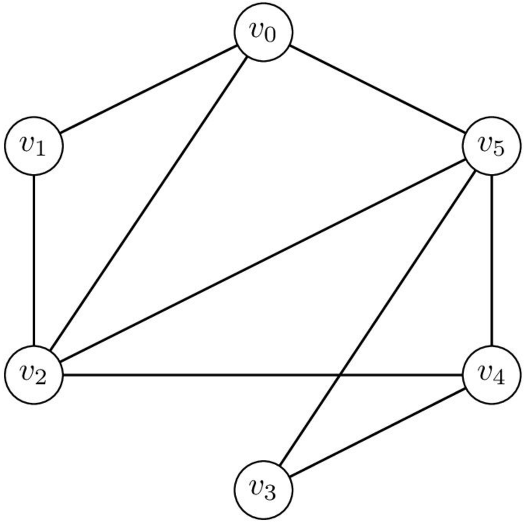



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V( G - S ) = \{ v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E( G - S ) = \{ \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

# Exercícios

4. Considere o grafo *G* ao lado e responda ao seguinte:
   a. Selecione um vértice *u* de grau mínimo de *G*. A remoção de *u* de *G* aumenta o grau mínimo de *G*?
   b. Selecione um vértice *u* de grau máximo de *G*. A remoção de *u* de *G* diminui o grau máximo de *G*?

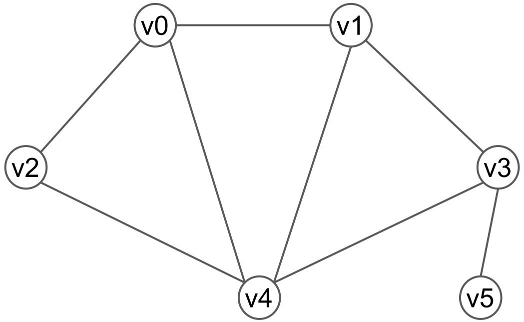


# Conexidade

- Um grafo *G* é **conexo** se, para todo par de vértices $v_i$ , $v_j$ de *G*, existe um caminho em *G* entre $v_i$ e $v_j$ (ou seja, um caminho em *G* cujos extremos são $v_i$ e $v_j$ ); *G* é **desconexo** caso contrário

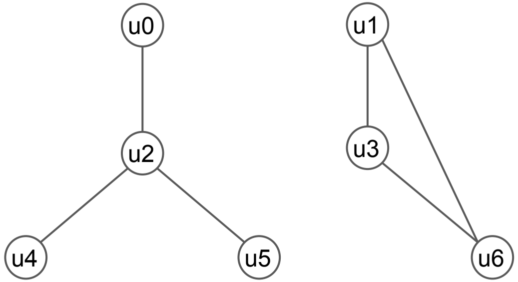
- Exemplo:

$G_1$




Grafo conexo

$G_2$



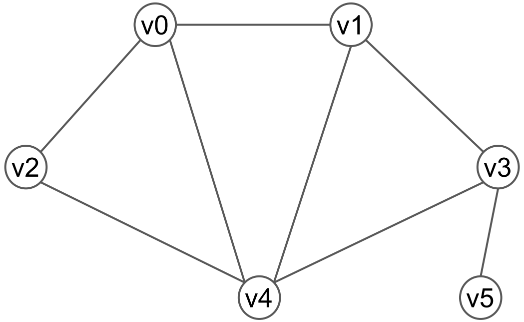

Grafo desconexo

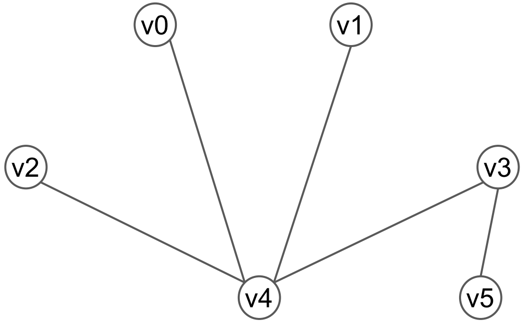
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo

- Exemplo:

*G*



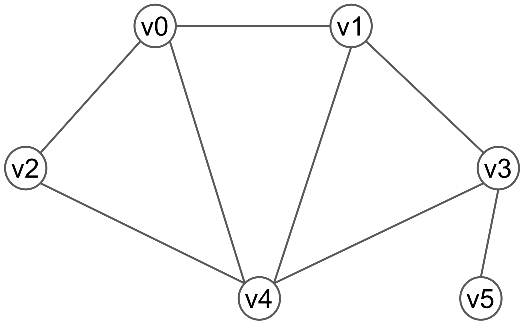

Subgrafo conexo

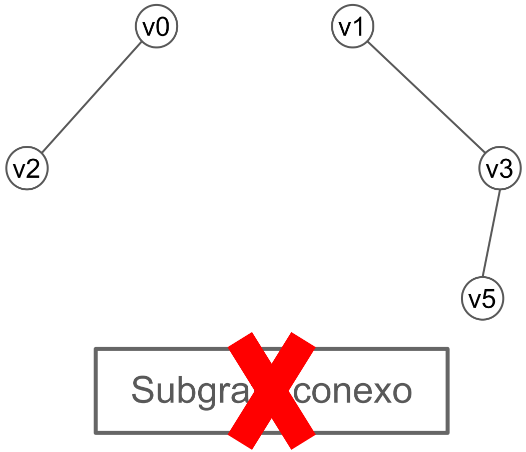
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo

- Exemplo:

*G*



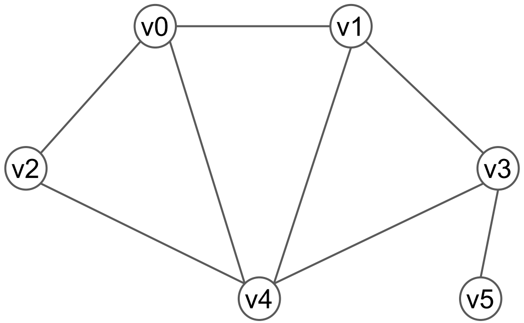



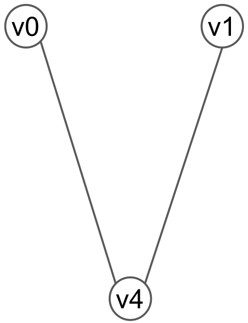
# Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo

- Exemplo:

*G*



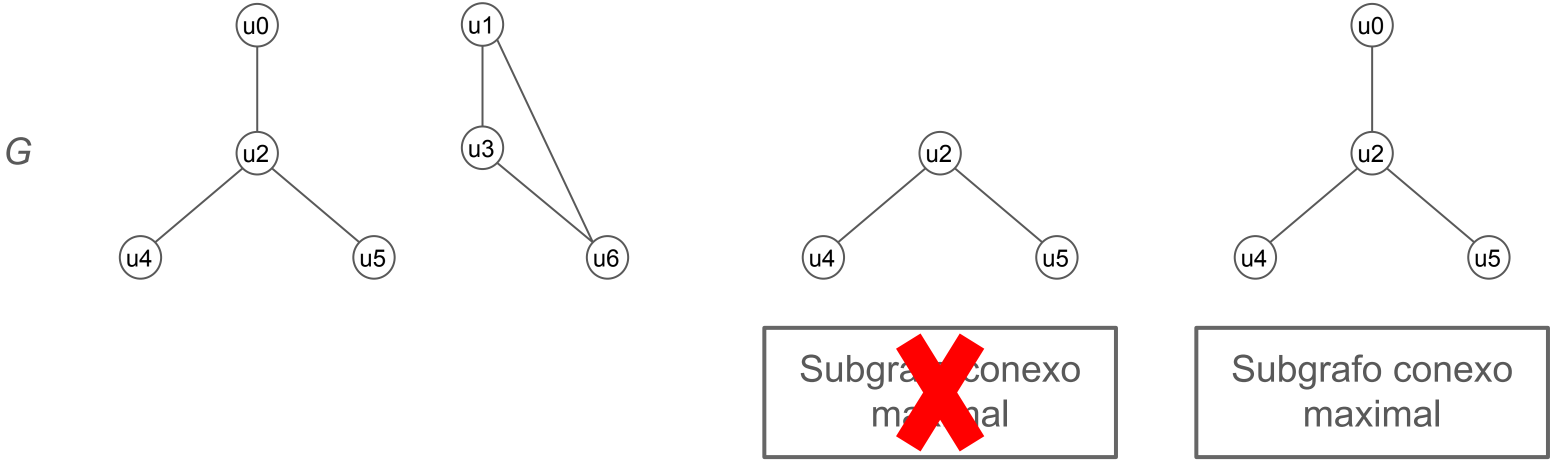




Subgrafo conexo

# Subgrafo conexo maximal

- Um **subgrafo conexo maximal** de um grafo *G* é um subgrafo conexo de *G* que não está contido em outro subgrafo conexo de *G*

- Exemplo:

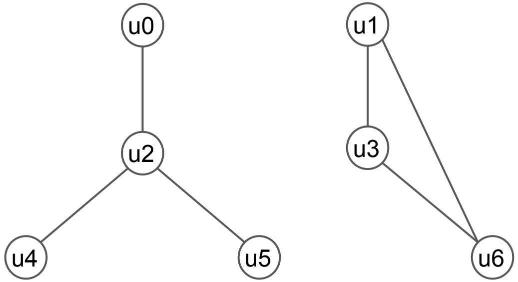


# Componentes conexas

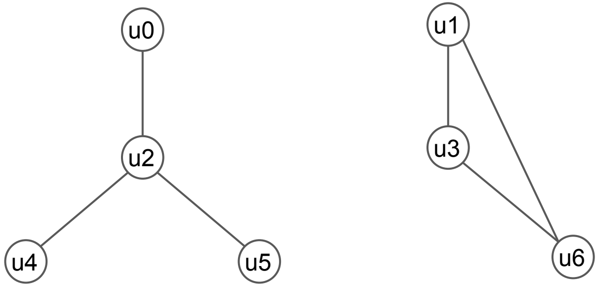
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo *G* são os subgrafos conexos maximais de *G*
- Denotamos por $c(G)$ o número de componentes conexas de *G*

- Exemplo:

*G*




Componentes conexas de *G*




$\boxed{c(G) = 2}$

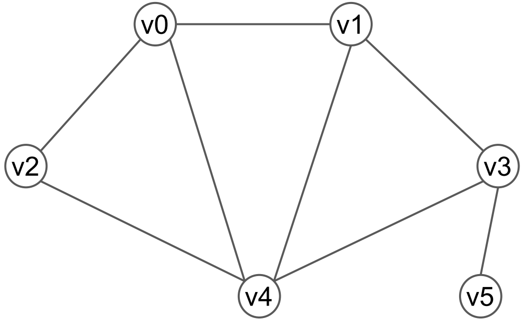
# Componentes conexas

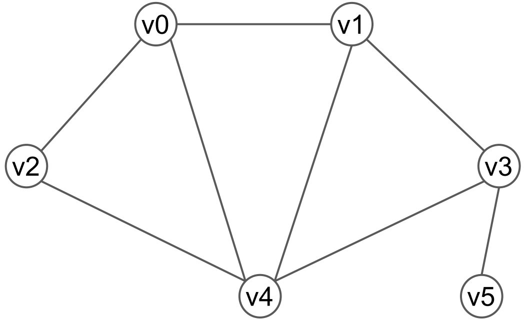
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo *G* são os subgrafos conexos maximais de *G*
- Denotamos por $c(G)$ o número de componentes conexas de *G*

- Exemplo:

Componentes conexas de *G*

*G*




$c(G) = 1$

# Componentes conexas

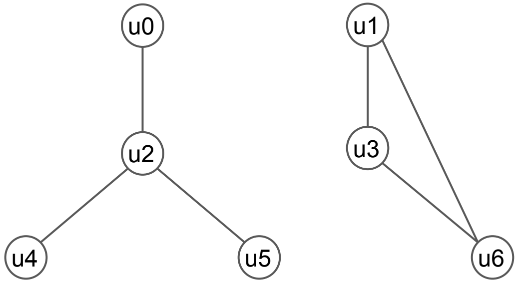
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo $G$ são os subgrafos conexos maximais de $G$
- Denotamos por $c(G)$ o número de componentes conexas de $G$

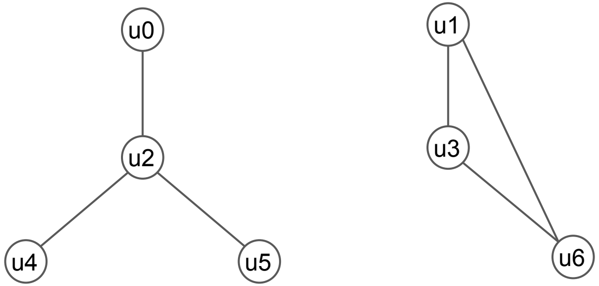
- Um **grafo conexo** (com pelo menos um vértice) tem exatamente **uma componente**

# Componentes conexas

- Observações:
  - Componentes conexas distintas **não** possuem vértices em comum
  - Ao adicionar uma aresta cujos extremos estejam em duas componentes conexas distintas, fazemos com que estas componentes **passem a ser uma só**
  - Dado um caminho $v_{i0}v_{i1}\dots v_{ik-1}v_{ik}$, todos os vértices $v_{i0}$, $v_{i1}$, …, $v_{ik-1}$, $v_{ik}$ pertencem à **mesma componente** conexa

*G*

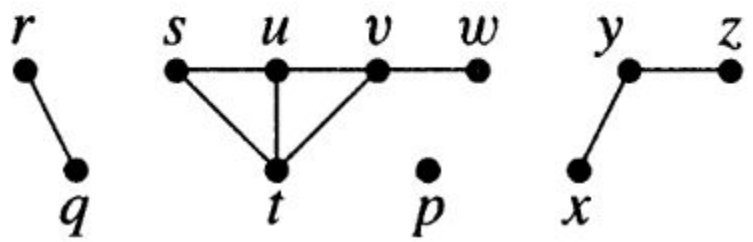



Componentes conexas de *G*

# Exercícios

5. Indique as componentes conexas do grafo abaixo.



# Exercícios

6. Considere um grafo $G$ que consiste exatamente em um caminho e que tem pelo menos 1 aresta. Suponha que uma aresta de $G$ foi removida. Prove que o grafo resultante possui 2 componentes conexas.

# Exercícios

7. Considere um grafo $G$ que consiste exatamente em um ciclo. Suponha que uma aresta de $G$ foi removida. Prove que o grafo resultante possui 1 componente conexa.

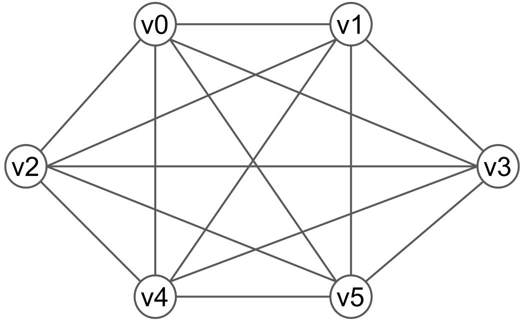
# Grafo completo

- Um grafo $G$ é **completo** se, para todo par de vértices $v_i$ , $v_j$ de $G$, existe uma **aresta** em $G$ entre $v_i$ e $v_j$

**Grafo completo ≠ Grafo conexo**

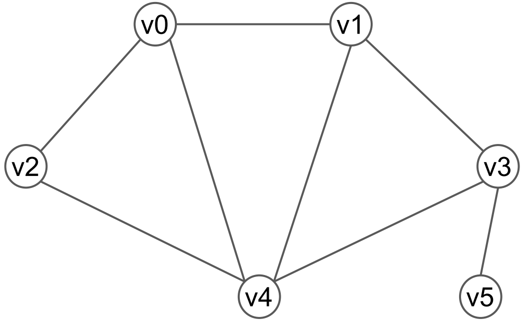
- Exemplo:

$G_1$




Grafo completo

$G_2$




Grafo completo

# Complemento de um grafo

- Dado um grafo $G$, o **complemento de** $\boldsymbol{G}$ é o grafo $\overline{G}$ tal que
  - $V(\overline{G}) = V(G)$ e
  - $v_i v_j \in E(\overline{G})$ se e somente se $v_i v_j \notin E(G)$

- Exemplo:

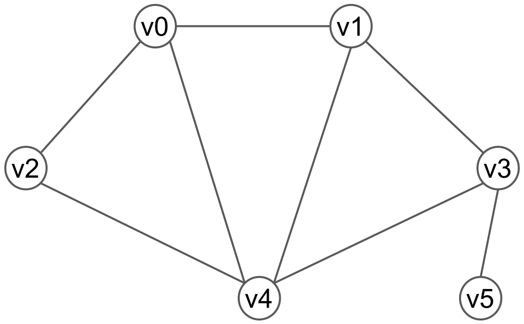
$G$ $\overline{G}$

# Clique

- Um conjunto de vértices $S$ de um grafo $G$ é uma **clique** se, para todo par de vértices $v_i$ , $v_j$ em $S$, existe uma aresta em $G$ entre $v_i$ e $v_j$

- Exemplo:

$G$




$S = \{ v_0, v_1, v_4 \}$

Clique

$S = \{ v_0, v_1, v_2, v_4 \}$

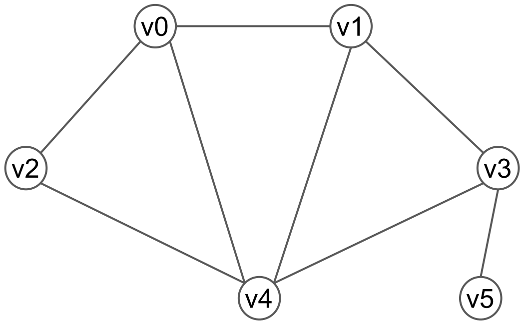
~~Clique~~

# Conjunto independente

- Um conjunto de vértices $S$ de um grafo $G$ é um **conjunto independente** se, para todo par de vértices $v_i$ , $v_j$ em $S$, **não** existe uma aresta em $G$ entre $v_i$ e $v_j$

- Exemplo:

$G$




$S = \{ v_1, v_2, v_5 \}$

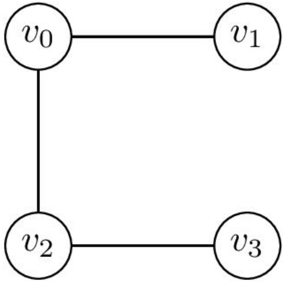
Conjunto independente

$S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

~~Conjunto independente~~

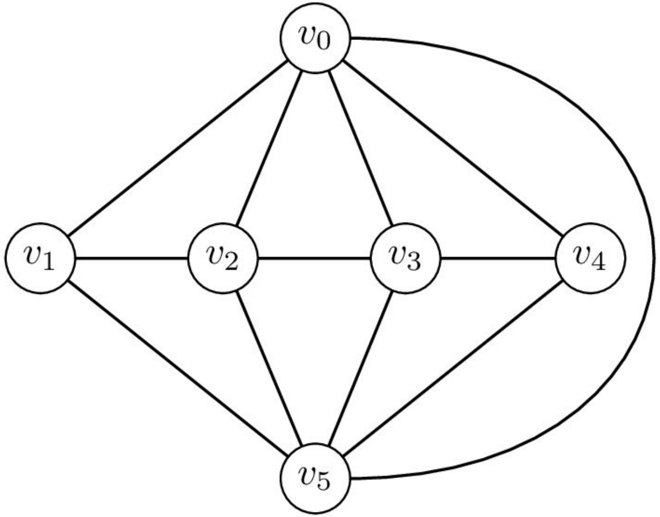
# Exercícios

8. Mostre que o grafo $G$ abaixo e o seu complemento $\overline{G}$ são isomorfos.



# Exercícios

9. Apresente uma clique de tamanho máximo e um conjunto independente de tamanho máximo do grafo abaixo.

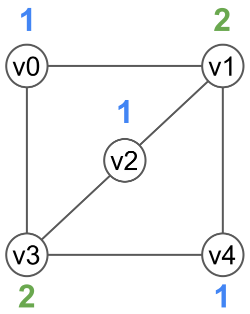


# Grafo bipartido

- Um grafo $G$ é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices $V_1$ e $V_2$ tal que $V_1$ e $V_2$ são conjuntos independentes

- Exemplo:

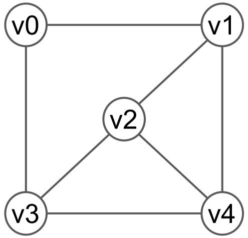
$G$




$V_1$ = { v0, v2, v4 } é um conjunto independente
$V_2$ = { v1, v3 } é um conjunto independente

Grafo bipartido

$G$




Não é possível particionar $V(G)$ em dois conjuntos independentes $V_1$ e $V_2$

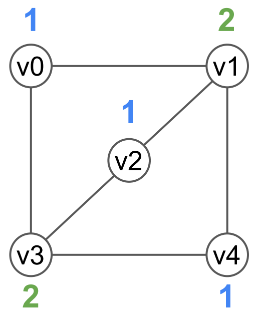
~~Grafo bipartido~~

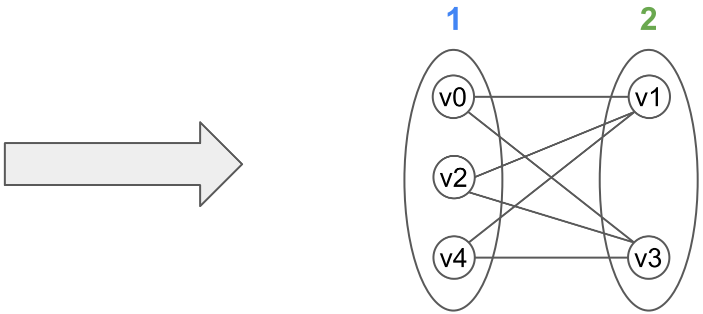
# Grafo bipartido

- Um grafo $G$ é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices $V_1$ e $V_2$ tal que $V_1$ e $V_2$ são conjuntos independentes

- Exemplo:

$G$



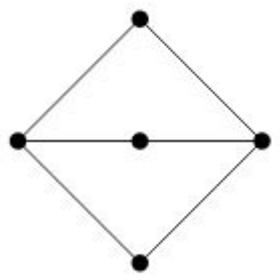



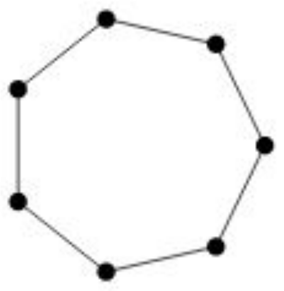

$V_1$ = { v0, v2, v4 } é um conjunto independente
$V_2$ = { v1, v3 } é um conjunto independente

Grafo bipartido

# Exercícios

10. Para cada grafo abaixo, diga se o grafo é bipartido ou não.





# Exercícios

11. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo $G$ ao lado:

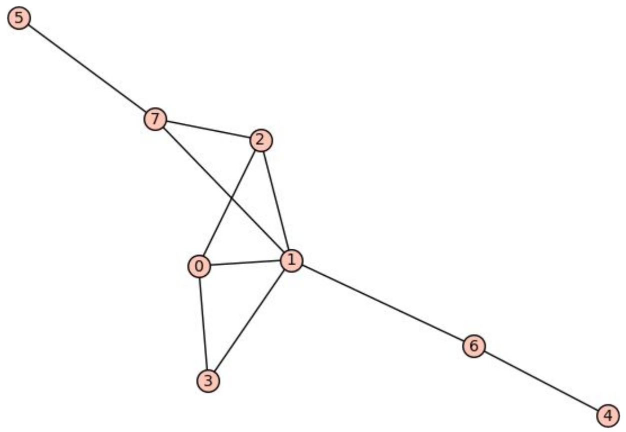
    a. O grafo $H$ tal que $V(H) = \{ 1, 2, 5, 7 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 7 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 5, 7 \} \}$ é um subgrafo de $G$.

    b. O grafo $H$ tal que $V(H) = \varnothing$ e $E(H) = \varnothing$, é um subgrafo de $G$.

    c. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 2, 5, 6 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 5 \}, \{ 2, 6 \} \}$ é um subgrafo de $G$.

    *d.* O grafo $G - 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de $G$) tem 7 arestas.

    e. O grafo $G - 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de $G$) é desconexo.



# Exercícios

12. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo $G$ ao lado:

    a. O grafo $H$ tal que $V(H) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ e $E(H) = \{ \{ 0, 4 \}, \{ 0, 5 \}, \{ 2, 7 \}, \{ 1, 7 \}, \{ 6, 7 \} \}$ é um subgrafo gerador de $G$.

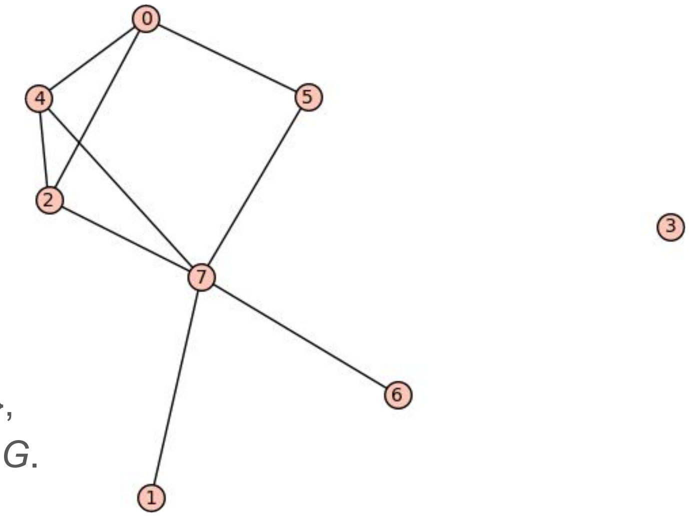
    b. O grafo $H$ do item anterior tem 3 componentes conexas.

    c. $G$ é um grafo conexo.

    d. O grafo $H$ tal que $V(H) = \{ 0, 2, 4 \}$ e $E(H) = \{ \{ 0, 2 \}, \{ 0, 4 \}, \{ 2, 4 \} \}$ é um subgrafo conexo maximal de $G$.

    e. O grafo $H$ tal que $V(H) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ e $E(H) = \varnothing$ é um subgrafo gerador de $G$.

    f. Se a aresta $\{ 1, 3 \}$ existisse em $G$, então $G$ seria conexo.



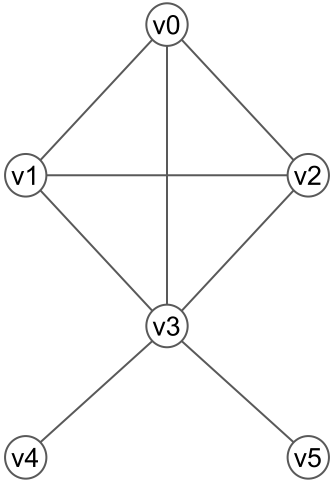
# Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina
- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:


1. Livro
   Feofiloff, P. Exercícios de Teoria dos Grafos. 2013. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf

# Exercícios – Solução

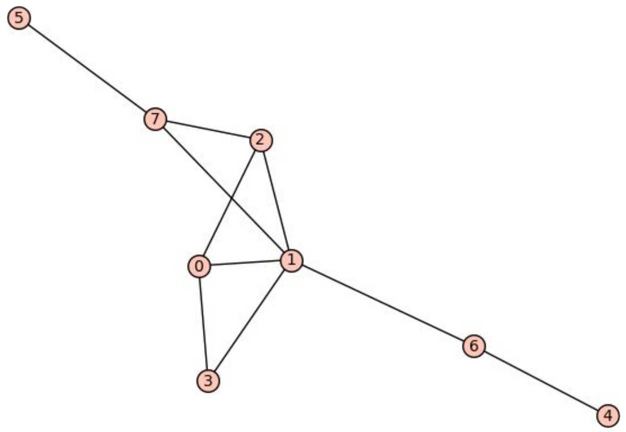
3. Determine um subconjunto de vértices *S* do grafo *G* abaixo tal que o subgrafo induzido *G*[*S*] possua 4 arestas.




**Solução**: Qualquer subconjunto *S* formado por v3, 2 vértices entre v0, v1 e v2 e 1 vértice entre v4 e v5.

# Exercícios – Solução

11. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo $G$ ao lado:
    a. O grafo $H$ tal que $V(H) = \{ 1, 2, 5, 7 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 7 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 5, 7 \} \}$ é um subgrafo de $G$.
    b. O grafo $H$ tal que $V(H) = \varnothing$ e $E(H) = \varnothing$, é um subgrafo de $G$.
    c. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 2, 5, 6 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 5 \}, \{ 2, 6 \} \}$ é um subgrafo de $G$.
    *d.* O grafo $G – 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de $G$) tem 7 arestas.
    e. O grafo $G – 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de $G$) é desconexo.




**Solução**: As afirmações *a*, *b*, e *d* são todas as afirmações corretas.

# Exercícios – Solução

12. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:

    a. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e *E*(*H*) = { { 0, 4 }, { 0, 5 }, { 2, 7 }, { 1, 7 }, { 6, 7 } } é um subgrafo gerador de *G*.

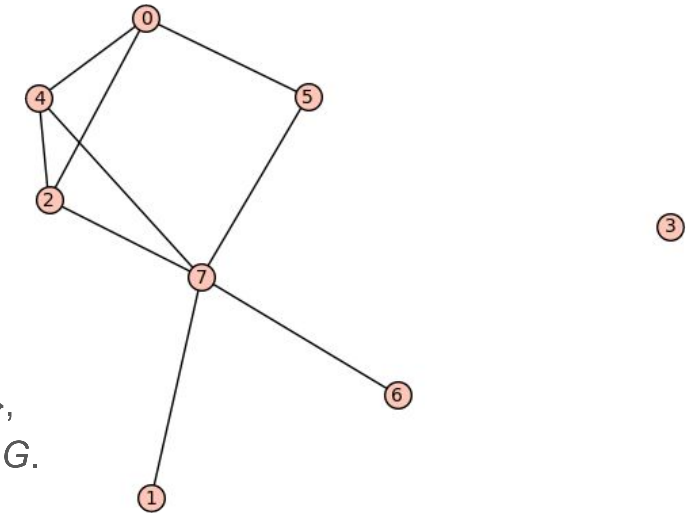
    b. O grafo *H* do item anterior tem 3 componentes conexas.

    c. *G* é um grafo conexo.

    d. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 2, 4 } e *E*(*H*) = { { 0, 2 }, { 0, 4 }, { 2, 4 } } é um subgrafo conexo maximal de *G*.

    *e.* O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e *E*(*H*) = ∅ é um subgrafo gerador de *G*.

    f. Se a aresta { 1, 3 } existisse em *G*, então *G* seria conexo.




**Solução**: As afirmações *a*, *b*, *e* e *f* são todas as afirmações corretas.