Lista 4 - Geometria Analítica - Vetores e Produtos de Vetores

Observações: Faça uma leitura de cada exercício antes de iniciar. Procure compreender e assimilar aquilo que está fazendo. Esta é uma lista complementar aos exercícios dos livros textos adotados e não são de minha autoria, sendo uma compilação de diferentes fontes, listas cedidas, etc.

1. Dados o vetor $\vec{v} = (3, -3)$ e $A = (-1, -2)$ encontre o ponto B tal que $\vec{AB} = 3\vec{v}$. Se $C = (5, 7)$, encontre D tal que $\vec{AD} = \dfrac{1}{3}\vec{AC}$. Represente estes pontos e vetores em um plano cartesiano (faça um desenho caprichado).

2. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

(a) Determine um vetor unitário e paralelo ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

(b) Determine o cosseno do ângulo que $\vec{u}$ faz com $\vec{v}$.

3. Dados os pontos $A = (2, -5, 3)$ e $B = (7, 3, -1)$, sendo que eles são vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$, e seu ponto de interseção das diagonais $P = (4, -3, 3)$, encontre os outros dois vértices.

4. (2 pontos) Determine um vetor **unitário** que é bissetriz dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, e $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (cuidado aqui! faça uma ilustração para perceber as dificuldades)

5. Sejam $\vec{u} = (2, -3, 6)$ e $\vec{v} = (-1, 2, -2)$. Determine um vetor $\vec{w}$, bissetriz do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $\|\vec{w}\| = 3\sqrt{42}$.

6. Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ formam um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Se $\|\vec{x}\| = 1, \|\vec{y}\| = 2$, $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ e $\vec{v} = 2\vec{x} - \vec{y}$, determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

7. Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ formam um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianos. Se $\|\vec{x}\| = \sqrt{2}$ e $\|\vec{y}\| = \sqrt{3}$ determine

(a) $|(2\vec{u} - \vec{v}) \circ (\vec{u} - 2\vec{v})|$

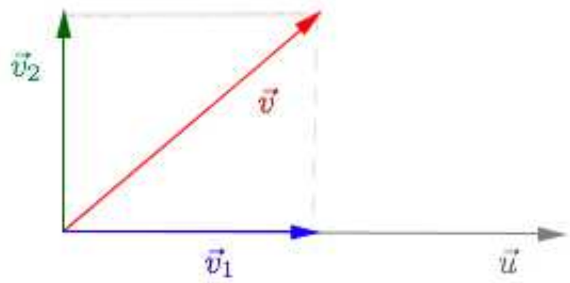
(b) $\|\vec{u} - 2v\|$

8. Considere os vetores $\vec{u} = (2, a, -1), \vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u} \circ \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \circ (\vec{v} + \vec{w})$.

9. Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \circ \vec{u} = -42$.

10. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2 - 3), \vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determine o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \circ \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \circ \vec{w} = 3$.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles. Vamos decompor o vetor $\vec{v}$ como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.



Note que $\vec{v}_1 \parallel \vec{u} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_1 = \alpha\vec{u}$. Logo, $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \alpha u$.

Assim,

$$\vec{v}_2 \perp \vec{u} \iff (\vec{v} - \alpha\vec{u}) \perp \vec{u} \iff (\vec{v} - \alpha\vec{u}) \circ \vec{u} = 0 \iff \alpha = \frac{\vec{v} \circ \vec{u}}{\vec{u} \circ \vec{u}}.$$

O vetor $\vec{v}_1$ assim determinado é o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e é denotado por $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, ou seja,

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \circ \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}.$$

11. Em cada item abaixo, calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

(a) $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{u} = (3, -1, 1)$

(b) $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, $\vec{u} = (-2, 1, 2)$

(c) $\vec{v} = (1, 3, 5)$, $\vec{u} = (-3, 1, 0)$

(d) $\vec{v} = (1, 2, 4)$, $\vec{u} = (-2, -4, -8)$

12. Em cada item abaixo, decomponha $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$:

(a) $\vec{v} = (-1, -3, 2)$, $\vec{u} = (0, 1, 3)$

(b) $\vec{v} = (1, 2, -1)$, $\vec{u} = (2, -1, 0)$

13. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -6, 1)$, $\vec{v} = (1, 4, -5)$ e $\vec{w} = (3, -4, 12)$, calcule o comprimento da projeção ortogonal do vetor $\vec{u} + 2\vec{v}$ na direção do vetor $\vec{w}$.

14. Determine os vetores unitários $\vec{u} = (x, y, z)$ tais que a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{k}$ seja $\frac{\vec{k}}{2}$ e o ângulo entre $\vec{v} = (x, y, 0)$ e $\vec{i}$ seja $\frac{\pi}{6}$ radianos.

15. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\vec{AB} = (1, 1, -1)$ e $\vec{AD} = (2, 1, 4)$.

16. Considere os pontos $A = (-1, 2, 1)$, $B = (4, 6, 4)$, $C = (4, 2, 1)$, e $D = (-1, 6, 4)$.

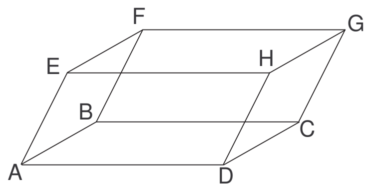
(a) Calcule a norma de $\vec{AB} + \vec{CD}$;

(b) Encontre o ponto médio de AB;

(c) Mostre que A, B, C e D são vértices de um losango.

17. Seja $\vec{u}$ um vetor que é ortogonal à $\vec{v} = (1,0,2)$ e $\vec{w} = (-2,1,0)$, tem norma $\sqrt{21}$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{r} = (0,1,2)$. Se $A = (-1,-3,5)$ encontre o ponto B tal que $\vec{AB} = \vec{u}$ (sugestão: $\vec{u}$ é ortogonal à $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$, e é claro, pesquisar o que venha a ser ângulo agudo)

18. Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$, conforme a figura abaixo, sendo que $A = (3,2,-3)$, $B = (2,-1,-1)$, $D = (-1,3,1)$, e $E = (1,-2,3)$.



Determine

(a) as coordenadas do ponto G;

(b) as coordenadas dos pontos R e S pertencentes ao segmento EF e que o divide em três partes iguais.

(c) o ângulo entre a diagonal AG e AC;

(d) a área do triângulo formado pelos pontos E, D e pelo ponto médio de BC;

(e) O volume do prisma $AEGCDH$.

19. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\vec{AB} = (-1,1,0)$ e $\vec{AC} = (0,1,3)$.

20. Sabendo que o ângulo entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$ radianos e os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $(2,2,1)$ têm o mesmo sentido, determine a tripla de coordenadas de $\vec{u} \times \vec{v}$.

21. Encontre vetores X e Y tais que:

(a) $X \circ (2\vec{i}) = 1, \quad X \circ (3\vec{j}) = 1$ e $(X \times \vec{i}) \circ (\vec{j}) = -1$.

(b) $Y \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $\|Y\| = \sqrt{6}$.

22. Considere os pontos $A = (4,0,1)$, $B = (0,3,0)$, e $C = (1,1,3)$. (faça uma ilustração, isso ajuda, e como sugestão adicional, projeção ortogonal)

(a) Determine um ponto D no segmento AB tal que o segmento CD seja perpendicular à AB;

(b) No item anterior, o comprimento deste segmento CD é a altura do triângulo ABC?

(c) Calcule a área do triângulo ABC usando o item anterior e o produto vetorial e compare.

23. Resolva o sistema $\begin{cases} \vec{u} \circ (2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{u} \times (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k}. \end{cases}$

24. Determine $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$ e $\vec{x} \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

25. Seja h a altura de um triângulo ABC relativa ao lado AB. Mostre que $h = \dfrac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$.

26. Um triângulo ABC tem área 4. Sendo $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$, calcule $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

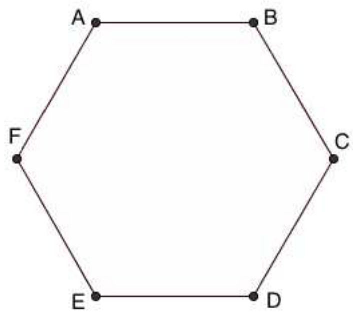
27. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$, sendo que $\vec{AB} = (1,1,0)$, $\vec{AC} = (0,1,1)$ e $\vec{AD} = (-4,0,0)$.

28. Sejam $A = (1,2,-1), B = (5,0,1), C = (2,-1,1)$ e $D = (6,1,-3)$ vértices de um tetraedro. Determine

(a) o volume do tetraedro;

(b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.

29. O lado do hexágono regular representado na figura abaixo mede 2 cm.



Calcule:

(a) $\|\vec{AB} \times \vec{AF}\|$;

(b) $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$;

(c) $\|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$.

30. Considere um trapézio $ABCD$ cujas base maior AB e base menor CD. Sejam M e N pontos médios de AD e BC respectivamente. Mostre que MN é paralelo às bases AB e CD e que $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$.

31. Sejam ABC um triângulo qualquer e O a origem de um sistema de coordenadas no plano. Prove que as suas medianas se interceptam no ponto

$$M = \frac{OA + OB + OC}{3}.$$

32. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores. Mostre que

(a) $\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$;

(b) $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$;

(c) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

33. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores.

(a) Mostre que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}\, + \|\vec{v}\|^2$.

(b) Demonstre a *desigualdade triangular*: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. [*Sugestão: utilize o item anterior e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*]

(c) Interprete a desigualdade triangular geometricamente.

(d) Dê um exemplo no qual a igualdade na desigualdade triangular não ocorre.

34. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Determine condições sobre eles para que

(a) o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ divida o ângulo formado por eles em dois ângulos iguais;

(b) $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{u}\|$;

(c) $\|\vec{u}+\vec{v}\| > \|\vec{u}-\vec{u}\|$;

(d) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}-\vec{u}\|$.

35. Mostre que

(a) $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{u}$ se, e somente se, $(\vec{v}-\vec{u}) \perp \vec{u}$.

(c) se A, B e C são pontos distintos e $\vec{AC} = \mathrm{proj}_{\vec{AC}}\vec{AB}$, então o triângulo ABC é retângulo.

36. Considere três vetores do espaço $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ e $\vec{\gamma}$. Mostre que

(a) $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\| \leqslant \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$;

(b) $|\vec{\alpha}\circ(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})| \leqslant \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\|\vec{\gamma}\|$;

(c) $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\beta}\|^2 - (\vec{\alpha}\circ\vec{\beta})^2$ (Identidade de Lagrange).

37. Sejam $\vec{u} = (1,1,3)$, $\vec{v} = (-1,1,-1)$ e $\vec{w} = (0,1,1)$. O vetor $\vec{t} = (5,-3,7)$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$? Caso seja, encontre esta combinação linear.

38. Para que valores de x os pontos $A = (x,1,2)$, $B = (2,-2,-3)$, $C = (5,-1,1)$ e $D = (3,-2,-2)$ são coplanares?

39. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores satisfazendo

$$\vec{u}\times\vec{v} + \vec{v}\times\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u} = 0.$$

Mostre que estes vetores são coplanares.

40. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Mostre que se

$$\begin{array}{rcl} \vec{X} & = & x_u\vec{u} + x_v\vec{v} + x_w\vec{w}, \\ \vec{Y} & = & y_u\vec{u} + y_v\vec{v} + y_w\vec{w}, \\ \vec{Z} & = & z_u\vec{u} + z_v\vec{v} + z_w\vec{w}, \end{array}$$

então

$$\vec{X} \circ (\vec{Y} \times \vec{Z}) = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ x_u & x_v & x_w \\ x_u & x_v & x_w \end{bmatrix} \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w})$$

41. Suponha que os pontos $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ sejam vértices de um triângulo no plano cartesiano. Mostre que a área, $A(ABC)$, deste triângulo é dada por

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

42. Suponha que os pontos $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$, $C = (x_c, y_c, z_c)$ e $D = (x_d, y_d, z_d)$ sejam vértices de um tetraedro. Mostre que seu volume é dado por

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a & 1 \\ x_b & y_b & z_b & 1 \\ x_c & y_c & z_c & 1 \\ x_d & y_d & z_d & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Bons estudos.