OBJETIVOS: Analisar o comportamento **transiente** de um circuito **RL** em **série** submetido a uma onda quadrada (pulso de tensão). Medir o tempo de meia vida $\mathbf{T_{1/2}}$ e a constante de tempo τ deste circuito. Analisar o mesmo circuito com tensão alternada.

MATERIAL UTILIZADO: osciloscópio, indutor, resistor e gerador de sinais.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O indutor é um elemento do circuito que, como o capacitor, armazena e devolve energia. No capacitor, a energia é armazenada em um campo elétrico, enquanto que no indutor ela é armazenada no campo magnético.

O indutor consiste basicamente de um fio enrolado e às vezes este enrolamento pode conter pode conter um núcleo de ferro. Quando o indutor é ligado a uma fonte de tensão**,** a tendência do indutor é manter a corrente constante**.**

Se for aplicada uma variação na corrente**,** o indutor tentará mantê-la constante**,** induzindo uma força eletromotriz (ε_L) ou tensão (v_L) contrária à variação da corrente**.** Esta força eletromotriz é dada em módulo por :

$$\varepsilon_L = v_L = L\,\frac{d\,i}{d\,t} \qquad \text{Equação (8.1)}$$

onde **L** é a **indutância** do elemento. Sua unidade é o Henry (**H**), definido por: $1\,H = \frac{1\,V\,.1\,s}{1\,A}$

Consideremos o indutor associado em série a um resistor em um circuito tal como na figura 8.1a. Estudaremos os casos no qual o circuito RL em série é alimentado por uma tensão contínua e por uma tensão senoidal. Para a tensão contínua, consideraremos que a alimentação é realizada por uma onda quadrada. O gerador desta onda quadrada é visto como um sistema de chaveamento que produz uma excitação pulsada que assume alternadamente uma tensão contínua V_0 e uma tensão de zero Volt, de mesma duração, como mostra a figura 8.1b.

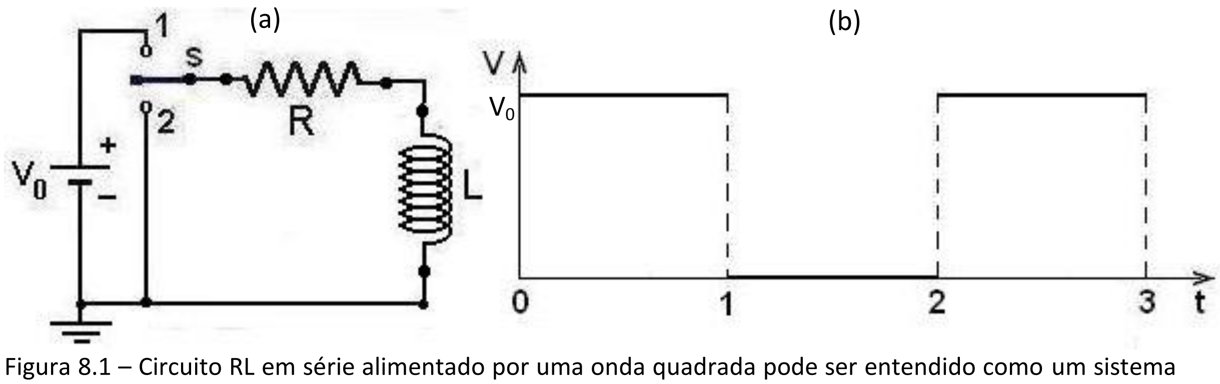


Figura 8.1 – Circuito RL em série alimentado por uma onda quadrada pode ser entendido como um sistema de chaveamento no qual quando a chave S está conectada ao terminal 1 temos uma tensão contínua V_0 aplicada e quando na posição 2, não temos alimentação.

POSIÇÃO 1: CIRCUITO LIGADO NA FONTE CONTÍNUA

Quando o sistema é conectado à tensão $\mathbf{V_0}$, a soma de todas as tensões é $V_0 = v_R + v_L$, onde $\mathbf{v_R}$ é a tensão no resistor dada por $\mathbf{v_R = R\,i}$ sendo **i** a corrente no circuito e $\mathbf{v_L}$ a tensão no indutor, dada pela definição de indutância na equação 8.1. Substituindo os valores:

$$V_0 = R\,i + L\,\frac{d\,i}{d\,t}$$

$$\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{R\,i}{L} - \frac{V_0}{L} = 0$$

Esta é uma equação diferencial que podemos resolver através da substituição de variável $y = \dfrac{R\,i - V_0}{L}$, obtendo a solução(verifique!):

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad \text{Equação (8.2)}$$

Substituindo ***i(t)***, nas equações de $\mathbf{v_R}$ e $\mathbf{v_L}$, temos:

$$v_R = V_0\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad \text{e} \quad v_L = V_0\,e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad \text{Equações(8.3)}$$

O quociente $\dfrac{L}{R}$ tem a dimensão de tempo e recebe o nome de constante de tempo indutiva do circuito $\boldsymbol{\tau}$ **.**

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{Equação (8.4)}$$

Quando $\mathbf{t = \tau}$, a tensão no indutor, que no tempo **t** = **0** era $\mathbf{v_L = V_0}$ **,** cai para um valor $v_L\,(\tau) = \dfrac{V_0}{e} = 0{,}3679\ V_0$ e a tensão no resistor, que em **t** = **0** era $\mathbf{v_R} = \mathbf{0}$ **,** aumenta para $v_R\ (\tau) = 0{,}6312\ V_0$.

POSIÇÃO 2: CIRCUITO EM CURTO

Quando a tensão no gerador é mudada para zero (posição **2** da chave na **Figura 8.1a**)**,** a lei de Kirchhoff no circuito se reduz a:

$$\mathbf{0 = v_R + v_L} \qquad \text{ou} \qquad R\,i + L\,\frac{d\,i}{d\,t} = 0\,.$$

Esta equação diferencial é facilmente integrável**,** e**,** supondo que na primeira parte houve tempo suficiente para a corrente no circuito atingir o seu valor máximo**,** obtém-se a solução:

$$i = \frac{V_0}{R}\ e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{Equação (8.5)}$$

Substituindo **i,** nas equações de $\mathbf{v_R}$ e $\mathbf{v_L}$:

$$v_R = V_0 \; e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{e} \qquad v_L = -V_0 \, e^{-\frac{R}{L}t}$$ Equações (8.6)

A equação (8.5) mostra que o indutor tenta impedir a variação da corrente quando a chave é mudada de posição. A corrente vai decaindo lentamente, mantendo o sentido que ela tinha quando a bateria estava conectada.

Para medir a constante de tempo indutiva do circuito, pode-se usar o tempo de meia-vida $T_{1/2}$, que é o tempo no qual a corrente (ou a tensão em **R**) cai pela metade do seu valor inicial:

$$V_R\left(T_{\frac{1}{2}}\right) = V_0 \cdot exp\left(-T_{1/2} \cdot \frac{R}{L}\right) = \frac{V_0}{2}$$

$$exp\left(-T_{1/2} \cdot \frac{R}{L}\right) = \frac{1}{2}$$

Aplicando logaritmo neperiano (**ln**) nos dois lados da equação acima nos fornece:

$$T_{1/2} = \frac{L}{R} \ln 2 \qquad \rightarrow \qquad T_{1/2} = \tau \ln 2$$ Equação (8.7)

<u>CIRCUITO LIGADO NA CORRENTE ALTERNADA</u>

Consideremos agora que o circuito **RL** ligado em série é alimentado por uma tensão alternada de forma senoidal $v_g = V_0 \; sen\,(\,\omega t + \phi\,)$. Logo, a corrente no circuito possui a forma $i = I_0 \; sen\; \omega t$. Aplicando a lei de Kirchhoff ao circuito da figura 8.2, obtemos:

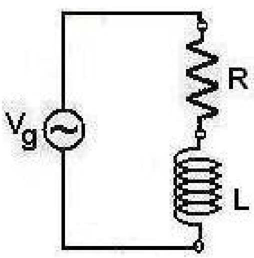


Figura 8.2 – Circuito RL em série alimentado por um gerador de funções (tensão alternada).

$$V_0 \; sen\,(\,\omega t + \phi\,) = R\, I_0 \; sen\; \omega t + \omega\, L\, I_0 \cos \omega t$$

Para obter os valores de $\mathbf{I_0}$ e ϕ basta utilizar o mesmo procedimento usado para o filtro **RC ,** de forma que

$$sen\; \omega t\,(\,V_0 \cos \phi - R\, I_0\,) + \cos \omega t\,(\,V_0 \; sen\; \phi - \omega\, L\, I_0\,) = 0$$

A relação é válida desde que os termos entre parênteses sejam nulos, logo:

$$V_0 \cos \phi = R\, I_0 \qquad \text{e} \qquad V_0 \; sen\; \phi = \omega\, L\, I_0$$ Equações (8.8)

O valor de ϕ é obtido dividindo-se **as equações 8.8:** $tg\; \phi = \dfrac{\omega\, L}{R}$ → $\phi = arc\; tg\left(\dfrac{\omega\, L}{R}\right)$.

Elevando-se ao quadrado as equações (8.8) e somando-as, obtemos o valor de I_0:

$$V_0^2\,(\cos^2\phi + sen^2\phi) = [\,R^2 + (\omega L)^2\,]\,I_0^2$$

mas $(\cos^2\phi + sen^2\phi) = 1$,então: $I_0^2 = \dfrac{V_0^2}{R^2 + (\omega L)^2}$, ou seja,

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad \text{Equação (8.9)}$$

onde I_0 é a amplitude (ou valor máximo) da corrente e V_0 é a amplitude da tensão no gerador**.**

Note que **ωL** tem dimensão de resistência (Ω) e depende da frequência. Esta grandeza recebe o nome de **Reatância Indutiva X_L.**

A **defasagem no tempo** entre a corrente no circuito e a tensão aplicada recebe o nome de **fase** e é representada por ϕ**.** Como a tensão no resistor é diretamente proporcional à corrente **i** então ϕ pode ser visto como a defasagem no tempo entre a tensão v_R e a tensão aplicada v_g **.** A tensão no resistor v_R e tensão no indutor v_L são dadas por

$$v_R = R\,I_0 = R\,I_0\,sen\,\omega t \quad \text{e} \quad v_L = L\frac{di}{dt} = \omega\,L\,I_0\,\cos\omega t = \omega\,L\,I_0\,sen\,(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Os valores de pico das tensões no resistor e no indutor podem ser calculados usando a equação 8.9:

$$V_R = R\,I_0 = \frac{V_0\,R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \qquad \text{e}$$

$$V_L = V_0\,\omega\frac{L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{\dfrac{R^2}{(\omega L)^2} + 1}} \qquad \text{Equações (8.10)}$$

Analisando os limites de frequência, temos que:

- Quando **ω** tende para **0** ➔ $V_R = V_0 \quad , \quad V_L = 0 \quad e \quad \phi = 0$
- Quando **ω** tende para ∞ ➔ $V_R = 0 \quad , \quad V_L = V_0 \quad e \quad \phi = \dfrac{\pi}{2}$

O ângulo de defasagem ϕ_R entre a tensão no gerador e a tensão no resistor é dado por

$$\phi_R = -\,arc\,\cos\left(\frac{V_R}{V_0}\right)$$

e o ângulo de defasagem ϕ_L entre a tensão no gerador V_G e a tensão no indutor V_L é

$$\phi_L = \;arc\,\cos\left(\frac{V_L}{V_0}\right).$$

<u>FREQUÊNCIA DE CORTE</u>: Existe uma frequência chamada freqüência de corte ω_C**,** na qual a tensão de pico no indutor é igual à tensão de pico no resistor: $V_R\,(\omega_c) = V_L\,(\omega_c)$

Utilizando as expressões de V_R e V_L **,** em ω_c teremos

$$\frac{V_0\ R}{\sqrt{R^2+(\omega_c\ L)^2}}=\frac{V_0}{\sqrt{\frac{R^2}{(\omega_c\ L)^2}+1}}$$

Resolvendo esta igualdade:

$$\omega_c=\frac{R}{L}$$

ou**,** usando a relação entre freqüência **f** e freqüência angular ω $\left(f=\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$$f_c=\frac{R}{2\pi L} \qquad \text{Equação (8.11)}$$

Substituindo a expressão de $\mathbf{f_c}$ em $V_R\ (\omega_c\ )=V_L\ (\omega_c)$:

$$V_R\ (\omega_c)=V_L\ (\omega_c)=\frac{V_0}{\sqrt{2}}=0{,}707\,V_0$$

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Montaremos o circuito da figura 8.3, ajustando o gerador de sinais conforme o tipo de estudo que realizarmos. Trabalharemos com um indutor de (100±5)mH já incluso na caixa de montagens (*protoboard*). Este indutor possui uma resistência R_L de aproximadamente 65 Ω. Utilize um resistor R estipulado pelo professor. Nosso objetivo é estudar o comportamento de V_R e posteriormente V_L do ponto de vista temporal, através de uma onda quadrada e em função de um grande intervalo de frequências quando alimentados por uma onda senoidal. Um dos canais do osciloscópio deve ser mantido no gerador de sinais de forma a verificar que o valor de V_0 é mantido constante. Sempre que V_0 variar, ajuste o gerador para manter V_0^{PP} constante.

A) **CIRCUITO RL – RESPOSTA TEMPORAL**:

Devido ao fato deste circuito apresentar uma constante de tempo muito pequena (estime o valor de τ), não é possível acompanhar no multímetro os transientes de corrente e de tensão. As tensões serão medidas com o osciloscópio e a tensão de alimentação será fornecida por um gerador de sinais ajustado para onda quadrada com V_0^{PP} **=2,0V.** Ajustaremos o osciloscópio para medir primeiro V_R e depois V_L conforme ilustra a figura 8.3.

Para medir-se um componente, digamos R, mantemos um de seus extremos aterrado junto ao terra do osciloscópio. Para medir L, trocamos R e L de lugar.

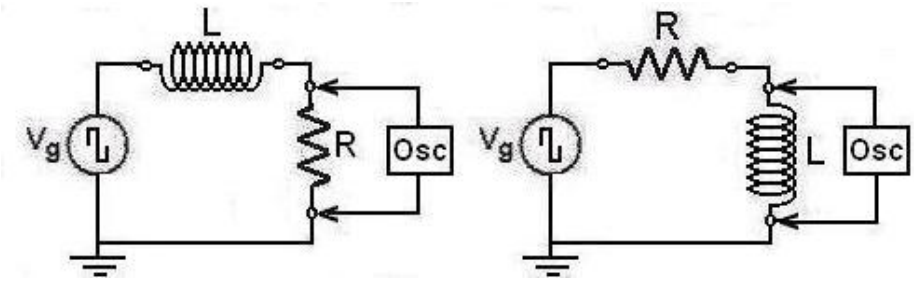


Figura 8.3 – Circuito RL em série alimentado por uma onda quadrada. Nas medidas a serem realizadas, é importante manter as conexões relativas ao "terra" comuns ao gerador de sinais e ao osciloscópio. Desta maneira, a figura à esquerda representa o circuito para medir-se V_R. Para medir-se V_L, trocamos R e L de lugar (direita).

A.1) A partir das figuras visualizadas no osciloscópio, desenhar as formas das tensões observadas, no resistor v_Rx t e no indutor v_LX t.

A.2) Medir a partir das figuras obtidas na tela do osciloscópio a meia vida do circuito $T_{1/2}$ e a partir destas, calcular as duas constantes de tempo τ.

A.3) Comparar as duas constantes de tempo τ. O que se pode concluir?

A.4) Compare os valores experimental e teórico de $\tau \pm u(\tau)$.

A.5) Nomeie como circuito **integrador** ou **diferenciador** as tensões de saída V_R e V_L. **Para a solução deste problema, consulte os exercícios disponíveis da disciplina no *MOODLE*.**

B) **CIRCUITO RL – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA**

Ajuste a saída do gerador com uma função **senoidal** com V_0^{PP} **=4,0V.** Mude a frequência do gerador e observe a variação da tensão no osciloscópio. Escolha uma faixa de frequências com uma variação na tensão de pico-a-pico medida entre **0**,**4V** e **3**,**8V**. Verifique sempre o valor da tensão V_0^{PP} e ajuste quando for necessário.

B.1) Com o auxílio do osciloscópio, **meça** a tensão de **pico-a-pico** no resistor V_R^{PP} em função da **frequência f e** construa uma tabela de V_R^{PP} *versus* **f** com pelo menos **20** pontos. Na mesma tabela, coloque o valor do ângulo de fase ϕ_R entre V_R^{PP} e V_0^{PP} para cada frequência

Repita o procedimento, medindo a tensão V_L no indutor e calcule o ângulo de fase ϕ_L para cada frequência.

B.2) Com base nas tabelas obtidas, construa em **uma folha** de papel **monolog**, os gráficos de V_R e V_L em função da frequência **f** (lance **f** em escala logarítmica na horizontal).

B.3) A partir deste gráfico, encontre a frequência de corte f_C do circuito. Compare com o valor teórico estimado.

B.4) Construa os gráficos de ϕ_R e ϕ_L em função da frequência **f** em **uma folha** de papel **mono-log**, com **f** no eixo **log** na horizontal. Marque **0°** na metade do eixo vertical.

B.5) O que se pode concluir sobre o ângulo de fase entre V_R e V_L ?

EXPERIMENTO 8

CIRCUITO RL

RESPOSTAS TEMPORAIS E EM FREQUÊNCIA

TURMA: ___ DATA: __/__/____

NOME	RA

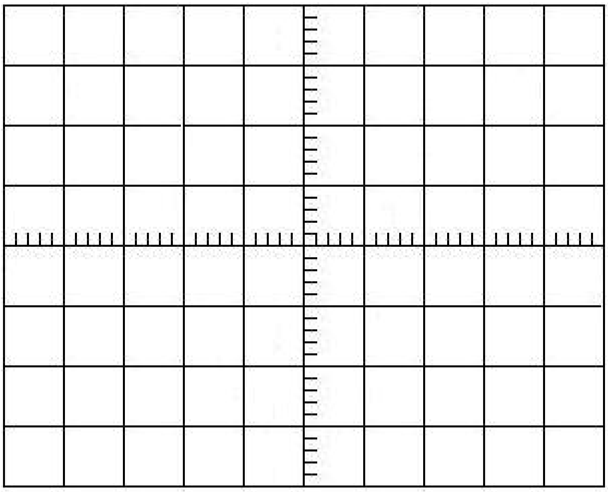
RESUMO:____
____
____

MATERIAL UTILIZADO (MARCA/MODELO quando for o caso):
____
____
____

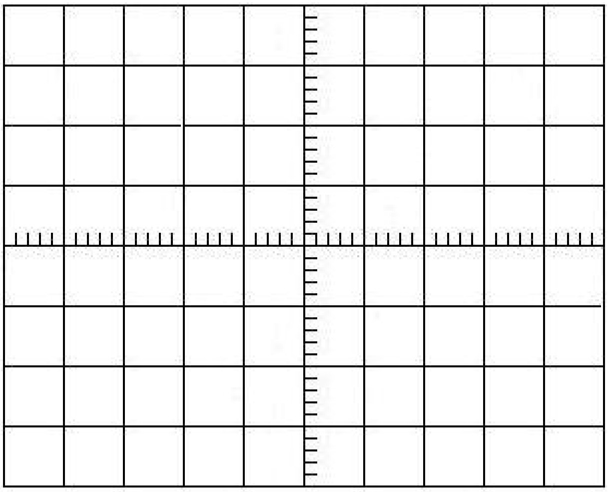
RESULTADOS:

A) **CIRCUITO RL – RESPOSTA TEMPORAL**:

A.1) **Tensão de Saída V_R** **Tensão de Saída V_L**



CH1:____ CH2:____ T:____



CH1:____ CH2:____ T:____

A.2) **Medidas no osciloscópio**:

Tensão de Saída V_R $T_{1/2} \pm u(T_{1/2})$: ____________________ $\tau \pm u(\tau)$: ____________________

Tensão de Saída V_L $T_{1/2} \pm u(T_{1/2})$: ____________________ $\tau \pm u(\tau)$: ____________________

A.3) **Comparação das duas constantes de tempo**:____
____
____

A.4) Confronto experimental e teórico:____
____
____

A.5) Em um circuito **RL** em **Série**:

A saída V_R é chamada de circuito ___________________.

A Saída V_L é chamada de circuito ___________________.

B) **CIRCUITO RL – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA**:

B.1) Tabela com os valores de V_R, V_L, ϕ_R e ϕ_L em função da frequência.

B.2) Gráficos de V_R e V_L em função da frequência **f**.

B.3) Frequência de corte do circuito.

$f_{C\ (\mathbf{EXPERIMENTAL})}$ =___________________ ; $f_{C\ (\mathbf{TEÓRICO})}$ =____________________

B.4) Gráficos de ϕ_R e ϕ_L em função da frequência **f**.

B.5) Conclusão a respeito do ângulo de fase entre V_R e V_L:____
____
____

CONCLUSÕES

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____