Estruturas Discretas

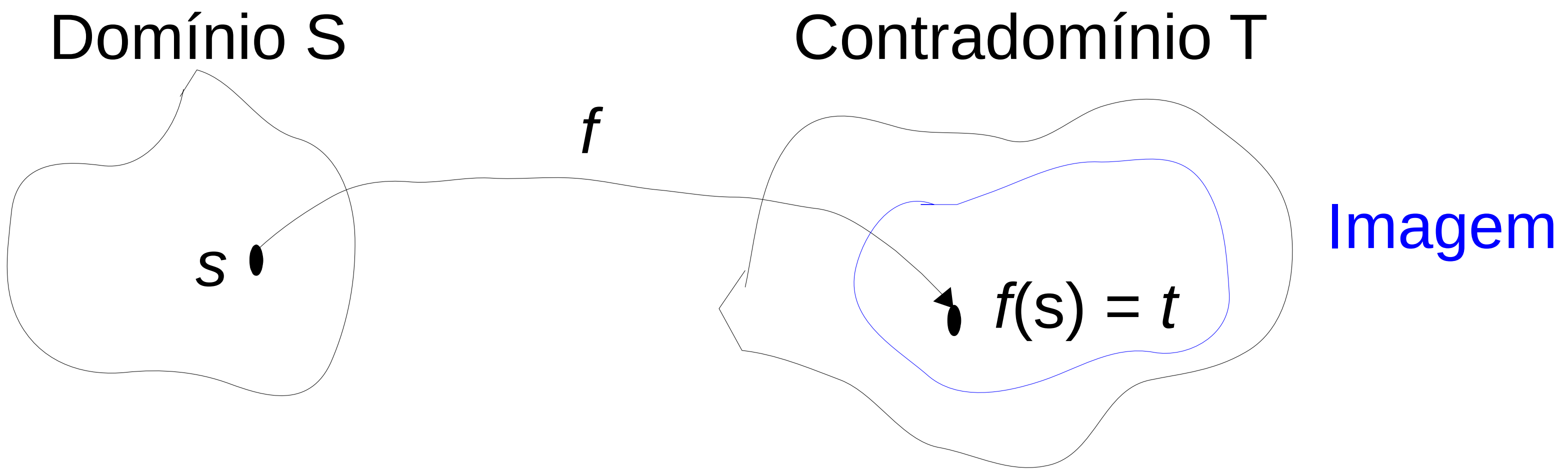
Funções

Propriedades, Função inversa/inversível e Composição

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@dc.ufscar.br

Funções

- **Função**
  - Domínio, Contradomínio e Imagem



- Os <u>primeiros</u> elementos dos pares ordenados de f vêm do **domínio**
- Os <u>segundos</u> elementos dos pares ordenados de f vêm do **contradomínio**
- O <u>conjunto de todos os segundos</u> elementos dos pares ordenados de f é a **imagem**

Funções

- **Funções**
  - Propriedades
    - Sobrejetora
    - Injetora
    - Bijetora
  - Função inversa
  - Função inversível
  - Composição de funções
  - Contagem de funções

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Uma função *f*: S $\rightarrow$ T é dita sobrejetora se sua imagem é igual ao seu contradomínio
      - Não há elementos de T sem associação com algum elemento de S

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita sobrejetora se sua <u>imagem é igual ao seu contradomínio</u>
      - Não há elementos de T sem associação com algum elemento de S
  - Exemplos

    a) A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {5, 7, 8, 9}

    f: A $\rightarrow$ B f = {(0,5), (1,7), (2,8), (3,9), (4,7)}

    - **É sobrejetiva = ?**

    b) A ={ a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

    f : A $\rightarrow$ B   f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

    - **É sobrejetiva = ?**

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita sobrejetora se sua imagem é igual ao seu contradomínio
      - ➔ Não há elementos de T sem associação com algum elemento de S
  - Exemplos

    a) A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {5, 7, 8, 9}

    f: A $\rightarrow$ B f = {(0,5), (1,7), (2,8), (3,9), (4,7)}

    ➔ **É sobrejetiva = SIM**

    b) A ={ a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

    f : A $\rightarrow$ B f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

    ➔ **É sobrejetiva = NÃO**, pois t $\in$ B não é imagem de nenhum elemento de A

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Provando que uma função é sobrejetora
      - Tanto a imagem quanto o contradomínio de uma função são <u>conjuntos de elementos</u>
      - Assim, provar que a imagem (R) é igual ao contradomínio (T) é provar a igualdade de dois conjuntos
      - $R = T$ sse $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Provando que uma função é sobrejetora
      - Tanto a imagem quanto o contradomínio de uma função são <u>conjuntos de elementos</u>
      - Assim, provar que a imagem (R) é igual ao contradomínio (T) é provar a igualdade de dois conjuntos
      - $R = T$ sse $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
      - ($\Rightarrow$)

        Para provar que $R \subseteq T$ basta usar a definição de função que diz que a imagem R é subconjunto do contradomínio T, ou seja $R \subseteq T$

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Provando que uma função é sobrejetora
      - Tanto a imagem quanto o contradomínio de uma função são <u>conjuntos de elementos</u>
      - Assim, provar que a imagem (R) é igual ao contradomínio (T) é provar a igualdade de dois conjuntos
      - R = T sse $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
      - ($\Leftarrow$)

        Para provar que $T \subseteq R$, vamos escolher um elemento arbitrário t de T e mostrar que ele também pertence a R, ou seja, é a imagem de algum elemento s do domínio S, t = f(s)

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Vamos provar que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora

Prova:

Seja x um número real. Vamos mostrar que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

Portanto, f é sobrejetora.

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Vamos provar que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora

Prova:

Seja x um número real. Vamos mostrar que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar um número real arbitrário r com $x = \sqrt[3]{r}$.

Portanto, f é sobrejetora.

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Vamos provar que *f*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por *f*(x) = x^3 é sobrejetora

Prova:

Seja *x* um número real. Vamos mostrar que *f*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por *f*(x) = x^3 é sobrejetora.

Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar um número real arbitrário *r* com $x = \sqrt[3]{r}$. Como *x* é a raiz cúbica de um número real, sabemos que *x* é um número real e, portanto, pertence ao domínio de *f* sendo possível calcular $f(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$, ou seja, *r* é imagem de *x* sob *f*.

Portanto, f é sobrejetora.

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função sobrejetora** (ou sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)
    - Vamos provar que f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora

Prova:

Seja x um número real. Vamos mostrar que f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar um número real arbitrário r com $x = \sqrt[3]{r}$. Como x é a raiz cúbica de um número real, sabemos que x é um número real e, portanto, pertence ao domínio de f sendo possível calcular $f(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$, ou seja, r é imagem de x sob f. Logo, qualquer elemento do contradomínio ($\mathbb{R}$) é a imagem, sob f, de um elemento do domínio ($\mathbb{R}$) e, assim, provamos que a função f é sobrejetora.

Portanto, f é sobrejetora. ■

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Uma função *f*: S $\rightarrow$ T é dita injetora se <u>nenhum</u> elemento de T é a imagem sob *f* de <u>dois</u> elementos distintos de S
      - ➔ Elementos diferentes de S têm imagens diferentes em T

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita injetora se <u>nenhum</u> elemento de T é a imagem sob f de <u>dois</u> elementos distintos de S
      - ➔ Elementos diferentes de S têm imagens diferentes em T
  - Exemplos

a) A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5}

f: A $\rightarrow$ B f = {(1,2), (2,5), (3,1), (4,4)}

➔ **É injetiva = ?**

b) A ={ a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

f : A $\rightarrow$ B   f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

➔ **É injetiva = ?**

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita injetora se <u>nenhum</u> elemento de T é a imagem sob f de <u>dois</u> elementos distintos de S
      - Elementos diferentes de S têm imagens diferentes em T
  - Exemplos

a) A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5}

f: A $\rightarrow$ B f = {(1,2), (2,5), (3,1), (4,4)}

- **É injetiva = SIM**

b) A ={ a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

f : A $\rightarrow$ B f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

- **É injetiva = NÃO**, pois o elemento *a* e o elemento *d* do conjunto A levam ao mesmo elemento *s* do conjunto B

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Provando que uma função é injetora
      - Supomos que existem elementos s_1 e s_2 de S com $f(s_1) = f(s_2)$ e mostramos que $s_1 = s_2$

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Provando que uma função é injetora
      - Supomos que existem elementos s_1 e s_2 de S com $f(s_1) = f(s_2)$ e mostramos que $s_1 = s_2$

Prova

Seja x um número real. Vamos mostrar que f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é injetora.

Portanto, f é injetora.

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Provando que uma função é injetora
      - Supomos que existem elementos s_1 e s_2 de S com $f(s_1) = f(s_2)$ e mostramos que $s_1 = s_2$

Prova
Seja *x* um número real. Vamos mostrar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é injetora.
Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar x e y números reais arbitrários, ou seja, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ com $f(x) = f(y)$.

Portanto, f é injetora.

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função injetora** (ou injetiva, injeção ou um para um)
    - Provando que uma função é injetora
      - Supomos que existem elementos s_1 e s_2 de S com $f(s_1) = f(s_2)$ e mostramos que $s_1 = s_2$

Prova

Seja *x* um número real. Vamos mostrar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é injetora.

Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar x e y números reais arbitrários, ou seja, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ com $f(x) = f(y)$. Como consequência temos que $x^3 = y^3$, ou seja, x*x*x = y*y*y, o que só pode ser verdade se x = y.

Portanto, f é injetora. ■

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função bijetora** (ou bijetiva ou apenas bijeção)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita bijetora se é, <u>ao mesmo tempo</u>, injetora e sobrejetora
      - <u>Todos</u> os elementos do contradomínio estão associados a <u>exatamente um</u> elemento do domínio

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função bijetora** (ou bijetiva ou apenas bijeção)
    - Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita bijetora se é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora
      - Todos os elementos do contradomínio estão associados a exatamente um elemento do domínio
    - Exemplos

a) A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {a, b, c, d, e}

f: A $\rightarrow$ B f = {(1,a), (2,e), (3,b), (4,c), (5,d)}

- **É bijetiva = ?**

b) A = {a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

f : A $\rightarrow$ B   f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

- **É bijetiva = ?**

Funções

- **Propriedades de funções**
  - **Função bijetora** (ou bijetiva ou apenas bijeção)
    - Uma função *f*: S $\rightarrow$ T é dita bijetora se é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora
      - ➔ Todos os elementos do contradomínio estão associados a exatamente um elemento do domínio
    - Exemplos

a) A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {a, b, c, d, e}

f: A $\rightarrow$ B f = {(1,a), (2,e), (3,b), (4,c), (5,d)}

- **É bijetiva = SIM**

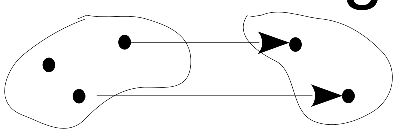
b) A = {a, b, c, d} e B = {r, s, t, u}

f : A $\rightarrow$ B   f = {(a,s), (b,u), (c,r), (d,s)}

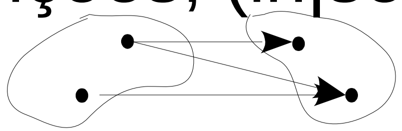
- **É bijetiva = NÃO**, pois não é nem sobrejetiva nem injetiva

Funções

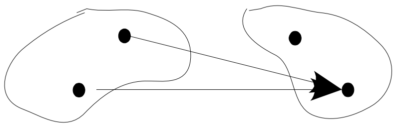
- **Propriedades de funções**
  - **Resumo** – diga se são funções, (in|sobre|bi)jetoras



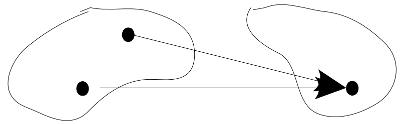
?



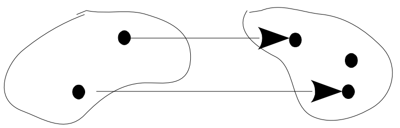
?



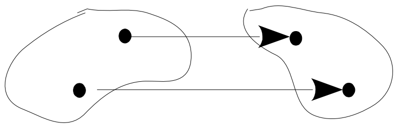
?



?



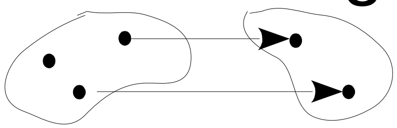
?



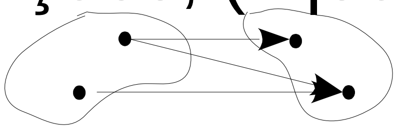
?

Funções

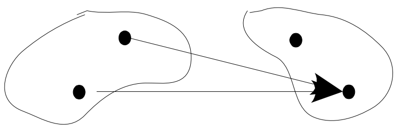
- **Propriedades de funções**
  - **Resumo** – diga se são funções, (in|sobre|bi)jetoras



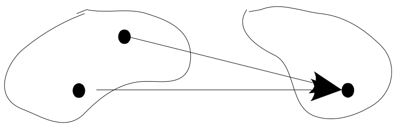
Não é função



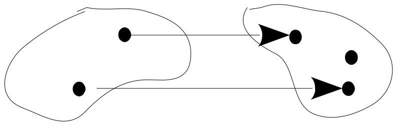
Não é função



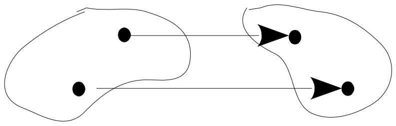
?



?



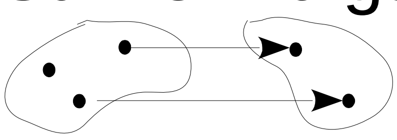
?



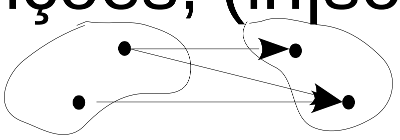
?

Funções

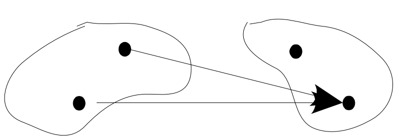
- **Propriedades de funções**
  - **Resumo** – diga se são funções, (in|sobre|bi)jetoras



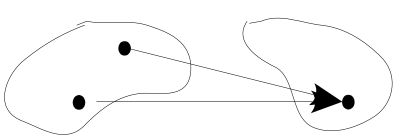
Não é função



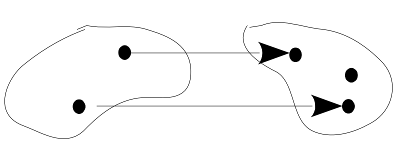
Não é função



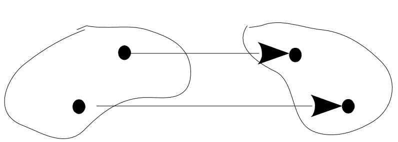
Função não injetora
Função não sobrejetora



Função não injetora
Função **sobrejetora**



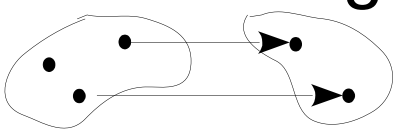
?



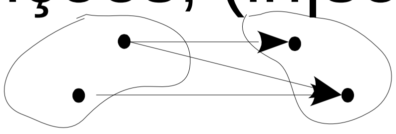
?

Funções

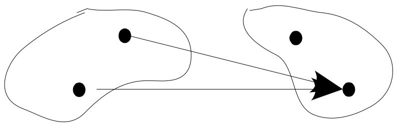
- **Propriedades de funções**
  - **Resumo** – diga se são funções, (in|sobre|bi)jetoras



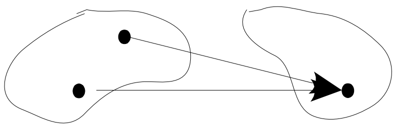
Não é função



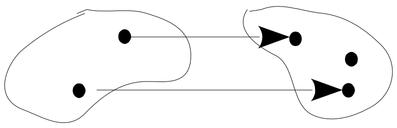
Não é função



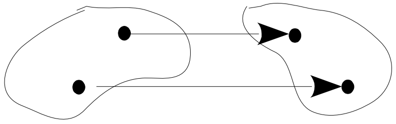
Função não injetora
Função não sobrejetora



Função não injetora
Função **sobrejetora**



Função **injetora**
Função não sobrejetora



Função **injetora**
Função **sobrejetora**
Função **bijetora**

Funções

- **Exercícios**
  - Para cada uma das relações a seguir, diga:
    - Se é ou não função
    - Se for função, diga se é injetora, sobrejetora e bijetora

a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $f: A \to B$, $f(x) = 2x+1$

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $g: A \to B$, $g(x) = x$

c) $A = \{-1, 1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$, $h: A \to B$, $h(x) = x^2$

d) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $i: A \to B$, $i(x) = |2x|$

e) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $j: A \to B$, $j(x) = -2x$

Funções

- **Exercícios**
  - Para cada uma das relações a seguir, diga:
    - Se é ou não função
    - Se for função, diga se é injetora, sobrejetora e bijetora

a) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $f: A \to B$, $f(x) = 2x+1$

b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $g: A \to B$, $g(x) = x$

c) $A = \{ -1, 1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$, $h: A \to B$, $h(x) = x^2$

d) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $i: A \to B$, $i(x) = |2x|$

e) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $j: A \to B$, $j(x) = -2x$

a) Função injetora, não sobrejetora, não bijetora
b) Não é função, pois g(0) não está definida
c) Função não injetora, sobrejetora, não bijetora
d) Função não injetora, não sobrejetora, não bijetora
e) Função bijetora

Funções

- **Função inversa**
  - A inversa de uma função f é uma relação inversa f^{-1} obtida invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em f
    - Se $f: S \rightarrow T$ então $f^{-1}: T \rightarrow S$ é uma função?

Funções

- **Função inversa**
  - A inversa de uma função f é uma relação inversa f^{-1} obtida invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em f
    - Se $f: S \to T$ então $f^{-1}: T \to S$ é uma função?
      - ➔ Nem sempre a inversa de uma função é também uma função

Funções

- **Função inversa**
  - A inversa de uma função f é uma relação inversa f^{-1} obtida invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em f
    - Se f: S $\rightarrow$ T então f^{-1}: T $\rightarrow$ S é uma função?
      - Nem sempre a inversa de uma função é também uma função
  - Exemplo

    a) A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {5, 6, 7, 8, 9}

    f: A $\rightarrow$ B $\quad$ f = {(0,5), (1,7), (2,8), (3,9), (4,7)}

    Calculando a f^{-1}: f^{-1} = **?**

Funções

- **Função inversa**
  - A inversa de uma função f é uma relação inversa f^{-1} obtida invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em f
    - Se $f: S \rightarrow T$ então $f^{-1}: T \rightarrow S$ é uma função?
      - Nem sempre a inversa de uma função é também uma função
  - Exemplo

    a) A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {5, 6, 7, 8, 9}

    $f: A \rightarrow B$ $\quad$ $f = \{(0,5), (1,7), (2,8), (3,9), (4,7)\}$

    Calculando a f^{-1}: $f^{-1} = \{(5,0), (7,1), (8,2), (9,3), (7,4)\}$

    - **É função = ?**

Funções

- **Função inversa**
  - A inversa de uma função f é uma relação inversa f^{-1} obtida invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em f
    - Se f: S $\rightarrow$ T então f^{-1}: T $\rightarrow$ S é uma função?
      - Nem sempre a inversa de uma função é também uma função
  - Exemplo

    a) A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {5, 6, 7, 8, 9}

    f: A $\rightarrow$ B f = {(0,5), (1,7), (2,8), (3,9), (4,7)}

    Calculando a f^{-1}: f^{-1} = {(5,0), (7,1), (8,2), (9,3), (7,4)}

    - **É função = NÃO**, pois tanto (7,1) como (7,4) estão em f^{-1} e dom f^{-1} = {5, 7, 8, 9} $\neq$ B

Funções

- **Função inversível**
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se sua inversa é uma função de T para S
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se e somente se f é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora

Funções

- **Função inversível**
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se sua inversa é uma função de T para S
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se e somente se f é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora
  - Exemplo
    - A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {a, b, c, d, e}

      f: A $\rightarrow$ B f = {(1,a), (2,e), (3,b), (4,c), (5,d)}

      - **f é inversível = ?**

Funções

- **Função inversível**
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se sua inversa é uma função de T para S
  - Uma função f: S $\rightarrow$ T é inversível se e somente se f é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora
  - Exemplo
    - A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {a, b, c, d, e}

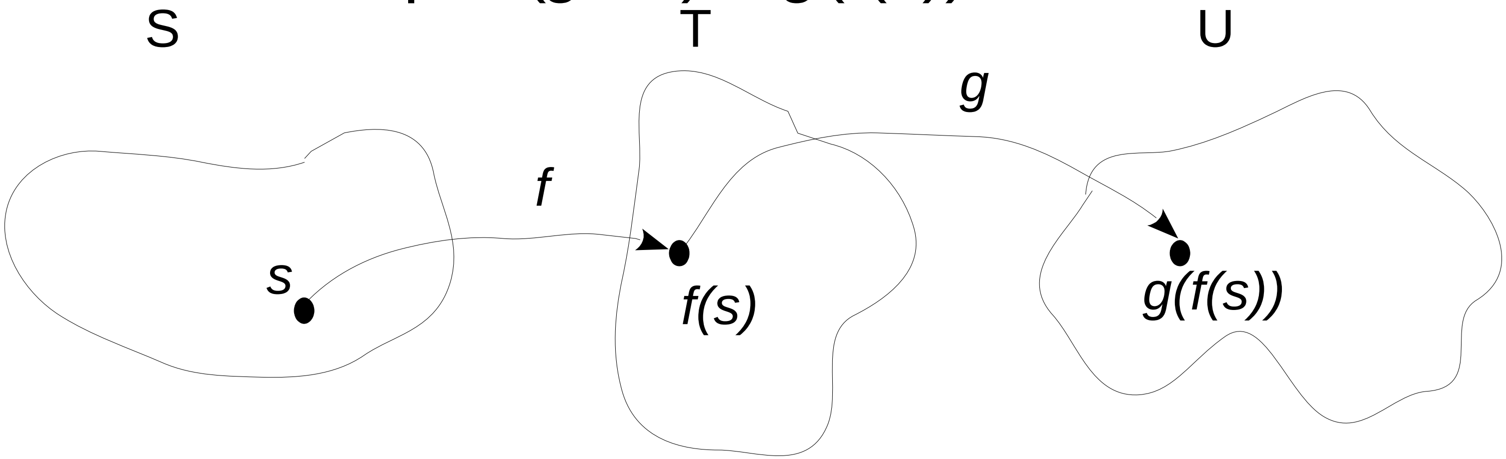
      f: A $\rightarrow$ B f = {(1,a), (2,e), (3,b), (4,c), (5,d)}

      - **f é inversível = SIM**

        f^{-1}: B $\rightarrow$ A f^{-1} = {(a,1), (e,2), (b,3), (c,4), (d,5)}

Funções

- **Composição de funções**
  - Sejam f: S $\rightarrow$ T e g: T $\rightarrow$ U
    - A função composta $g \circ f$ é a função de S em U definida por $(g \circ f) = g(f(x))$



- Para todo s $\in$ S, f(s) é um elemento de T que, por sua vez, é domínio de g
- Logo, pode-se calcular g(f(s)) que é um elemento de U

Funções

- **Composição de funções**
  - Sejam f: S $\rightarrow$ T e g: T $\rightarrow$ U
    - A função composta $g \circ f$ é a função de S em U definida por $(g \circ f) = g(f(x))$
    - Exemplo

a) A = {1, 2, 3} B = {2, 4, 6, 8} C = {a, b, c}

f: A $\rightarrow$ B com f = {(1,2), (2,4), (3,6)}

g: B $\rightarrow$ C com g = {(2,a), (4,c), (6,a), (8,b)}

Seja a composição de f e g como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

$(g \circ f)(1) = g(f(1))$ = ?

$(g \circ f)(2) = g(f(2))$ = ?

$(g \circ f)(3) = g(f(3))$ = ?

Funções

- **Composição de funções**
  - Sejam f: S $\rightarrow$ T e g: T $\rightarrow$ U
    - A função composta $g \circ f$ é a função de S em U definida por $(g \circ f) = g(f(x))$
    - Exemplo

a) A = {1, 2, 3} B = {2, 4, 6, 8} C = {a, b, c}

f: A $\rightarrow$ B com f = {(1,2), (2,4), (3,6)}

g: B $\rightarrow$ C com g = {(2,a), (4,c), (6,a), (8,b)}

Seja a composição de f e g como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

$(g \circ f)\ (1) = g(f(1)) = g(2) = \mathrm{a}$

$(g \circ f)\ (2) = g(f(2)) = g(4) = \mathrm{c}$

$(g \circ f)\ (3) = g(f(3)) = g(6) = \mathrm{a}$

Logo, $(g \circ f)$: A $\rightarrow$ C com $(g \circ f)$ = {(1,a), (2,c), (3,a)}

Funções

- **Composição de funções**
  - IMPORTANTE
    - Nem sempre é possível fazer a composição de duas funções arbitrárias
      - Os domínios e imagens têm que ser compatíveis
    - A ordem é importante na composição das funções
    - A composição de funções preserva as propriedades das funções serem injetoras ou sobrejetoras
      - A composição de duas bijeções é também uma bijeção

Funções

- **Composição de funções**
  - Dados $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, calcule as composições a seguir

    a) $g \circ f$

    b) $f \circ g$

    c) $f \circ f$

    d) $g \circ g$

Funções

- **Composição de funções**
  - Dados $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, calcule as composições a seguir

    a) $g \circ f = g(f(x)) = g(2x+3) = 5(2x+3) = 10x+15$

    b) $f \circ g = f(g(x)) = f(5x) = 2(5x)+3 = 10x+3$

    $g \circ f \neq f \circ g$

    c) $f \circ f = f(f(x)) = f(2x+3) = 2(2x+3)+3 = 4x+6+3 = 4x+9$

    d) $g \circ g = g(g(x)) = g(5x) = 5(5x) = 25x$

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - Sem perda de generalidade, podemos assumir que esses conjuntos são:
      - $A = \{1, 2, ..., a\}$ e $B = \{1, 2, ..., b\}$
      - Toda função *f*: $A \rightarrow B$ pode ser escrita como:
      - $f = \{(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)\}$
      - O símbolo de interrogação representa os elementos de B

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - Sem perda de generalidade, podemos assumir que esses conjuntos são:
      - A = {1, 2, ..., a} e B = {1, 2, ..., b}
      - Toda função *f*: A $\rightarrow$ B pode ser escrita como:
      - f = {(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)}
      - O símbolo de interrogação representa os elementos de B
      - Para definir uma função específica temos que dizer quais valores de B substituirão os pontos de interrogação
      - De quantas formas diferentes podemos substituir os pontos de interrogação?

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - Sem perda de generalidade, podemos assumir que esses conjuntos são:
      - A = {1, 2, ..., a} e B = {1, 2, ..., b}

mo:

elementos

s que dizer
s de

substituir os

f = {(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)}

(1,1)
(1,2)
(1,3)
(1,4)
…
(1,b)

$\Downarrow$

b possibilidades

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - Sem perda de generalidade, podemos assumir que esses conjuntos são:
      - A = {1, 2, ..., a} e B = {1, 2, ..., b}

mo:

elementos

s que dizer

s de

substituir os

$$f = \{(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)\}$$

(1,1),	(2,1)
(1,2),	(2,2)
(1,3),	(2,3)
(1,4),	(2,4)
…	...
(1,b),	(2,b)
b	+ b possibilidades

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - Sem perda de generalidade, podemos assumir que esses conjuntos são:
      - A = {1, 2, ..., a} e B = {1, 2, ..., b}

f = {(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)}

(1,1), (2,1)

(1,2), (2,1)

(1,3), (2,1)

(1,4), (2,1)

… ...

(1,b), (2,1)

b * b possibilidades

mo:

s elementos

s que dizer

s de

substituir os

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - $A = \{1, 2, ..., a\}$ e $B = \{1, 2, ..., b\}$
    - Toda função $f: A \rightarrow B$ pode ser escrita como:
    - $f = \{(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)\}$
      - Para definir o par (1,?), podemos escolher qualquer elemento de B
      - Portanto, temos b escolhas para definir o par (1,?)
      - O mesmo acontece para os demais pares de f

    ➔ No total, temos b^a maneiras diferentes de substituir todos os pontos de interrogação

Funções

- **Contagem de funções**
  - Sejam A e B conjuntos finitos
    - $A = \{1, 2, ..., a\}$ e $B = \{1, 2, ..., b\}$
    - Toda função $f: A \rightarrow B$ pode ser escrita como:
    - $f = \{(1,?), (2,?), (3,?), ..., (a,?)\}$
      - Para definir o par (1,?), podemos escolher qualquer elemento de B
      - Portanto, temos b escolhas para definir o par (1,?)
      - O mesmo acontece para os demais pares de f

    → No total, temos b^a maneiras diferentes de substituir todos os pontos de interrogação

    - **Proposição**
      - Sejam A e B conjuntos finitos com $|A| = a$ e $|B| = b$. O número de funções de A para B é b^a

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \to B$
      - Se $|A| > |B|$, então f ...

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \to B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é um a um

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \rightarrow B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é um a um
      - Se $|A| < |B|$, então f ...

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \rightarrow B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é um a um
      - Se $|A| < |B|$, então f <u>não</u> é sobre
      - Se f é uma bijeção, então $|A| =$?

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \longrightarrow B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é um a um
      - Se $|A| < |B|$, então f <u>não</u> é sobre
      - Se f é uma bijeção, então $|A| = |B|$

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposição
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \longrightarrow B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é um a um
      - Se $|A| < |B|$, então f <u>não</u> é sobre
      - Se f é uma bijeção, então $|A| = |B|$
    - Como decorrência dessa proposição, podemos afirmar que:
      - Se f: $A \longrightarrow B$ é um a um, então $|A| \leq |B|$ e
      - Se f: $A \longrightarrow B$ é sobre, então $|A| \geq |B|$