

4.4 Mais da geometria analítica de retas e planos

Equações da reta na forma simétrica

Lembremos que uma reta r , nos planos casos acima, a forma simétrica é um caso particular da *equação na reta na forma geral ou no espaço*, é determinada por um ponto A e um vetor \vec{v} , não nulo, sendo sua equação vetorial dada por $r : X = A + \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

O escalar λ é chamado *parâmetro* da equação.

A aplicação $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3 \\ \lambda \longmapsto f(\lambda) = A + \lambda \vec{v} \end{cases}$, que associa a cada λ real um ponto $X = A + \lambda \vec{v}$, é chamada parametrização da reta r e evidencia o caráter dinâmico da trajetória retilínea percorrida por um ponto X da reta, dependendo do parâmetro λ .

As equações paramétricas da reta que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (no caso de \mathbb{R}^3) expressam a dependência das coordenadas de $X = (x, y, z)$ da reta, em relação ao parâmetro em questão:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se a , b e c forem todos não nulos, então em cada uma das equações paramétricas podemos isolar o parâmetro λ correspondente ao ponto (x, y, z) :

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

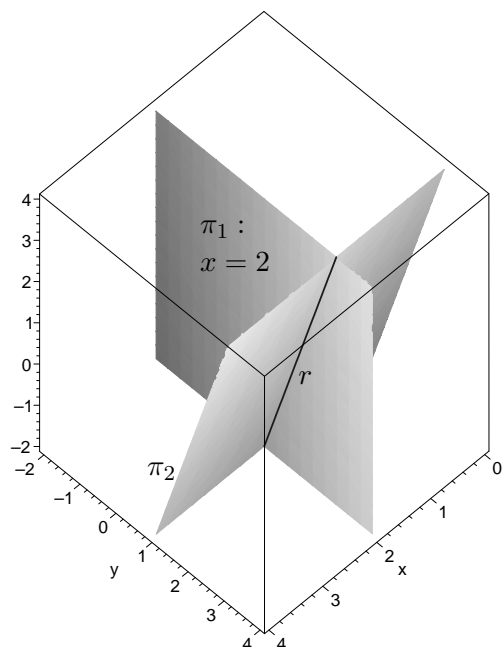
As expressões dentro do retângulo acima não contém λ e expressam as relações que existem entre as coordenadas de $X \in r$, independente do parâmetro. São chamadas equações da reta r na forma simétrica.

Se $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, ficamos com as equações $\boxed{x = x_0, \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$ e fica claro que a reta r está contida num plano paralelo ao plano yz dado por $x = x_0$.

Se $a = 0$ e $b = 0$ (neste caso, somente $c \neq 0$), ficamos com as equações $\boxed{x = x_0, y = y_0}$ como as equações na forma simétrica.

Faça como exercício as análises dos outros casos: (i) somente $b = 0$, (ii) somente $c = 0$, (iii)

somente $a \neq 0$, (iv) somente $b \neq 0$.



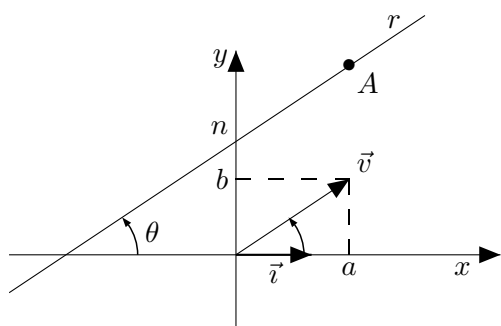
Nesta ilustração obtida no Maple, a reta foi dada pela equação na forma simétrica $r : x = 2, \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$, e visualizada na região

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ -2 \leq y \leq 4, \\ -2 \leq z \leq 4 \end{cases} \right\}$$

A reta r é a intersecção do plano $\pi_1 : x = 2$, paralelo ao plano yz , com o plano $\pi_2 : \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

Agora, consideremos o caso em \mathbb{R}^2 : Sejam $A = (x_0, y_0)$, $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ e a reta $r(A, v)$ dada em equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Considerando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos a equação simétrica $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, donde $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$, que pode ser escrita na forma $y = m(x - x_0) + y_0$, onde $m = \frac{b}{a}$, ou ainda, $y = mx + n$, onde $n = -mx_0 + y_0$.



$m = \tan \theta$, onde θ é o ângulo entre r e o eixo positivo Ox .

n é a ordenada do ponto de intersecção da reta r como o eixo Oy . Temos a conhecida fórmula da reta na forma $y = mx + n$, onde m é chamado *coeficiente angular* de r e n é chamado *coeficiente linear* de r .

Quando $a = 0$, a equação da reta na forma simétrica será simplesmente $x = x_0$. Analogamente, se $b = 0$, a equação na forma simétrica é $y = y_0$.

Em qualquer dos casos acima, a forma simétrica é um caso particular da *equação na reta na forma geral*, da forma $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, onde $\vec{w} = (\alpha, \beta)$ é o vetor normal á reta.

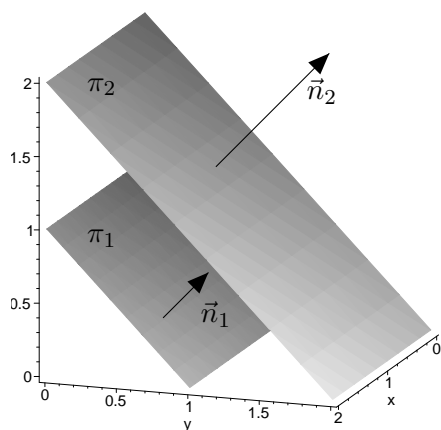
Posição relativa entre dois planos

A partir da equação geral de um plano no espaço, $\pi : ax + by + cz + d = 0$, onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é o vetor normal ao plano, o estudo das posições relativas entre dois planos se torna mais rico.

Consideremos os planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

1. O plano π_1 é paralelo ao plano π_2 se e somente se $\pi_1 \cap \pi_2$ é vazio. Isto é, o sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
 é impossível. Neste caso, $\text{posto}(A)=1$ e $\text{posto}([A \mid B])=2$.
 Geometricamente, isto ocorre quando $\{\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)\}$ é l.d. e, portanto, $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$ para um escalar $k \neq 0$, mas $d_2 \neq kd_1$.



Nesta ilustração, os planos são $\pi_1 : y + z = 1$ e $\pi_2 : 2x + 2z = 4$.

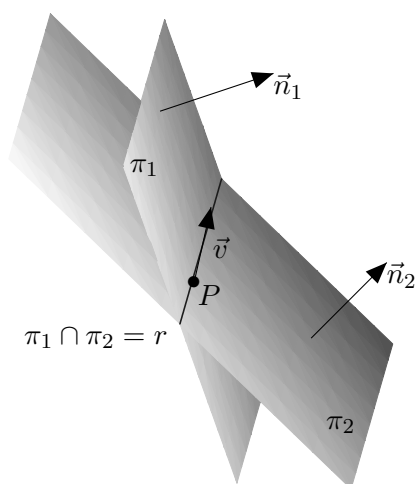
$\vec{n}_1 = (0, 1, 1)$ é paralelo a $\vec{n}_2 = (0, 2, 2)$ com $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, mas $4 \neq 2 \times 1$.

Logo não existe (x, y, z) satisfazendo as duas equações ao mesmo tempo.

2. π_1 é coincidente com π_2 se todos os pontos de π_1 também são pontos de π_2 e vice-versa. Neste caso, o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$
 é possível e indeterminado, com $\text{posto}(A)=1$ e $\text{posto}([A \mid B])=1$, e portanto, o grau de liberdade é 2, que é a dimensão de um plano.
 Geometricamente, $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ é l.d., $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$ e além disso, $d_2 = kd_1$.

3. π_1 intercepta π_2 segundo uma reta.



Neste caso $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ é l.i. e o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{é possível e}$$

indeterminado, com grau de liberdade 1, ou

seja, existe a escolha de um parâmetro

escalar para descrever o conjunto de soluções,

e portanto esse conjunto é uma reta.

Já vimos que a equação vetorial (ou as paramétricas) da reta aparece naturalmente quando aplicamos o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema.

Aqui apresentamos uma outra maneira geometricamente interessante para o problema de determinar r , que é observar que o vetor direção $\vec{v} \neq \vec{0}$ de $r = \pi_1 \cap \pi_2$ deve ser ortogonal a \vec{n}_1 e a \vec{n}_2 simultaneamente. De fato, por \vec{v} ser um vetor contido em π_1 , segue que $\vec{v} \perp \vec{n}_1$ e por \vec{v} ser um vetor de π_2 , segue que $\vec{v} \perp \vec{n}_2$. Logo \vec{v} e $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ são paralelos.

Assim, conhecido um ponto P , solução do sistema, a equação vetorial será conhecida: $r : X = P + t(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2), t \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, os planos da ilustração, $\pi_1 : 3x - z = 0$ e $\pi_2 : -x + z = 0$ têm o ponto $P = (0, 0, 0)$ na intersecção. Como $\vec{n}_1 = (3, 0, -1)$ e $\vec{n}_2 = (-1, 0, 1)$, temos que $\vec{v} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, 2, 0)$. Podemos tomar $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Então $r : X = (0, 0, 0) + t(0, 1, 0), t \in \mathbb{R}$, ou seja, r neste caso é o eixo Oy .

Posições relativas entre retas no espaço, com produto vetorial

As posições relativas entre retas no espaço também podem ser analisadas com o uso do produto vetorial. Sejam $r_1 : X = A + \lambda \vec{v}_1, \lambda \in \mathbb{R}$ e $r_2 : X = B + \mu \vec{v}_2, \mu \in \mathbb{R}$ as duas retas.

1. Se $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$ temos que \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são l.d., e portanto, as retas são paralelas ou coincidentes. Se além disso, $A \in r_2$ (ou $B \in r_1$), então são coincidentes. É claro que se \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são conhecidos em coordenadas, é muito mais fácil ver se são l.d ou l.i. verificando se são múltiplos ou não.

Quando as retas são paralelas, temos também que $\{\vec{v}_1, \overrightarrow{AB}\}$ é l.i. O plano determinado por A , \vec{v}_1 e \overrightarrow{AB} é o plano contendo ambas as retas.

2. Se $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ as retas têm direções l.i. e portanto, são concorrentes ou reversas. Se ainda $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB}] = 0$, então \overrightarrow{AB} é coplanar com \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , donde as retas são concorrentes. Caso contrário, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{AB}\}$ é l.i. e as retas são reversas.

Se as retas são concorrentes e $r_1 \cap r_2 = P$, o plano $X = P + \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$ é o plano contendo as retas. O vetor normal a esse plano é $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

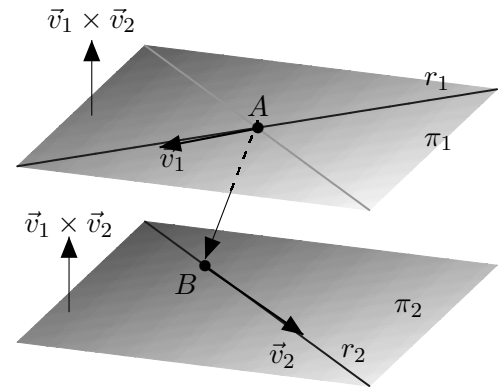
Se as retas são reversas, o plano

$\pi_1 : X = A + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, t, s \in \mathbb{R}$, contendo r_1 e paralelo a r_2 , é paralelo ao plano

$\pi_2 : X = B + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, t, s \in \mathbb{R}$, contendo r_2 e paralelo a r_1 . Ambos os planos têm vetor

normal $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Observe que não existe plano algum contendo as duas retas

simultaneamente.



EXERCÍCIO 1: Encontrar a equação da reta perpendicular a duas retas reversas.

EXERCÍCIO 2: Encontrar a equação do plano que contém r_1 e é ortogonal ao plano π_2 . Encontrar a intersecção deste plano com π_2 . Qual é a posição relativa entre r_1 e esta reta intersecção?

Ângulo entre dois planos

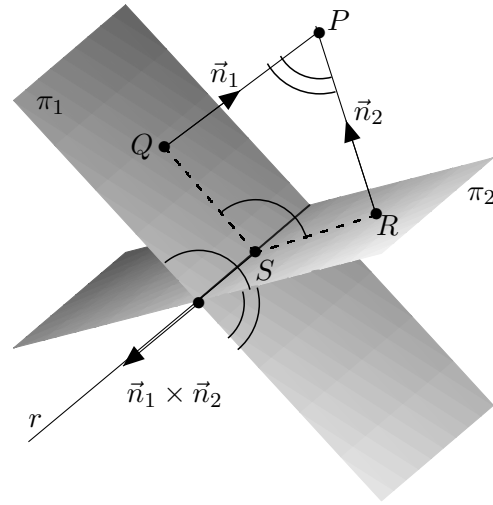
Consideremos dois planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Os vetores $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são respectivamente os vetores normais de π_1 e π_2 .

Já vimos que se $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ é l.d. os planos são paralelos ou coincidentes. Quando são coincidentes, dizemos que o ângulo entre π_1 e π_2 é zero. Quando são paralelos, não definimos o ângulo entre π_1 e π_2 .

Consideremos então o caso em que $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ é l.i. e portanto a intersecção $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, e tem sentido considerar os ângulos que se formam na intersecção, chamados *ângulos diedrais*, como na figura.

Observemos que, por um ponto P fora dos planos, podemos traçar retas perpendiculares aos planos π_1 e π_2 , que interceptam os planos nos pontos Q e R , respectivamente. Veja a ilustração ao lado. Os pontos P, Q e R determinam um plano que é ortogonal a π_1 e π_2 simultaneamente (um vetor normal deste plano é $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$) e que intercepta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ no ponto S , formando um quadrilátero $PQSR$.



Neste quadrilátero, os ângulos em R e Q são retos por construção, e os ângulos em S e P são suplementares e iguais aos ângulos diedrais que se formam entre os planos (confira na figura).

Definimos como ângulo entre os planos π_1 e π_2 , o menor dos suplementares, que é exatamente o ângulo entre as retas normais, $r_1(P, Q)$ e $r_2(P, R)$.

Logo, $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$, sendo o ângulo entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Em particular, se $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, temos que $\pi_1 \perp \pi_2$.

Ângulo entre uma reta e um plano

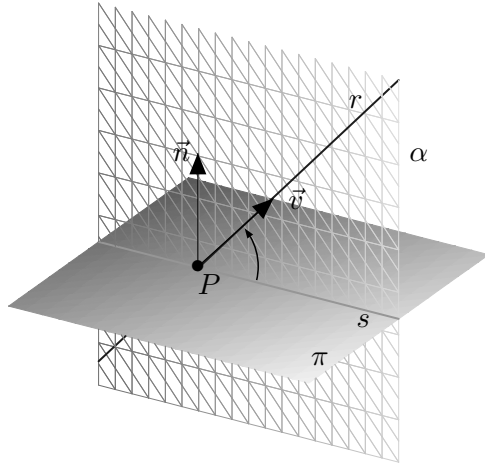
Consideremos uma reta dada por $r : X = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, e um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

1. Se $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ for l.d., então a reta r é perpendicular ao plano π , e portanto o ângulo entre r e π é reto (90 graus ou $\frac{\pi}{2}$ radianos). (Obs: Não confundir a notação π utilizada ao nome do plano

e o número real π usada na medição de ângulos!)

2. $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ for l.i, há três casos a considerar:

- (a) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, isto é, $\vec{v} \perp \vec{n}$, e $A \notin \pi$. Neste caso, a reta r é paralela ao plano π já que a direção de \vec{v} é uma direção do plano. Nenhum ponto da reta pertence ao plano, isto é, a intersecção $r \cap \pi$ é vazia. Neste caso, não há ângulo a considerar.
- (b) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, e $A \in \pi$. Como \vec{v} é um vetor do plano, r estará inteiramente contida em π . Neste caso, o ângulo entre a reta e o plano é zero.
- (c) $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$. Neste caso a reta r é transversal ao plano π , interceptando-o num único ponto P .



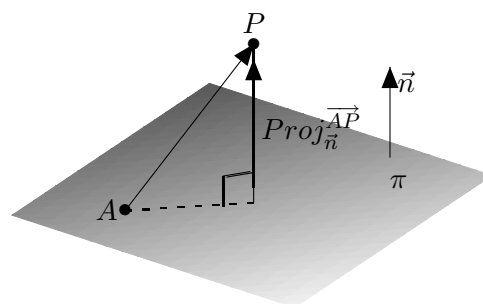
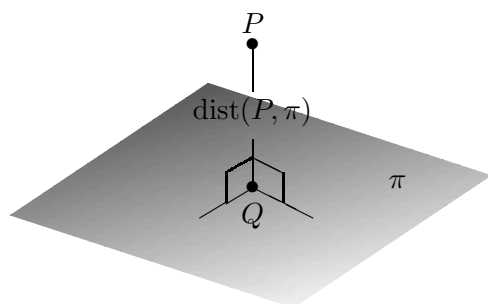
Podemos considerar então um plano α contendo a reta r e é perpendicular ao plano π dado, gerado por $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ e que passa pelo ponto P . A reta s de intersecção de α com o plano π é chamada projeção ortogonal de r sobre o plano π . O ângulo entre s e r em P é definido como o *ângulo entre a reta r e o plano π* . Pela própria construção, este ângulo é complementar do ângulo agudo entre as direções de \vec{v} e de \vec{n} .

$$\text{Logo, } \angle(r, \pi) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \arcsen \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}.$$

Distâncias

1. Distância entre ponto e plano.

A distância de um ponto P a um plano π é o comprimento do segmento PQ , com $Q \in \pi$ e $\overrightarrow{PQ} \perp \pi$. O ponto Q é a intersecção da reta normal a π que passa por P , com o plano π .

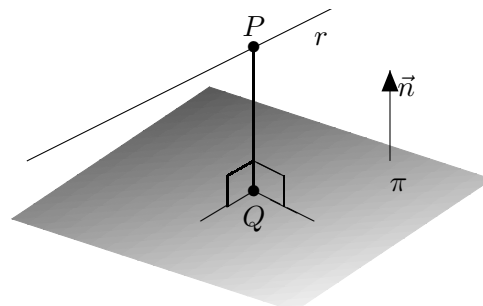


Também se pode obter a distância de P a π escolhendo qualquer ponto $A \in \pi$ e projetando ortogonalmente \overrightarrow{AP} sobre a normal \vec{n} do plano π e tomando o comprimento da projeção.

2. Distância entre reta e plano.

Se algum ponto da reta estiver também no plano, a distância é zero.

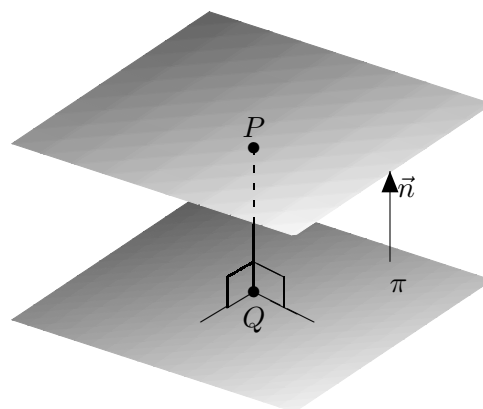
Se a reta for paralela ao plano, a distância da reta ao plano é a distância de qualquer um de seus pontos ao plano.



3. Distância entre dois planos.

A distância entre dois planos é zero se eles se interceptam ou são coincidentes.

A distância entre dois planos paralelos é a distância de qualquer ponto de um dos planos ao outro plano.



4. Distância entre ponto e reta no espaço.

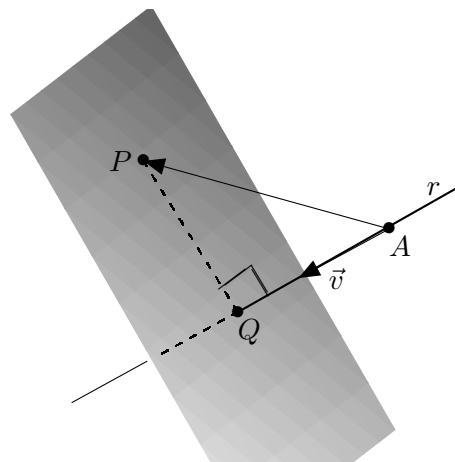
Dada uma reta $r : X = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, e um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ fora de r , a distância de P a r é o comprimento do segmento PQ perpendicular a r , com $Q \in r$.

Pode-se determinar Q como a intersecção de r com o plano π perpendicular a r passando por P , de equação geral

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Daí, basta calcular $|\overrightarrow{PQ}|$.

Mas também pode-se projetar o vetor \overrightarrow{AP} sobre o vetor \vec{v} da reta, obtendo um vetor \vec{v}_1 , donde o vetor $\overrightarrow{AP} - \vec{v}_1$ será ortogonal a r e seu comprimento é a distância procurada.

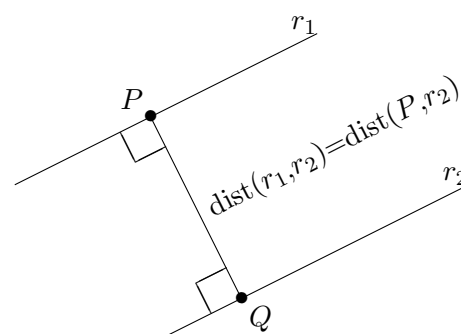


5. Distância entre duas retas.

Sejam as retas $r_1 : X = A + t\vec{v}_1$, $t \in \mathbb{R}$, e $r_2 : X = B + s\vec{v}_2$, $s \in \mathbb{R}$.

se r_1 e r_2 forem duas retas coincidentes ou duas retas concorrentes, a distância entre elas é zero.

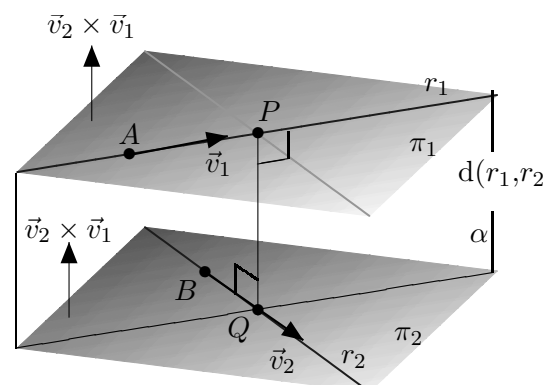
Se r_1 e r_2 são duas retas paralelas, a distância entre elas é o comprimento de um segmento PQ , onde $P \in r_1$, $Q \in r_2$ e PQ perpendicular às duas retas. Para se obter esta distância, basta escolher qualquer ponto $P \in r_1$ e calcular a distância de P a r_2 .



Também no caso de retas r_1 e r_2 reversas, a distância é dada como o comprimento do segmento PQ ,

onde $P \in r_1$, $Q \in r_2$ e PQ é perpendicular às duas retas.

O plano $\alpha : X = A + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é um plano contendo r_1 e a direção normal às duas retas. Logo o segmento PQ procurado está em α e portanto, $Q \in r_2$ só pode ser $r_2 \cap \alpha$. Fica como exercício encontrar P .



Essa distância pode ser obtida de diversas maneiras sem necessariamente obter-se os pontos P e Q .

- Os planos paralelos π_1 e π_2 contendo r_1 e r_2 respectivamente, como na figura, distam entre si $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(r_1, r_2)$.
- Mas tendo o plano π_1 contendo r_1 e paralelo a r_2 , a distância de r_1 a r_2 é a distância deste plano a r_2 .
- Ou ainda, tomando dois pontos quaisquer $A \in r_1$ e $B \in r_2$. e projetando ortogonalmente o vetor \overrightarrow{AB} sobre o vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, obtemos um vetor ortogonal às duas retas e de comprimento igual à distância.

Em todos os casos, a distância entre as retas r_1 e r_2 é o menor comprimento $|XY|$, onde $X \in r_1$ e $Y \in r_2$. E esse mínimo ocorre no segmento PQ perpendicular às duas retas.

Simétrico de um ponto P em relação a um plano π

Por $P \notin \pi$, considere a reta perpendicular a π que o intercepta num único ponto Q . O ponto simétrico a Q em relação a π é o ponto P' sobre esta reta que satisfaz $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$. Que estratégia você usaria para encontrar o ponto P' ?

