# Fluxo Máximo

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

# Conteúdo

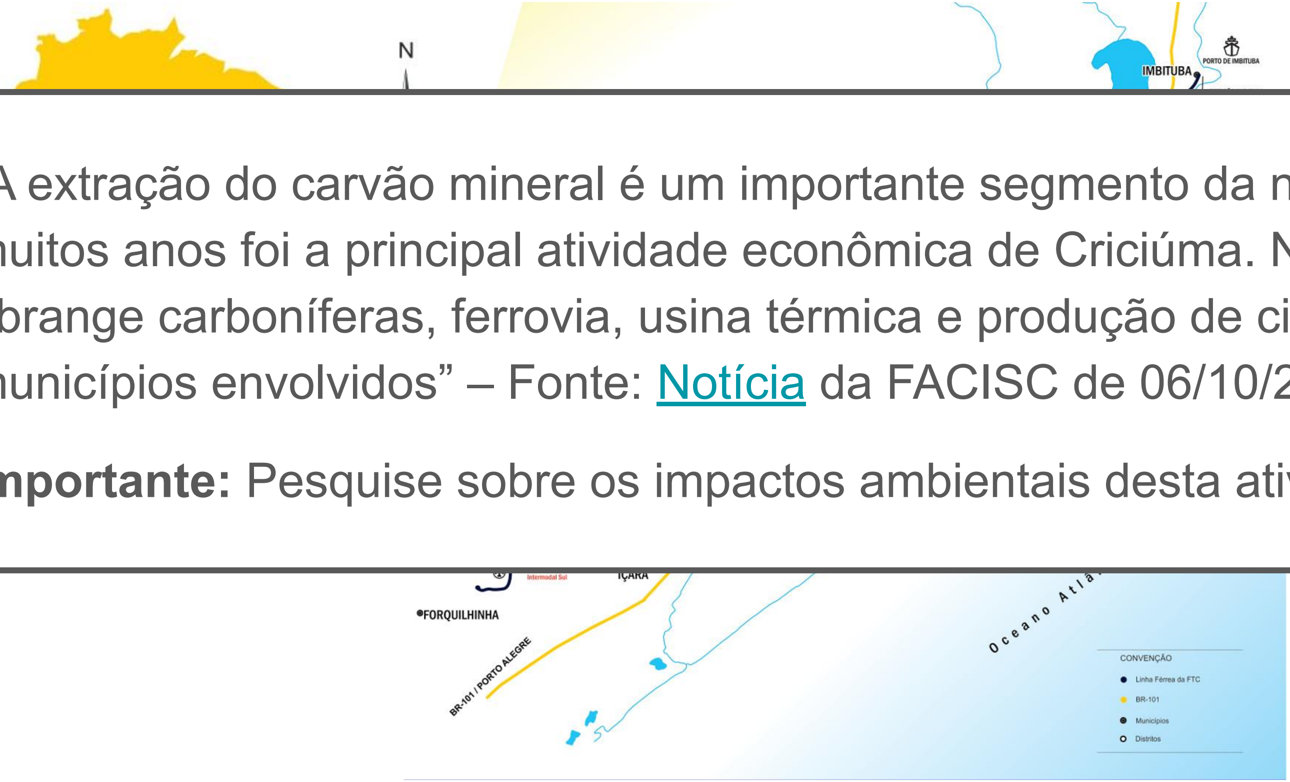
- Problema motivador
- Modelagem com grafos
- Problema do fluxo máximo
- Método de Ford-Fulkerson
- Exercícios
- Referências

# Carvão mineral



Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral




"A extração do carvão mineral é um importante segmento da nossa economia, por muitos anos foi a principal atividade econômica de Criciúma. No Sul catarinense, abrange carboníferas, ferrovia, usina térmica e produção de cimento. São 15 municípios envolvidos" – Fonte: Notícia da FACISC de 06/10/2021

**Importante:** Pesquise sobre os impactos ambientais desta atividade econômica

Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral

Extração

Transporte

Utilização

Imagens – Fonte: [Notícia] da Agência AL de 05/04/2013

# Carvão mineral

Extração

Transporte

Utilização

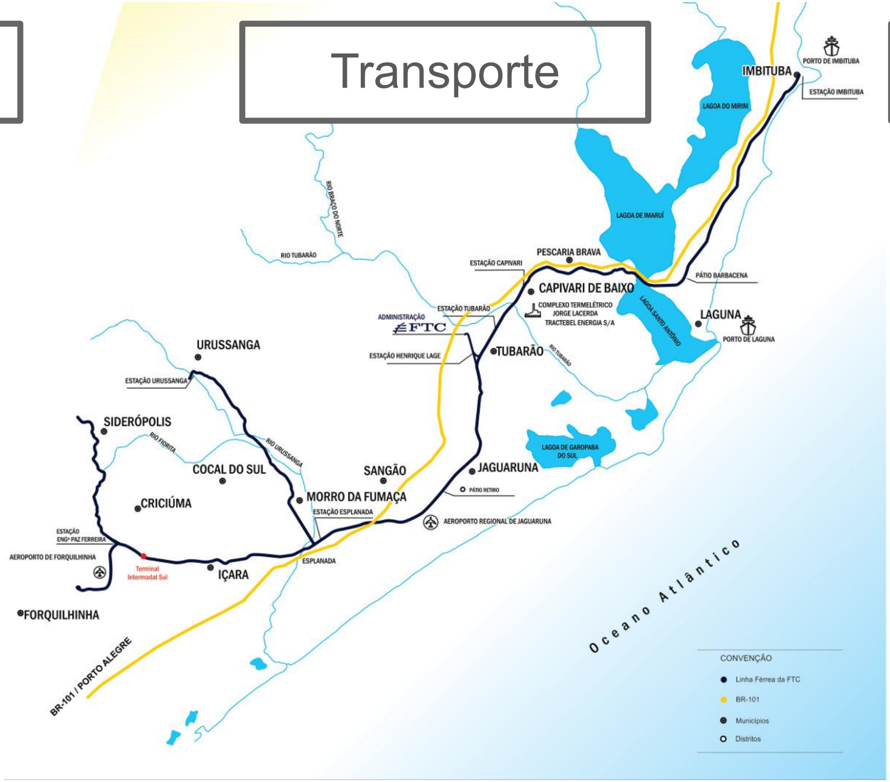
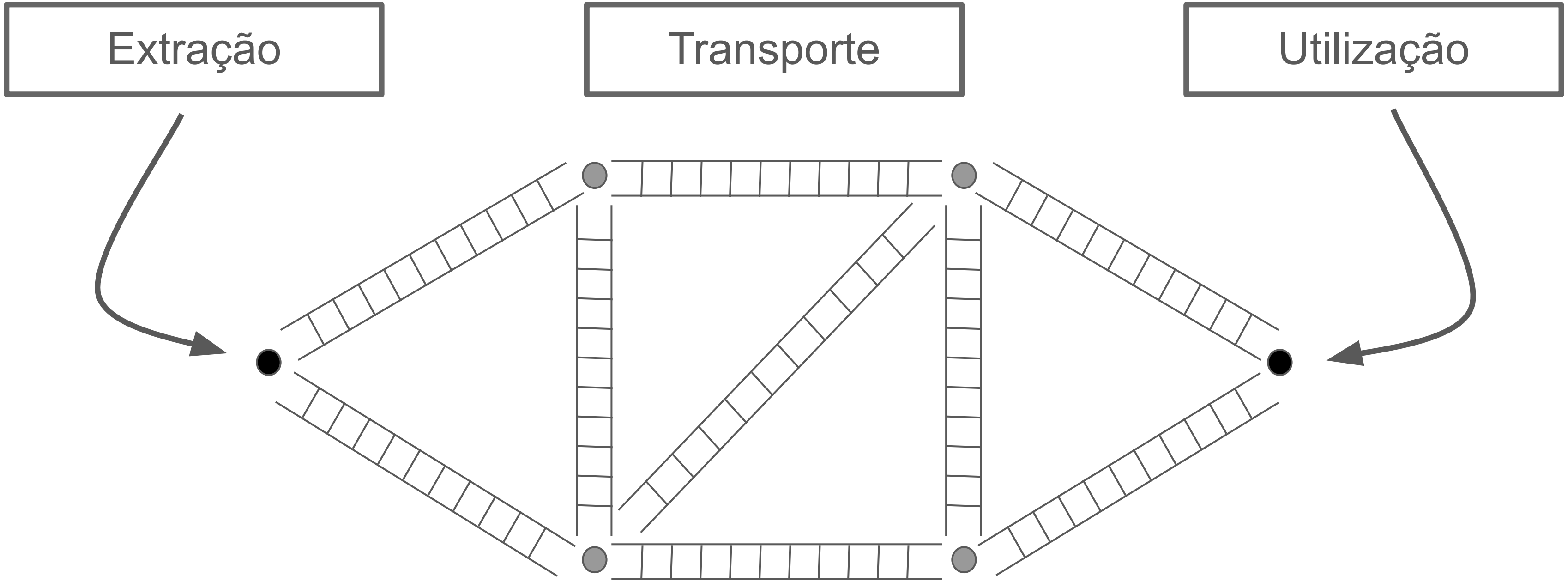
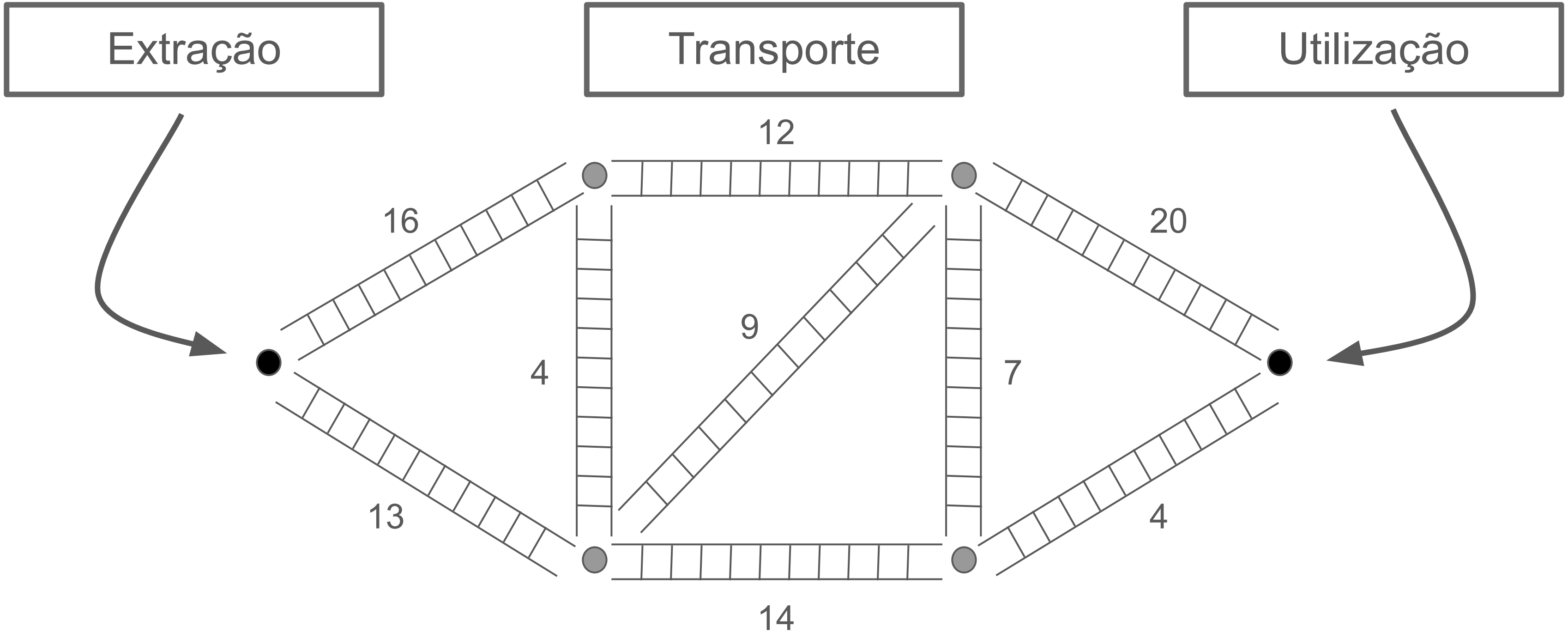



Imagem: FTC, CC0, via Wikimedia Commons

# Carvão mineral

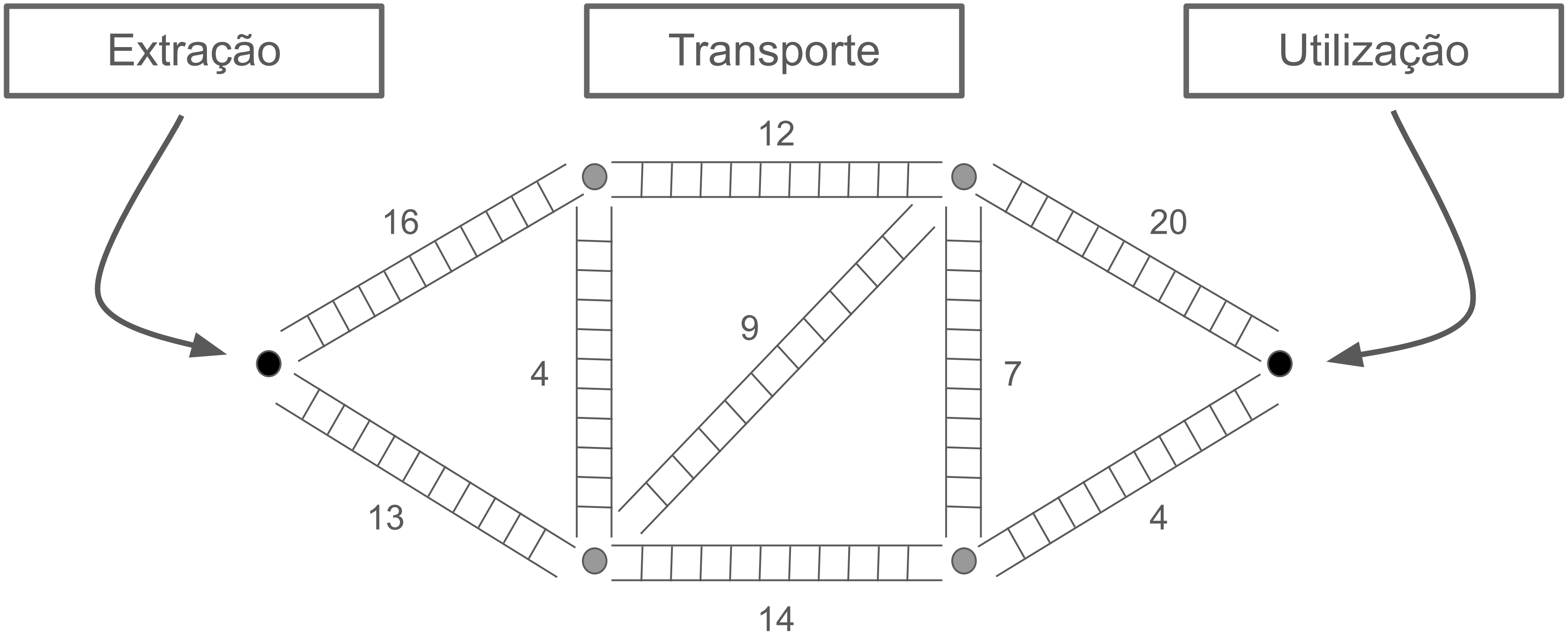


# Carvão mineral



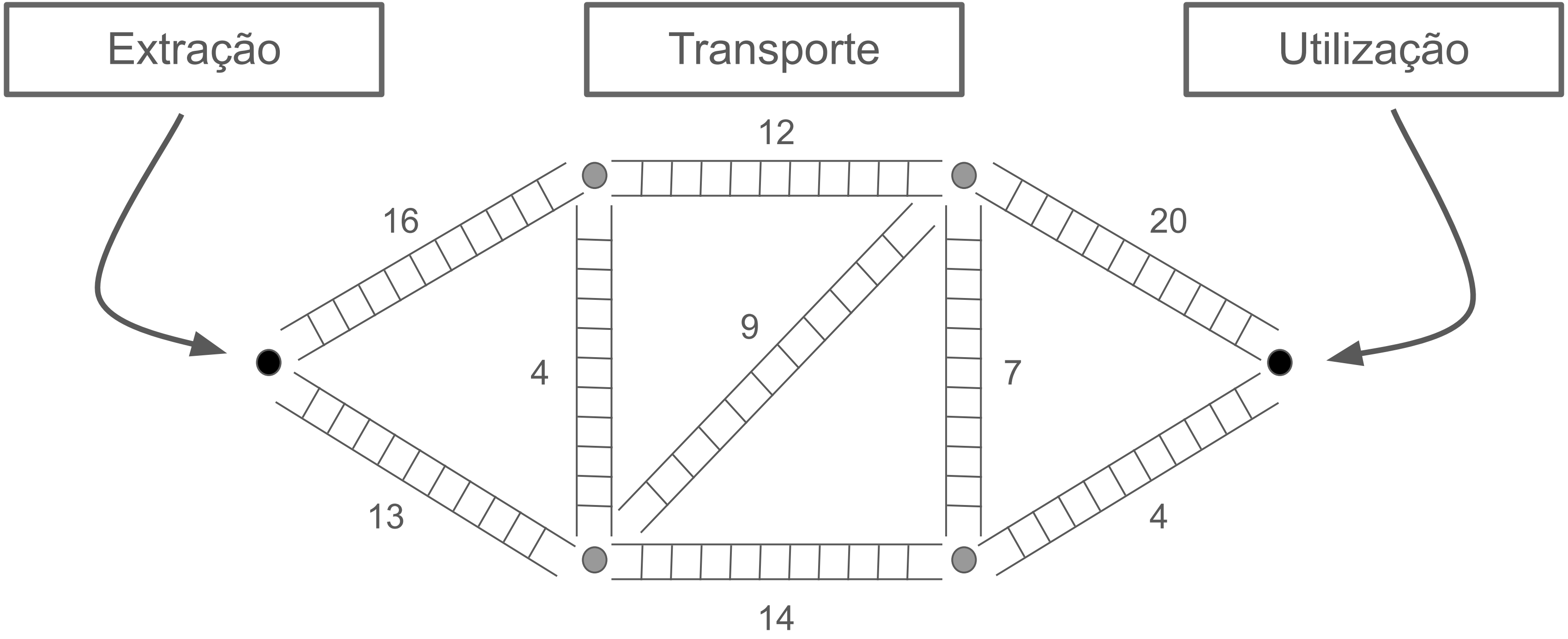

Capacidades diárias de carga das vias

# Carvão mineral



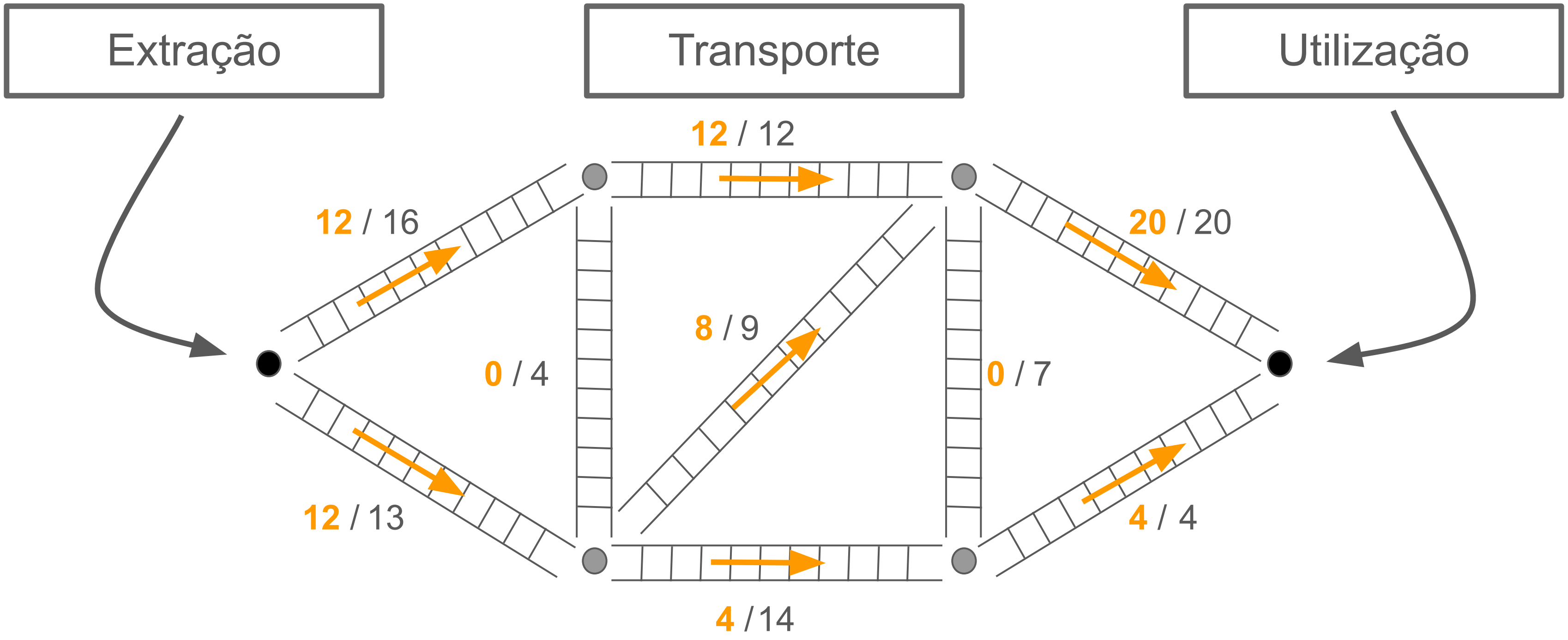

Em um entreposto ● , não ocorre nem adição, nem subtração de carga

# Carvão mineral - Problema



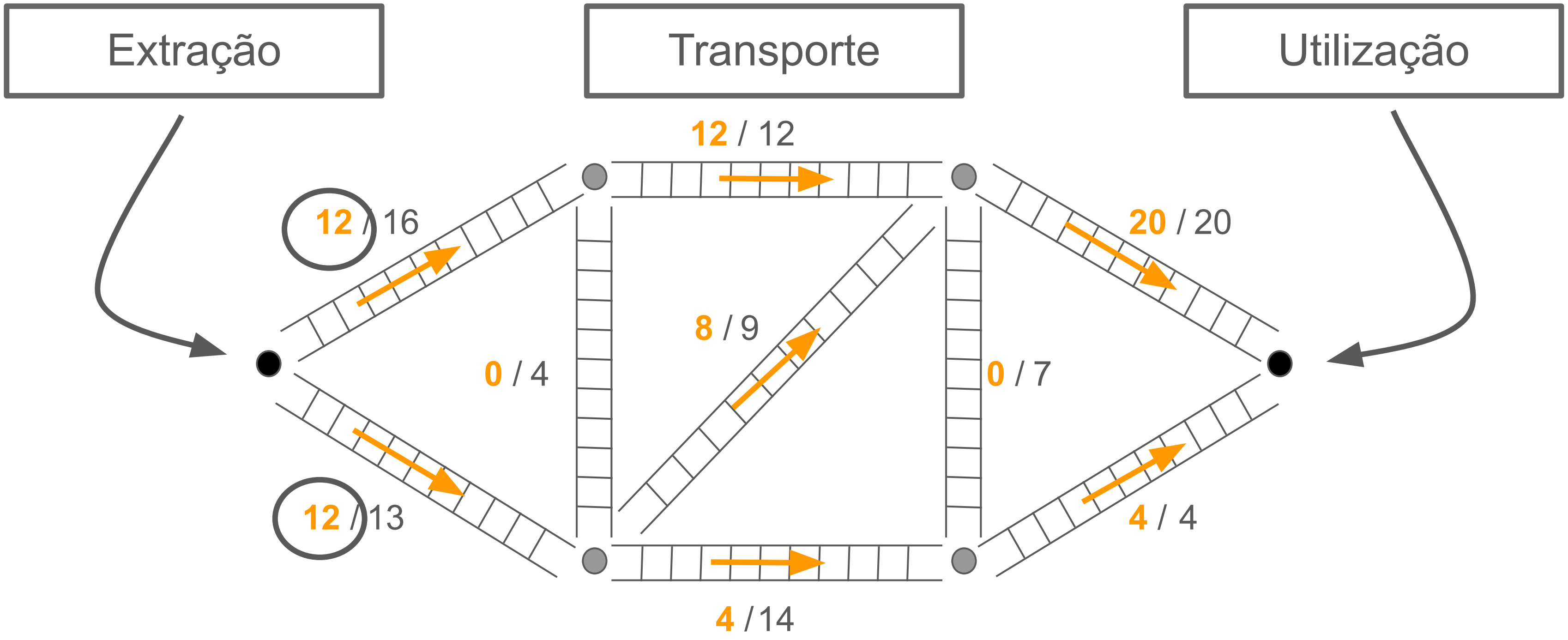

**Problema:** Qual é a maior quantidade diária de carga que podemos enviar do ponto de extração para o ponto de utilização?

# Carvão mineral - Problema



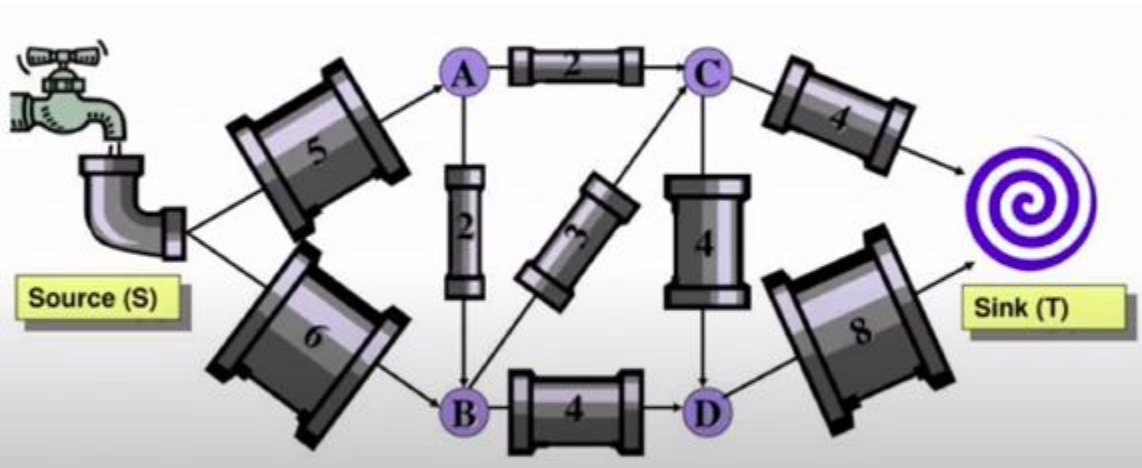

**Envios** que resultam na maior quantidade diária de carga possível de ser enviada do ponto de extração para o ponto de utilização

# Carvão mineral - Problema




É 24 (12 + 12) a maior quantidade diária de carga possível de ser enviada do ponto de extração para o ponto de utilização

# Rede por onde um material flui




The diagram above shows water flowing through a pipework system.

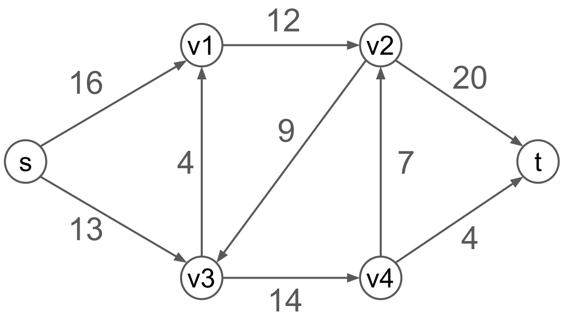
The values on the pipes are the *capacities* of water that they can carry.

# Rede de fluxo

Nas redes de fluxo que nos interessa estudar, *s* será **de fato** uma **fonte** (o grau de entrada de *s* será 0) e *f* será **de fato** um **sorvedouro** (o grau de saída de *t* será 0)

- Uma **rede de fluxo** é um grafo dirigido (digrafo) *G*
  - que possui pesos não-negativos nas arestas e
  - que tem um vértice *s* chamado de fonte e um vértice $t \neq s$ chamado de sorvedouro
- Em uma rede de fluxo *G*, dizemos que o peso de uma aresta *uv* é a sua **capacidade**, que denotamos por *c*(*uv*)

- Exemplo:

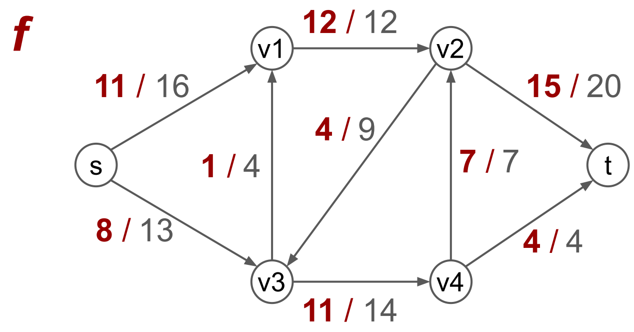



Esta rede **é diferente** da rede de vias do exemplo do **carvão mineral** (isto, por causa das direções das arestas)

# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f$ satisfaça a algumas condições

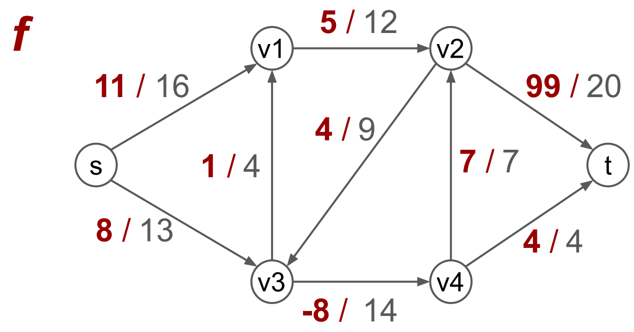
- Exemplo de $f$: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$:



# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f$ satisfaça a algumas condições

- Exemplo de $f$: $E(G) \rightarrow \mathbb{R}$:



# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$;
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$

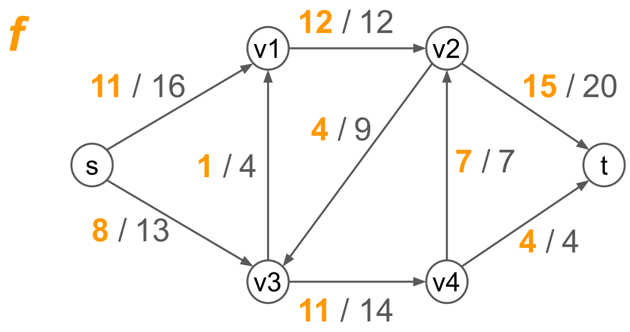
Um fluxo respeita as capacidades das arestas
(restrição de capacidade)

Para cada vértice diferente de $s$ e $t$, o **fluxo que entra** no vértice é **igual** ao **fluxo que sai** do vértice
(conservação de fluxo)

# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$;
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$

- Exemplo:

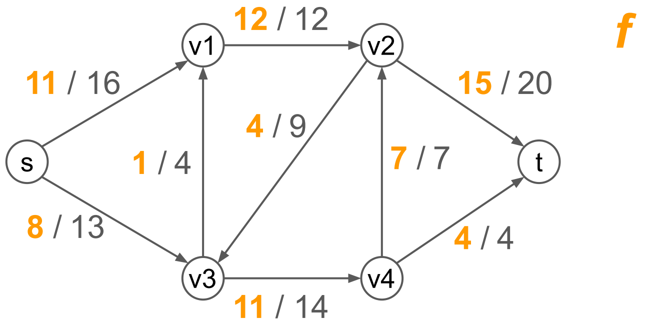


# Fluxo

- Dada uma rede de fluxo $G$, um **fluxo** em $G$ é uma função $f$: $E(G) \to \mathbb{R}$ tal que
  - $0 \leq f(uv) \leq c(uv)$, para toda aresta $uv$ de $G$;
  - $\sum_{v \in N^-(u)} f(vu) = \sum_{v \in N^+(u)} f(uv)$, para todo vértice $u$ de $G$ diferente de $s$ e $t$
- Dizemos que $f(uv)$ é o **fluxo na aresta** $uv$
- O **valor do fluxo** $f$, denotado por $|\, f \,|$ é dado por

  $$|\, f \,| = \sum_{v \in N^+(s)} f(sv) - \sum_{v \in N^-(s)} f(vs)$$

- Exemplo:



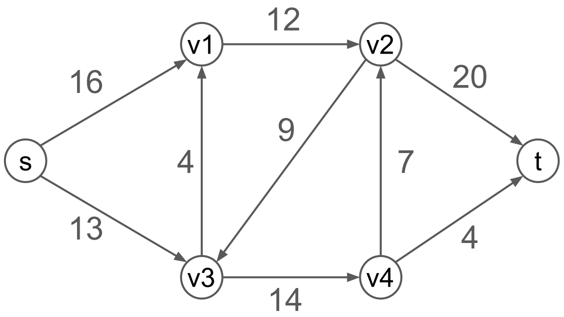

Valor de $f$: 11 + 8 = 19

# Problema do fluxo máximo

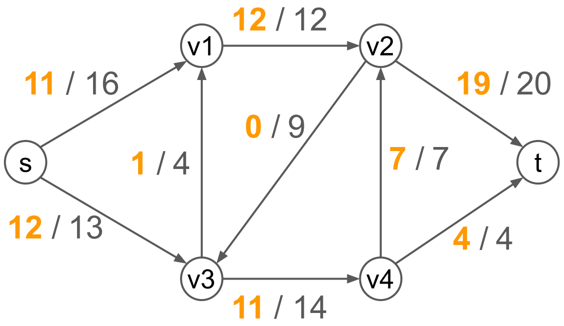
- Dada uma rede de fluxo *G*, encontre um fluxo *f* em *G* de valor máximo

- Exemplo:

*G*




***f*** é um fluxo em *G*
de valor máximo




Esta rede **é diferente** da rede de vias do exemplo do **carvão mineral** (isto, por causa das direções das arestas)

Valor de ***f***: 11 + 12 = 23

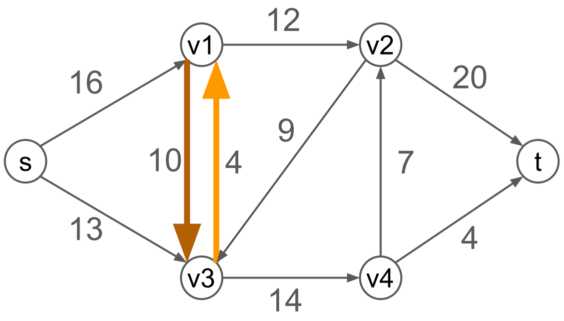
# Problema do fluxo máximo

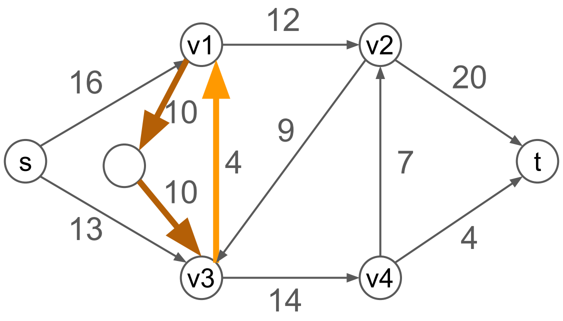
- Dada uma rede de fluxo *G*, encontre um fluxo *f* em *G* de valor máximo

- Podemos resolver este problema usando o **método de Ford-Fulkerson**
- Este método, porém, requer que uma transformação seja feita na rede de fluxo recebida como entrada

# Eliminação de ciclos de comprimento 2

- O método de Ford-Fulkerson requer que a rede de fluxo recebida como entrada **não contenha ciclos de comprimento 2**
- Isto não representa uma restrição importante, pois podemos facilmente eliminar ciclos de comprimento 2 de uma rede de fluxo
- Eliminação de ciclos de comprimento 2:



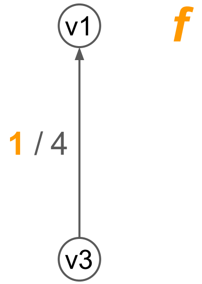
# Rede residual

- O método de Ford-Fulkerson usa o conceito de rede residual, visto a seguir

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$

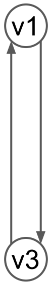
# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

$G_f$ contém $v_3v_1$ porque
$c(v_3v_1) - f(v_3v_1) = 3 > 0$

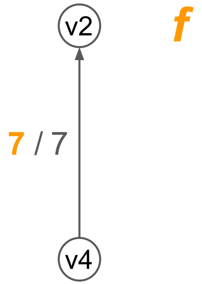



$G_f$ contém $v_1v_3$ porque
$f(v_3v_1) = 1 > 0$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$, é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

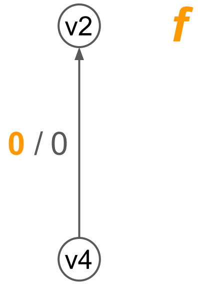
$G_f$ **não** contém $v_4v_2$ porque
$c(v_4v_2) - f(v_4v_2) = 0$


$G_f$ contém $v_2v_4$ porque
$f(v_4v_2) = 7 > 0$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$ , é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
- Exemplo:




aresta de $G$

$G_f$ **não** contém $v_4v_2$ porque $c(v_4v_2) - f(v_4v_2) = 0$

$G_f$ **não** contém $v_2v_4$ porque $f(v_4v_2) = 0$

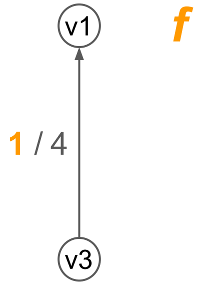

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo $G$ e um fluxo $f$ em $G$, a **rede residual** de $G$ induzida por $f$, denotada por $G_f$ , é a rede de fluxo tal que
  - os vértices de $G_f$ são iguais aos vértices de $G$ (ou seja, $V(G_f) = V(G)$) e
  - para cada aresta $uv$ de $G$,
    - $G_f$ contém a aresta $uv$ se $c(uv) - f(uv) > 0$ e
    - $G_f$ contém a aresta $vu$ se $f(uv) > 0$
  - No primeiro caso acima, $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $uv$ em $G_f$ e, no segundo caso acima, $c_f(vu) = f(uv)$ é a **capacidade da aresta** $vu$ em $G_f$

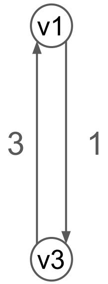
# Rede residual

- Dados uma rede de fluxo *G* e um fluxo *f* em *G*, a **rede residual** de *G* induzida por *f*, denotada por $G_f$ , é a rede de fluxo tal que
  - $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$ é a **capacidade da aresta** *uv* em $G_f$ e
  - $c_f(vu) = f(uv)$ é a **capacidade da aresta** *vu* em $G_f$
- Exemplo:




aresta de *G*

$c_f(v_3v_1) = 3$

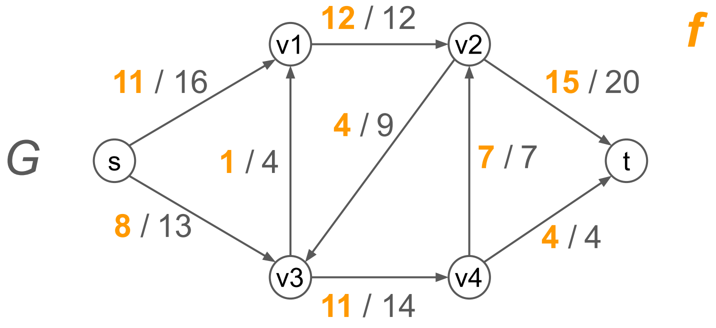


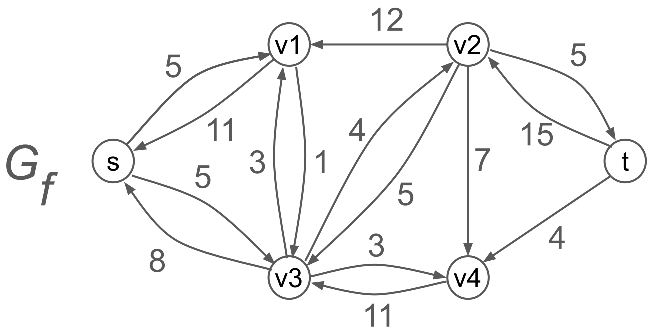

$c_f(v_1v_3) = 1$

arestas correspondentes de $G_f$

# Rede residual

- Exemplo de rede residual:



# Método de Ford-Fulkerson

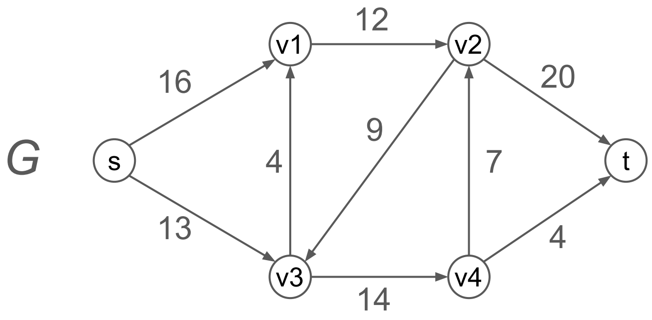
$G$ é uma rede de fluxo que não contém ciclos de comprimento 2

Ford-Fulkerson($G$)

1. Inicialize $f$ fazendo $f(uv) = 0$ para cada aresta $uv$ de $G$
2. Enquanto existe um $st$-caminho $P$ na rede residual $G_f$, faça:
3. Determine $d$ sendo $d$ a menor capacidade de uma aresta de $P$ na rede residual $G_f$ – ou seja, $d = \min\{ c_f(uv) : uv$ é uma aresta de $P \}$
4. Atualize $f$ fazendo o seguinte para cada aresta $uv$ de $P$ :
5. Se a aresta $uv$ existe em $G$:
6. $f(uv) = f(uv) + d$
7. Senão: // neste caso, a aresta $vu$ existe em $G$
8. $f(vu) = f(vu) - d$
9. Retorne $f$

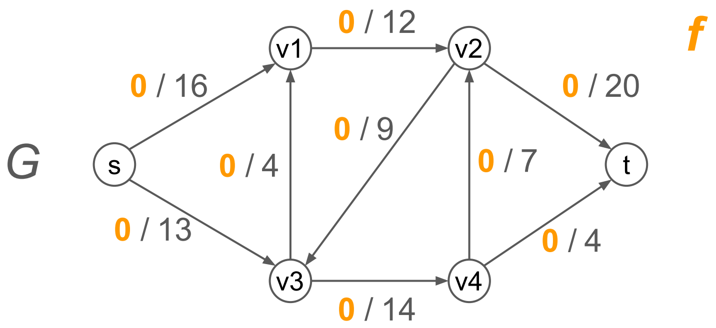
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- Rede de fluxo recebida como entrada:



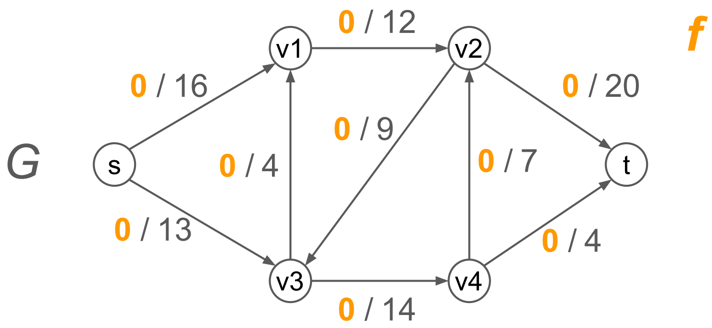
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

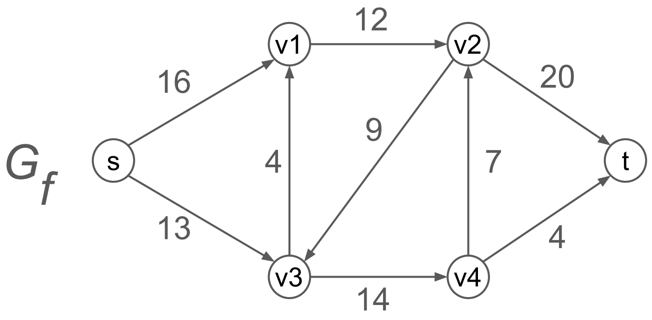
- Passo 1:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

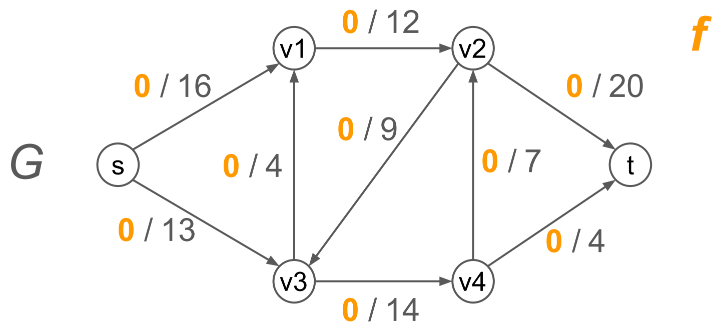
- 1ª. execução dos passos 2 e 3:

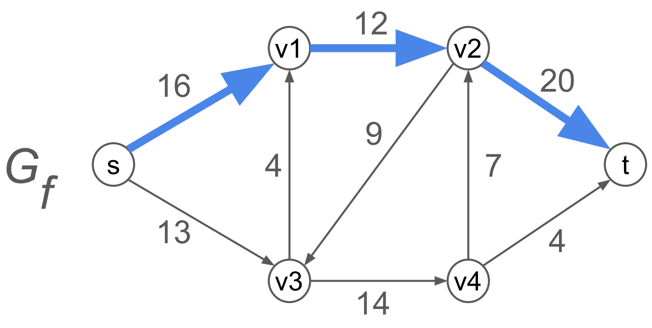


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 1ª. execução dos passos 2 e 3:



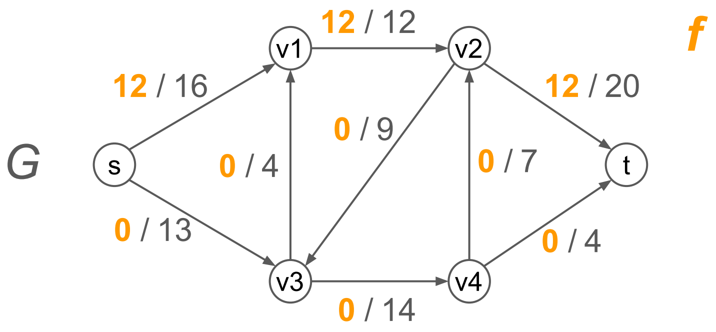




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 12

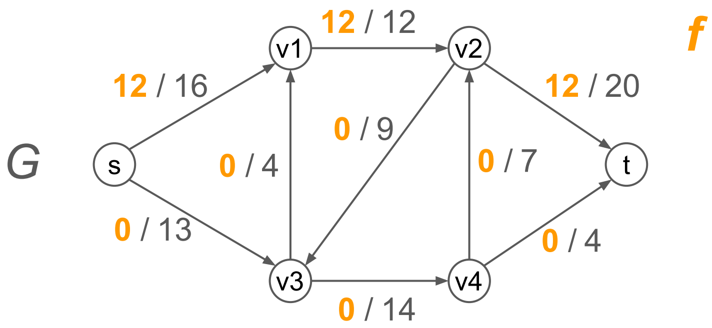
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

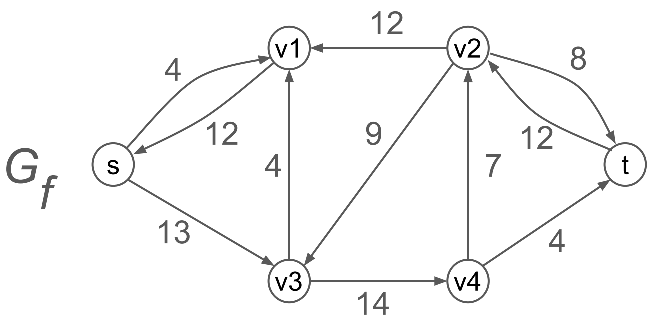
- 1ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

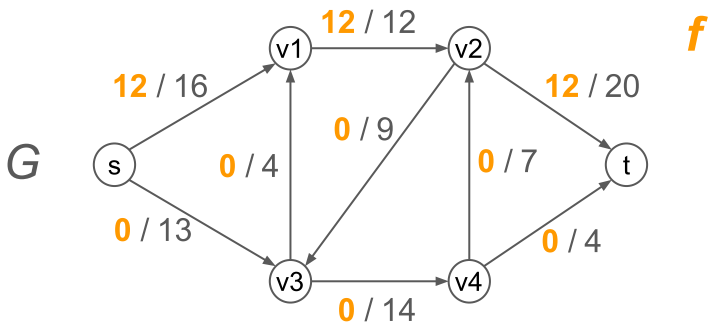
- 2ª. execução dos passos 2 e 3:

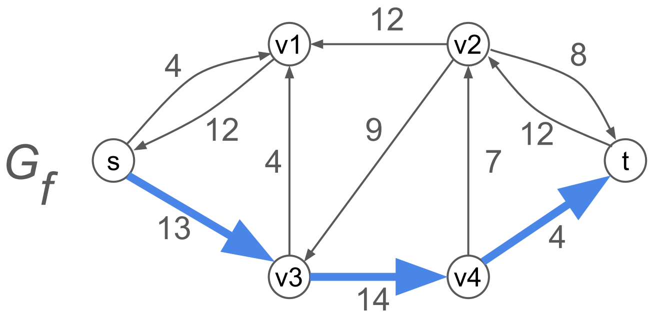


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 2ª. execução dos passos 2 e 3:



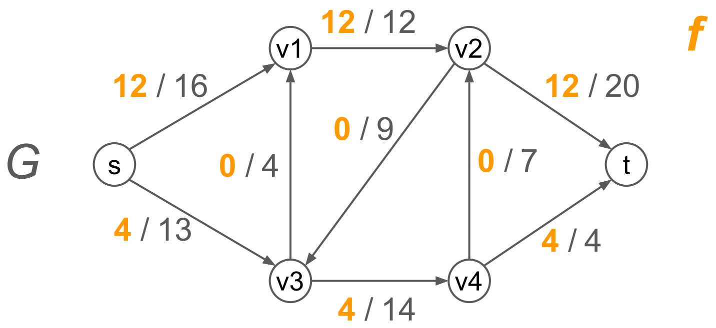




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

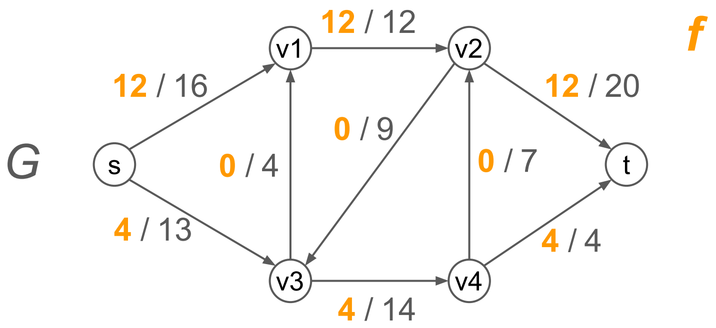
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

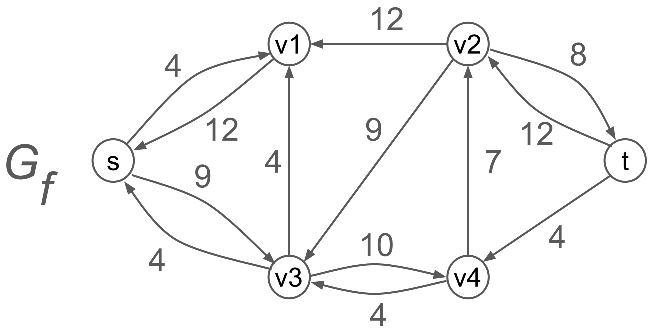
- 2ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

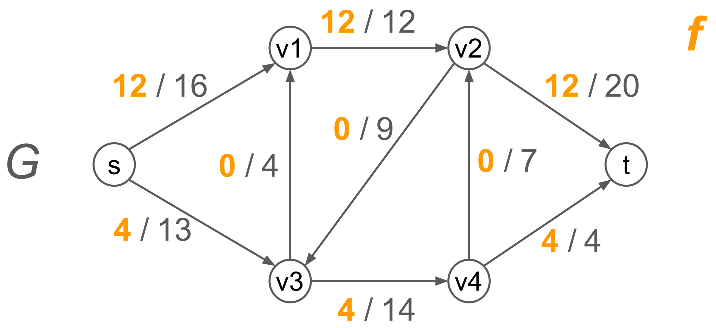
- 3ª. execução dos passos 2 e 3:

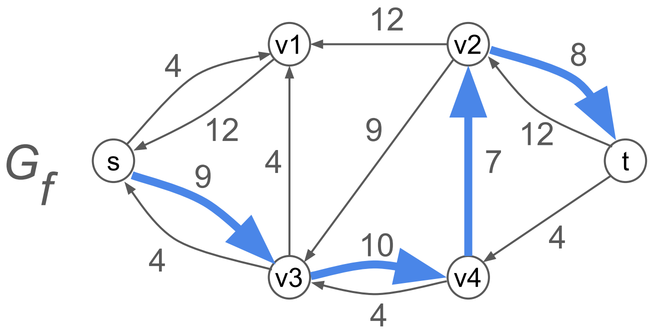


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 3ª. execução dos passos 2 e 3:



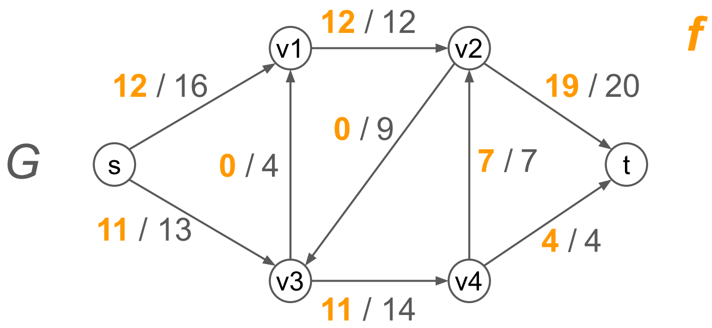




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 7

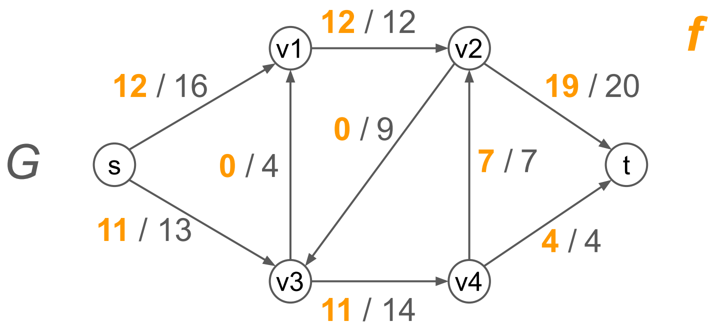
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

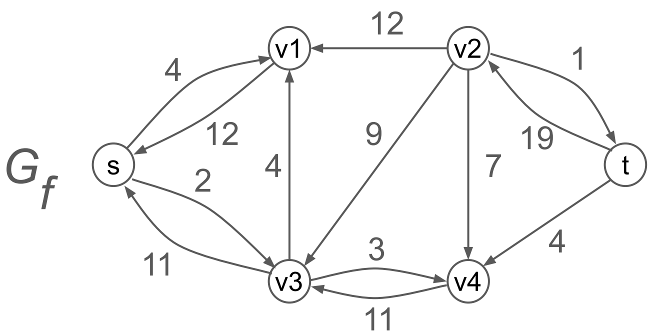
- 3ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

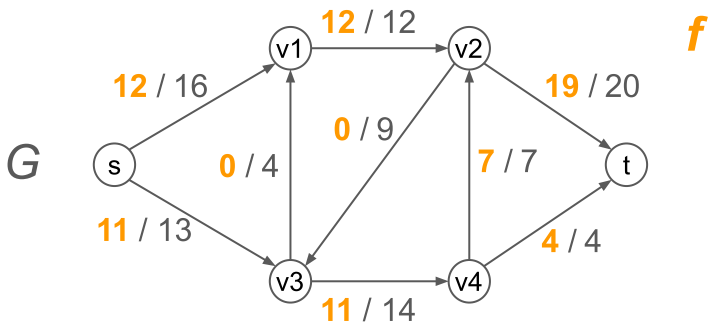
- 4ª. execução do passo 2:

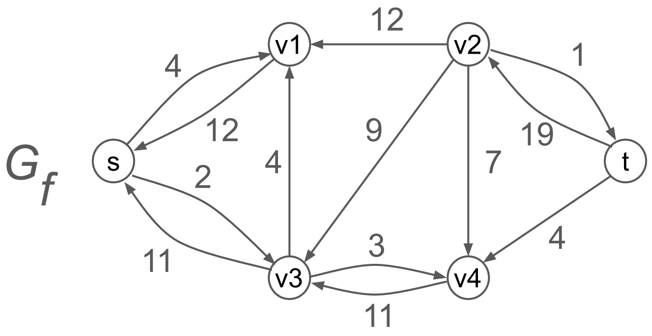


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 1

- 4ª. execução do passo 2:



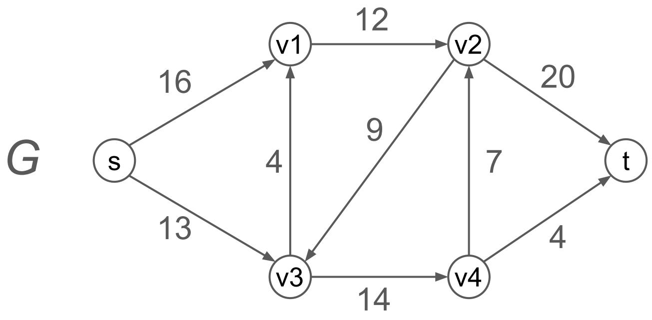




Não existe um *st*-caminho em $G_f$

O laço dos passos 2 a 8 acaba e o método retorna *f*

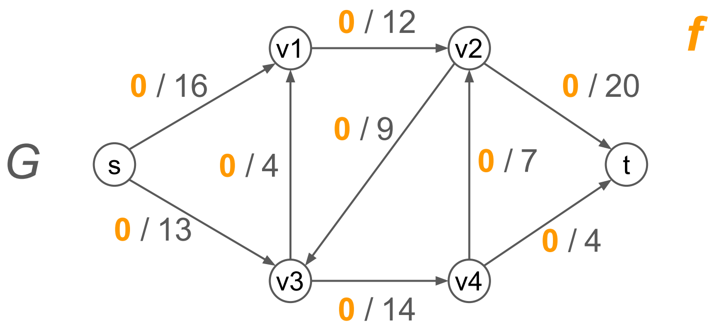
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- Rede de fluxo recebida como entrada:



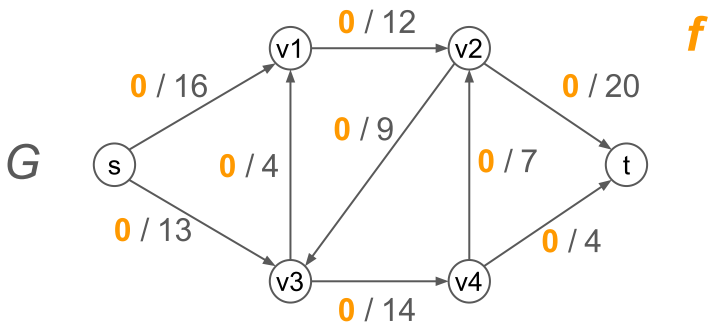
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

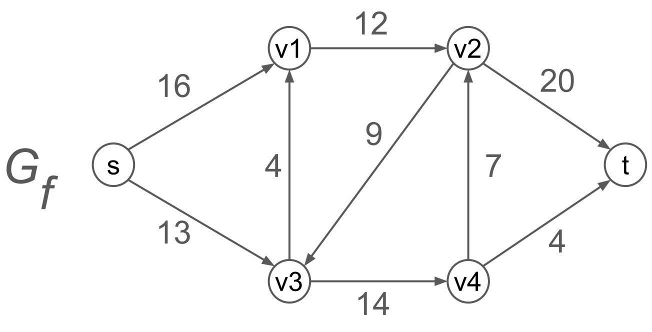
- Passo 1:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

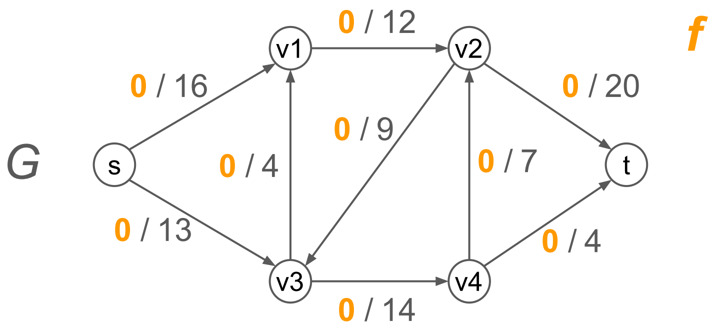
- 1ª. execução dos passos 2 e 3:

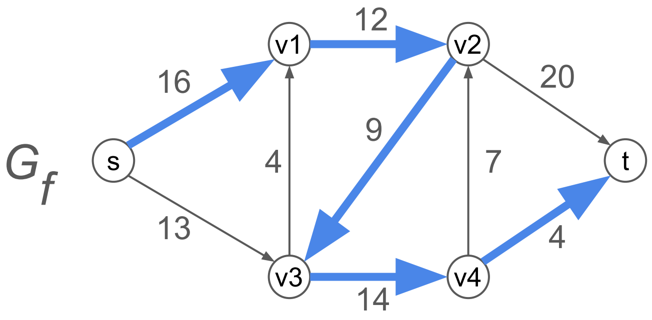


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 1ª. execução dos passos 2 e 3:



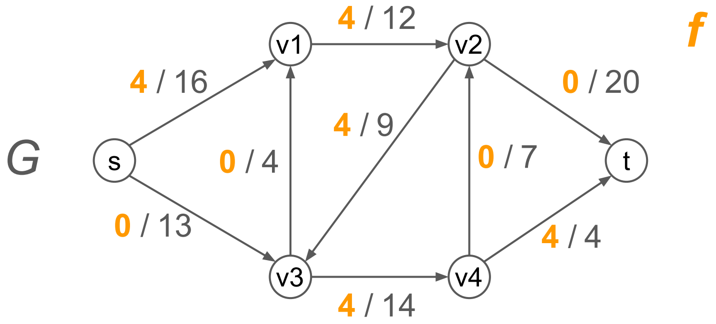




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

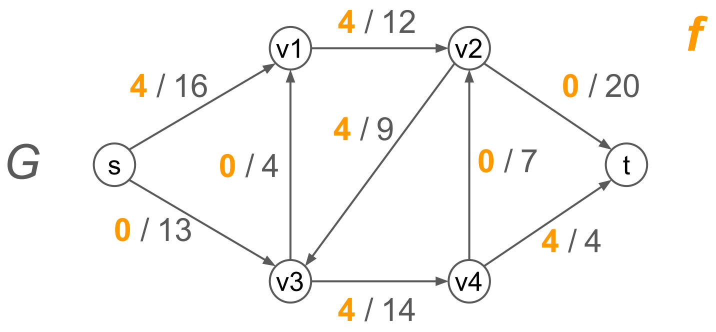
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

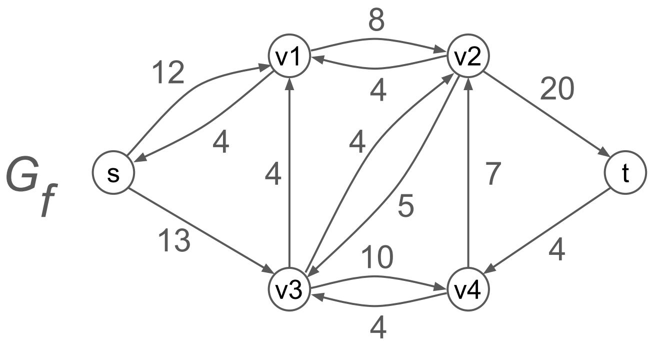
- 1ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

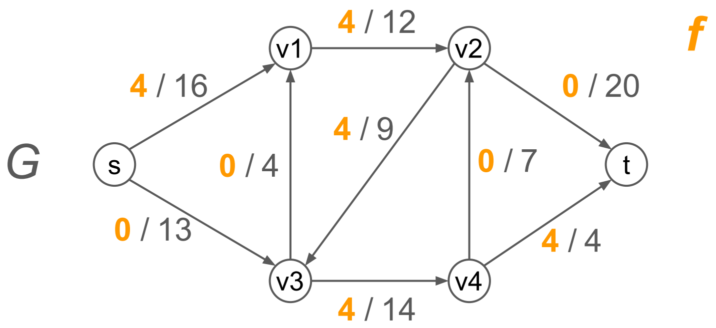
- 2ª. execução dos passos 2 e 3:

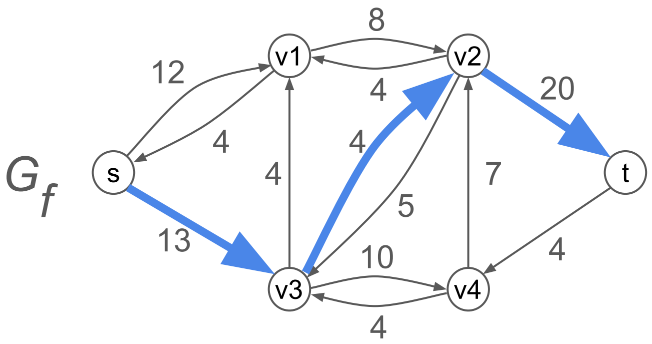


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 2ª. execução dos passos 2 e 3:



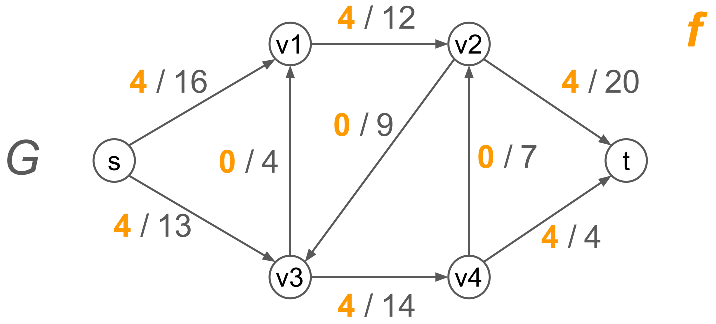




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 4

# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

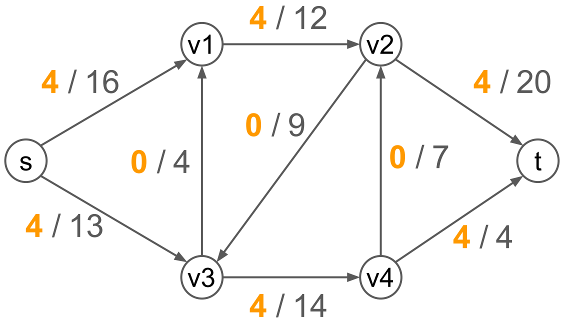
- 2ª. execução dos passos 4 a 8:



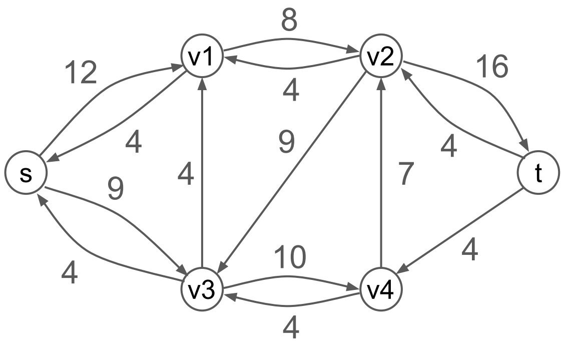

O fluxo na aresta $v_2v_3$ diminuiu (veja o slide anterior), mas o valor de ***f*** aumentou

# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 3ª. execução dos passos 2 e 3:

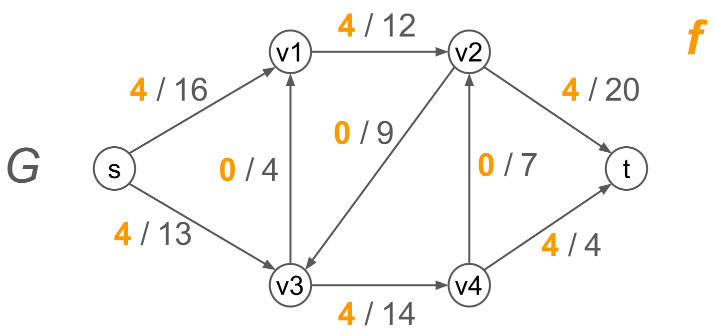
G


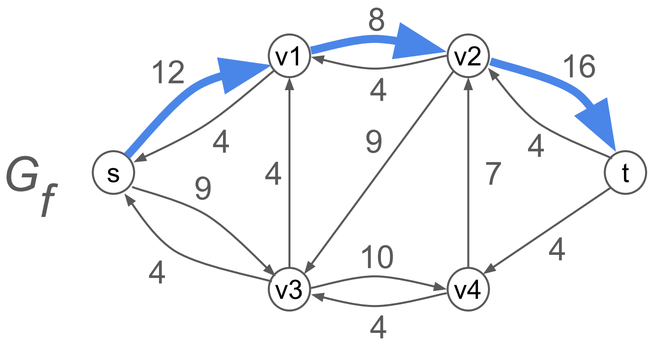

*f*

$G_f$


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 3ª. execução dos passos 2 e 3:



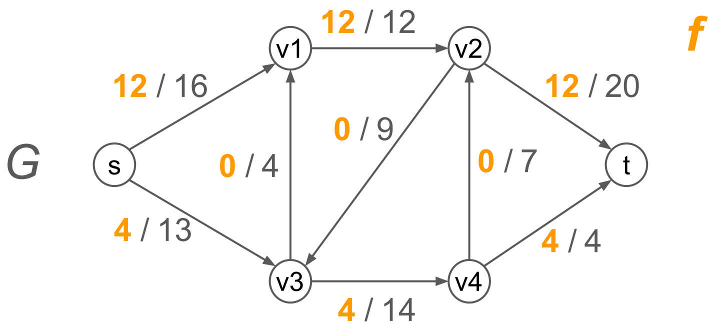




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 8

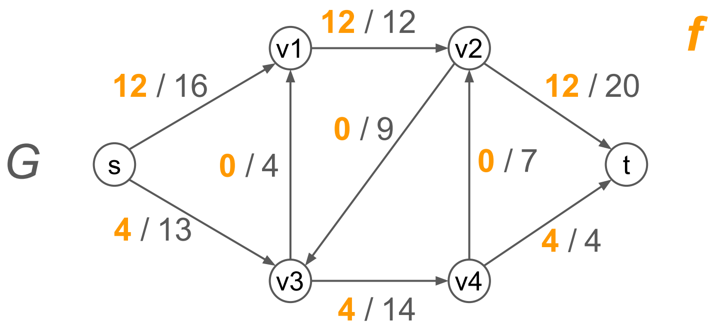
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

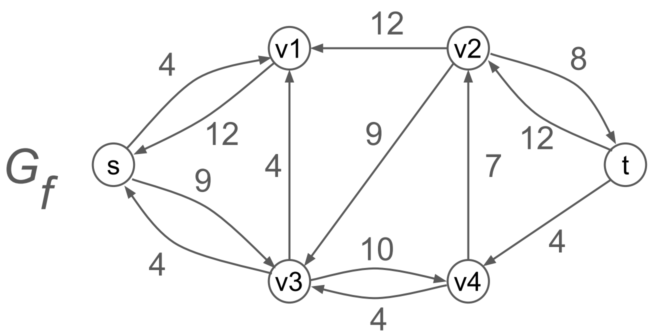
- 3ª. execução dos passos 4 a 8:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

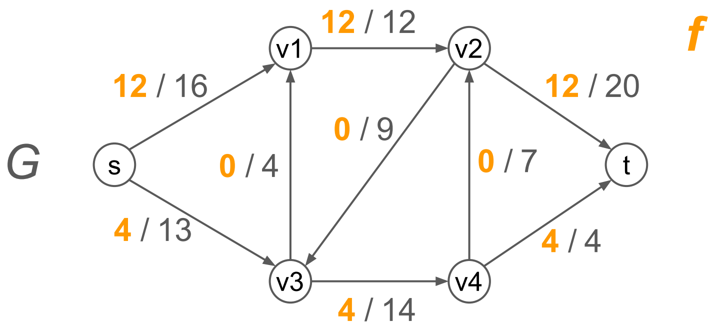
- 4ª. execução dos passos 2 e 3:

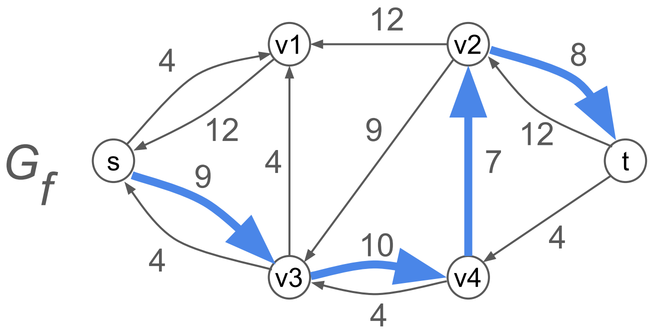


# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 4ª. execução dos passos 2 e 3:



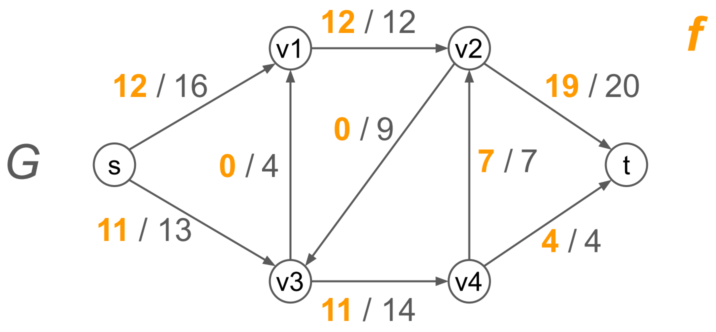




*st*-caminho ***P*** em $G_f$

Menor capacidade de uma aresta de ***P***: 7

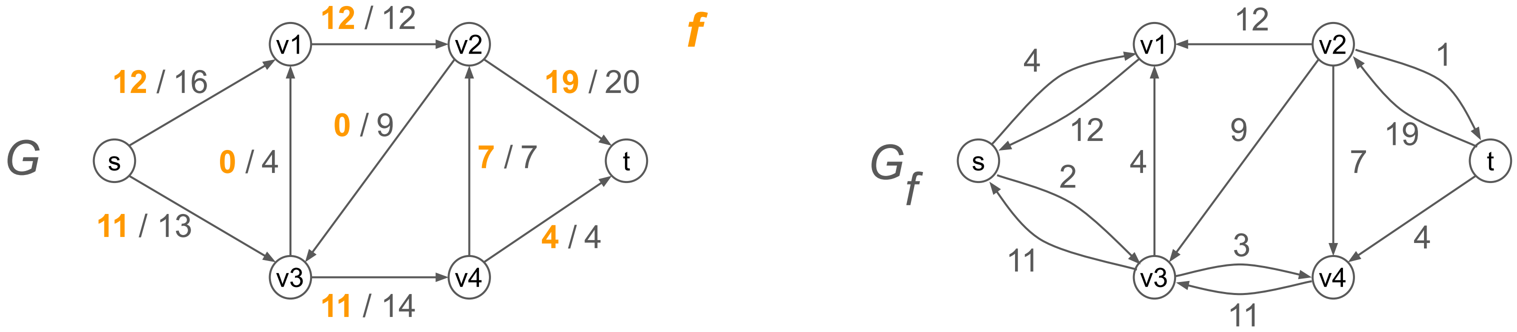
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 4ª. execução dos passos 4 a 8:



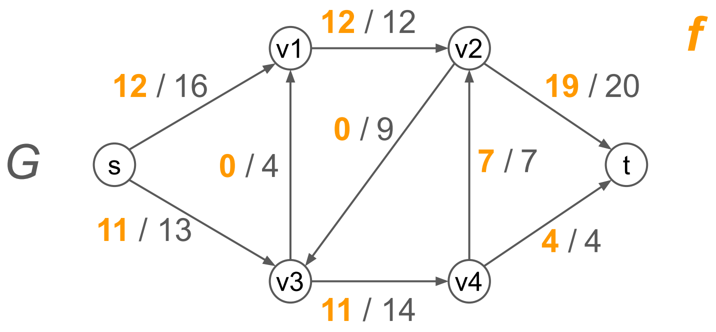
# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

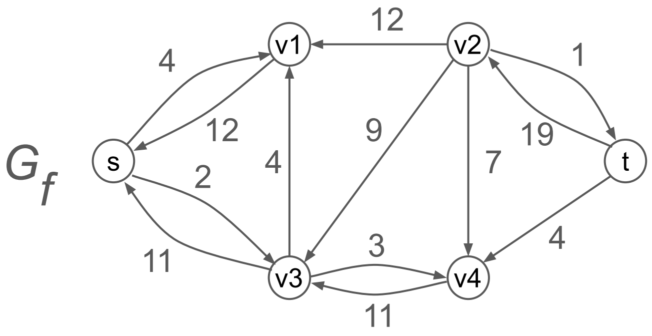
● 5ª. execução do passo 2:



# Método de Ford-Fulkerson - Exemplo de execução 2

- 5ª. execução do passo 2:



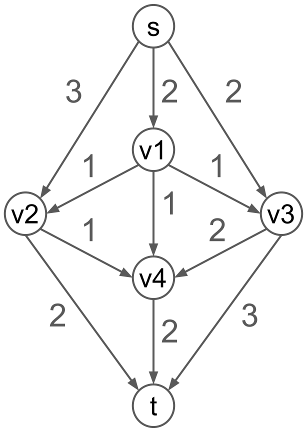

Não existe um *st*-caminho em $G_f$

O laço dos passos 2 a 8 acaba e o método retorna *f*

# Exercícios

1. Execute o método de Ford-Fulkerson para encontrar um fluxo de valor máximo na rede de fluxo $G$ dada abaixo. Faça isto de modo que os *st*-caminhos selecionados pelo método sejam sempre *st*-caminhos de comprimento mínimo (tendo o menor número de arestas). Apresente o fluxo encontrado pelo método e o valor deste fluxo.

$G$



# Exercícios

2. Em um belo domingo de sol, Grêmio e Internacional vieram disputar uma partida amistosa na Arena Condá. Infelizmente, o que não é nada amistosa é a relação entre as torcidas dos dois times.
   Dois ônibus, um com a torcida de cada time, chegaram a Chapecó. Por um erro de planejamento, os dois ônibus chegaram no mesmo horário em um ponto da cidade. As forças de segurança da cidade conseguiram conter as torcidas por alguns minutos, mas os ônibus têm que sair juntos dali, antes que um problema maior aconteça.
   Você foi contratado em regime de urgência para descobrir se é possível os dois ônibus saírem do ponto inicial, seguirem por algum dos trajetos pré-determinados pela forças de segurança e chegarem à Arena Condá sem passarem juntos por uma mesma rua. Explique como formular este problema como um problema de fluxo máximo em grafos.

# Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:
  1. Capítulo 26 do livro
     Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.