Estruturas Discretas

Teoria dos Conjuntos
Operações

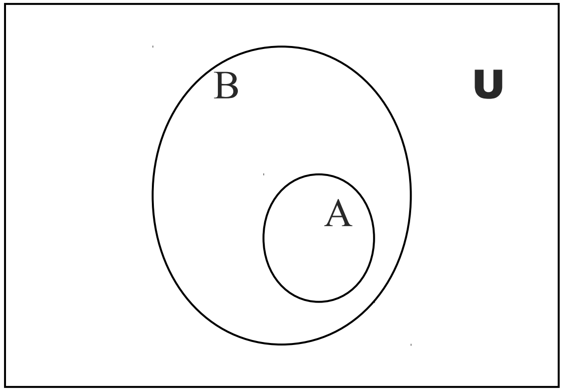
Profa. Helena Caseli
helenacaseli@dc.ufscar.br

Teoria dos Conjuntos

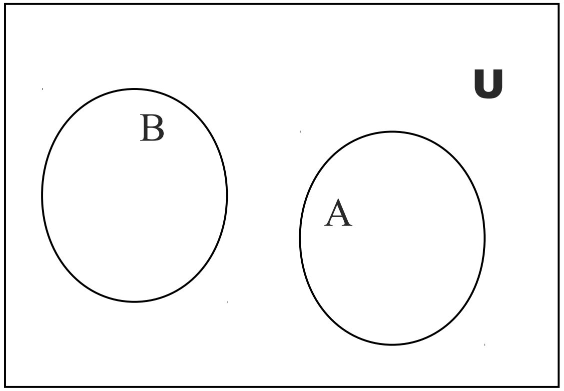
- **Conjunto**
  - Diagrama de Venn
  - Operações entre Conjuntos
  - Classe (coleção) de Conjuntos
  - Conjunto potência
  - Identidades envolvendo Conjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Diagrama de Venn**
  - Um diagrama de Venn é uma representação gráfica de conjuntos
    - Conjuntos são representados por áreas indicadas como curvas no plano
    - Um retângulo representa o conjunto universo e os demais conjuntos são representados por discos



$A \subseteq B$

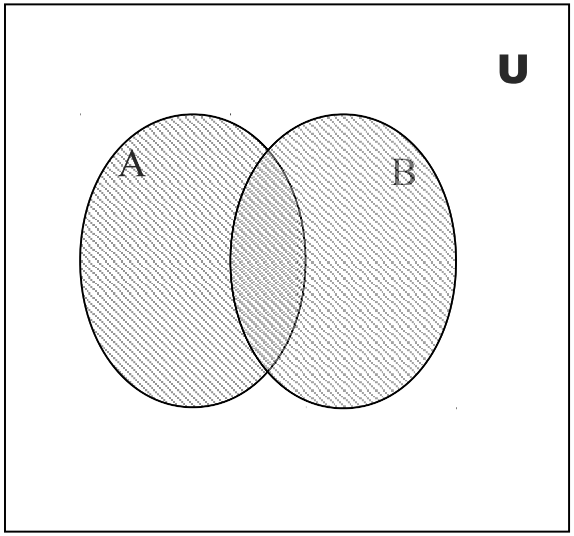


A e B são disjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **União**
    - A união de dois conjuntos A e B, denotada por A∪B, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B:

$$\mathbf{A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \underline{ou}\ x \in B \}}$$



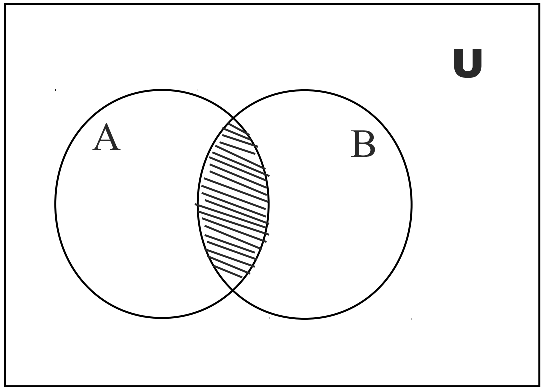
$A \cup B$

Teoria dos Conjuntos

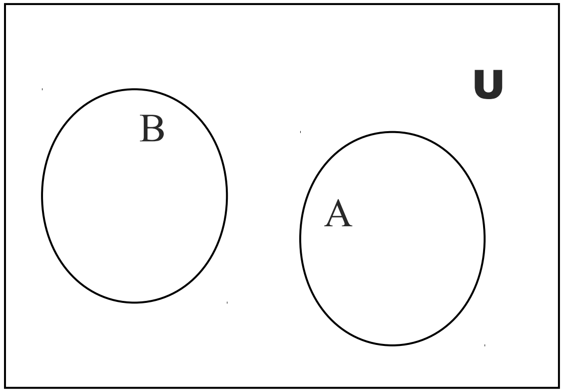
- **Operações entre Conjuntos**
  - **Intersecção**
    - A intersecção de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A <u>e</u> a B:

$$\mathbf{A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \underline{e} \ x \in B \}}$$

➔ Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são ditos **disjuntos**



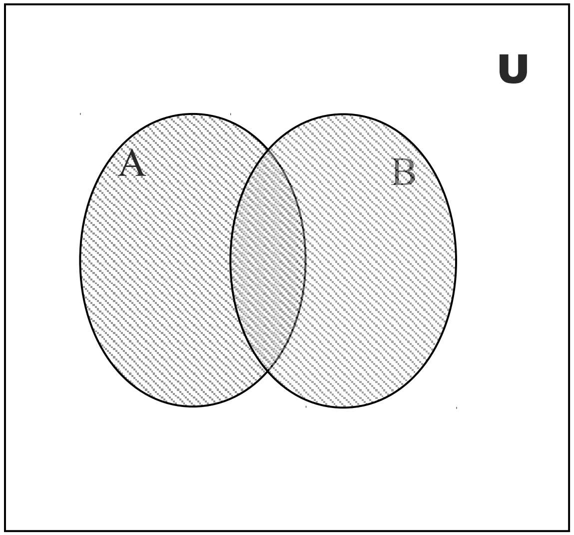
$A \cap B$



A e B são disjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Qual o tamanho de $A \cup B$, ou seja, $|A \cup B|$?
    - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$A \cup B$

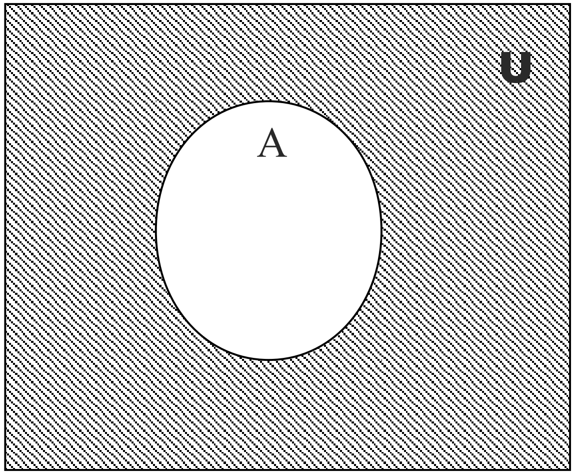
Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Exemplos
    - Sejam os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { 3, 4, 5, 6}
      - $A \cup B$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
      - $A \cap B$ = { 3, 4 }
      - $|A \cup B|$ = 6 ($|A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 4 – 2 = 6$)

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar absoluto (complementar)**
    - O complementar de um conjunto A, denotado por A^C ou por A', é o conjunto dos elementos que pertencem a **U** mas não pertencem a A:

$$\mathbf{A' = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}}$$



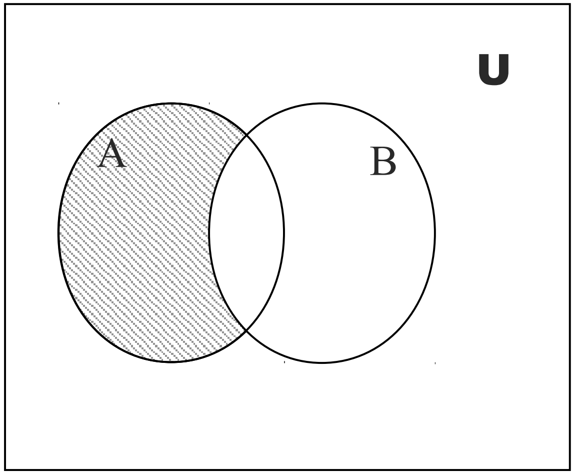
A'

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar relativo (diferença)**
    - A diferença entre A e B, denotada por A\B ou A – B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$\mathbf{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}}$$

$$\mathbf{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B' \} \text{ ou } A - B = A \cap B'}$$

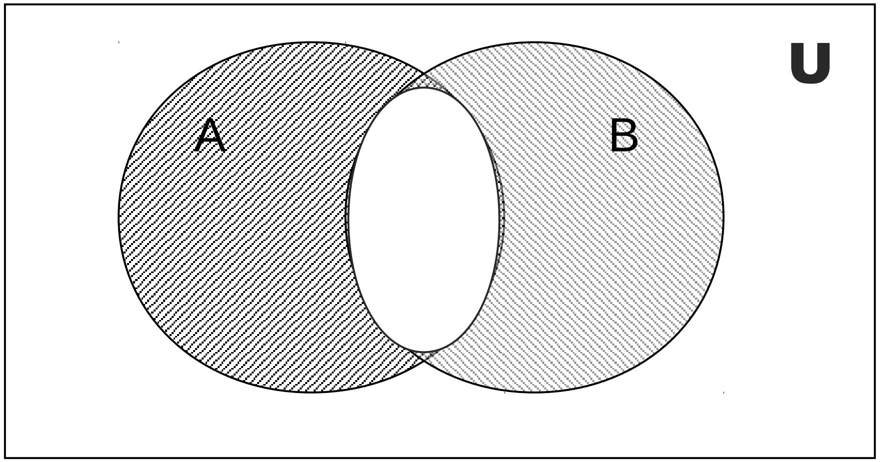


A – B

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Diferença Simétrica**
    - A diferença simétrica dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, consiste em todos os elementos que pertencem a A <u>ou</u> B mas <u>não a ambos</u>:

$$\mathbf{A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)}$$



$A \oplus B$

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Sejam os conjuntos A= {2, 3, 4, 5, 6}, B={4, 5, 6, 7, 8} e C = {1, 8, 9}
  - Calcule

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $A \oplus B = \{2, 3, 7, 8\}$

c) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\ 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $A \oplus B \oplus C = \{1, 2, 3, 7, 9\}$

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Sejam A = { 1, 3, 5, 7, 9 }, B = { 3, 5, 6, 10, 11 } e U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }
  - Calcule

a) $A \cup B$ = { 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 }

b) $A \cap B$ = { 3, 5 }

c) $A - B$ = { 1, 7, 9 }

d) $A \oplus B$ = { 1, 6, 7, 9, 10, 11 }

e) A' = { 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12 }

f) $A' - B$ = { 2, 4, 8, 12 }

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Sejam $A = \{ x \mid -5 \leq x < 3 \}$, $B = \{ x \mid x^2+1 < 10\}$ e U é o conjunto dos inteiros
  - Calcule

$A = \{ -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \}$
$B = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

a) $A \cap B = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

b) $A - B = \{ -5, -4, -3 \}$

c) $B \oplus A = \{ -5, -4, -3 \}$

d) $A' = \{ x \mid x < -5 \text{ ou } x \geq 3 \}$

e) $A' \cap B = \varnothing$

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Qual seria a representação, usando operações entre conjuntos, para o enunciado:

"O conjunto formado por todos os alunos da UFSCar que jogam futebol e cursam ciência ou engenharia da computação"

U = conjunto de todos os alunos da UFSCar

F = conjunto dos alunos que jogam futebol

C = conjunto dos alunos da ciência da computação

E = conjunto dos alunos da engenharia da computação

$F \cap (C \cup E)$ ou, aplicando a distributividade, $(F \cap C) \cup (F \cap E)$

Teoria dos Conjuntos

- **Classe (coleção) de Conjuntos**
  - Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto
    - Uma **classe de conjuntos** ou **coleção de conjuntos** é um conjunto de conjuntos
    - Pode ser denotada entre colchetes ou entre chaves
  - Exemplo
    - { {1, 2}, {3, 4} } é um conjunto de dois conjuntos:
      1. o conjunto {1, 2}
      2. o conjunto {3, 4}

- Uma **subclasse** ou **subcoleção** é formada por alguns conjuntos de uma classe de conjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência (ou conjunto das partes)**
  - O conjunto das partes de S é aquele formado por todos os subconjuntos de S
    - Denotado por 2^S ou $\wp(S)$
    - Exemplo: o conjunto potência de { 1, 2, 3 } é o conjunto
      - $\{ \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$
    - Para qualquer conjunto S, 2^S sempre tem, pelo menos, $\emptyset$ e S como elementos já que sempre é verdade que
      - $\emptyset \subseteq S$ e
      - $S \subseteq S$

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - Se um conjunto S tem *n* elementos, seu conjunto potência contém 2^n elementos (os subconjuntos de S)
    - Assim $|2^S| = 2^{|S|}$

→ Demonstrando que “Se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos”

→ **Indução matemática**

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Base da indução**
      - Para a base da indução tomamos n = 0.
      - O único conjunto com zero elementos é ∅ (S).
      - O único subconjunto de ∅ é ∅.
      - Logo, $2^S = \{\emptyset\}$ ou seja, um conjunto com 1 elemento.
      - Portanto, $|2^S| = 1 = 2^{n=0}$ quando $S = \emptyset$, ou seja, quando n = 0.

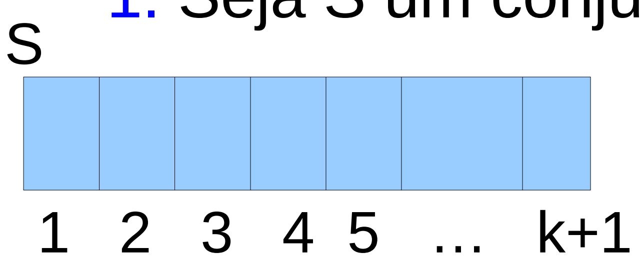
Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**: supõe-se que a hipótese de indução é verdadeira e prova-se para o próximo passo
      - **Hipótese de indução**: Vamos supor que, para qualquer conjunto com k elementos o conjunto potência tem 2^k elementos

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**
      1. Seja S um conjunto com k+1 elementos.

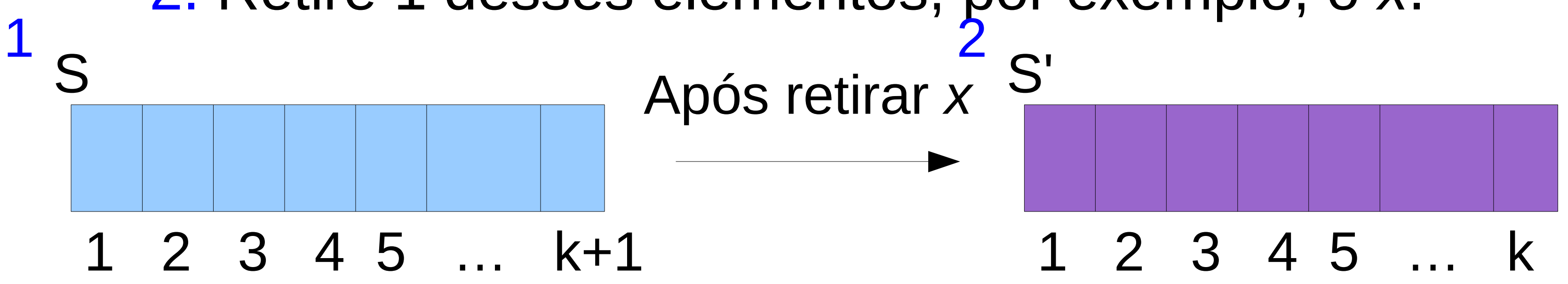
1



Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**

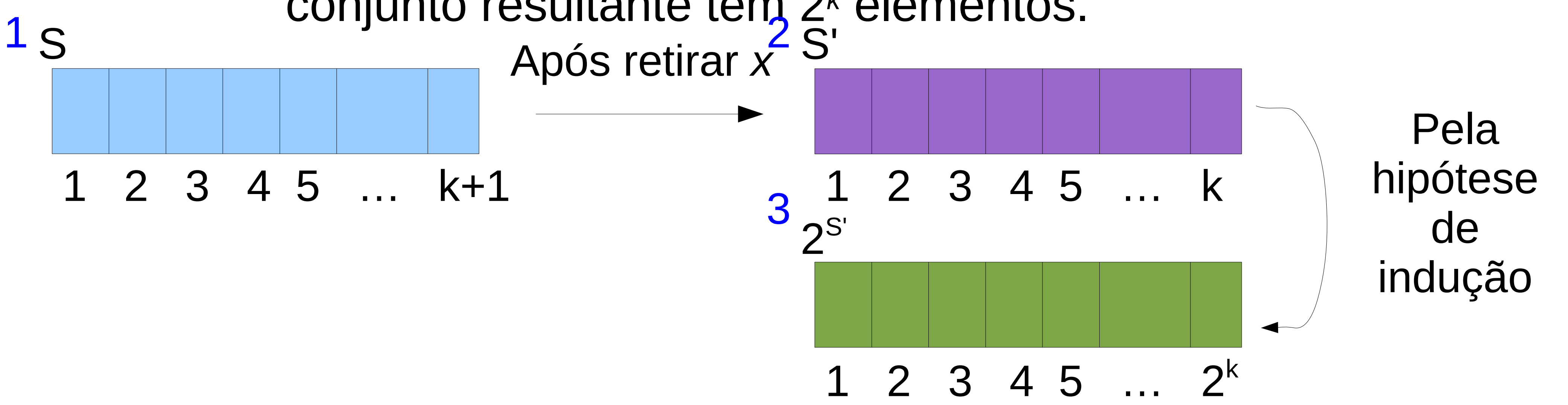
1. Seja S um conjunto com k+1 elementos.
2. Retire 1 desses elementos, por exemplo, o *x*.



Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**

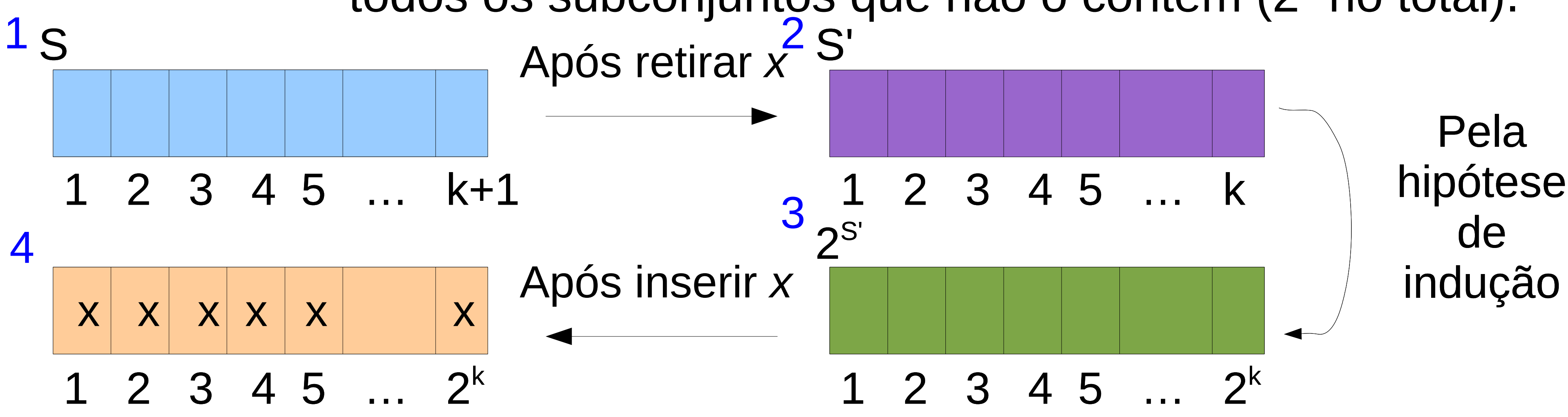
    3. Pela hipótese de indução, o conjunto potência do conjunto resultante tem 2^k elementos.



Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que ...
    - **Passo indutivo**

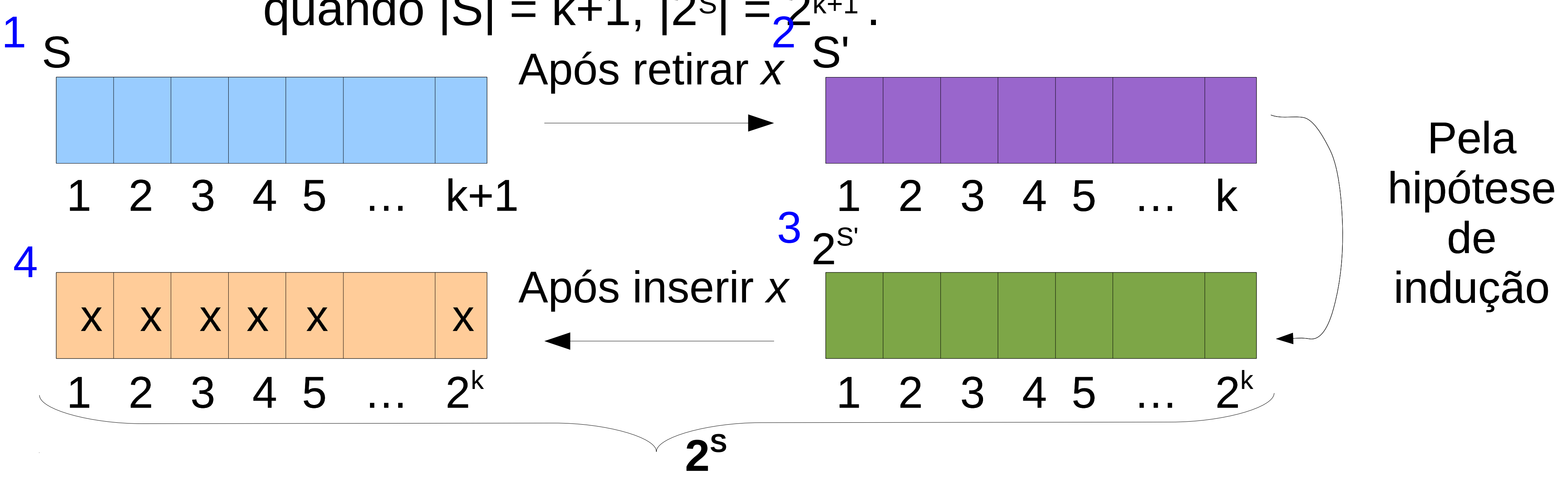
4. Os únicos elementos de 2^S ainda não incluídos em $2^{S'}$ são os que contêm *x*. Todos os subconjuntos que contêm *x* podem ser encontrados colocando-se *x* em todos os subconjuntos que não o contêm (2^k no total).



Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - **Prova**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que ...
    - **Passo indutivo**

5. Assim, temos 2^k conjuntos contendo *x* e 2^k conjuntos sem o *x*, ou seja, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Portanto, quando $|S| = k+1$, $|2^S| = 2^{k+1}$.



Teoria dos Conjuntos

- **Identidades envolvendo Conjuntos**

1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$	Idempotência
2a. $A \cup B = B \cup A$	2b. $A \cap B = B \cap A$	Comutatividade
3a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	3b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associatividade
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributividade
5a. $A \cup \varnothing = A$	5b. $A \cap \mathbf{U} = A$	Identidade
6a. $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	6b. $A \cap \varnothing = \varnothing$	
7a. $A \cup A' = \mathbf{U}$	7b. $A \cap A' = \varnothing$	Dos complementares
8a. $\mathbf{U}' = \varnothing$	8b. $\varnothing' = \mathbf{U}$	
9a. $(A')' = A$		Involução
10a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	10b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$	Leis de De Morgan

Dual

- O dual de uma identidade é obtido substituindo-se $\cup$ por $\cap$ e $\varnothing$ por **U**