4ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos
Caminhadas aleatórias e pagerank

1) Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados S = {s0, s1, s2, s3} e a seguinte matriz de probabilidades de transição:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

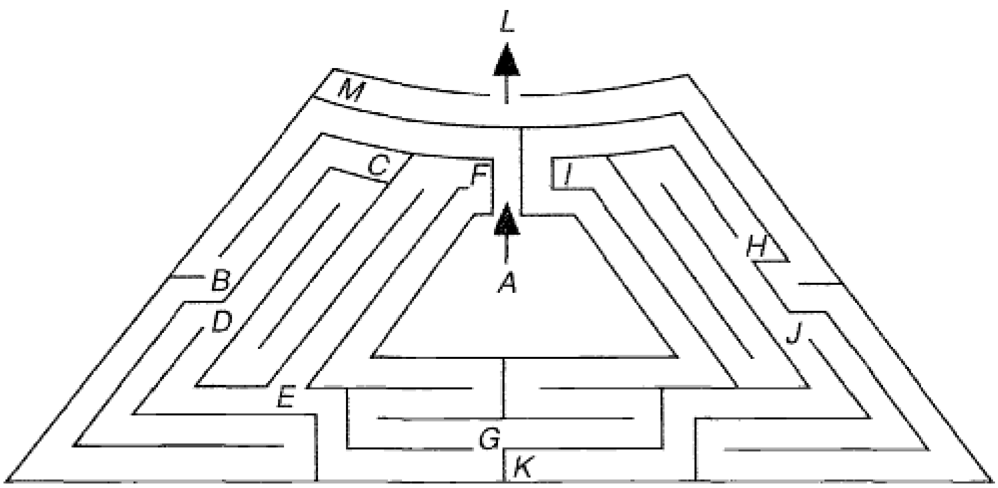
a) Especifique o diagrama de estados correspondente a matriz P.
b) Essa cadeia de Markov possui uma distribuição estacionária? Porque? Em caso positivo, calcule.

2) Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados S = {s0, s1, s2, s3} e a seguinte matriz de probabilidades de transição:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

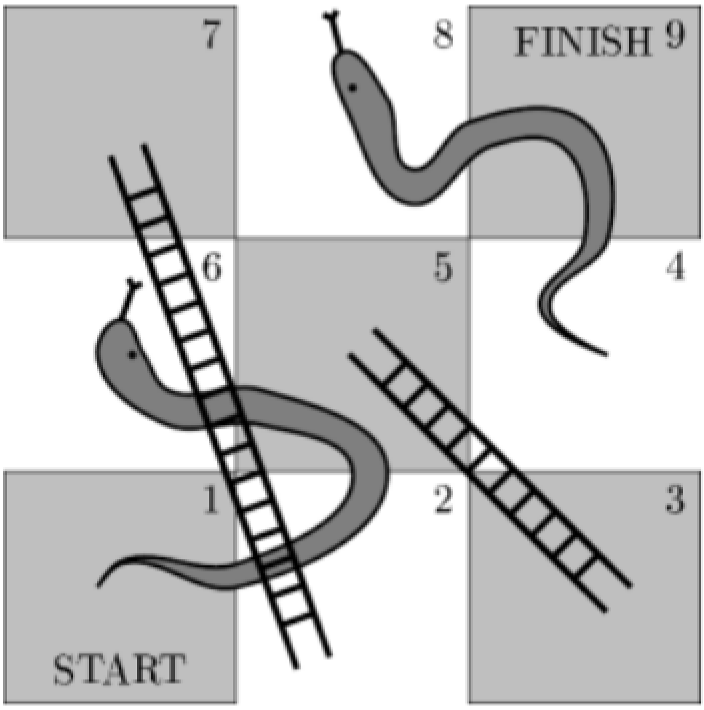
a) Especifique o diagrama de estados correspondente a matriz P.
b) Essa cadeia de Markov possui uma distribuição estacionária? Porque? Em caso positivo, calcule.

3) O labirinto a seguir pode ser representado como um grafo, onde cada letra é um vértice e os caminhos entre elas são arestas. Responda as seguintes questões:



a) Gere o grafo G que representa o labirinto em questão.
b) Gere a matriz de adjacências A o grafo G gerado no item anterior.
c) De posse de A, compute a matriz de transição de probabilidades P.
d) Desenhe o diagrama de estados que representa a matriz P.
e) Implemente um programa/script para computar a distribuição estacionária da cadeia de Markov resultante.

4) O jogo “Snake and Ladders” é definido pelo seguinte tabuleiro de 9 posições:



A cada rodada um jogador joga uma moeda não viciada avança 1 casa se obtiver cara ou avança 2 casas se obtiver coroa. Se o jogador para no pé da escada, então ele imediatamente sobe para o topo da escada. Se o jogador cai na boca de um cobra então ele imediatamente escorrega para o rabo. O jogador sempre inicia no quadrado de número 1. O jogo termina quando ele atinge o quadrado de número 9. Com base nas informações, responda:

a) Especifique o diagrama de estados da cadeia de Markov que representa o jogo.
b) Gere a matriz P a partir do diagrama anterior.
c) Implemente um programa/script para calcular a distribuição estacionária. Qual é a probabilidade de um jogador vencer o jogo, ou seja, qual a probabilidade de se atingir o estado 9 no longo prazo?

5) Sabe-se que uma caminhada aleatória (RW) num grafo G define um processo não determinístico modelado por uma Cadeia de Markov (CM). Explique o que é uma CM de estados finitos e tempo discreto. Quando ela é considerada homogênea?

6) Explique a propriedade Markoviana. O que ela significa?

7) O que é uma Cadeia de Markov ergódica (ou regular)?

8) Mostre que numa *random walk* em um grafo G = (V, E) não direcionado, conexo e não bipartido a distribuição estacionária da CM correspondente tem solução analítica dada por:

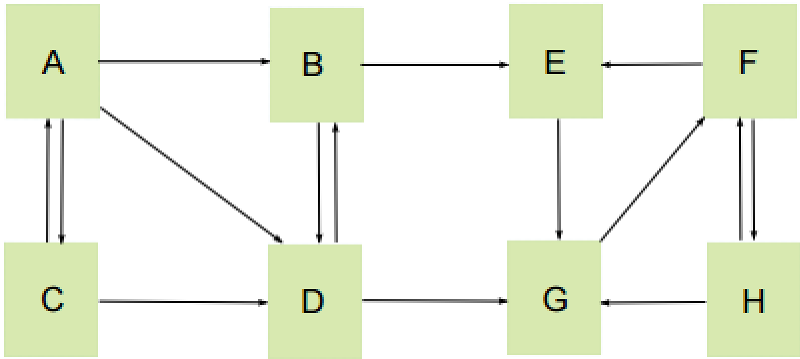
$$\vec{w}=\left(\frac{d(v_1)}{2|E|},\frac{d(v_2)}{2|E|},\ldots,\frac{d(v_n)}{2|E|}\right)$$

Sugestão: no equilíbrio sabemos que vale a condição de balanço $w_i\, p_{i,j}=w_j\, p_{j,i}$

9) No contexto de caminhadas aleatórias em grafos direcionados (dígrafos), explique como surge a ideia do modelo Pagerank. Qual a matriz P associada a esse processo aleatório (Google matrix) e como ela é computada? Explique.

10) De posse do modelo de Pagerank para caminhadas aleatórias em grafos direcionados, forneça uma solução analítica para a distribuição estacionária. Qual o problema com essa solução?
Sugestão: no equilíbrio sabemos que $\vec{w}=\vec{w}\,\overline{P}$

11) De posse do dígrafo a seguir, responda aos seguintes questionamentos:



a) Qual é a matriz P da CMH do dígrafo acima?
b) Compute $\overline{P}$,ou seja, a matriz do modelo Pagerank, supondo $\alpha=0.1$.
c) Implemente o Power Method e compute a distribuição estacionária de $\overline{P}$, ou seja, o pagerank de cada um dos nós do dígrafo.
d) Repita o processo para os dígrafos a seguir.