1ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos
Fundamentos Básicos de Grafos

1) O que é um grafo básico simples?

2) Enuncie o "Hand-shaking Lema" e explique como podemos usá-lo para verificar a condição de existência de um determinado grafo a partir de sua lista de graus.

3) Se um grafo G tem vértices de graus 1,2,3,3,4,5, quantas arestas ele tem? Justifique sua resposta.

4) Construa um grafo, simples ou não, com 10 vértices e graus (1,1,2,3,3,3, 4,6,7,9) ou prove que não é possível construí-lo

5) Considere um grupo de 1997 pessoas. É possível que cada uma conheça exatamente:
a) 3 pessoas?
b) 4 pessoas?

6) Um escultor deseja criar uma escultura que represente a paz mundial. Para isto, ele esculpirá 7 pilares (um para cada continente) e os colocará em um círculo. Depois, ele esticará um fio de ouro entre os pilares, de forma que, cada pilar estará conectado a 3 outros pilares. Embora a ideia seja boa, a escultura é possível de ser realizada? Porquê?

7) A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa? Prove sua resposta.
"O número de vértices de grau impar em um grafo é sempre par"

8) Para cada um dos itens a seguir, desenhe o grafo com a propriedade especificada ou justifique porque tal grafo não existe.

a) Grafo G com seis vértices, cada um com grau três.
b) Grafo G com cinco vértices, cada um com grau três.
c) Grafo G com quatro vértices, cada um com grau um.
d) Grafo G com seis vértices e quatro arestas.
e) Grafo G com quatro arestas e quatro vértices com graus 1,2,3,4.
f) Grafo G com quatro vértices de graus 1,2,3,4.
g) Grafo G básico simples com seis vértices e graus 1,2,3,4,5,5.
h) Grafo G básico simples com cinco vértices e graus 2,3,3,4,4.
i) Grafo G básico simples com cinco vértices e graus 2,2,4,4,4.

9) Suponha que numa sala encontra-se um grupo de 17 pessoas. É possível nesse grupo que cada pessoa conheça exatamente outras 5 pessoas? Porque? Justifique sua resposta.

10) Mostre que o número de mulheres é igual ao de homens em toda festa em que cada pessoa é amiga de precisamente k outras pessoas do sexo oposto presentes à festa.

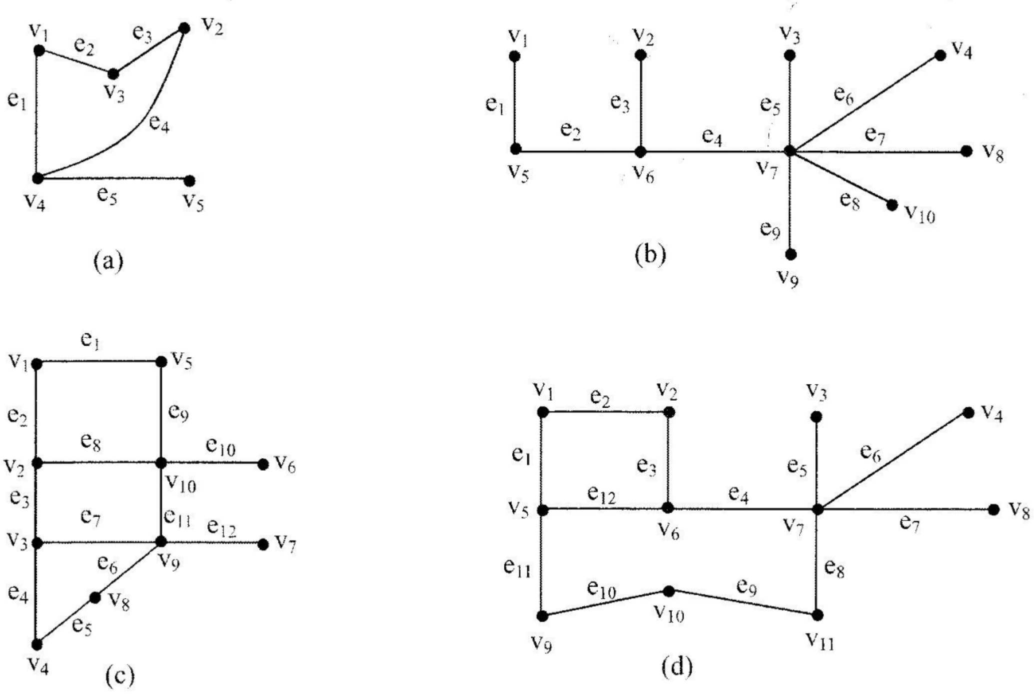
11) Seja $G = (V, E)$ um grafo básico simples com $|V| = n$ e $|E| = m$. Mostre que para que G possua t vértices de grau k e o restante dos vértices de grau k+1, então devemos ter $t = (k+1)n - 2m$

12) Mostre que um grafo G com n vértices e conectividade de vértices igual a k possui kn/2 arestas.

13) Prove ou refute a afirmação: "Não existe grafo de 12 vértices e 28 arestas tal que o grau de todo vértice seja apenas 3 ou 4".

14) Prove ou refute a afirmação: "Não existe grafo de 12 vértices e 28 arestas tal que o grau de todo vértice seja apenas 3 ou 6".

15) Verifique se cada um dos grafos a seguir é bipartido. Em caso positivo, redesenhe-o de forma a evidenciar a bipartição.



16) Como podemos determinar a lista de graus de um grafo G a partir de sua matriz de adjacências?

17) Sendo G um grafo bipartido completo, o que podemos concluir a respeito de seu complemento?

18) Mostre que um grafo simples e seu complemento não podem ser ambos desconexos.

19) Mostre que em todo grupo de 6 pessoas, sempre existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente (Teorema de Ramsey).

20) Mostre que em uma festa com $n > 1$ pessoas, existem ao menos 2 pessoas com o mesmo número de conhecidos.

21) Responda as questões a seguir:

a) A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.
Seja G um grafo com n vértices e H seu complemento. Então, para cada vértice v temos que $d_G(v) + d_H(v) = n - 1$, ou seja, o grau de um vértice v qualquer em G somado ao grau de seu correspondente vértice em H é sempre n-1
b) Suponha que G tenha exatamente um vértice par. Quantos vértices ímpares H tem? Justifique a resposta

22) Seja G = (V,E) um grafo bipartido com v vértices. Mostre que G tem no máximo $\frac{v^2}{4}$ arestas.

23) Pesquise sobre o teorema da amizade. Enuncie esse teorema. O que ele diz? Busque por maneiras de provar esse resultado tão conhecido em teoria dos grafos.