Lista 5 - Geometria Analítica - Equações de Retas e Planos
Posições Relativas, Ângulos e Distâncias

Observações: Faça uma leitura de cada exercício antes de iniciar. Procure compreender e assimilar aquilo que está fazendo. Esta é uma lista complementar aos exercícios dos livros textos adotados e não são de minha autoria, sendo uma compilação de diferentes fontes obtidas nos livros textos sugeridos, em diferentes sítios da internet, listas cedidas, etc.

1. Em cada item abaixo, determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação geral para os planos descritos:
(a) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.
(b) π passar pelos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

2. Faça um esboço dos seguintes planos:
(a) $x - 3 = 0$ (b) $z + 2 = 0$ (c) $y - 1 = 0$ (d) $y - z - 2 = 0$.

3. Dadas as retas
$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} \text{ e } s : x - 1 = y = z,$$
obtenha uma equação geral do plano determinado por r e s.

4. Considere os planos $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$ e $\pi_2 : X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 0) + \mu(-2, -1, -1)$. Determine dois pontos distintos A e B da intersecção de π_1 e π_2 e escreva uma equação vetorial da reta que passa por A e B.

5. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $\pi_3 : X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$.
(a) Escreva equações gerais para os planos π_1, π_2 e π_3.
(b) Mostre que a intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto e determine-o.

6. Verifique se a reta $r : x - 1 = 2y = 4 - z$ está contida no plano $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$.

7. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, 1, -2)$.
(a) Mostre que $P \notin r$.
(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

8. Obtenha um vetor normal ao plano π_1 que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$.

9. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0$.

10. Determine uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

11. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem é perpendicular ao plano
$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z + \lambda. \end{cases}$$

12. Determine o ponto simétrico de $P = (1, 4, 2)$ em relação ao plano $\pi : x - y + z - 2 = 0$.

13. Em cada item abaixo, determine a posição relativa das retas r e s dadas. Caso r e s sejam reversas, verifique se são também ortogonais. Caso r e s sejam concorrentes, verifique se são também perpendiculares e determine o ponto de intersecção.

(a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(2, 1, -1)$; $\quad s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$.

(b) $r : x + 3 = \dfrac{2y - 4}{4} = \dfrac{z - 1}{3}$; $\quad s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1 - 1)$.

(c) $r : \dfrac{x + 1}{2} = y = -z$; $\quad s : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$.

(d) $r : \dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y - 1}{4} = z$; $\quad s : \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$.

(e) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$; $\quad s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$.

14. Em cada item abaixo, mostre que as retas r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de tal plano.

(a) $r : x - 1 = y = 2z$; $\quad s : x - 1 = y = z$.

(b) $r : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{3} = \dfrac{z}{4}$; $\quad s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z - 4}{4}$.

15. Em cada item abaixo, determine a posição relativa de r e π. Caso r e π sejam transversais, determine se são ortogonais e exiba o ponto de intersecção.

(a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$; $\quad \pi : x - y - z = 2$.

(b) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$; $\quad \pi : X = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) + \mu(0, 1, 1)$.

(c) $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$; $\quad \pi : x + y = 2$.

(d) $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$; $\quad \pi : X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$.

16. Mostre que os planos

$$\pi_1 : \begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = m\lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + m\lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + m\mu \end{cases}$$

são transversais, qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$.

17. Em cada item abaixo, determine a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Caso os planos sejam transversais, determine se são ortogonais e escreva uma equação vetorial da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

(a) $\pi_1 : X = (1,1,1) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,2,1)$ e $\pi_2 : X = (1,0,0) + \lambda(1,-1,0) + \mu(1,1,2)$.

(b) $\pi_1 : X = (4,2,4) + \lambda(1,1,2) + \mu(3,3,1)$ e $\pi_2 : X = (3,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,4)$.

(c) $\pi_1 : 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z = 0$.

(d) $\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$.

18. Obtenha uma equação geral do plano que contém o ponto $P = (1,0,-1)$ e a reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = 2 - z$.

19. Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e é paralelo à reta $s : X = (0,1,1) + \lambda(1,2,2)$.

20. Determine a distância entre as retas r e s do Exercício 13.

21. Determine a medida angular entre as retas r e s do Exercício 15.

22. Determine a distância entre a reta r e o plano π do Exercício 15.

23. Determine a medida angular entre a reta r e o plano π do Exercício 15.

24. Determine a distância entre os planos π_1 e π_2 do Exercício 17.

25. Determine a medida angular entre os planos π_1 e π_2 do Exercício 13.

26. Determine a distância entre a reta s e o plano π dados no Exercício 19.

27. O lado BC de um triângulo equilátero está contido na reta $r : X = (0,0,0) + \lambda(0,1,-1)$, e seu vértice oposto é $A = (1,1,0)$. Determine os vértices B e C.

28. Obtenha uma equação vetorial da reta paralela ao plano $\pi : 2x - y - z + 1 = 0$, concorrente com as retas $r : X = (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$ e $s : X = (0,0,1) + \lambda(0,1,1)$, que forma com elas ângulos congruentes.

29. Obtenha um vetor diretor da reta que é paralela ao plano $\pi : x + y + z = 0$ e forma ângulo de 45º com o plano $\pi_1 : x - y = 0$.

30. Obtenha uma equação vetorial da reta r, concorrente com $s : 2x - y + z + 6 = 0 = x - z$ e contida em $\pi_1 : 3x - 2y - 2z + 7 = 0$, sabendo que a medida angular entre r e $\pi_2 : x + y = 2$ é $\arccos(1/3)$.

31. Obtenha uma equação geral do plano que contém a origem 0 e forma ângulos de 60º com a reta $r : X = (1,1,1) + \lambda(0,1,-1)$ e com o plano $\pi : x - y + 4 = 0$.

32. Existem dois planos π_1 e π_2 tais que cada um contém a reta $t : X = (-1,4,0) + \lambda(1,2,3)$ e forma ângulos congruentes com as retas $r : X = (0,0,0) + \lambda(1,1,1)$ e $s; X = (-1,2,3) + \lambda(1,1,-1)$. Calcule a medida angular entre π_1 e π_2.

33. Mostre que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ (do espaço) que equidistam dos pontos $A = (2,1,1)$, $B = (-1,0,1)$ e $C = (0,2,1)$ é uma reta, perpendicular ao plano que passa por A, B e C.

34. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que

(a) equidistam das retas

$$r : \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x+z=1 \\ y=0. \end{cases}$$

(b) equidistam dos planos

$$\pi_1 : x+y-z=0, \qquad \pi_2 : x-y-z-2=0 \qquad \text{e} \qquad \pi_3 : x+y+z=1.$$

(c) cujas distâncias ao plano $\pi_1 : 2x - y + 2z - 6 = 0$ são os dobros das distâncias ao plano $\pi_2 : x + 2y - 2z + 3 = 0$.

35. Considere os planos $\pi_1 : x + y - 2z = 1$ e $\pi_2 : 2x + y + 2z = 2$.

(a) Determine o ângulo entre eles.

(b) Seja s a interseção dos planos acima. Determine o ângulo entre a reta s e a reta

$$r : \{(x,y,z) = (-1,1,3) + t(8,-12,-2), t \in \mathbb{R}\}.$$

36. Obtenha as equações geral e paramétrica do plano π que contém a reta $r = \{(1,1,0) + t(2,1,2), t \in \mathbb{R}\}$ e é paralelo à reta

$$s : \left\{ \frac{x+1}{2} = y = z + 3. \right.$$

(*Observação*: um plano π é paralelo a uma reta s se não se interseptam, isto é $\pi \cap s = \emptyset$.)

37. Sejam as retas $r = \{(1,1,0) + \beta(0,1,1); \beta \in \mathbb{R}\}$ e $s : \left\{ \frac{x-1}{2} = y = z. \right.$

(a) Determine A, B e C os pontos de interseção de s e $\pi : x - y + z = 2$, de r com os planos coordenados xz e xy (isto é $y = 0$ e $z = 0$) respectivamente.

(b) Calcule a área formada pelo triângulo ABC.

38. Considere a reta $r : \left\{ -x + 1 = \frac{-y}{2} = \frac{z+1}{2} \right.$ e o plano $\pi : x - z + 1 = 0$.

(a) Verifique que a reta é transversal (não paralela) ao plano e determine o ponto onde a reta intercepta o plano.

(b) Qual o ângulo formado pela reta r e pelo plano π?

(c) Determine a equação paramétrica da reta s que é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano π, isto é s está contida no plano π.

39. A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta

$$r : X = (1,0,0) + t(0,1,1), t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $A = (1,1,0)$, determine os outros três vértices.

Bons estudos.