Respostas da Tarefa 06 de Exercícios - GA - Entrega dia 18/05

1 - RESPOSTA: Temos que

$$\begin{array}{rcl} \vec{X} &=& 2\vec{u} + 2\vec{v} + -1\vec{w}, \\ \vec{Y} &=& 3\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}, \\ \vec{Z} &=& -2\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}. \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \vec{X} &=& (0,-1,11), \\ \vec{Y} &=& (9,2,0), \\ \vec{Z} &=& (2,-6,-3). \end{array}$$

(a) Assim,

$$\vec{X} \circ (\vec{Y} \times \vec{Z}) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 9 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix} = -665$$

(b) Temos que

$$\vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 19$$

e

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -35$$

Logo $\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = -665$

(c) Por que será que esta igualdade se verifica? como você imagina que isso aconteça?

2 - RESPOSTA:

(a) Se $P = (-1,-2,1)$ pertencesse ao plano, então deveria satisfazer a equação do plano. Como $-1+4+3 = 6 \neq 4$ segue que $P \notin \pi_1$.

Além disso, $\vec{n_1} = (1,-2,3)$.

(b) $\pi_2 : x - 2y + 3z + d = 0$. Como $P \in \pi_2$ segue que $d = -6$.

(c) Como eu escrevi errado, o fato dos pontos P e Q estarem no mesmo plano, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é paralelo ao plano. Neste caso $\text{proj}_{\vec{n_1}} \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.

Agora, suponha que Q seja um ponto de π_1. Por exemplo $Q = (4,0,0)$. Neste caso $\overrightarrow{PQ} = (5,2,-1)$ e

$$\text{proj}_{\vec{n}_1} \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \circ \vec{n_1}}{\|\vec{n_1}\|^2} \vec{n_1} = \frac{-1}{7}(1,-2,3)$$

A norma deste vetor deve representar a distância entre os planos.

3 - RESPOSTA:

(a) Temos que $\overrightarrow{AB} = (-1,-3,2)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4,1,4)$. Assim podemos tomar $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-14,-4,-13)$. Então a equação geral do plano é da forma

$$\pi : -14x - 4y - 13z + d = 0$$

Como A pertence ao plano, substituindo na equação chegamos a $d = 11$. Logo

$$\pi : 14x + 4y + 13z = 11$$

(b) Como já vimos em outra lista o ponto $G = (-4,-4,9)$. Assim os vetores podem ser tomanados por $\overrightarrow{BD} = (-3,4,2)$ e $\overrightarrow{DG} = (-3,-7,8)$. $\overrightarrow{AD} = (-4,1,4)$. Log a equação paramétrica é

$$\begin{cases} x &= -4 - 3\alpha - 3\beta \\ y &= -4 - 7\alpha + 4\beta \\ z &= 9 + 8\alpha + 2\beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c) O volume do prisma $ADCEHG$ pode ser calculado por

$$V = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE})| = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-34| = 17$$

4 - RESPOSTA:

(a) O volume do tetraedro pode ser calculado por

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\left|\det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{6}|36| = 6$$

Observe que na Lista de Exercícios Vetores e Produtos, há uma outra alternativa ao cálculo do volume.

(b) Uma das maneiras de se obter a altura é encontrarmos a norma do vetor

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|^2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).$$

Assim

$$\left\| \frac{\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|^2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right\| = \frac{|\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|} = \frac{36}{2\sqrt{35}} = \frac{18\sqrt{35}}{35}.$$

5 - RESPOSTA:

(a) Como π é perpendicular ao segmento AA', podemos tomar o vetor normal ao plano como sendo o vetor $\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = (0,-2,-2)$.

O ponto médio do segmento é (como já fôra calculado anteriormente)

$$M = \frac{1}{2}(A + A') = (1,1,0).$$

Assim

$$\pi : -y - z + 1 = 0$$

Observação: Este plano π é conhecido na literatura como plano mediador dos pontos A e A', e tem como característica interessante que qualquer ponto deste plano equidista dos pontos A e A'. Experimente (usando do item seguinte a equação paramétrica) calcular a distância de um ponto qualquer de π aos pontos indicados.

(b) Observe que $P = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $Q = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

Como os planos são paralelos ao plano π do item anterior, basta encontrarmos dois vetores diretores paralelos ao plano π. Uma maneira é determinarmos três pontos não colineares contidos no plano π (experimente). Outra maneira é usar o item anterior para encontrar as equações gerais dos planos e depois obter as paramétricas, ou podemos usar diretamente a equação paramétrica de π. Como $-y - z + 1 = 0 \rightarrow y = 1 - z$, segue que

$$\pi : \begin{cases} x &= \beta \\ y &= 1 - \alpha \\ z &= \alpha, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consequentemente

$$\pi_2 : \begin{cases} x &= 1 + \gamma \\ y &= \frac{2}{3} - \delta \\ z &= \frac{1}{3} + \delta, \qquad \delta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \pi_3 : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= \frac{1}{3} - s \\ z &= \frac{-1}{3} + s, \qquad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bons estudos.