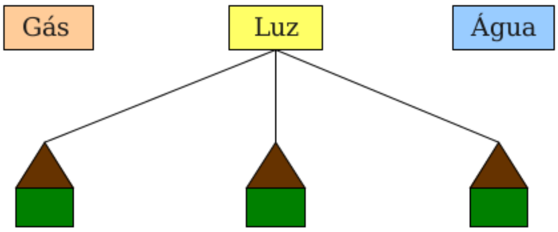
13ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

Grafos Planares

1) Podemos oferecer os 3 serviços para as 3 residências sem que haja cruzamento das linhas? Justifique sua resposta.

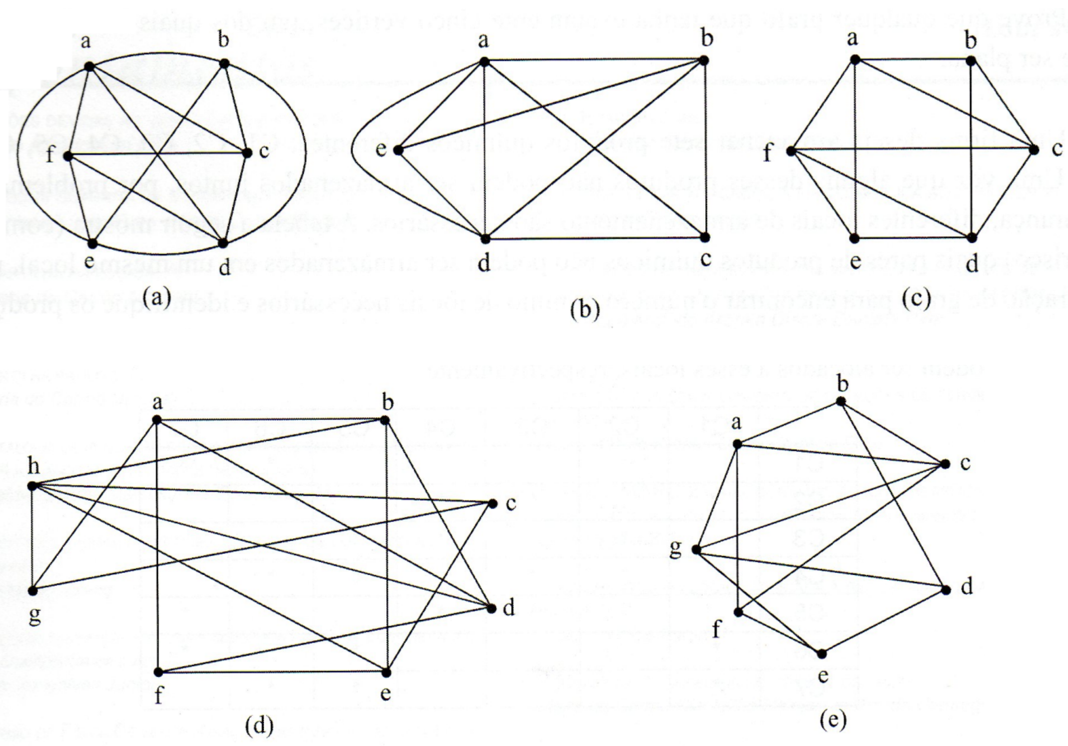


2) Mostre que o K_5 não é planar.

3) Suponha que você precisa decidir se um grafo G conexo é planar ou não. Ao observar o grafo G, você nota que ele não contém como subgrafo nem K_5 nem $K_{3,3}$. Você então conclui que G é planar. Esse raciocínio está correto? Explique, justificando sua resposta com base no Teorema de Kuratowski

4) Grafos planares são importantes pois sua estrutura topológica pode ser imersa no plano, ou seja, existe uma representação planar (em que não há intersecção de arestas). Diversas aplicações práticas como por exemplo o projeto de placas de circuito impresso precisam transformar a configuração gerada pelas portas lógicas numa representação plana. Explique como podemos utilizar o resultado do Teorema de Kuratowski para identificar se um dado grafo G é planar ou não na prática.

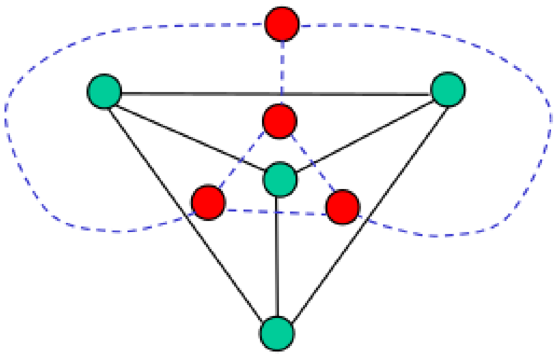
5) Para cada um dos grafos abaixo, determine se ele é planar ou não. Se o grafo for planar, encontre uma representação gráfica de modo a evidenciar que as arestas não se cruzam (a não ser nos vértices). Se o grafo não for planar, use o teorema de Kuratowski para mostrar tal fato, encontrando um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



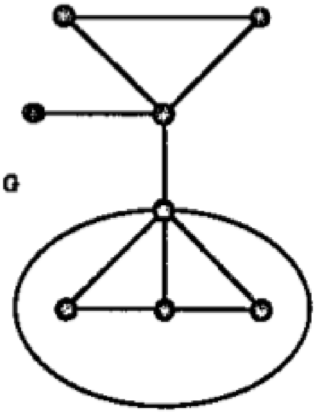
6) Dado um grafo G planar, o grafo G*, chamado de dual de G, é construído da seguinte forma:

- Para cada face f de G, G* tem um vértice v (incluindo a face externa)
- Una dois vértices w e v de G* da seguinte forma:
    - Se 2 regiões f_i e f_j são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre v_i e v_j cruzando a aresta em comum
    - Se existir mais de uma aresta em comum entre f_i e f_j coloque uma aresta entre v_i e v_j para cada aresta em comum
    - Se uma aresta está inteiramente em uma região f_k coloque um loop no vértice v_k

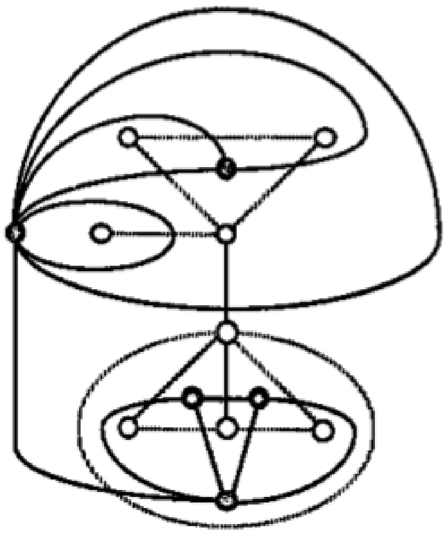
Exemplos:



G



G*



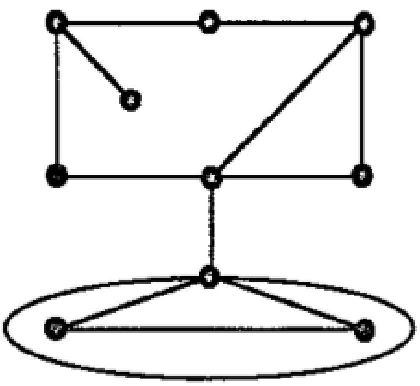
Responda:

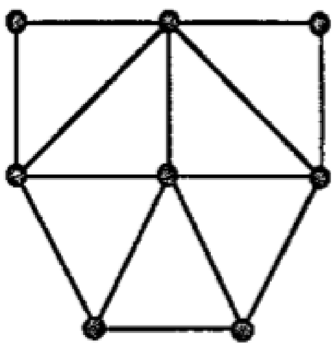
a) Qual é o dual de um grafo C_n (cycle graph)?

b) Qual é o dual de um grafo W_n (wheel graph)?

c) Quem é o dual do dual, ou seja, (G*)* ?

d) Obtenha os duais dos seguintes grafos





7) A seguinte afirmação é verdadeira ou falsa? Prove sua resposta.

“Todo grafo simples planar G tem um vértice de grau no máximo 5”