2.8 Problemas Propostos

1. Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

   Solução:

   $\vec{v} = B - A$

   $(2, -5) = (x, y) - (-1, 3)$

   Para x temos,

   $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$

   Para y temos,

   $y - 3 = -5 \Rightarrow y = -5 + 3 \Rightarrow y = -2$

   Logo, o ponto da extremidade e igual a:

   $\boxed{B = (1, -2)}$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que:

   a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$

   Solução:

   $4(\vec{u} - \vec{v}) + \dfrac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$

   Substituído os valores dos respectivos vetores,

   $4[(3, -1) - (-1, 2)] + \dfrac{1}{3}(x, y) = 2(3, -1) - (x, y)$

   Efetuando as operações;

   $(16, -12) + \left(\dfrac{x}{3}, \dfrac{y}{3}\right) = (6 - x, -2 - y)$

   $\left(16 + \dfrac{x}{3}, -12 + \dfrac{y}{3}\right) = (6 - x, -2 - y)$

   Para x temos a seguinte igualdade; $16 + \dfrac{x}{3} = 6 - x \Rightarrow \dfrac{x}{3} + x = 6 - x \Rightarrow \dfrac{x + 3x}{3} = -10 \Rightarrow$ $x + 3x = -10 \Rightarrow 4x = -30 \Rightarrow x = \dfrac{-30}{4} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{-15}{2}}$

   Para y temos a seguinte igualdade;

   $-12 + \dfrac{y}{3} = -2 - y \Rightarrow \dfrac{y}{3} + y = -2 - y \Rightarrow \dfrac{y + 3y}{3} = 10 \Rightarrow y + 3y = 30 \Rightarrow 4y = 30 \Rightarrow$ $y = \dfrac{30}{4} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{15}{2}}$

Resultado: $\boxed{\vec{w} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{15}{2}\right)}$

b)$3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$

Solução:

Substituído os valores dos respectivos vetores;

$3(x, y) - [2(-1, 2) - (3, -1)] = 2[(4(x, y) - 3(3, -1)]$

$(3x, 3y) - [(-2, -4) - (3, -1)] = 2[(4x, 4y) - (9, -3)]$

$(3x, 3y) - (-5, 5) = 2(4x - 9, 4y + 3)$

$(3x + 5, 3y - 5) = (2(4x - 9), 2(4y + 3))$

Para x temos a seguinte igualdade;

$3x + 5 = 8x - 18$

$3x - 8x = 18 - 5$

$-5x = -23$

$x = \frac{23}{5}$

Para y temos a seguinte igualdade;

$3y - 5 = 8y + 6$

$3y - 8y = 6 + 5$

$-5y = 11$

$y = \frac{-11}{5}$

$\boxed{\vec{w} = \left(\frac{23}{5}, \frac{-11}{5}\right)}$

3. Dados os Pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, 1)$, calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

Solução:

Resolvendo: $\overrightarrow{OA} \Rightarrow A - O \Rightarrow (-1, 3) - (0, 0) \Rightarrow (-1, 3)$

Resolvendo: $\overrightarrow{AB} \Rightarrow B - A \Rightarrow (2, 5) - (-2, 3) \Rightarrow (3, 2)$

Efetuando a Operação:

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = (2, 5) - (-1, 3) \Rightarrow (-4, 1)$

$\boxed{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = (-4, 1)}$

Resolvendo: $\overrightarrow{OC} \Rightarrow C - O \Rightarrow (3, -1) - (0, 0) \Rightarrow (3, -1)$

Resolvendo: $\overrightarrow{BC} \Rightarrow C - B \Rightarrow (3, -1) - (2, 5) \Rightarrow (1, -6)$

Efetuando a Operação:

$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC} = (3,-1) - (1,-6) \Rightarrow (2,5)$

$\boxed{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC} = (2,5)}$

Resolvendo: $\overrightarrow{BA} \Rightarrow B - A \Rightarrow (-1,3) - (2,5) \Rightarrow (-3,-2)$

Resolvendo: $\overrightarrow{CB} \Rightarrow B - C \Rightarrow (2,5) - (3,1) \Rightarrow (-1,6)$

Efetuando a Operação:

$3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB} = 3(-3,-2) - 4(-1,6) \Rightarrow (-9,-6) - (-4,24) \Rightarrow (-4,24)$

$\boxed{3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB} = (-5,-30)}$

4. Dados os vetores $\vec{u} = (3,-4)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{9}{4}, 3\right)$, verificar se existem números a e b tais que $\vec{u} = a\vec{v}$ e $\vec{v} = b\vec{u}$.

   Solução:

   Resolvendo para a;

   $$(3,-4) = a\left(\frac{-9}{4}, 3\right) \Rightarrow 3 = \frac{-9}{4}a \Rightarrow a = \frac{-3.4}{9} \Rightarrow a = \frac{-12}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{3}}$$

   Resolvendo para b;

   $$\left(\frac{-9}{3}, 3\right) = b(4,3) \Rightarrow 3 = b.4 \Rightarrow b = \frac{-3}{4} \Rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{4}}$$

5. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-4)$, $\vec{v} = (-5,1)$ e $\vec{w} = (-12,6)$, determinar k_1 e k_2 tal que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

   Solução:

   Substituindo os valores dos respectivos vetores;

   $(-12,6) = k_1(2,4) + k_2(-5,1)$ $(-12,6) = (2.k_1, -4.k_1) + (-5.k_2, k_2)$ Retirando a igualdade para os valores de x temos;

   $$\begin{cases} 2.k_1 + (-5.k_2) = -12 \\ -4.k_1 + k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.k_1 - 5.k_2 = -12 \\ -4.k_1 + k_2 = 6.(+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.k_1 - 5.k_2 = -12 \\ -20.k_1 + 5.k_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow.$$

   $-18k_1 = 18 \Rightarrow \boxed{k_1 = -1}$

   Substituindo k_1 na Primeira Equação temos;

   $$2(-1) - 5.k_2 = 12 \Rightarrow -2 - 5.k_2 = -12 \Rightarrow -5.k_2 = -12 + 2\ k_2 = \frac{-10}{-5} \Rightarrow \boxed{k_2 = 2}$$

6. Dados os pontos $A(-1,3)$,$B(1,0)$ e $C(2,-1)$, determinar D Tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

   Solução:

   Resolvendo $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{DC} = (2,1) = (x,y)$

   $\overrightarrow{BA} = (-1,3) - (1,0)$

   Substituido em $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ temos:

   $(2,-1) - (x,y) = (-1,3) - (1,0)$

   $(2-x,-1-y) = (-2,3)$

   Resolvendo para x:

   $2 - x = -2 \Rightarrow x = 4$

   Resolvendo para y:

   $-1 - y = 3 \Rightarrow y = -4$

   $\boxed{D(4,-4)}$

7. Dados os pontos $A(2,-3,1)$ e $B(4,5,-2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

   Solução:

   Resolvendo $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$: $\overrightarrow{AP} = (x,y,z) - (2,-3,1)$

   $\overrightarrow{PB} = (4,5,-2) - (x,y,z)$

   Substituindo em $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ temos:

   $(x,y,z) - (2,-3,1) = (4,5,-2) - (x,y,z)$

   $(x-2, y+3, z-1) = (4-x, 5-y, -2-z)$

   Resolvendo para x:

   $x - 2 = 4 - x \Rightarrow x = 3$

   Resolvendo para y:

   $y + 3 = 5 - y \Rightarrow 2y = 5 - 3 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

   Resolvendo para z:

   $z - 1 = -2 - z \Rightarrow 2z = -2 + 1 \Rightarrow 2z = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{2}$

   $\boxed{P\left(3,1,-\frac{1}{2}\right)}$

8. Dados os pontos $A(-1,2,3)$ e $B(4,-2,0)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

   Solução:

   $(x,y,z) - (-1,2,3) = 3[(4,-2,0) - (-1,2,3)]$

   $(x+1, y-2, z-3) = 3[(5,-4,-3)]$

   $(x+1, y-2, z-3) = (15,-12,-9)$

   Resolvendo para x:

$x + 1 = 15 \Rightarrow x = 114$

Resolvendo para y:

$y - 2 = -12 \Rightarrow y = -10$

Rsolvendo para z:

$z - 3 = -9 \Rightarrow z = -6$

$\boxed{P(14, -10, -6)}$

9. Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

   Solução:

   $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4)$

   $3\vec{v} = (6, 10, 4) - (3, 7, 1)$

   $3\vec{v} = (3, 3, 3)$

   $\boxed{\vec{v} = (1, 1, 1)}$

10. Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (4, -4, 14)$.

    Solução:

    $(-4, -4, 14) = a_1(1, -2, 1) + a_2(2, 0, -4) \Rightarrow (-4, -4, 14) = (a_1 + 2a_2, -2a_1, a_1 - a_1 - 4a_2) \Rightarrow$

    Fazendo o sistema:

    $$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -2a_1 = -4 \\ a_1 + 4a_2 = 14 \end{cases}$$

    Resolvendo para a_1 temos:

    $-2a_1 = -4 \Rightarrow a_1 = \frac{-4}{-2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$.

    Resolvendo para a_2 temos:

    $2 - 4.a_2 = 14 \Rightarrow -4a_2 = 14 - 2 \Rightarrow a_2 = \frac{12}{-4} \Rightarrow \boxed{a_2 = -3}$

11. Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

    Solução:

    Para os vetores sejam paralelos tem que satisfazer a seguinte equação:

    $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

    $(6, a, b) = \alpha(4, 1, -3) \Rightarrow 6 = \alpha 4$

    $\alpha = \frac{3}{2}$

    Substituindo α na primeira equação:

    $$a = \frac{3}{2}1 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ e } b = \frac{3}{2} - 3 \Rightarrow b = \frac{9}{2}$$

    $$\boxed{a = \frac{3}{2} \text{ e } b = -\frac{9}{2}}$$

12. Verificar se são colineares os pontos:

a)$A(-1,-5,0)$, $B(2,1,3)$ e $C(-2,-7,-1)$

Solução:

$det = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & -1 \end{pmatrix} = 0$ $\boxed{\text{Os pontos são colineares:}}$

b)$A(2,1,-1)$, $B(3,-1,0)$ e $C(1,0,4)$

Solução: $det = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 21$

$\boxed{\text{Os pontos não são colineares:}}$

13. Calcular a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3,1,-2)$, $B(1,5,1)$ e $C(a,b,7)$.

Solução:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,4,3)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (a-1, b-5, 6)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\dfrac{-2}{a-1} = \dfrac{4}{b-5} = \dfrac{3}{6}$

Simplificando:

$\dfrac{-2}{a-1} = \dfrac{4}{b-5} = \dfrac{1}{2}$

Para a: $a - 1 = -4 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

Para b: $b - 5 = 8 \Rightarrow \boxed{b = 13}$

14. Mostrar que os pontos $A(4,0,1)$, $B(5,1,3)$, $C(3,2,5)$ e $D(2,1,3)$ são vértices de um paralelogramo: **Solução:**

Para ser um paralelogramo tem que satisfazer a igualdade: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$[(5,1,3) - (4,0,1)] + [(2,1,3) - (4,0,1)] = (3,2,5) - (4,0,1)$

$(1,1,2) + (-2,1,2) = (-1,2,4)$

$\boxed{(-1,2,4) = (-1,2,4)}$

Satisfazendo a igualdade os pontos formam os vértices de um paralelogramo.

15. Determine o simétrico do Ponto $P(3,1,-2)$ em relação ao ponto $A(-1,0,-3)$. **Solução:**

X é ponto simétrico do ponto P em relação ao ponto X.

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AX}$

$(-1,0,-3) - (3,1,-2) = (x,y,z) - (-1,0,3) \Rightarrow (-4,-1,-1) = (x+1, y, z+3)$

Resolvendo para x: $x + 1 = -4 \Rightarrow x = -5$

Resolvendo para y: $y = -1 \Rightarrow y = -1$

Resolvendo para z: $z + 3 = -1 \Rightarrow z = -4$

$\boxed{X(-5, -1, -4)}$

3.16 Problemas Propostos:

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determine a, de modo $\vec{u}.\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}).\vec{w}$.

   Solução:

   $(1, a, -2a - 1).(a, a - 1, 1) = [(1, a, -2a - 1) + (a, a - 1, 1)].(a, -1, 1)$

   $(a + a(a - 1) - 2a - 1) = [(a + 1), a + a - 1, 2a - 1 + 1].(a, -1, 1)$

   $a + a^2 - a - 2a - 1 = [a + 1, 2a, -2a].(a, -1, 1)$

   $a^2 - 2a - 1 = a.(a + 1) - (2a - 1) - 2a$

   $a^2 - a^2 - 2a - a + 2a + 2a = 1 + 1$

   $\boxed{a = 2}$

2. Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determine o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$

   Solução:

   $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4 + 1, 1 - 0, 1 - 2) = (-3, 1, -1)$

   $\overrightarrow{BC} = C - B = (0 + 4, 1 - 1, 3 - 1) = (4, 0, 2)$

   $\overrightarrow{AC} = C - A = (0 + 1, 1 - 0, 3 - 2) = (1, 1, 1)$

   $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 4.(-3) + 0.1 + 2.(-1) = -12 - 2 = -14$

   $(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB})AC = (-14.1, -14.1, -14.1) = (-14, -14, -14)$.

   Portanto,

   $2\vec{x} - \vec{x} = (-14, -14, -14) + (-3, 1, -1) \Rightarrow$

   $\boxed{\vec{x} = (-17, -13, -15)}$

3. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

   Solução:

   $(3, 7, 1) + 2(x, y, z) = (6, 10, 4) - (x, y, z)$

   $(3, 7, 1) + (2x, 2y, 2z) = (6 - x, 10 - y, 4 - z)$

   $(3 + 2x, 7 + 2y, 1 + 2z) = (6 - x, 10 - y, 4 - z)$

   Para x, temos: $3 + 2x = 6 - x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

   Para y, temos: $7 + 2y = 10 - y \Rightarrow y = 1$

   Para z, temos: $1 + 2z = 4 - z \Rightarrow z = 1$

   $\boxed{\vec{v} = (1, 1, 1)}$

4. Dados os pontos $A(1,2,3)$, $B(-6,-2,3)$ e $C(1,2,1)$, determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

   Solução:

   $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 3.[(1,2,3) - (-6,-2,3)] - 2[(1,2,1) - (-6,-2,3)] \Rightarrow$

   $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 3.[(7,4,0)] - 2[(7,4,-2)] \Rightarrow$

   $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = (21,12,0) - (14,8,-4) \Rightarrow$

   $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = (7,4,4)$

   Calculo do Modulo:

   $|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} \Rightarrow$

   $|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}| = \sqrt{49 + 16 + 16} \Rightarrow$

   $|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}| = \sqrt{81} \Rightarrow$

   $|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}| = 9$

   Calculo do versor:

   $$\frac{3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}}{|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}|} = \frac{(7,4,4)}{9} \Rightarrow$$

   $$\boxed{\frac{3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}}{|3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}|} = \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)}$$

5. Verificar se são unitários os seguintes vetores: $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

   Solução:

   Calculo do Modulo do vetor $\vec{u}$:

   $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \Rightarrow$

   $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 1 + 1}$

   $\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{3} \Rightarrow \text{, ou seja, é diferente de 1 logo } \vec{u} \text{ não é unitário.}}$

   Calculo do Modulo do vetor $\vec{v}$:

   $$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} \Rightarrow$$

   $$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)} \Rightarrow$$

   $$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1+4+6}{6}\right)} \Rightarrow$$

   $$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{6}{6}\right)} \Rightarrow$$

$|\vec{v}| = \sqrt{1} \Rightarrow$

$\boxed{|\vec{v}| = 1, \text{ ou seja, o vetor } \vec{v} \text{ é unitário.}}$

6. Determinar o valor de n para o vetor $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.

   Solução:

   $|\vec{v}| = 1$

   $|\vec{v}| = \sqrt{n^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \Rightarrow$

   $|\vec{v}| = \sqrt{n^2 + \frac{4}{25} + \frac{16}{25}} \Rightarrow$

   $|\vec{v}| = \sqrt{n^2 + \frac{20}{25}}$

   Substituindo o valor de $|\vec{v}|$, temos:

   $1 = \sqrt{n^2 + \frac{20}{25}} \Rightarrow 1^2 = \left(\sqrt{n^2 + \frac{20}{25}}\right)^2 \Rightarrow n^2 + \frac{20}{25} = 1 \Rightarrow n^2 = 1 - \frac{20}{25} \Rightarrow n^2 = \frac{25-20}{25} \Rightarrow$

   $n^2 = \frac{5}{25} \Rightarrow n^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow n = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow n = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow n = \pm\frac{1.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} \Rightarrow$

   $\boxed{n = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}}$

7. Seja o vetor $\vec{v} = (m+7)\vec{i} + (m+2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

   Solução:

   $|(m+7)\vec{i} + (m+2)\vec{j} + 5\vec{k}| = \sqrt{38}| \Rightarrow$

   $\sqrt{(m+7)^2 + (m+2)^2 + 25^2} = \sqrt{38} \Rightarrow$

   $\sqrt{m^2 + 14m + 49 + m^2 + 4m + 4 + 25} = \sqrt{38} \Rightarrow$

   $(\sqrt{m^2 + 14m + 49 + m^2 + 4m + 4 + 25})^2 = (\sqrt{38})^2 \Rightarrow$

   $m^2 + 14m + 49 + m^2 + 4m + 4 + 25 = 38 \Rightarrow$

   $2m^2 + 18m + 78 = 38 \Rightarrow$

   $2m^2 + 18m + 78 - 38 = 0 \Rightarrow$

   $2m^2 + 18m + 40 = 0 \Rightarrow$

   $m^2 + 9m + 20 = 0 \Rightarrow$

   Resolvendo a equação 2 grau.

   $\Delta = 9^2 - 4.1.20 \Rightarrow$

   $\Delta = 81 - 80 \Rightarrow \Delta = 1$

   $m = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2.1} \Rightarrow$

$$m = \frac{-9 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$m' = \frac{-9 + 1}{2} \Rightarrow \boxed{m' = -4}$$

$$m'' = \frac{-9 - 1}{2} \Rightarrow \boxed{m'' = -5}$$

8. Dados os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$, determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

   Solução:

   $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow$

   $\vec{v} = m[(1, 2, 0) - (1, 0, -1)] + [(1, 2, 0) - (4, 2, 1)] \Rightarrow$

   $\vec{v} = m[(0, 2, 1)] + (-3, 0, -1) \Rightarrow$

   $\vec{v} = (0, 2m, m) + (-3, 0, -1) \Rightarrow$

   $\vec{v} = (-3, 2m, m - 1) \Rightarrow$

   $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (2m)^2 + (m - 1)^2} \Rightarrow$

   $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4m^2 + m^2 - 2m + 1} \Rightarrow$

   $|\vec{v}| = \sqrt{5m^2 - 2m + 10}$

   Substituindo o valor de $|\vec{v}| = 7$

   $7 = \sqrt{5m^2 - 2m + 10} \Rightarrow$

   $(\sqrt{5m^2 - 2m + 10})^2 = 7^2 \Rightarrow$

   $5m^2 - 2m + 10 = 49 \Rightarrow$

   $5m^2 - 2m - 39 = 0 \Rightarrow$

   Resolvendo a equação 2 grau.

   $\Delta = (-2)^2 - 4.5.(-39) \Rightarrow$

   $\Delta = 4 + 780 \Rightarrow$

   $\Delta = 784$

   $$m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{784}}{2.5}$$

   $$m = \frac{2 \pm 28}{10}$$

   $$m' = \frac{2 + 28}{10}$$

   $$m' = \frac{30}{10} \Rightarrow \boxed{m' = 3}$$

   $$m'' = \frac{2 - 28}{10}$$

   $$m'' = \frac{-26}{10} \Rightarrow m'' = \frac{-13}{5} \Rightarrow \boxed{m'' = -\frac{13}{5}}$$

9. Dados os pontos $A(3, m-1, -4)$ e $B(8, 2m-1, m)$, determinar m de modo que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35}$.

Solução:

$|(8, 2m-1, m) - (3, m-1, -4)| = \sqrt{35} \Rightarrow$

$|(5, 2m-1-m+1, m+4)| = \sqrt{35} \Rightarrow$

$\sqrt{(5)^2 + (m)^2 + (m^2) + 8m + 16} = \sqrt{35} \Rightarrow$

$\sqrt{25 + (m)^2 + (m^2) + 8m + 16} = \sqrt{35} \Rightarrow$

$\left(\sqrt{25 + (m)^2 + (m^2) + 8m + 16}\right)^2 = \left(\sqrt{35}\right)^2 \Rightarrow$

$25 + (m)^2 + (m^2) + 8m + 16 = 35 \Rightarrow$

$2m^2 + 8m + 16 + 25 - 35 = 0 \Rightarrow$

$2m^2 + 8m + 6 = 0 \Rightarrow$

$m^2 + 4m + 3 = 0 \Rightarrow$ Resolvendo a Equação 2 grau.

$\delta = 4^2 - 4.1.3$

$\delta = 16 - 12$

$\delta = 4$

$m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2.1}$

$m' = \dfrac{-4+2}{2} \Rightarrow m' = \dfrac{-2}{2} \Rightarrow \boxed{m' = -1}$

$m'' = \dfrac{-4-2}{2} \Rightarrow m'' = \dfrac{-6}{2} \Rightarrow \boxed{m'' = -3}$

10. Calcular o perímetro do triângulo do vértices $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, -1)$ e $C(2, -1, 0)$.

Solução:

$p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| \Rightarrow p = |(B - A)| + |(C - B)| + |(A - C)| \Rightarrow$

$p = |(-1, 0, -1) - (0, 1, 2)| + |(2, -1, 0) - (-1, 0, -1)| + |(0, 1, 2) - (2, -1, 0)| \Rightarrow$

$p = |(-1, -1, -3)| + |(3, -1, 1)| + |(-2, 2, 2)| \Rightarrow$

$p = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} + \sqrt{(9)^2 + (1)^2 + (1)^2} + \sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (4)^2} \Rightarrow$

$p = \sqrt{11} + \sqrt{11} + \sqrt{12} \Rightarrow$

$p = 2\sqrt{11} + \sqrt{12} \Rightarrow$

$p = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\boxed{p = 2(\sqrt{11} + \sqrt{3})}$

11. Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistantes dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

Solução:

Queremos encontrar um ponto $P(x,0,0)$, se os pontos são equidistantes satisfaz a seguinte equação: $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}|$.

Substituindo os pontos na equação:

$|(x,0,0) - (2,-3,1)| = |(-2,1,-1) - (x,0,0)| \Rightarrow$

$|x-2,3,-1| = |-2-x,1,-1| \Rightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + 1^2 + 1^1} \Rightarrow$

$\sqrt{x^2 - 4x + 14} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 2} \Rightarrow$

$(\sqrt{x^2 - 4x + 14})^2 = (\sqrt{x^2 + 4x + 4 + 2})^2 \Rightarrow$

$x^2 - 4x + 14 = x^2 + 4x + 4 + 2 \Rightarrow$

$-4x - 4x = -14 + 4 + 2 \Rightarrow$

$-8x = -8 \Rightarrow$

$x = 1 \Rightarrow$

Logo o ponto procurado $\boxed{P(1,0,0)}$

12. Seja o triângulo de vértices $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ e $C(3,-2,1)$. Determine o ângulo interno ao vértice B.

Solução:

$\overrightarrow{BA} = (-1,-2,4) - (-4,-2,0) = (3,0,4)$

$\overrightarrow{BC} = (3,-2,1) - (-4,-2,0) = (7,0,1)$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$

Pela equação do produto escalar:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|.cos\theta$

Substituíndo os valores temos:

$(3,0,4).(7,0,1) = 5.5\sqrt{2}.cos\theta \Rightarrow$

$(21 + 0 + 4) = 25\sqrt{2}.cos\theta \Rightarrow$

$25 = 25\sqrt{2}.cos\theta \Rightarrow$

$$cos\theta = \frac{25}{25\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\theta = arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{\theta = 45^o}$

13. Os pontos A,B,C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede $10cm$. Calcular $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Solução:

$|\overrightarrow{AB}| = 10cm$

$|\overrightarrow{AC}| = 10cm$

Equação do produto escalar:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.cos\theta \Rightarrow$

Substituindo a equação com os valores conhecidos:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10.10.cos60^o \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 100.0,5 \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 50}$

14. Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5,12 e 13. Calcular $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

    Solução:

    $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

    $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

    $cos\alpha = \dfrac{5}{13}$

    $cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} \Rightarrow \dfrac{5}{13} = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{5.13} \Rightarrow\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 25$

    $cos\theta = \dfrac{12}{13} = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|} \Rightarrow \dfrac{12}{13} = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{12.13} \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 144 \Rightarrow$

    $0 + 25 + 144 = 169$

    $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 169}$

15. Determinar os ângulos do triângulo de vértice $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$ e $C(-1,2,1)$.

    Solução:

    Calculando $\hat{A}$:

    $\overrightarrow{AB} = (1,0,-1) - (2,1,3) = (-1,-1,-4)$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18}$

    $\overrightarrow{AC} = (-1,2,1) - (2,1,3) = (-3,1,-2)$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

    Substituindo na equação $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.cos\hat{A}$ temos:

    $(-1,-1,-4).(-3,1,-2) = \sqrt{18}.\sqrt{14}.cos\hat{A} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = \dfrac{10}{\sqrt{18}.\sqrt{14}} \Rightarrow$

    $\hat{A} = arccos\dfrac{10}{3.2.\sqrt{7}} \Rightarrow$

    $\boxed{\hat{A} = arccos\dfrac{5}{3\sqrt{7}}}$

Calculando $\hat{B}$:

$\overrightarrow{BA} = (2,1,3) - (1,0,-1) = (1,1,4)$ $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$

$\overrightarrow{BC} = (-1,2,1) - (1,0-1) = (-2,2,2)$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = 2.\sqrt{3}$

Substituindo na equação $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|.cos\hat{B}$ temos:

$(1,1,4).(-2,2,2) = \sqrt{18}.2.\sqrt{3}.cos\hat{B} \Rightarrow cos\hat{B} = \dfrac{8}{\sqrt{18}.2.\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{B} = arccos\dfrac{8}{2.3.\sqrt{6}} \Rightarrow$

$\hat{B} = arccos\dfrac{4}{3.\sqrt{6}} \Rightarrow \hat{B} = arccos\dfrac{4.\sqrt{6}}{3.\sqrt{6}.\sqrt{6}} \Rightarrow \hat{B} = arccos\dfrac{4.\sqrt{6}}{3.6} \Rightarrow \hat{B} = arccos\dfrac{2.\sqrt{6}}{3.3} \Rightarrow$

$\boxed{\hat{B} = arccos\dfrac{2.\sqrt{6}}{9}}$

Calculando C:

$\overrightarrow{CA} = (2,1,3) - (-1,2,1) = (3,-1,2)$ $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{CB} = (1,0,-1) - (-2,21) = (2,-2,-2)$ $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2.\sqrt{3}$

Substituindo na equação $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|.cos\hat{C}$ temos:

$(3-1,2).(2,-2,-2) = \sqrt{14}.2.\sqrt{3}.cos\hat{C} \Rightarrow cos\hat{C} = \dfrac{4}{\sqrt{14}.2.\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{C} = arccos\dfrac{4}{2.\sqrt{42}} \Rightarrow$

$\hat{C} = arccos\dfrac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow \boxed{\hat{C} = arccos\dfrac{2}{\sqrt{42}}}$

16. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m+2)$ é $\dfrac{\pi}{3}$, determinar m.

Solução:

Fórmula do ângulo entre dois vetores :

$cos\Theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

$\vec{u}.\vec{v} = (2,1,-1).(1,-1,m+2) = 2.1 + 1(-1) + (-1)(m+2) = 2 - 1 - m - 2 = -1 - m$

$|\vec{u}| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)} = \sqrt{6}$ $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1 + (m+2)} = \sqrt{(2 + m^2 + 4m + 4)} = \sqrt{m^2 + 4m + 6}$

Substituindo os valores na equação do angulo entre vetores temos:

$cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(-1-m)}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{(-1-m)}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6}} \Rightarrow \sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6} = -2 - 2m \Rightarrow$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$6.(m^2+4m+6) = (-2-2m)^2 \Rightarrow 6m^2+24m+36 = 4+8m+4m^2 \Rightarrow 2m^2+16m+32 = 0 \Rightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Rightarrow$

Resolvendo a equação 2^o Grau.

$\Delta = 8^2 - 4.1.16 = 0$

$m = \dfrac{-8 \pm 0}{2.1}$

$\boxed{m = -4}$

17. Calcular n para que seja de 30^o o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e $\vec{j}$.

    Solução:

    $\vec{u} = (1, n, 2)$

    $|\vec{u}| = \sqrt{1 + n^2 + 4} = \sqrt{n^2 + 5}$

    $\vec{v} = (0, 1, 0)$

    $|\vec{v}| = 1$

    Substituindo os valores acima na equação: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos30^o$

    $(1, n, 2).(0, 1, 0) = \sqrt{(n^2 + 5)}.1.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

    $0 + n + 0 = \sqrt{(n^2 + 5)}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

    $n = \sqrt{(n^2 + 5)}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

    $n^2 = \left(\sqrt{(n^2 + 5)}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

    $n^2 = (n^2 + 5).\dfrac{3}{2^2} \Rightarrow$

    $n^2 = \dfrac{3.(n^2 + 5).}{4} \Rightarrow$

    $4n^2 = 3n^2 + 15 \Rightarrow$

    $n^2 = 15 \Rightarrow$

    $\boxed{n = \pm\sqrt{15}}$

18. Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o veor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.

    Solução:

    $\vec{a} + \vec{b} = (2, 1, \alpha) + (\alpha + 2, -5, 2) = (\alpha + 4, -4, \alpha + 2)$

    $\vec{c} - \vec{a} = (2\alpha, 8, \alpha) - (2, 1, \alpha) = (2\alpha - 2, 7, 0)$

    Para ser ortogonal $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{c} - \vec{a}) = 0$

    $(\alpha + 4, -4, \alpha + 2).(2, 1, \alpha) = (2\alpha - 2, 7, 0) = 0$

    $(\alpha + 4).(2\alpha - 2) - 4.7 + 0 = 0$

    $2\alpha^2 - 2\alpha + 8\alpha - 8 - 28 = 0$

    $2\alpha^2 + 6\alpha - 36 = 0$

    $\alpha^2 + 3\alpha - 18 = 0$

Resolvendo a equação 2^o grau.

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-18) \Rightarrow \Delta = 81$

$\alpha = \dfrac{-3 \pm 9}{2}$

$\alpha' = \dfrac{-3+9}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha' = 3}$

$\alpha'' = \dfrac{-3-9}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha'' = -6}$

19. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v}.\vec{u} = -18$.

Solução:

$\vec{u} = (1, -1, 2)$

$\vec{v} = \alpha(\vec{u}) \Rightarrow \vec{v} = (\alpha, -\alpha, 2\alpha)$

Substituindo os valores na equação:$\vec{v}.\vec{u} = -18$.

$(1, -2, 2)(\alpha, -\alpha, 2\alpha) = -18$

$\alpha + \alpha + 4\alpha = -18$

$6\alpha = -18$

$\alpha = \dfrac{-18}{6}$

$\alpha = -3$

$\boxed{\vec{v} = (-3, 3, -6)}$

20. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (-4, 2, 6)$ e colinear e ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

como o vetor $\vec{v}$ é colinear ao vetor $\vec{w}$, temos que:

Solução:

$\vec{v} = \alpha.\vec{w}$

$v = \alpha.(-6, 4, -2)$ onde α elementos dos reais para $\alpha = 1$, temos que o vetor $\vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{w}$, que isso não deixa de ser colinear, ou seja dois vetores iguais não deixa de ser colinear.

$\vec{v} = \alpha.(-6, 4, -2)$ para $\alpha = (-\dfrac{1}{2}).t$, onde t elemento dos reais, temos $\vec{v} = t.(3, -2, 1)$ para $t = -2$, temos que o vetor $\vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{w}$, que isso não deixa de ser colinear, ou seja dois vetores iguais não deixa de ser colinear.

o vetor $\vec{v} = \alpha.(-6, 4, -2)$ é também a solução do problema...mas o vetor $\vec{v} = t.(3, -2, 1)$ é uma forma simplificada.

o vetor $v = \alpha.(-6, 4, -2)$ e o vetor $\vec{v} = t.(3, -2, 1)$ são as mesmas soluções, basta tomar $\alpha = (-1/2).t$, onde t e k elementos dos reais.

então temos que a resposta é $\boxed{\vec{v} = t.(3, -2, 1)}$.

21. Determinar o vetor $\vec{v}$, colinear ao vetor $\vec{u} = (-4, 2, 6)$,tal que $\vec{v}.\vec{w} = -12$, sendo $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.

    Solução:

    $\vec{v} = \alpha.\vec{u}$

    $(x, y, z) = \alpha.(-4, 2, 6)$

    $(x, y, z) = (-4\alpha, 2\alpha, 6\alpha)$

    Substituindo x, y e z na equação:$\vec{v}.\vec{w} = -12$ temos:

    $(x, y, z).(-1, 4, 2) = -12 \Rightarrow$

    $(-4\alpha, 2\alpha, 6\alpha).(-1, 4, 2) = -12 \Rightarrow$

    $4\alpha + 8\alpha + 12\alpha = -12$

    $24\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

    $\vec{v} = -\frac{1}{2}.(-4, 2, 6)$

    $\boxed{\vec{v} = (2, -1, -3)}$.

22. Provar que os pontos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

    Solução:

    Verificar se existe algum ângulo de 90^o nos vértices.

    Testando $\hat{A}$

    $cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = \frac{(-1, 2, -3).(-8, -3, -4)}{|(-1, 2, -3)|.|(-8, -3, -4)|} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = \frac{14}{3, 74.9, 43} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = 0, 396 \Rightarrow \hat{A} = arccos0, 396 \Rightarrow \hat{A} \cong 60^o \Rightarrow \hat{A} \neq 90^o$

    Testando $\hat{B}$

    $cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} \Rightarrow$

    $cos\hat{B} = \frac{(1, -2, 3).(-7, -5, -1)}{|(1, -2, 3)|.|(-7, -5, -1)|} \Rightarrow$

    $cos\hat{B} = \frac{0}{3, 74.8, 66} \Rightarrow$

    $cos\hat{B} = 0 \Rightarrow \hat{B} = arccos0 \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 90^o}$.

    Verificar se os pontos estão ligado se for um triângulo tem que satisfazer a seguinte equação: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

Substituído os valores temos:

$(-1, 2, 3-) - (-8, -3, -4) = (7, 5, 1)$

$\boxed{(7, 5, 1) = (7, 5, 1)}$

Satisfeita a igualdade fica provado que os pontos estão ligados com o ângulo $\hat{B}$ sendo de 90^o logo se trata de um triângulo retângulo.

23. Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

    Solução:

    $\vec{a}.\vec{b} = 0$

    $(\alpha, 5, -4).((\alpha + 1), 2, 4) = 0 \Rightarrow$

    $\alpha(\alpha + 1) + 10 - 16 = 0 \Rightarrow$

    $\alpha(\alpha + 1) - 6 = 0 \Rightarrow$

    $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow$

    Resolvendo a equação 2^o grau temos:

    $\Delta = 1 - 4.1.(-6) \Rightarrow$

    $\Delta = 25$

    $\alpha = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow$

    $\alpha' = \dfrac{-1 + 5}{2} \Rightarrow \alpha' = 2$

    $\alpha'' = \dfrac{-1 - 5}{2} \Rightarrow \alpha'' = -3$

    $\boxed{\alpha' = 2 \text{ ou } \alpha'' = -3}$

24. Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 5)$ e $C(0, 4, 1)$.

    Solução:

    Verificar se existe algum ângulo de 90^o nos vértices.

    Testando $\hat{A}$

    $cos\hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = \dfrac{(1, 2, 1).(-2, 3, -2)}{|(1, 2, 1)|.|(-2, 3, -2)|} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = \dfrac{0}{3.4, 12} \Rightarrow$

    $cos\hat{A} = 0 \Rightarrow \hat{A} = arccos 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^o \Rightarrow \hat{A} = 90^o$

    $\boxed{\hat{A} = 90^o}$.

25. Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45^o, 60^o e 90^o? Justificar.

Solução:

Para serem ângulos diretores tem que satisfazer a formula: $cos^2 45^o + cos^2 60^o + cos^2 90^o = 1$

Resolvendo:

$(0,707)^2 + (0.5)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow$

$0.5 + 0.25 + 0 = 1 \Rightarrow$

$0.75 \neq 1$ logo: $\boxed{\text{Não são ângulos diretores.}}$

26. Os ângulos diretores de um vetor são de 45^o, 60^o e γ. Determinar γ.

Solução:

$cos^2 45^o + cos^2 60^o + cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$

$(0,707)^2 + (0.5)^2 + cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$

$0.5 + 0.25 + cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$

$cos^2\gamma = 1 - 0.75 \Rightarrow$

$cos^2\gamma = 0.25$

$\sqrt{(cos^2\gamma)} = \sqrt{0.25}$

$cos\gamma = \pm 0.5$

$\gamma = arccos \pm 0.5$

$\boxed{\gamma' = 60^o \text{ ou } \gamma'' = 120^o}$

27. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ e ortogonal ao eixo $0z$, $\vec{v}.\vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Solução:

$\vec{v} = (x, y, z) \Rightarrow$

Para ser Ortogonal a $0z = (0, 0, 1)$

$(x, y, z).(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 0.x + 0.y + 1.z = 0 \Rightarrow z = 0$

Usando a equação:$\vec{v}.\vec{w} = 6$ temos: $(x, y, 0).(0, 2, 3) = 6 \Rightarrow 0.x + 2y + 3.0 = 6 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

Usando a equação $|(x, 3, 0)| = 5$ temos:

$\sqrt{x^2 + 3^2 + 0^2} = 5 \Rightarrow x^2 + 9 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$

$\boxed{\vec{v} = (4, 3, 0) \text{ ou } \vec{v} = (-4, 3, 0)}$

28. Sabe-se que $|\vec{v}| = 2$, $cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $cos\beta = -\frac{1}{4}$. Determinar $\vec{v}$.

Solução:

$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{4+1}{16}\right) \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = 1 - \frac{5}{16} \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = \frac{16-5}{16} \Rightarrow$$

$$cos^2\gamma = \frac{11}{16} \Rightarrow$$

$$cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{11}{16}} \Rightarrow$$

$$cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{11}}{4} \Rightarrow$$

Para coordenada x :

$$x = cos\alpha.|\vec{v}| \Rightarrow x = \frac{1}{2}.2 \Rightarrow x = 1$$

Para coordenada y :

$$y = cos\beta.|\vec{v}| \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Para coordenada z :

$$z = cos\gamma.|\vec{v}| \Rightarrow z = \frac{\sqrt{11}}{4}.2 \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\boxed{\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{11}}{2})}$$

29. Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$

Solução:

Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ o vetor unitário pedido,então $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Como $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$,então $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 => (a, b, c).(2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 2a - b + c = 0$

Como temos duas equações,mas três incógnitas,então teremos que atribuir a uma incógnita um valor arbitrário. Logo, seja $a = 0$. Então

$c - b = 0 \Rightarrow c = b$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow b^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim,encontramos dois vetores unitários $\vec{u}$ e ortogonais a $\vec{v}$

$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $a = 0 \Rightarrow \vec{u} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $a = 0 \Rightarrow \vec{u} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\boxed{\vec{u} = (0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})}$

30. Determinar um vetor de modulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

Solução:

$\vec{v} = (1, -1, 2)$ Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos se existe uma constante real k diferente de zero, tal que:

$\vec{w} = k.\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = k.(1, -1, 2) = (k, -k, 2k)$

$|\vec{w}| = 5$

$|\vec{w}|^2 = k^2 + (-k)^2 + (2k)^2 = 6k^2$

$5^2 = 6k^2 \Rightarrow k = \pm\frac{5.\sqrt{6}}{6}$

$\boxed{\vec{w} = \left(\frac{5.\sqrt{6}}{6}, -\frac{5.\sqrt{6}}{6}, \frac{5.\sqrt{6}}{3}\right)}$ ou $\boxed{\vec{w} = \left(-\frac{5.\sqrt{6}}{6}, \frac{5.\sqrt{6}}{6}, -\frac{5.\sqrt{6}}{3}\right)}$

31. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -2)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Calcular $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 3.\sqrt{6}$

Solução:

$$\vec{v} = \vec{u}x\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}.$$

$\boxed{\vec{v} = (2, 7, 1)}$

Agora calculemos o ângulo que forma entre $\vec{v}$ e $\vec{j}$, ou seja, o ângulo que forma o vetor $\vec{v} = (2, 7, 1)$ com o vetor $\vec{j} = (0, 1, 0)$. teremos que $cos\theta = \frac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}|.|\vec{j}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{7}{3\sqrt{6}.1} = \frac{7}{3.\sqrt{6}}$

$cos\theta = \frac{7}{3\sqrt{6}}$

32. Determine o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v}.\vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v}.\vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$.

Solução:

Calculando $\vec{v}.(0, 0, 1) = 0$

$\vec{v}.(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow (x, y, z).(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow z = 0$

$(x, y, 0).(1, -1, 2) = -5 \Rightarrow x - y = -5 \Rightarrow x = y - 5$

$(x, y, 0).(2, 3, -1) = 10 \Rightarrow 2x + 3y = 10$ Substituindo x por $y - 5$ temos:

$2(y - 5) + 3y = 10 \Rightarrow 2y - 10 + 3y = 10 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = 4$

Substituindo $y = 4$ em $x = y - 5$ temos: $x = 4 - 5 \Rightarrow x = -1$

$\boxed{\vec{v} = (-1, 4, 0)}$

33. Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

Solução:

Formula da projeção de um vetor:$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}.\vec{v}$

Resolvendo: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{9}$

$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{(1, 2, -3).(2, 1, -2)}{\sqrt{9}.\sqrt{9}}.(2, 1, -2) \Rightarrow$

$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{(2 + 2 + 6)}{9}.(2, 1, -2)$

$\boxed{Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{10}{9}.(2, 1, -2)}$

34. Qual o comprimento do vetor projeção $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixos dos x.?

Solução:

Formula da projeção de um vetor:$Proj_{\vec{i}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{i}||\vec{i}|}.\vec{i}$

Resolvendo: $|\vec{i}| = 1$

$Proj_{\vec{i}}\vec{u} = \dfrac{(3, 5, 2).(1, 0, 0)}{1.1}.(1, 0, 0) \Rightarrow$

$Proj_{\vec{i}}\vec{u} = (3, 0, 0)$

$|Proj_{\vec{i}}\vec{u}| = \sqrt{3^2} = 3$

$\boxed{|Proj_{\vec{i}}\vec{u}| = 3}$

35. Se o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem co-senos diretores p, q e r e ângulos diretores α , β e γ, quais são os co-senos e os ângulos diretores de $\overrightarrow{BA}$.

Solução:

Será o mesmo co-seno diretor do vetor AB, já que o vetor tem mesmo modulo e direção, tendo apenas o sentido contrario.

$\boxed{-p\ ,\ -q \text{ e } -r}$

O cosseno diretor de um vetor é a componente do vetor naquela direção dividido pelo módulo do seu versor, ou seja, para cada componente (x,y,z) têm-se um cosseno diretor. Se o vetor possui mesmo módulo e direção, duas informações para a obtenção do mesmo não se alteram. o versor é o mesmo(módulo) e a distancia do vetor à componente(direção) é a mesma também.

$\boxed{\pi - \alpha, \pi - \beta \text{ e } \pi - \gamma}$

36. Mostrar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores, tal que $\vec{u} + \vec{v}$ e ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

    Solução:

    $\vec{u} = (a, b)$

    $\vec{v} = (x, y)$

    $\vec{u} + \vec{v} = (a + x, b + y)$

    $\vec{u} - \vec{v} = (a - x, b - y)$

    $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = (a + x, b + y).(a - x, b - y) = 0$

    $(a^2 - x^2, b^2 - y^2) = (0, 0)$

    $a^2 - x^2 = 0 \Rightarrow a^2 = x^2 \Rightarrow a = x$

    $b^2 - y^2 = 0 \Rightarrow b^2 = y^2 .....b = y$

    Então:

    $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a, b)$

    Logo:

    $\boxed{|\vec{u}| = |\vec{v}|}$

37. Mostrar que, se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $\vec{u}$ é também é ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$

    Solução:

    $\vec{u} = (x, y, z)$

    $\vec{v} = (a, b, c)$

    $\vec{z} = (e, f, g)$

    Agora se $\vec{u}$ e ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ o produto escalar entre eles é 0. assim:

    $(x, y, z).(a, b, c) = 0$, ou seja, $\vec{u}.\vec{v} = 0$

    $(xa, yb, zc) = 0$

    $(x, y, z).(e, f, g) = 0$, ou seja, $\vec{u}.\vec{z} = 0$

    $(xe, yf, zg) = 0$

    Agora vamos somar os dois, $(xa, yb, zc) + (xe, yf, zg) = 0$, já que ambos são iguais a 0. Agora vamos fazer $\vec{v} + \vec{w} = (x, y, z) + (e, f, g) = (x + e, y + f, z + g)$, se $\vec{u}$ e ortogonal a $\vec{v} + \vec{w}$ significa que

    $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = 0.$

    Aplicando a propriedade distributiva, temos $(u.v) + (u.w) = 0$, e isso e verdade, pois já provamos que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ e $\vec{u}.\vec{w} = 0$, nas primeiras contas. Substituindo teremos $0 + 0 = 0$ o que é verdade.

38. Calcular o modulo dos vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$ e $\vec{v} = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^o.

Solução:

$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2.|u|.|v|.cos60^o$

$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2.|u|.|v|.cos60^o$

No caso:

$|u + v|^2 = 4^2 + 3^2 + 2.4.3 * cos60^o = 16 + 9 + 24.\frac{1}{2} = 25 + 12 =$

$\boxed{|u + v| = \sqrt{37}}$

$|u - v|^2 = 4^2 + 3^2 - 2.4.3 * sen60^o = 16 + 9 - 24.\frac{1}{2} = 25 - 12$

$\boxed{|u - v| = \sqrt{13}}$

39. Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, e $|\vec{v}| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{3\pi}{2} rad$, determinar $|(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - 2\vec{v})|$.

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\theta = 2.3.cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$

Assim

$|(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - 2\vec{v})| =$

$|2\vec{u}^2 - 5\vec{u}.\vec{v} + 2\vec{v}^2| =$

Como $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$ e $\vec{v}.\vec{v} = |\vec{v}|^2$ temos:

$|2|\vec{u}|^2 - 5\vec{u}.\vec{v} + 2|\vec{v}|^2| =$

$|2.2^2 - 5\vec{u}.\vec{v} + 2.3^2| =$

$|8 + 15\sqrt{2} + 18| =$

$|26 + 15\sqrt{2}|$

Como o valor é positivo retira-se o modulo.

$\boxed{|(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - 2\vec{v})| = 26 + 15\sqrt{2}}$

40. Determinar $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$, sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = \sqrt{5}$.

Solução:

$0 = 0.0 = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$

$\vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{w}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{v} + \vec{w}.\vec{w} =$

$\vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} + \vec{w}.\vec{w} + 2.(\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}) =$

$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2.(\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}) =$

$4 + 9 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2.(\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}) = 0 \Rightarrow$

$\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = -\frac{(13 + 5)}{2}$

$\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = -\dfrac{18}{2}$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = -9}$

41. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma ângulo agudo com o eixo dos x. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 14$.

Solução:

Seja $\vec{v} = (x, y, z)$ o vetor procurado.

$\vec{v}$ é ortogonal ao vetor $\vec{a}$ logo $\vec{v}.\vec{a} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$ (1)

$\vec{v}$ é ortogonal ao vetor $\vec{b}$ logo $\vec{v}.\vec{b} = 0 \Rightarrow x + 4y + 3z = 0$ (2)

$|\vec{v}| = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (3)

De(1) temos $y = -\dfrac{x}{2}$ que substituído em (2) nos permite concluir que: $z = \dfrac{x}{3}$

Substituindo estes valores de y e z em (3) temos que

$x^2 = 144 => x = \pm 12.$

Porém, o problema nos diz que o ângulo Θ formado por v e o eixo dos x é agudo. Então o ângulo formado por $\vec{v}$ e o vetor unitário na direção do eixo x também é agudo. Este vetor é $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

$cos\theta = \dfrac{\vec{i}.\vec{v}}{|\vec{i}|.|\vec{v}|} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{x}{1.14} = \dfrac{x}{14}$ (4)

Como θ é agudo, seu cosseno é positivo. Então podemos concluir de (4) que x é positivo $\Rightarrow x = 12$.

$x = 12 \Rightarrow y = \dfrac{-x}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$ e $z = \dfrac{x}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

O vetor Procurado: $\boxed{\vec{v} = (12, -6, 4)}$

42. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular :

a) $\vec{w} \times \vec{v}$

Solução:

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + \vec{k} + 2\vec{j} - (2\vec{k} - 2\vec{i} + 0)$$

$\vec{w} \times \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\boxed{\vec{w} \times \vec{v} = (2, 2, -1)}$

b) $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$

Solução:

$\vec{w} - \vec{u} = (-1, 2, 2) - (2, -1, 1) = (-3, 3, 1)$

$$\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{k} - (3\vec{k} + \vec{j})$$

$\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u}) = -\vec{i} - \vec{j}$

$\boxed{\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u}) = (-1, -1, 0)}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

Solução:

$\vec{u} + \vec{v} = (2, -1, 1) + (1, -1, 0) = (3, -2, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} = (2, -1, 1) - (1, -1, 0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{u} + \vec{v} \times (\vec{u} - \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - (-2\vec{k} + 3\vec{j})$$

$\vec{u} + \vec{v} \times (\vec{u} - \vec{v}) = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\boxed{\vec{u} + \vec{v} \times (\vec{u} - \vec{v}) = (-2, -2, 2)}$

d) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$

Solução:

$(2\vec{u}) = 2(2, -1, 1) = (4, -2, 2)$

$(3\vec{v}) = 3(1, -1, 0) = (3, -3, 0)$

$$(2\vec{u}) \times (3\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{k} + 6\vec{j} - (-6\vec{k} - 6\vec{i})$$

$(2\vec{u}) \times (3\vec{v}) = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$

$\boxed{(2\vec{u}) \times (3\vec{v}) = (6, 6, -6)}$

e) $(\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{u} \times \vec{v})$

Solução:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} + \vec{j} - (-\vec{k} - \vec{i})$$

$(\vec{u}) \times (\vec{v}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, -1)$

$(\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{u} \times \vec{v}) = (1, 1, -1).(1, 1, -1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{u} \times \vec{v}) = 3}$

f) $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$ e $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$

Solução:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} + \vec{j} - (-\vec{k} - \vec{i})$$

$\vec{u}\times\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{v} = (1, 1, -1)$

$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = (1, 1, -1).(-1, 2, 2) = -1 + 2 - 2 = -1$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} - (\vec{k} + \vec{j})$$

$\vec{v}\times\vec{w} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{v}\times\vec{w} = (-2, -2, 1)$

$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (2, -1, 1).(-2, -2, 1) = -4 + 2 + 1 = -1$

$\boxed{(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = -1}$

g) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ e $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Solução:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} + \vec{j} - (-\vec{k} - \vec{i})$$

$\vec{u}\times\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{v} = (1, 1, -1)$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i} - (-\vec{k} - 2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\boxed{(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (4, -1, 3)}$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} - (\vec{k} + \vec{j})$$

$\vec{v}\times\vec{w} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k} - (2\vec{j} - 2\vec{i} + 2\vec{k})$$

$\boxed{\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}}$

h) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}\times\vec{w})$

Solução:

$$\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} - (2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})$$

$\vec{u}\times\vec{w} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{u} + \vec{v} = (2,-1,1) + (1,-1,0) = (3,-2,1)$

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u}\times\vec{w}) = (3,-2,1).(-4,-5,3) = -12 + 10 + 3 = 1$

$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u}\times\vec{w}) = 1}$

43. Dados os vetores $\vec{a} = (1,2,1)$ e $\vec{b} = (2,1,0)$, calcular:

a) $2\vec{a}\times(\vec{a} + \vec{b})$

Solução:

$\vec{a} + \vec{b} = (1,2,1) + (2,1,0) = (3,3,1)$

$2\vec{a} = 2(1,2,1) = (2,4,2)$

$$2\vec{a}\times(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k} - (6\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k})$$

$2\vec{a}\times(\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$

$\boxed{2\vec{a}\times(\vec{a} + \vec{b}) = (-2,4,-6)}$

b) $(\vec{a} + 2\vec{b})\times(\vec{a} - 2\vec{b})$

$2\vec{b} = 2(2,1,0) = (4,2,0)$

$\vec{a} + 2\vec{b} = (1,2,1) + (4,2,0) = (5,4,1)$

$\vec{a} - 2\vec{b} = (1,2,1)(4,2,0) = (-3,0,1)$

$$(\vec{a} + 2\vec{b})\times(\vec{a} - 2\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - (5\vec{j} - 12\vec{k})$$

$(\vec{a} + 2\vec{b})\times(\vec{a} - 2\vec{b}) = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k}$

$\boxed{(\vec{a} + 2\vec{b})\times(\vec{a} - 2\vec{b}) = (4,-8,12)}$

44. Dados os pontos $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ e $C(3,2,1)$ determinar o vetor $\overrightarrow{CB}\times(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$.

Solução:

$\overrightarrow{CB} = B - C = (1,2,-1) - (3,2,1) = (-2,0,-2)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,2,1) - (1,2,-1) = (2,0,2)$

$2\overrightarrow{CA} = 2(A - C) = 2[(2,-1,2) - (3,2,1)] = 2(-1,-3,1) = (-2,-6,2)$

$\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} = (2,0,2) - (-2,-6,2) = (4,6,0)$

$$\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -8\vec{j} - 12\vec{k} - (-12\vec{i})$$

$$\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) = 12\vec{i} - 8\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) = (12, -8, -12)}$$

45. Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} = \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

Solução:

$$2\vec{a} = 2(3, -1, -2) = (6, -2, -4)$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = (6, -2, -4) + (1, 0, -3) = (7, -2, -7)$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (1, 0, -3) - (3, -1, -2) = (-2, 1, -1)$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k} - (-7\vec{j} - 7\vec{i} + 4\vec{k})$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 9\vec{i} + 21\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\boxed{(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = (9, 21, 3)}$$

46. Dados os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, mostre que $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$

Solução:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} - (-12\vec{j} - 2\vec{i} - 20\vec{k})$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -19\vec{i} + 22\vec{j} + 23\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} - (-2\vec{j} + 8\vec{i} - 3\vec{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -1, 2).(-14, 22, 23) = -14 + (-22) + 46 = 10$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = (-6, 8, 7).(-5, 1, -4) = 30 + 8 - 28 = 10$$

$$\boxed{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = 10}$$

47. Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, -3, -1)$.

Solução:

Calcular o produto vetorial entre $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 6\vec{k} - (-2\vec{j} - \vec{k})$$

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \Rightarrow$

$(1, 2, m) = \alpha(1, 2, -5)$

$1 = \alpha 1 \Rightarrow \alpha = 1$

logo:

$m = \alpha - 5 \Rightarrow m = 1. - 5 \Rightarrow m = -5$

$\boxed{m = -5}$

48. Dados os vetores $\vec{v} = \left(a, 5b, -\dfrac{c}{2}\right)$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar x e y para que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

Solução:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 5b & -\frac{c}{2} \\ -3a & x & y \end{vmatrix} = 5by\vec{i} + (-3a)(-\tfrac{c}{2})\vec{j} + ax\vec{k} - (+ay\vec{j} + (-\tfrac{c}{2})x\vec{i} + 5b(-3a)\vec{k})$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(5by + \frac{cx}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{3ac}{2} - ay\right)\vec{j} + (ax + 15ab)\vec{k}$$

Igualando $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ temos:

$\dfrac{3ac}{2} - ay = 0 \Rightarrow ay = \dfrac{3ac}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3c}{2}$

$ax + 15ab = 0 \Rightarrow ax = -15ab \Rightarrow x = -15b$

$\boxed{x = -15b \text{ e } y = \dfrac{3c}{2}}$

49. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 3)$, Nas mesmas condições, determinar um vetor de modulo 5.

Solução:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{k} - (3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

Calculando o Modulo:

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3^2)} = 3\sqrt{3}$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \Rightarrow$

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}}, -\frac{3}{3\sqrt{3}}, -\frac{3}{3\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

Onde $\vec{u}$ é o vetor unitário que queremos encontrar.

Para encontrar o vetor na mesma direção de $\vec{u}$ com modulo 5 basta multiplicar pelo escalar 5, logo:

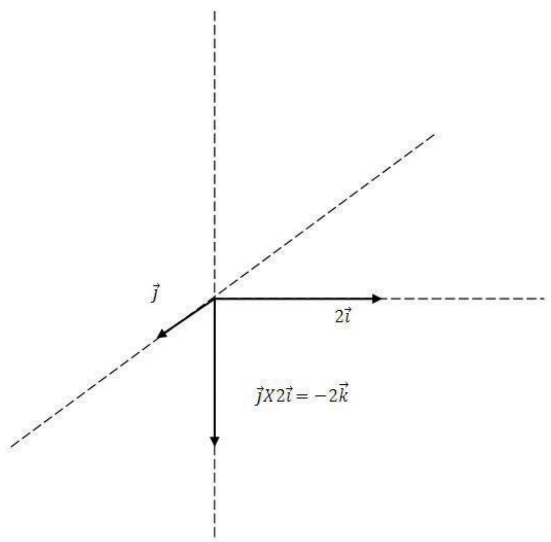
$$5\vec{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ e } 5\vec{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}$$

50. Mostrar num gráfico um representante de cada um dos seguintes vetores:

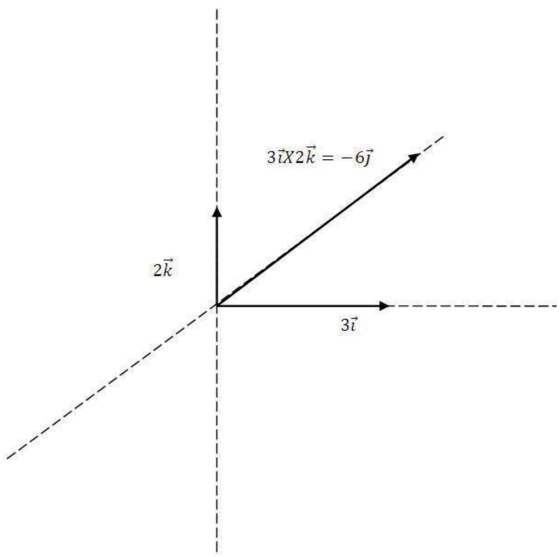
a) $\vec{j} \times 2\vec{i}$

Solução:



b) $3\vec{i} \times 2\vec{k}$

Solução:



51. Sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45^o é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Solução:

Usando a formula do modulo do produto vetorial temos:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sen\theta \Rightarrow$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 3.\sqrt{2}.sen45^o \Rightarrow$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 3.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = 3}$

52. Se $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{u}| = 3$ e 60^o é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $|\vec{v}|$.

Solução:

Usando a formula do modulo do produto vetorial temos:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.sen\theta \Rightarrow$

$3\sqrt{3} = 3.|\vec{v}|.sen60 \Rightarrow$

$3\sqrt{3} = 3.|\vec{v}|.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\vec{v}| = 3.\sqrt{3}.\frac{2}{3.\sqrt{3}}$

$\boxed{|\vec{v}| = 2}$

53. Dados os vetores $\vec{a} = (3,4,2)$ e $\vec{b} = (2,1,1)$, obter um vetor de modulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$.

Solução:

$2\vec{a} = 2.(3,4,2) = (6,8,4)$

$2\vec{a} - \vec{b} = (6,8,4) - (2,1,1) = (4,7,3)$

$\vec{a} + \vec{b} = (3,4,2) + (2,1,1) = (5,5,3)$

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 21\vec{i} + 15\vec{j} + 20\vec{k} - (35\vec{k} + 15\vec{i} + 12\vec{j})$$

$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 15\vec{k}$

$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = (6,3,-15)$

$|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-15)^2} = \sqrt{36 + 9 + 225} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$

$$\frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})}{|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|} = \left(\frac{6}{3\sqrt{30}}, \frac{3}{3\sqrt{30}}, -\frac{15}{3\sqrt{30}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

$$3.\frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})}{|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|} = 3.\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right) = \left(\frac{6}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{15}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\boxed{3.\frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})}{|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})|} = \left(\frac{6}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{15}{\sqrt{30}}\right)}$$

54. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3,1,2)$ e $\vec{v} = (4,-1,0)$.

Solução: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3\vec{k} + 8\vec{j} - (4\vec{k} - 2\vec{i} + 0)$

$\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-7)^2}$

$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{117}}$

55. Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-1)$, $C(5,7,-3)$ e $D(2,2,1)$ é um paralelogramo e calcule sua área.

Solução:

Para ser um paralelogramo a equação $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ tem que ser satisfeita.

$\overrightarrow{AB} = (4,3,-1) - (1,-2,3) = (3,5,-4)$

$\overrightarrow{AD} = (2,2,1) - (1,-2,3) = (1,4,-2)$

$\overrightarrow{AC} = (5,7,-3) - (1,-2,3) = (4,9,-6)$

Substituindo os respectivos valores na equação: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ temos:

$(3,5,-4)+(1,4,-2)=(4,9,-6)$

$(4,9,-6)=(4,9,-6)$, a igualdade foi satisfeita logo é um paralelogramo.

Calculo da área:

área$=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & -4\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=10\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}-(5\vec{k}=16\vec{i}-6\vec{j})=6\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{6^2+2^2+7^2}=\sqrt{36+4+49}=\sqrt{89}$

$\boxed{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{89}}$

56. Calcular a área do paralelogramo cujos os lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $-\vec{v}$, sendo $\vec{u}=(2,-1,0)$ e $\vec{v}=(1,-3,2)$.

Solução:

$2\vec{u}=(4,-2,0)$

$-\vec{v}=(-1,3,-2)$

$$(2\vec{u})\times(-\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{vmatrix}=4\vec{i}-12\vec{k}+0-(2\vec{k}+0-2\vec{j})=4\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}$$

$(2\vec{u})\times(-\vec{v})=4\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}$

$|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=\sqrt{4^2+(-8)^2+10^2}$

$|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=\sqrt{16+64+100}$

$|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=\sqrt{180}$

$|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=\sqrt{2^2.3^2.5}$

$|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=2.3\sqrt{5}$

$\boxed{|(2\vec{u})\times(-\vec{v})|=6\sqrt{5}}$

57. Calcule a área do triângulo de vértices a)$A(-1,0,2)$, $B(-4,1,1)$ e $C(0,1,3)$

Solução:

área do triângulo e dado pela formula:$\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-3,1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(1,1,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{k}-\vec{j}-(\vec{k}-3\vec{j}-\vec{i})$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 4 + 16}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\text{área do triângulo} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

área do triângulo= $\boxed{\sqrt{6}}$

b)$A(1,0,1)$, $B(4,2,1)$ e $C(1,2,0)$

Solução:

área do triângulo e dado pela formula: $\dfrac{|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}|}{2}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,2,0)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,2,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{k} + 0 - (0 - 3\vec{j} + 0)$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 23vecj + 6\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 9 + 36}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{49} = 7$

$\text{área do triângulo} = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{7}{2}$

área do triângulo= $\boxed{\dfrac{7}{2}}$

c)$A(2,3,-1)$, $B(3,1,-2)$ e $C(-1,0,2)$

Solução:

área do triângulo e dado pela formula: $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,-3,3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{k} + 3\vec{j} - (6\vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j})$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -9\vec{i} - 9\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + (-9)^2}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{81 + 81}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

área do triângulo $= \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$

área do triângulo$=\boxed{\dfrac{9\sqrt{2}}{2}}$

d)$A(-1, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$ e $C(0, 1, 1)$

Solução:

área do triângulo e dado pela formula:$\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, 3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{k} + \vec{j} - (\vec{k} + 9\vec{j} - \vec{i})$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-4)^2}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 64 + 16}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

área do triângulo $= \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$

área do triângulo$=\boxed{2\sqrt{6}}$

58. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidade $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.

Solução:

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, -1, 1)$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (2, 1, 2)$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{k} + 2\vec{j} - (-2\vec{k} - 6\vec{j} + \vec{i})$$

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA} = -3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$

$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 64 + 1} = \sqrt{74}$

$\boxed{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BA}| = \sqrt{74}}$

59. Calcular x, sabendo que $A(x,1,1)$, $B(1,-1,0)$ e $C(2,1,-1)$ são vértices de um triângulo de área $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Solução:

$\overrightarrow{AB} = (1-x, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (1, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-x & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + (-2x+4)\vec{k} + x\vec{j}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - x\vec{j} + (-2x+4)\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + x^2 + (4-2x)^2}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + x^2 + 16 - 4x + 4x^2}$

substituindo pelo valor da área do triangulo temos:

$$\frac{\sqrt{16 + x^2 + 16 - 4x + 4x^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow$$

Cancelando ambos os denominadores iguais a 2.

$\sqrt{16 + x^2 + 16 - 4x + 4x^2} = \sqrt{29} \Rightarrow$

Cancelando as raizes:

$16 + x^2 + 16 - 4x + 4x^2 = 29 \Rightarrow$

$5x^2 - 16x + 32 = 29 \Rightarrow$

$5x^2 - 16x + 32 - 29 = 0 \Rightarrow$

$5x^2 - 16x + 3 = 0 \Rightarrow$

Resolvendo a equação 2^o grau:

$\Delta = 256 - 60 = 196$

$x = \dfrac{16 \pm 14}{10}$

$x' = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$x'' = \dfrac{30}{10} = 3$

$$\boxed{x' = \frac{1}{5} \text{ ou } x'' = 3}$$

60. Dado o triângulo de vértices $A(0,1,-1)$, $B(-2,0,1)$ e $C(1,-2,0)$, calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

Solução:

vetor $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (-2-0)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (1+1)\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

vetor $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC} = (1-0)\vec{i} + (-2-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} - (-6\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$

$$area = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(52 + 4^2 + 7^2)}}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3.\sqrt{10}}{2}$$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(1+2)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2]} = \sqrt{14}$

$$area = \overrightarrow{BC}.\frac{h}{2}$$

$$h = 2.\frac{area}{\overrightarrow{BC}} = \frac{2.3.\sqrt{10}}{2.\sqrt{14}}$$

$$h = 3.\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$h = \frac{3.\sqrt{10}.\sqrt{14}}{14}$$

$$h = \frac{3.\sqrt{140}}{14}$$

$$h = \frac{3.2.\sqrt{35}}{14}$$

$$\boxed{h = \frac{3\sqrt{35}}{7}}$$

61. Determinar $\vec{v}$ tal que $\vec{v}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

Solução:

$\vec{v} = (x, y, z)$

Para ser ortogonal ao eixo dos y tem que satisfazer a seguinte formula $\vec{v}.\vec{j} = 0$

$(x, y, z) = (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$temos: $y = 0$

Onde temos: $\vec{v} = (x, 0, z)$

Para segunda condição: $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$:

$$\text{Calculando:}\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -x\vec{k} + 2z\vec{j} - (-z\vec{i} + x\vec{j}) = z\vec{i} + (2z - x)\vec{j} - x\vec{k}$$

Igualando os resultados temos de $\vec{u}$ com $\vec{v} \times \vec{w}$:

$(1, 1, -1) = (z, 2z - x, -x)$ onde temos:

$z = 1$ e $x = 1$

$\boxed{\vec{v} = (1, 0, 1)}$

62. Dados os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, -2)$ e $\vec{w} = (1, -1, 2)$, determine o vetor $\vec{x}$, paralelo a $\vec{w}$, que satisfaz à condição: $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

    Solução:

    $\vec{x} // \vec{w} \Rightarrow \vec{x} = \alpha\vec{w} \Rightarrow \vec{x} = \alpha(1, -1, 2) \Rightarrow \vec{x} = (\alpha, -\alpha, 2\alpha)$

    $$\vec{x} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & -\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha\vec{i} + \alpha\vec{k} - (2\alpha\vec{i} - \alpha\vec{j}) = -\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j} + \alpha\vec{k}$$

    Temos pela formula: $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$

    $(-\alpha, \alpha, \alpha) = (2, -2, -2)$

    Tiramos que: $\alpha = -2$:

    logo: $\vec{x} = \alpha\vec{w}$

    $\vec{x} = -2(1, -1, 2) = (-2, 2, -4)$

    $\boxed{\vec{x} = (-2, 2, -4)}$

63. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = (3, -6, 9)$, determinar o vetor $\vec{x}$ que satisfaz a relação $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{x}$ e que seja ortogonal ao vetor $\vec{w} = (1, -2, 3)$.

    Solução:

    $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{x}$

    $$\vec{u} \times \vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = z\vec{i} - 2z\vec{j} + (2y - x)\vec{k} = (z, -2z, 2y - x)$$

    mas como $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{x}$, então

    $(z, -2z, 2y - x) = (3, -6, 9)$

    pela igualdade acima

    $z = 3$ e $2y - x = 9$ (I)

    foi dito que

    $\vec{x}$ ortogonal $\vec{w} = (1, -2, 3)$, por isso:

    $\vec{x}.\vec{w} = 0$

    $(x, y, z).(1, -2, 3) = 0$ e por essa igualdade

    $x - 2y + 3z = 0 \Rightarrow x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow x - 2y = -9$ (II)

    como (I) = (II)

    $\vec{x} = 2y - 9$

    $\boxed{\vec{x} = (2y - 9, y, 3)}$

64. Demonstrar que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$, sabendo que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Solução:

Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$, então $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$:

Vou usar um exemplo:

$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = (2, 2, 2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

$(2, 2, 2)x(2, 2, 2) = (2, 2, 2)x(2, 2, 2) = (2, 2, 2)x(2, 2, 2) = 0$ Igualdade OK

mas na segunda igualdade não á verdadeiro

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a} = 3(2, 2, 2) = (6, 6, 6) \neq 0$

Só é verdadeiro quando: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = 0$

65. Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do espaço, com $\vec{v} \neq 0$:

a) determinar o número real r tal que $\vec{u} - r\vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{v}$;

Solução:

$(\vec{u} - r\vec{v}).\vec{v} = 0 \Rightarrow$

$\vec{u}.\vec{v} - r\vec{v}.\vec{v} = 0$

$-r\vec{v}.\vec{v} = -\vec{u}.\vec{v}$

$r|\vec{v}|^2 = \vec{u}.\vec{v}$

$\boxed{r = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}}$

b) mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.

Solução:

$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow$

$\vec{u} \times (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow$

$\vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times -\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times -\vec{v} \Rightarrow$

$\vec{u} \times -\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} \Rightarrow$

$-1(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{u}) \Rightarrow$

$\vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u} \Rightarrow$

$2(\vec{v} \times \vec{u}) \Rightarrow$

$2\vec{v} \times \vec{u}$

$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}}$

66. Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Solução:

Demonstração:

Seja um trapézio $ABCD$ de bases AB e CD.

Seja M o ponto médio de AD e N o ponto médio de BC

Construamos uma reta BM.

Prolongue com o lado DC.

Seja Q o ponto de interseção da reta BM com a reta que passa por DC.

Prolongue também o lado AD.

Anote as congruências de ângulos:

ângulos QMD e AMB congruentes (ângulos opostos pelo vértice) ângulos MDQ e MAB congruentes (como os lados AB e CD são paralelos, temos que a reta que passa por AD é uma transversal às bases. Portanto seus ângulos alternos internos são congruentes). O segmento AM é congruente ao segmento MD, pois M é o ponto médio do segmento AD.

Pelo caso ALA de congruência, temos que os triângulos MQD e AMB são congruentes.

Disso resulta que os segmentos MQ e MB são congruentes.

Agora observe o triângulo BQC. O segmento MN é a base média desse triângulo, pois M é ponto médio do segmento BQ e N é o ponto médio do segmento BC, ambos lados do triângulo.

Pelo teorema da base média do triângulo, temos que: o segmento MN é paralelo ao segmento CQ que por sua vez é paralelo ao lado AB. Podemos concluir que MN é paralelo as duas bases do trapézio. A medida de MN é metade da medida de CQ.

Da congruência dos triângulos AMB e QDM, temos que os segmentos QD e AB são congruentes.

Em fórmula:

$MN = \dfrac{QC}{2}$

Mas $QC = QD + DC$ e QD é congruente a AB

Portanto: $QC = AB + DC$

$$\boxed{MN = \frac{(AB + DC)}{2}}$$

67. Verificar se são coplanares os segmentos vetores:

a) $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$

Solução:

Para verificar se são coplanares basta verificar se o produto misto seja igual a 0 logo $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24+2+6+4-9+8 = 35$$

$\boxed{(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0 \text{ logo os vetores não são coplanares.}}$

b) $\vec{u} = (2,-1,0)$, $\vec{v} = (3,1,2)$ e $\vec{w} = (7,-1,2)$

Solução:

Para verificar se são coplanares basta verificar se o produto misto seja igual a 0 logo $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-14+0+6+4-0 = 0$$

$\boxed{(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \text{ logo os vetores são coplanares.}}$

68. Verificar se são coplanares os pontos:

a) $A(1,1,1)$, $B(-2,-1,-3)$, $C(0,2,-2)$ e $D(-1,0,-2)$

Solução:

Calculo dos Segmentos:

$\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-3)-(1,1,1) = (-3,-2,-4)$

$\overrightarrow{AC} = (0,2,-2)-(1,1,1) = (-1,1,-3)$

$\overrightarrow{AD} = (-1,0,-2)-(1,1,1) = (-2,-1,-3)$

Calculo do produto misto dos 3 segmentos

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 9-4-12-(8-9-6) = 9-4-12-8+9+6 = 0$$

$\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 0 \text{ logo, sim são coplanares.}}$

b) $A(1,0,2)$, $B(-1,0,3)$, $C(2,4,1)$ e $D(-1,-2,2)$

Solução:

Calculo dos Segmentos:

$\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)-(1,0,2) = (-2,0,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2,4,1)-(1,0,2) = (1,4,-1)$

$\overrightarrow{AD} = (-1,-2,2)-(1,0,2) = (-2,-2,0)$

Calculo do produto misto dos 3 segmentos

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2-(-8-4) = -2+8+4 = 10$$

$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 10 \text{ logo, não são coplanares.}}$

c) $A(2, 1, 3)$, $B(3, 2, 4)$, $C(-1, -1, -1)$ e $D(0, 1, -1)$

Solução:

Calculo dos Segmentos:

$\overrightarrow{AB} = (3, 2, 4) - (2, 1, 3) = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1) - (2, l, 3) = (-3, -2, -4)$

$\overrightarrow{AD} = (0, 1, -1) - (2, 1, 3) = (-2, 0, -4)$

Calculo do produto misto dos 3 segmentos

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 8 - (4 + 12) = 8 + 8 - 4 - 12 = 0$$

$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0 \text{ logo, sim são coplanares.}}$

69. Para que valor de m os pontos $A(m, 1, 2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(5, -1, 1)$ e $D(3, -2, -2)$ são coplanares?

Solução:

Calculo dos segmentos:

$\overrightarrow{BA} = (m, 1, 2) - (2, -2, -3) = (m - 2, 3, 5)$

$\overrightarrow{BC} = (5, -1, 1) - (2, -2, -3) = (3, 1, 4)$

$\overrightarrow{BD} = (3, -2, -2) - (2, -2, -3) = (1, 0, 1)$

Basta calcular o produto misto dos 3 segmentos

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} m-2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m - 2 + 12 - (5 + 9) = m - 2 + 12 - 5 - 9 = m - 4$$

para ser coplanar $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = 0$ logo temos

$m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$

$\boxed{m = 4}$

70. Determinar o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares:

a)$\vec{a} = (2, -1, k)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$ e $\vec{c} = (k, 3, k)$

Solução:

Para os vetores sejam coplanares tem que satisfazer a condição $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \\ k & 3 & k \end{vmatrix} = -2k + 3k + k - 12 = 2k - 12$$

Logo:$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ temos:

$2k - 12 = 0$

$\boxed{k = 6}$

b)$\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, -3)$ e $\vec{c} = (k, 1, k)$

Solução:

Para os vetores sejam coplanares tem que satisfazer a condição $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix} = -2k - 3k + k + 6 = -4k + 6$$

Logo:$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ temos:

$-4k + 6 = 0$

$\boxed{k = \frac{3}{2}}$

c)$\vec{a} = (2, k, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, k)$ e $\vec{c} = (3, 0, -3)$

Solução:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 3k^2 + 3k - 6 = 3k^2 + 3k - 18$$

Logo:$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ temos:

$3k^2 + 3k - 18 = 0$

$\theta = 1 - 4.1.(-6) = 25$

$k = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$k' = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2$

$k'' = \dfrac{-1 - 5}{2} = -3$

$\boxed{k' = 2 \text{ ou } k'' = -3}$

71. Sejam os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{w}_1 = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{w}_2 = \vec{u} + 3\vec{v}$ e $\vec{w}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ e $\vec{w}_3$.

Solução:

$\vec{w}_1 = (3, 3, 0) - (4, 0, 2) = (-1, 3, -2)$

$\vec{w}_2 = (1, 1, 0) - (6, 0, 3) = (7, 1, 3)$

$\vec{w}_3 = (1, 1, -2)$

$$Vol = \vec{w}_1.(\vec{w}_2 \times \vec{w}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 9 - 14 - (-2 - 3 - 42) = 44$$

$\boxed{Vol = 44un}$

72. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v}_3 = -4\vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 10.

Solução:

$\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$

$\vec{v}_2 = (6, m, -2)$

$\vec{v}_3 = (-4, 0, -1)$

$$Vol = \vec{v}_1.(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & m & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2m - 8 - (-6) = 2m - 2$$

pela definição temos:$Vol = |\vec{v}_1.(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)| = |2m - 2|$

Para $Vol = 10$ temos: $2m - 2 = 10$ logo $m = 6$ ou $2m - 2 = -10$ logo $m = -4$

$\boxed{m = 6 \text{ ou } m = -4}$

73. Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m + 1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42, Calcular m.

Solução:

$\vec{a} = (2, -1, -3)$

$\vec{b} = (-1, 1, -4)$

$\vec{c} = (m + 1, m, -1)$

$$Vol = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ m+1 & m & -1 \end{vmatrix} = -2+3m+4(m+1)-(-3(m+1)-8m-1) = 18m+6$$

pela definição temos:$Vol = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})| = |18m + 6|$

Para $Vol = 42$ temos: $18m + 6 = 42$ logo $m = 2$ ou $18m + 6 = -42$ logo $m = -\frac{-8}{3}$

$\boxed{m = 2 \text{ ou } m = -\frac{-8}{3}}$

74. Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, m, 1)$, determinar o valor de m para que seja de 20 unidades de volume o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Solução:

$\overrightarrow{AB} = (2, -1, -4) - (1, -2, 3) = (1, 1, -7)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0) - ()1, -2, 3) = (-1, 4, -3)$

$\overrightarrow{AD} = (-1, m, 1) - (1, -2, 3) = (-2, m + 1, -2)$

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & m+2 & -2 \end{vmatrix} = -8+7(m+2)+6-(56-3(m+2)+2) = 10m-40$$

pela definição temos:$Vol = |\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}))| = |10m - 40|$

Para $Vol = 20$ temos: $10m - 40 = 20$ logo $m = 6$ ou $10m - 40 = -20$ logo $m = 2$

$\boxed{m = 6 \text{ ou } m = 2}$

75. Calcular o volume do tetraedro $ABCD$, sendo dados:

a)$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(4, 2, 7)$.

Solução:

Pode-se dividir o paralelepípedo em dois prismas triangulares e estes prismas, por sua vez, em três tetraedros, todos com base e altura correspondentes àa base e altura do prisma. Resolução:

Tem-se que todos os tetraedros terão o mesmo volume, ou seja, terão $\frac{1}{6}$ do volume do paralelepípedo em questão, cujo volume é dado pelo produto misto de três vetores não coplanares que formam os lados do tetraedro (área da base e altura). Escolhendo $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e e $\overrightarrow{DC}$ tem-se:

$$Vol = \frac{1}{6}|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC})| = \frac{1}{6}(3, 2, 7).[(4, 1, 7) \times (4, 2, 6)] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.[18 + 56_56 - (28 + 42 + 48)] = \frac{12}{6} = 2$$

$\boxed{Vol = 2}$

b)$A(-1, 3, 2)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 0, 1)$ e $D(1, -2, 0)$. Para este, calcular também a medida da altura traçada do vértice A.

Solução:

$$Vol = \frac{1}{6}|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC})| = \frac{1}{6}(-2, 5, 2).[(-1, 3, -1) \times (-3, 2, 1)] = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.[-6 - 4 + 15 - (-18_4 - 5)] = \frac{24}{6} = 4$$

$\boxed{Vol = 4}$

$$Vol = (areadabase).h \Rightarrow h = \frac{Vol}{areadabase}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} - (-\vec{k} - 6\vec{i} - 2\vec{j}) = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Formula da altura: $h = \dfrac{|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC})|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}$

Substituindo pelos valores calculados temos:

$$h = \frac{24}{3\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{h = \frac{8}{\sqrt{10}}}$$

4.15 Problemas Propostos

1. Verificar se os pontos $P_1(5,-5,6)$ e $P_2(4,-1,12)$ pertence à reta.

   $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$

   Solução:

   Para saber se o ponto pertence a reta basta substituir o ponto P_1 na equação da reta se pertencer a igualdade permanece.

   $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-2} \Rightarrow \dfrac{5-3}{-1} = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{6-2}{-2} \Rightarrow \boxed{-2 = -2 = -2}$; logo o ponto pertence a reta dada.

   Para saber se o ponto pertence a reta basta substituir o ponto P_2 na equação da reta se pertencer a igualdade permanece.

   $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-2} \Rightarrow \dfrac{4-3}{-1} = \dfrac{-1+1}{2} = \dfrac{12-2}{-2} \Rightarrow \boxed{-1 \neq 0 \neq -5}$; logo o ponto não pertence a reta dada.

2. Determinar o ponto da reta

   r:$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

   que tem abscissa 4.

   Solução:

   Temos $x = 4$ substituindo na primeira equação para determinar t temos;

   $x = 2 - t \Rightarrow 4 = 2 - t \Rightarrow -t = 4 - 2 \Rightarrow t = -2$

   Para y temos;

   $y = 3 + t \Rightarrow y = 3 - 2 \Rightarrow y = 1$

   Para z temos;

   $z = 1 - 2t \Rightarrow z = 1 - 2(-2) \Rightarrow z = 1 + 4 \Rightarrow z = 5$

   $\boxed{P(4,1,5)}$

3. Determinar m e n para o ponto $P(3,m,n)$ pertença à reta

   s:$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 + t \end{cases}$

   Solução:

   Temos $x = 3$ substituindo na primeira equação para determinar t temos;

   $x = 1 - 2t \Rightarrow 3 = 1 - 2t \Rightarrow -2t = 3 - 1 \Rightarrow -2t = 2 \Rightarrow t = -1$

   Para y temos;

   $y = -3 - t \Rightarrow m = -3 - (-1) \Rightarrow m = -3 + 1 \Rightarrow m = -2$

Para z temos;

$z = -4 + t \Rightarrow n = -4 - 1 \Rightarrow n = -5$

$\boxed{P(3, -2, -5)}$

4. Determinar os pontos da reta $r : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ que tem

Solução:

(a) abscissa 5;

Para $x = 5$ temos;

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \Rightarrow \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \Rightarrow \dfrac{2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \Rightarrow -1 = y + 1 \Rightarrow y = -2$

$1 = \dfrac{z}{-2} \Rightarrow z = -2$

$\boxed{P(5, -2, -2)}$

(b) ordenada 4;

Para $y = 4$ temos;

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{4+1}{-1} \Rightarrow \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{5}{-1} \Rightarrow x - 3 = -10 \Rightarrow x = -7$

$\dfrac{5}{-1} = \dfrac{z}{-2} \Rightarrow -5 = \dfrac{z}{-2} \Rightarrow z = 10$

$\boxed{P(-7, 4, 10)}$

(c) cota 1.

Para $z = 1$ temos;

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1}{-2} \Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$\dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{1}{-2} \Rightarrow y + 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{P\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)}$

5. O ponto $P(2, y, z)$ pertence à reta determinada por $A(3, -1, 4)$ e $B(4, -3, -1)$. Calcular P.

Solução:

$(x, y, z) = (3, -1, 4) + [(4, -3, -1) - (3, -1, 4)]t \Rightarrow$

$(x, y, z) = (3, -1, 4) + (1, -2, -5)t \Rightarrow$

$$\text{r:}\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

Para $x = 2$ temos:

$2 = 3 + t \Rightarrow t = -1$

$y = -1 - 2.(-1) \Rightarrow y = -1 + 2 \Rightarrow y = 1$

$z = 4 - 5.(-1) \Rightarrow z = 4 + 5 \Rightarrow z = 9$

$\boxed{P(2, 1, 9)}$

6. Determinar as equações reduzidas, com variável independente x, da reta que passa pelo ponto $A(4, 0, -3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

   Solução:

   $(x, y, z) = (4, 0, -3) + (2, 4, 5)t \Rightarrow$

   $$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 4t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$$

   Encontrando o valor de t em função de x;

   $2t = x - 4 \Rightarrow t = \dfrac{x-4}{2}$

   Substituindo t nas outras duas equação temos;

   $y = 4\left(\dfrac{x-4}{2}\right) \Rightarrow y = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 8$

   $z = -3 + 5\left(\dfrac{x-4}{2}\right) \Rightarrow z = -3 + 5\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{2}\right) \Rightarrow z = -3 + \dfrac{5x}{2} - 10 \Rightarrow z = \dfrac{5x}{2} - 13$

   $$\boxed{\begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = \dfrac{5x}{2} - 13 \end{cases}}$$

7. Estabeleça as equações reduzidas (variável independente x) da reta pelos pares de pontos:

   a) $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$

   Solução:

   $(x, y, z) = (1, -2, 3) + [(3, -1, -1) - (1, -2, 3)]t \Rightarrow$

   $(x, y, z) = (1, -2, 3) + (2, 1, -4)t \Rightarrow$

   $$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

   Isolando t na primeira equação:

   $2t = x - 1 \Rightarrow t = \dfrac{x-1}{2}$

   Substituindo t nas outras duas equações temos;

   $y = -2 + \dfrac{x-1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-4 + x - 1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x-5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2}$

   $z = 3 - 4\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \Rightarrow z = 3 - 2x + 2 \Rightarrow z = -2x + 5$

$$\boxed{\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2} \\ \\ z = -2x + 5 \end{cases}}$$

b) $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, -1, 3)$

Solução:

$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + [(2, -1, 3) - (-1, 2, 3)]t \Rightarrow$

$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + (3, -3, 0)t \Rightarrow$

$$\text{r:}\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$$

Isolando t na primeira equação:

$3t = x + 1 \Rightarrow t = \dfrac{x+1}{3}$

Substituindo t na outra equação temos;

$y = 2 - 3\left(\dfrac{x+1}{3}\right) \Rightarrow y = 2 - x - 1 \Rightarrow y = -x + 1$

$$\boxed{\begin{cases} y = -x + 1 \\ \\ z = 3 \end{cases}}$$

8. Determinar as equações reduzidas tendo z como variável independente, da reta que passa pelos pontos $P_1(-1, 0, 3)$ e $P_2(1, 2, 7)$.

Solução:

$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + [(1, 2, 7) - (-1, 0, 3)]t \Rightarrow$

$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + (2, 2, 4)t \Rightarrow$

$$\text{r:}\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Isolando t na última equação temos;

$4t = z - 3 \Rightarrow t = \dfrac{z-3}{4}$

Substituindo t nas outras equações temos;

$x = -1 + 2\left(\dfrac{z-3}{4}\right) \Rightarrow x = -1 + \left(\dfrac{z-3}{2}\right) \Rightarrow x = \dfrac{-2+z-3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{z-5}{2} \Rightarrow x = \dfrac{z}{2} - \dfrac{5}{2}$

$y = 2.\left(\dfrac{z-3}{4}\right) \Rightarrow y = \dfrac{z-3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{z}{2} - \dfrac{3}{2}$

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{z}{2} - \dfrac{5}{2} \\ \\ y = \dfrac{z}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}}$$

9. Mostrar que os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$ e $C(4,-1,7)$ são colineares.

Solução:

Condição de alinhamento dos pontos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante a matriz:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 48 + 6 - 56 - 3 + 12 = -66 + 66 = 0$$

Logo o determinante e igual a 0 os pontos são colineares.

10. Qual deve ser o valor de m para que os pontos $A(3,m,1)$, $B(1,1,-1)$ e $C(-2,10,-4)$ pertençam a mesma reta?

Solução:

Condição de alinhamento dos pontos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12 + 2m + 10 + 4m + 30 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$6m + 30 = 0 \Rightarrow 6m = -30 \Rightarrow \boxed{m = -5}$

11. Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

$a)\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{z-3}{4} \\ y = 1 \end{cases}$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(3,0,4);\ P(-1,1,3)}$

$b)\begin{cases} x = 2y \\ z = 3 \end{cases}$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(2,1,0);\ P(0,0,3)}$

$c)\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(2,0,-1);\ P(0,-1,2)}$

d) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(1,0,0);\ P(0,3,-1)}$

e)) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(1,-1,1);\ P(0,0,3)}$

f) $x = y = z$

Solução:

$\boxed{\vec{v}(1,-1,1);\ P(0,0,0)}$

12. Determinar as equações das seguintes retas:

a) reta que passa por $A(1,-2,4)$ e é paralela ao eixo dos x;

Solução:

$A(1,-2,4) \parallel \vec{i}(1,0,0)$

$(x,y,z) = (1,-2,4) + (1,0,0)t$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$

Temos que a reta e paralelo ao eixo Ox podemos simplificar a equação;

$\boxed{\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}}$

b) reta que passa por $B(3,2,1)$ e é perpendicular ao plano xOz;

Solução:

$B(3,2,1) \perp xOz$

$B(3,2,1) \parallel Oy$

$B(3,2,1) \parallel \vec{j}(0,1,0)$

$(x,y,z) = (3,2,1) + (0,1,0)t$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$

Temos que a reta e paralelo ao eixo Oy podemos simplificar a equação;

$\boxed{\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}}$

c) reta que passa por $A(2,3,4)$ e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;

Solução:

$A(2,3,4) \perp xOy$

$A(2,3,4) \parallel Oz$

$A(2,3,4) \parallel \vec{k}(0,0,1)$

$(x,y,z) = (2,3,4) + (0,0,1)t$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Temos que a reta e paralelo ao eixo Oz podemos simplificar a equação;

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}}$$

d) reta que passa por $A(4,-1,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{i} - \vec{j}$;

Solução:

$A(4,-1,2) \parallel \vec{i} - \vec{j}$

$A(4,-1,2) \parallel \vec{k}(1,-1,0)$

$(x,y,z) = (4,-1,2) + (1,-1,0)t$

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Colocando t em função de y

$y = -1 - t \Rightarrow y + 1 = -t \Rightarrow t = -1 - y$

Substituindo t na função de x

$x = 4 + t \Rightarrow x = 4 - y - 1 \Rightarrow x = 3 - y$

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 - y \\ z = 2 \end{cases}}$$

e) reta que passa pelos pontos $M(2,-3,4)$ e $N(2,-1,3)$.

Solução:

$(x,y,z) = (2,-3,4) + [(2,-1,3) - (2,-3,4)]t$

$(x,y,z) = (2,-3,4) + [(0,2,-1)]t$

$x = 0;$

Colocando t em função de z

$z = 4 - t \Rightarrow -t = z - 4 \Rightarrow t = 4 - z$

Substituindo t na função de y

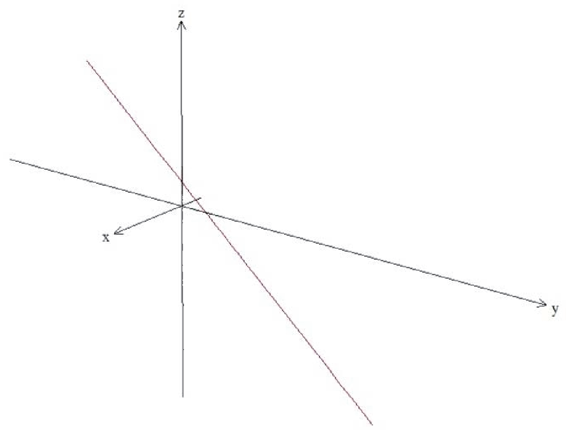
$y = -3 + 2(4 - z) \Rightarrow y = -3 + 8 - 2z \Rightarrow y = 5 - 2z$

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2z \end{cases}}$$

13. Representar graficamente as retas cujas equações são:

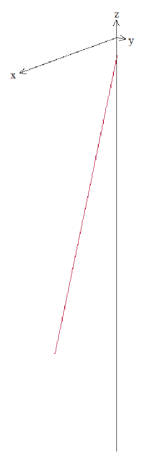
$a)\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -10 + 5t \\ z = 9 - 3t \end{cases}$

Solução:



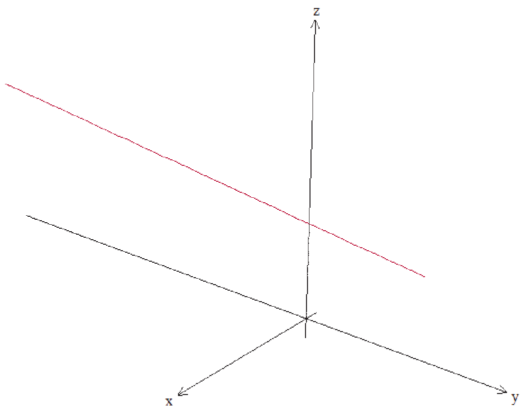
$b)\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 \\ z = -5 - 5t \end{cases}$

Solução:



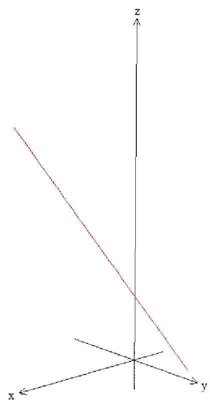
$$c)\begin{cases} y = -3x + 6 \\ \\ z = x + 4 \end{cases}$$

Solução:



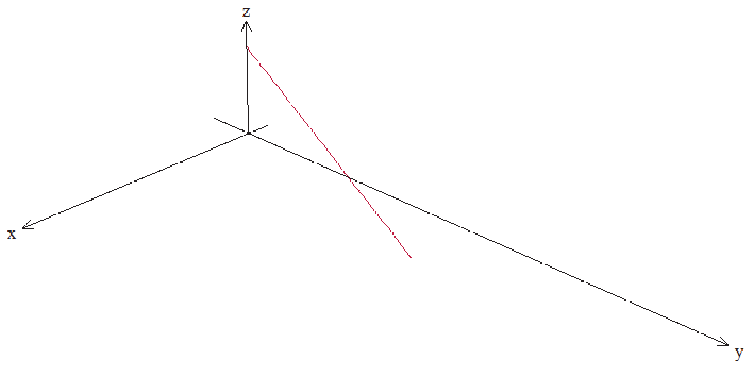
$$d)\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Solução:



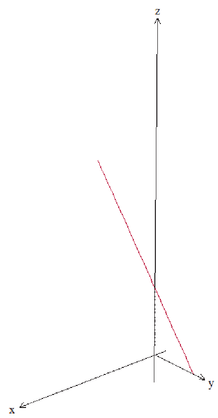
$$e)\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$$

Solução:



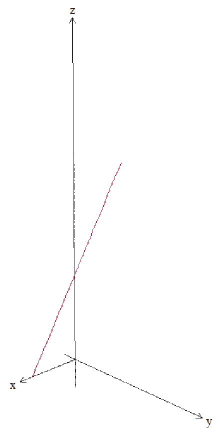
$$f)\begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$$

Solução:



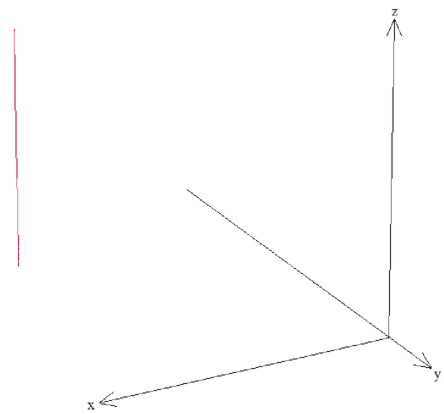
$$g)\begin{cases} z = 2y \\ x = 3 \end{cases}$$

Solução:



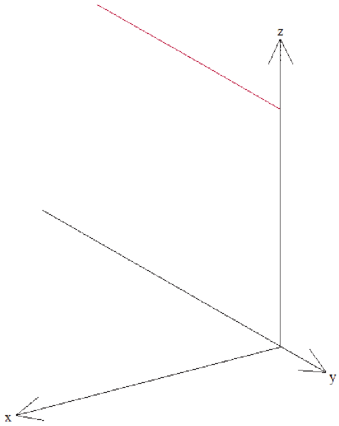
$$h)\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Solução:



$i)\begin{cases} x = -3 \\ \\ z = 4 \end{cases}$

Solução:



14. Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

$a)r : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ e $s : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-1}{2}$

Solução:

$\vec{v_r} = (-2, 2, -4)$

$\vec{v_s} = (4, 2, 2)$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_r}.\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}$

Substituindo os valores na formula:

$cos\theta = \dfrac{|(-2, 2, -4).(4, 2, 2)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2}.\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-8+4-8|}{\sqrt{4+4+16}.\sqrt{16+4+4}} \Rightarrow$

$cos\theta = \dfrac{|-12|}{24} \Rightarrow cos\theta = 0.5 \Rightarrow \theta = arccos 0.5$

$\boxed{\theta = 60^o}$

$b)r : \begin{cases} x = -2x - 1 \\ \\ z = x + 2 \end{cases}$ e $s : \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-3}$; $x = 2$

Solução:

Para $x = 0$ temos: $y = -1$ e $z = 2$ obtemos $P_1(0, -1, 2)$

Para $x = 1$ temos: $y = -3$ e $z = 3$ obtemos $P_2(1, -3, 3)$

$\vec{v_r}[(1, -3, 3) - (0, -1, 2)]$

$\vec{v_r}(1, -2, 1)$

$\vec{v_s}(0, 3, -3)$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_r}.\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}$

Substituindo os valores na formula:

$cos\theta = \dfrac{|(1, -2, 1).(0, 3, -3)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}.\sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-9|}{\sqrt{1 + 4 + 1}.\sqrt{9 + 9}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-9|}{\sqrt{6}.\sqrt{18}} \Rightarrow \theta = arccos\dfrac{9}{\sqrt{108}} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^o}$

$c)r : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Solução:

$\vec{v_r}(\sqrt{2}, 1, -3)$

$\vec{v_s}(0, 0, 1)$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_r}.\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}$

Substituindo os valores na formula:

$cos\theta = \dfrac{|(\sqrt{2}, 1, -3).(0, 0, 1)|}{\sqrt{2 + 1 + 9}.\sqrt{1}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-3|}{\sqrt{12}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow \theta = arccos\dfrac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^o}$

$d)r : \left\{ \dfrac{x - 4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z + 1}{-2} \right.$ e $s : \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y + 1}{4} = \dfrac{z - 2}{3} \end{cases}$

Solução:

$\vec{v_r}(2, -1, -2)$

$\vec{v_s}(0, 4, 3)$

Substituindo os valores na formula:

$cos\theta = \dfrac{|(2, -1, -2).(0, 4, 3)|}{\sqrt{2^2 + 1 + 4}.\sqrt{0 + 16 + 9}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-4 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}.\sqrt{16 + 9}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{10}{\sqrt{9}.\sqrt{25}} \Rightarrow \theta = arccos\dfrac{10}{3.5} \Rightarrow \theta = arccos\dfrac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 48.18^o}$

15. Determinar o valor de n para que seja de 30^o o ângulo entre as retas

$r\text{:}\left\{ \dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 4}{5} = \dfrac{z}{3} \right.$ e $s\text{:} \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

Solução:

$\vec{v_r}(4, 5, 3)$

para $x = 0$ em s temos: $P_1(0, 5, -2)$

para $x = 1$ em s temos: $P_2(1, n + 5, 0)$

Fazendo $P_2 - P_1 = (0, 5, -2) - (1, n + 5, 0) = (1, n, 2)$

$\vec{v_s}(1, n, 2)$

$cos30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_r}.\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}$

substituindo os valores temos:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|(4, 5, 3).(1, n, 2)|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + n^2 + 2^2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|4 + 5n + 6|}{\sqrt{16 + 25 + 9}.\sqrt{1 + n^2 + 4}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5n + 10}{\sqrt{50}.\sqrt{n^2 + 5}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5n + 10}{\sqrt{(n^2 + 5).50}} \Rightarrow$

$\left(\sqrt{3}.\sqrt{(n^2 + 5).50}\right)^2 = (10n+20)^2 \Rightarrow 3.(n^2+5).50 = 100n^2+400+400n \Rightarrow 150(n^2+5) = 100n^2 + 400 + 400n \Rightarrow 150n^2 + 750 = 100n^2 + 400 + 400n \Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0$

Resolvendo a equação do 2^o Grau temos:

$\delta = 64 - 4.1.7 = 36$

$n = \dfrac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow$

$n' = \dfrac{8 + 6}{2} = 7$

$n'' = \dfrac{8 - 6}{2} = -1$

$\boxed{n = 7 \text{ ou } -1}$

16. Calcular o valor de n para que seja de 30^o o ângulo que a reta r: $\begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$ forma com o eixo do y.

Solução:

Para $x = 0$ em r temos:

$y = 5$ e $z = -3$ temos: $P_1(0, 5, -3)$

Para $x = 1$ em r temos:

$y = n + 5$ e $z = -1$ temos: $P_2(1, n + 5, -1)$

$\vec{v_1} = P_2 - P_2 = (1, n, 2)$

$\vec{v_2} = (0, 1, 0)$

$cos30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|.|\vec{v_2}|}$

substituindo os valores temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|0+n+0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}.\sqrt{1^2+n^2+2^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|n|}{\sqrt{n^2+5}.\sqrt{1}} \Rightarrow (2n)^2 = (\sqrt{3}.\sqrt{n^2+5})^2 \Rightarrow$$

$4n^2 = 3n^2 + 15 \Rightarrow 4n^2 - 3n^2 = 15 \Rightarrow n^2 = 15 \Rightarrow n = \pm\sqrt{15}$

$\boxed{n = \pm\sqrt{15}}$

17. A reta $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ forma um ângulo de 60^o com a reta determinda pelos pontos $A(3, 1, -2)$ e $B(4, 0, m)$. Calcular o valor de m.

Solução:

$\vec{v_1} = (2, 1, -1)$

$\vec{v_2} = (1, -1, m + 2)$

$cos60^o = \dfrac{1}{2}$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_1}.\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|.|\vec{v_2}|}$

Substituindo os valores na formula:

$$cos60^o = \frac{|2+(-1)+(-m-2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+(m+2)^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-m-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{m+1}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+4m+6}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{m+1}{\sqrt{6m^2+24m+36}} \Rightarrow 2.(m+1) = \sqrt{6m^2+24m+36} \Rightarrow$$

$2m + 2 = \sqrt{6m^2+24m+36} \Rightarrow (2m+2)^2 = \left(\sqrt{6m^2+24m+36}\right)^2 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 = 6m^2 + 24m + 36 \Rightarrow -2m^2 - 16m - 32 = 0 \Rightarrow -m^2 - 8m - 32 = 0 \Rightarrow m^2 + 8m + 32 = 0 \Rightarrow$

Resolvendo a equação do 2^o Grau:

$\delta = 64 - 4.1.16 = 64 - 64 = 0$

$m = \dfrac{-8 \pm \sqrt{0}}{2.1}$

$m = \dfrac{-8}{2}$

$\boxed{m = -4}$

18. Calcular o valor de m para que os seguintes pares de retas sejam paralelas:

a: r:$\begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$ e s: $\dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y-1}{m}$; $z = 6$

Solução:

b: r:$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 \\ z = mt \end{cases}$ e s: $\dfrac{x-4}{6} = \dfrac{z-1}{5}$; $y = 7$

Solução:

a)

$\vec{v_r} = (-3, 1, 0)$ e $\vec{v_s} = (6, m, 0)$

Para ser paralelas:

$\dfrac{-3}{6} = \dfrac{1}{m} \Rightarrow -3m = 6 \Rightarrow \boxed{m = -2}$

b)

$\vec{v_r} = (-3, 0, m)$ e $\vec{v_s} = (6, 0, 5)$

$\dfrac{-3}{6} = \dfrac{m}{5} \Rightarrow 6m = -15 \Rightarrow m = \dfrac{-15}{6} \Rightarrow m = -\dfrac{5}{2}\ \boxed{m = -\dfrac{5}{2}}$

19. A reta passa pelo ponto $A(1, -2, 1)$ e é paralela à reta s:$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$

Se $P(-3, m, n) \in r$, determinar o ponto m e n.

Solução:

$r : (x, y, z) = (1, -2, 1) + (1, -3, -1)t$

$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Para o ponto dado $P(-3, m, n)$ tiramos t sabendo o valor de $x = -3$ substituindo na equação da reta r para x;

$x = 1 + t \Rightarrow t = -4$

Agora com valor de t encontramos m;

$m = -2 - 3(-4) \Rightarrow m = -2 + 12 \Rightarrow m = 10$

Agora com valor de t encontramos n;

$n = 1 - t \Rightarrow n = 1 - (-4) \Rightarrow n = 5$

$\boxed{P(-3, 10, 5)}$

20. Quais as equações reduzidas da reta que passa pelo ponto $A(-2, 1, 0)$ e é paralela à reta r:$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-1}$?

Solução:

$(x, y, z) = (-2, 1, 0) + (1, 4, -1)t$

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = -t \end{cases}$

Fazendo t em função de x.

$t = 2 + x$

Substituindo t na equação de y temos;

$y = 1 + 4(2 + x) \Rightarrow y = 1 + 8 + 4x \Rightarrow y = 4x + 9$

Substituindo t na equação de z temos;

$z = -(2 + x) \Rightarrow z = -x - 2$

$$\boxed{\begin{cases} y = 4x + 9 \\ z = -x - 2 \end{cases}}$$

21. A reta que passa pelos pontos $A(-2, 5, 1)$ e $B(1, 3, 0)$ é paralela à reta determinada por $C(3, -1, -1)$ e $D(0, y, z)$. Determinar o ponto D.

    Solução:

    $\vec{v_1} = B - A = (3, -2, -1)$

    $\vec{v_2} = C - D = (3, -1 - y, -1 - z)$

    Como os vetores são Paralelos temos:

    $\vec{v_1} = \alpha\vec{v_2}$

    $(3, -2, -1) = \alpha(3, -1 - y, -1 - z)$

    temos que:

    $\alpha = \dfrac{3}{3} = 1$

    Resolvendo y;

    $-2 = 1.(-1 - y) \Rightarrow -2 = -1 - y \Rightarrow y = 1$

    Resolvedo z;

    $-1 = 1.(-1 - z) \Rightarrow -1 = -1 - z \Rightarrow z = 0$

    $\boxed{D(0, 1, 0)}$

22. A reta

    $$\text{r:}\begin{cases} y = mx + 3 \\ \\ z = x - 1 \end{cases}$$

    é ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1, 0, m)$ e $B(-2, 2m, 2m)$. Calcular o valor de m.

    Solução:

    Para $x = 0$ temos; $y = 3$ e $z = -1$ $P_1 = (0, 3, -1)$

    Para $x = 1$ temos; $y = m + 3$ e $z = 0$ $P_2 = (1, m + 3, 0)$

    $\vec{v_r} = (1, m, 1)$

    $\vec{v_s} = (-3, 2m, m)$

    Temos $\vec{v_r} \perp \vec{v_s}$ temos; $\vec{v_r}.\vec{v_s} = 0$

    $(1, m, 1).(-3, 2m, m) = 0 \Rightarrow -3 + 2m^2 + m = 0 \Rightarrow 2m^2 + m - 3 = 0$

    Resolvendo a equação de 2^o grau;

    $\delta = 1 - 4.2(-3) = 25$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.2} \Rightarrow m = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$m' = \frac{-1+5}{4} \Rightarrow \boxed{m' = 1}$$

$$m'' = \frac{-1-5}{4} \Rightarrow \boxed{m'' = -\frac{3}{2}}$$

23. Calcular o valor de m para que sejam coplanares as seguintes retas

a) r:$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$ e s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{m}$

Solução:

Para $x = 0$ temos $y = 3$ e $z = -1$. $P_1 = (0, 3, -1)$

Para $x = 1$ temos $y = 5$ e $z = 2$. $P_2 = (1, 5, 2)$

$\vec{r} = P_2 - P_1 = (1, 2, 3)$

$\vec{s} = (2, -1, m)$

$P_3 = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (1, -3, 1)$

Condição de Coplanaridade:

$$(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1 + 2m - 18 - 4 + 3m + 3 = 0 \Rightarrow 5m - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$5m = 20 \Rightarrow m = \frac{20}{5} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

b) r:$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} y = 4x - m \\ z = x \end{cases}$

Solução:

Para reta r

$\vec{r} = (0, 0, 1)$

$P_1 = (-1, 3, 0)$

Para a reta s

$P_2 = (0, -m, 0)$

$P_3 = (1, 4 - m, 1)$

$\vec{s} = P_3 - P_2 = (1, 4 - m, 1) - (0, -m, 0) = (1, 4, 1)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -m - 3, 0)$

Condição de Coplanaridade:

$$(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & (-m-3) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + (-m - 3) - 0 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow -m - 3 =$$

$$4 \Rightarrow m = -4 - 3 \Rightarrow \boxed{m = -7}$$

c) r: $\dfrac{x-m}{m} = \dfrac{y-4}{-3}$; $z = 6$ e s: $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases}$

Solução:

Para reta r:

$\vec{r} = (m, -3, 0)$

$P_3 = (m, 0, 6)$

Para reta s:

$P_1 = (0, 4, 0)$

$P_2 = (1, 1, -2)$

$\vec{s} = P_2 - P_1 = (1, 1, -2) - (0, 4, 0) = (1, -3, -2)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (m, 0, 6)$

Condição de Coplanaridade:

$$(\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} m & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ m & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 18m + 6m + 18 = 0 \Rightarrow -12m = -18 \Rightarrow m = \frac{18}{12} \Rightarrow$$

$m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{3}{2}}$

24. Calcular o ponto de interseção das retas

a) r: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ z = 3x \end{cases}$

Solução:

Igualando as expressões com z temos:

$2x + 1 = 3x \Rightarrow x = 1$

Substituindo $x = 1$ em $y = 3x - 1$ temos:

$y = 3.1 - 1 \Rightarrow y = 2$

Substituindo $x = 1$ em $z = 3x$ temos:

$z = 3$

$\boxed{P(1, 2, 3)}$

b) r: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e s: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

Solução:

Isolando t em $y = 2 - t$ temos: $t = 2 - y$

Substituindo $t = 2 - y$ em $x = 5 + t$ temos: $y = 7 - x$

Com a igualdade $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3}$ substituindo $y = 7 - x$ temos:

$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{7-x}{3} \Rightarrow 3x - 6 = 14 - 2x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$

Substituindo $x = 4$ em $y = 7 - x$ temos: $y = 7 - 4 \Rightarrow y = 3$

Substituindo $y = 3$ em $t = 2 - y$ temos: $t = 2 - 3 \Rightarrow t = -1$

Substituindo $t = -1$ em $z = 7 - 2t$ temos: $z = 7 - 2.(-1) \Rightarrow z = 7 + 2 \Rightarrow z = 9$

$\boxed{P(4,3,9)}$

c) r:$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 4x - 10 \end{cases}$ e s: $x = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z-12}{-7}$

Solução:

Temos $x = \dfrac{y-7}{-3}$ substituindo em $y = 2x - 3$ temos;

$y = 2.\dfrac{y-7}{-3} - 3 \Rightarrow y = \dfrac{2y-14}{-3} - 3 \Rightarrow y = \dfrac{2y-14+9}{-3} \Rightarrow -3y = 2y - 5 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1$

Temos $x = \dfrac{z-12}{-7}$ substituindo em $z = 4z - 10$ temos;

$z = 4.\left(\dfrac{z-12}{-7}\right) - 10 \Rightarrow z = \dfrac{4z-48}{-7} - 10 \Rightarrow z = \dfrac{4z-48+70}{-7} \Rightarrow -7z = 4z - 22 \Rightarrow -11z = 22 \Rightarrow z = -2$

Temos $y = 1$ substituindo em $y = 2x - 3$ temos:

$1 = 2x - 3 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2$

$\boxed{P(2,1,-2)}$

d) r:$\begin{cases} y = -5 \\ z = 4x + 1 \end{cases}$ e s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-5}{-3}; y = -5$

Solução:

Temos $z = 4x + 1$ substituindo em $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-5}{-3}$ temos;

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{4x+1-5}{-3} \Rightarrow -3x + 3 = 8x - 8 \Rightarrow -11x = -11 \Rightarrow x = 1$

Temos $x = 1$ substituindo em $z = 4x + 1$ temos;

$z = 4.1 + 1 \Rightarrow z = 5$

$\boxed{P(1,-5,5)}$

25. Dadas as retas

r:$\dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-2}; x = 2$, s: $\begin{cases} y = 2x \\ z = x - 3 \end{cases}$ e h: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$, Determinar

a) o ponto de interseção de s, r e h

Solução:

Temos $x = 2$ substituindo em $y = 2x$ temos $y = 4$

Temos $x = 2$ substituindo em $x = 3 + t$ temos

$2 = 3 + t \Rightarrow -t = 3 - 2 \Rightarrow t = -1$

Temos $t = -1$ como $z = t$ temo $z = -1$

$\boxed{P(2, 4, -1)}$

b) o ângulo entre r e s.

Solução:

$\vec{r} = (2, -2, 0)$

Para reta s temos;

Para $x = 0$ temos $y = 0$ e $z = -3$ $P_1 = (0, 0, -3)$

Para $x = 1$ temos $y = 2$ e $z = -2$ $P_2 = (1, 2, -2)$

$\vec{r} = P_2 - P_1 = (1, 2, -2) - (0, 0, -3) = (1, 2, 1)$

Formula do ângulo entre vetores: $cos\theta = \dfrac{|\vec{v_r}.\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|.|\vec{v_s}|}$

substituindo os valores temos:

$cos\theta = \dfrac{|(2, -2, 0).(1, 2, 1)|}{|(2, -2, 0)|.|(1, 2, 1)|} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|2 + (-4) + 0|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{|-2|}{\sqrt{8}.\sqrt{6}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{2}{2.\sqrt{2}.\sqrt{6}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
$cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \boxed{\theta = arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

26. Em que ponto a reta que passa por $A(2, 3, 4)$ e $B(1, 0, -2)$ intercepta o plano xy?

Solução:

$\vec{v} = B - A = (1, 0, -2) - (2, 3, 4) = (-1, -3, -6)$

Encontrando as equações Paramétricas da reta:

$(x, y, z) = (2, 3, 4) + (-1, -3, -6)t$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4 - 6t \end{cases}$$

Como o ponto intercepta o plano xy temos que $z = 0$

Substituindo $z = 0$ em $z = 4 - 6t$ temos $0 = 4 - 6t \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$

Substituindo $t = \dfrac{2}{3}$ em $x = 2 - t$ temos $x = 2 - \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{6-2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

Substituindo $t = \dfrac{2}{3}$ em $y = 3 - 3t$ temos $y = 3 - 3.\left(\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow y = 3 - \dfrac{6}{3} \Rightarrow y = 1$

$\boxed{P\left(\dfrac{4}{3}, 1, 0\right)}$

27. Sejam as retas

$$r:\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = mt \end{cases} \text{ e s: } \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Solução:

Isolando t na equação $x = 2 + 3t$ temos $-3t = 2 - x \Rightarrow t = \dfrac{2-x}{-3}$

Substituindo $t = \dfrac{2-x}{-3}$ em $y = 4 + 5t$ temos

$y = 4 + 5.\left(\dfrac{2-x}{-3}\right) \Rightarrow y = 4 + \dfrac{10-5x}{-3} \Rightarrow y = \dfrac{-12+10-5x}{-3} \Rightarrow y = \dfrac{-2-5x}{-3}$

Substiuindo $y = \dfrac{-2-5x}{-3}$ em $y = 2x + 1$ temos

$\dfrac{-2-5x}{-3} = 2x + 1 \Rightarrow -2 - 5x = -6x - 3 \Rightarrow x = -1$

Substituindo $x = -1$ em $y = 4 + 5x$ temos $y = 4 + 5.(-1) \Rightarrow y = 4 - 5 \Rightarrow y = -1$

Subtituindo $x = -1$ em $z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$ temos $z = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{3}{2} \Rightarrow z = -2$

Subtituindo $x = -1$ em $t = \dfrac{2-x}{-3}$ temos $t = \dfrac{2-(-1)}{-3} \Rightarrow t = -1$

Subtituindo $t = -1$ e $z = -2$ em $z = mt$ temos $-2 = m.(-1) \Rightarrow m = 2$

a) calcular o valor de m para que r e s sejam concorrentes;

$\boxed{m = 2}$

b) determinar, para o valor de m, o ponto de interseção de r e s.

$\boxed{P(-1, -1, -2)}$

28. Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelos ponto $A(3, 2, 1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r:\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \text{ e s: } \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$$

Solução:

Calculo do Vetor diretor de r

$v_r = (0, 0, 1)$

Calculo do Vetor diretor de s

Para $x = 0$ temos; $y = 1$, $z = -3$ logo; $P_1 = (0, 1, -3)$

Para $x = 1$ temos; $y = -1$, $z = -4$ logo; $P_2 = (1, -1, -4)$

$\vec{P_2} = (1, -1, -4) - (0, 1, -3) = (1, -2, -1)$

Calculando o Vetor diretor $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \vec{j} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$\vec{v} = (2, 1, 0)$

Calculando a equação paramétrica da reta com o ponto $A = (3, 2, 1)$ e o vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}}$$

29. Estabelecer as equações da reta que passa pela origem e é simultaneamente ortogonal às retas

r: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$ e s: $\begin{cases} x = 3x - 1 \\ \\ z = -x + 4 \end{cases}$

Solução:

Para a reta s atribuimos $x = 0$ temos $y = -1$ e $z = 4$ logo $P_1 = (0, -1, 4)$

Para a reta s atribuimos $x = 1$ temos $y = 2$ e $z = 5$ logo $P_2 = (1, 2, 5)$

$\vec{v_s} = P_2 - P_1 = (1, 2, 5) - (0, -1, 4) = (1, 3, 1)$

Para a reta r temos;

$\vec{v_r} = (2, -1, -2)$

Calculando o Produto Vetorial entre $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$ temos:

$$\vec{v} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} - 2\vec{j} + 6\vec{i} + \vec{k} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (5, -4, 7)$$

Calculando as equações paramétricas para $P(0, 0, 0)$ com o $\vec{v} = (5, -4, 7)$ temos:

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + (5, -4, 7)t$

$$\boxed{\begin{cases} x = 5t \\ y = -4t \\ z = 7t \end{cases}}$$

30. Determinar as equações paramétricas da reta que contem o ponto $A(2, 0, -1)$ e é simultaneamente ortogonal à reta

r:$\dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}; x = 1$

e ao eixo dos y.

Solução:

$\vec{v_r} = (0, 2, -1)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

$$\vec{v} = \vec{v_r} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, 0)$$

Calculando as equações paramétricas para $A(2, 0, -1)$ com o $\vec{v}(1, 0, 0)$ temos:

$(x, y, z) = (2, 0, -1) + (1, 0, 0)t$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Simplificando temos:

$$\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z = -1 \end{cases}}$$

31. Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas

r: $x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e s:$\begin{cases} x = 1 - y \\ \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

e é ao mesmo tempo ortogonal a r e s.

Solução:

Substituindo $x = 1 - y$ em $x - 2 = \dfrac{y+1}{2}$ temos $1 - y - 2 = \dfrac{y+1}{2} \Rightarrow -y - 1 = \dfrac{y+1}{2} \Rightarrow -2y - 2 = y + 1 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow y = -1$

Substituido $y = -1$ em $z = 2 + 2y$ temos $z = 2 + 2.(-1) \Rightarrow z = 0$

Substituindo $y = -1$ em $x = 1 - y$ temos $x = 1 - (-1) \Rightarrow x = 2$

Ponto de coincidência entre as retas r e s é $P(2, -1, 0)$

Para a reta s atribuimos $y = 0$ logo: $x = 1$ e $z = 2$ temos; $P_1(1, 0, 2)$

Para a reta s atribuimos $y = 1$ logo: $x = 0$ e $z = 4$ temos; $P_2(0, 1, 4)$

$\vec{v_s} = P_2 - P_1 = (0, 1, 4) - (1, 0, 2) = (-1, 1, 2)$

Para a reta r temos $\vec{v_r} = (1, 2, 3)$

Calculando: $\vec{v} = \vec{v_s} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{j} - 3\vec{i} + 2\vec{k} = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$

$\vec{v} = (1, -5, 3)$

Calculando as equações paramétricas para $P(2, -1, 0)$ com o $\vec{v}(1, -5, 3)$ temos:

$(x, y, z) = (2, -1, 0) + (1, -5, 3)t$

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 5t \\ z = 3t \end{cases}}$$

32. A reta

r: $\dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{-2}$

é paralela à reta que passa pelo ponto $A(-1,0,0)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

r_1: $\begin{cases} x = -t \\ y = -2t+3 \\ z = 3t-1 \end{cases}$ e r_2: $\begin{cases} y = x \\ \\ z = 2x \end{cases}$

Calcular a e b

Solução:

A direções de r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v_{r1}} = (-1,-2,3)$ e $\vec{v_{r2}} = (1,1,2)$.

A direção do vetor de r será $\vec{v}$ que é paralela a reta que passa pelo ponto A.

Se r_1 é ortogonal a r então

$\vec{v_{r1}}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (-1,-2,3).(a,b,-2) = 0 \Rightarrow -a-2b-6 = 0(1)$

Se r_2 é ortogonal a r então

$\vec{v_{r2}}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (1,1,2).(a,b,-2) = 0 \Rightarrow a+b-4 = 0(2)$

Resolvendo o sistema entre (1) e (2):

$\begin{cases} -a-2b-6 = 0 \\ a+b-4 = 0 \end{cases}$

$-b-10 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -10}$

Substituindo $b = -10$ na outra equação:

$a+b-4 = 0 \Rightarrow a+(-10)-4 = 0 \Rightarrow a = 10+4$

$\boxed{a = 14}$

33. Dados os pontos $P_1(7,-1,3)$ e $P_2(3,0,-12)$, determinar:

a) o ponto P, que divide o segmento P_1P_2 na razão $\dfrac{2}{3}$;

Solução:

$r = \dfrac{2}{3}$

Para x:

$$x = \frac{x_1 - r.x_2}{1-r} \Rightarrow x = \frac{7 - \frac{2}{3}.3}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{5}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = 15$$

Para y:

$$y = \frac{y_1 - r.y_2}{1-r} \Rightarrow y = \frac{-1 - \frac{2}{3}.0}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow y = \frac{-1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = -3$$

Para z:

$$z = \frac{z_1 - r.z_2}{1 - r} \Rightarrow z = \frac{3 - \frac{2}{3}.(-12)}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow z = \frac{11}{\frac{1}{3}} \Rightarrow z = 33$$

$\boxed{P(15, -3, 33)}$

b) o ponto Q, que divide o segmento P_1P_2 ao meio.

Solução:

$r = \frac{1}{2}$

Para x:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x = \frac{7 + 3}{2} \Rightarrow x = 5$$

Para y:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + 0}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Para z:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \Rightarrow y = \frac{3 - 12}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{2}$$

$\boxed{P\left(5, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)}$

34. O ponto $P(9, 14, 7)$ divide o segmento P_1P_2 na razão $\frac{2}{3}$.

Determinar P_2, sabendo que $P_1(1, 4, 3)$.

Solução:

$r = \frac{2}{3}$

Para x:

$$x = \frac{x_1 - r.x_2}{1 - r} \Rightarrow 9 = \frac{1 - \frac{2}{3}.x_2}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow 9.\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}.x_2 \Rightarrow \frac{2}{3}.x_2 = 1 - 3 \Rightarrow x_2 = \frac{-2}{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 =$$
$$-2.\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-6}{2} \Rightarrow x_2 = -3$$

Para y:

$$y = \frac{y_1 - r.y_2}{1 - r} \Rightarrow 14 = \frac{4 - \frac{2}{3}.y_2}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow 14.\frac{1}{3} = 4 - \frac{2}{3}.y_2 \Rightarrow \frac{2}{3}.y_2 = 4 - \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}y_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$y_2 = -1$$

Para z:

$$z = \frac{z_1 - r.z_2}{1 - r} \Rightarrow 7 = \frac{3 - \frac{2}{3}.z_2}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow 3.\frac{1}{3} = 3 - \frac{2}{3}.z_2 \Rightarrow \frac{2}{3}.z_2 = 3 - \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}z_2 = \frac{9-7}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}.z_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow z_2 = 1$$

$\boxed{P(-3,-1,1)}$

35. Seja o triângulo de vértices $A(1,0,-2)$, $B(2,-1,-6)$ e $C(-4,5,2)$.

Estabelecer as equações paramétricas da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC.

Solução:

O Ponto M e a mediana entre B e C; $M = \dfrac{B+C}{2} \Rightarrow M = \dfrac{(-2,4,-4)}{2} \Rightarrow M = (-1,2,-2)$

o vetor na Direção $\overrightarrow{MA} = M - A \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (1,0,-2) - (-1,2,-2) = (2,-2,0)$

Agora termos o vetor na direção $\overrightarrow{MA} = (2,-2,0)$ e ponto $A = (1,0,-2)$

Podemos calcular a equação da reta da altura relativa ao lado BC:

$(x,y,z) = (1,0,-2) + (2,-2,0)t$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -2 \end{cases}}$$