MATRIZES VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2004

Editor, Coordenador de Revisão, Supervisor de Produção, Capa e Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

ISBN 85-7470-014-2

Ficha Catalográfica

Santos, Reginaldo J.
S237m Matrizes Vetores e Geometria Analítica / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2004.

1. Geometria Analítica I. Título

CDD: 516.3

Conteúdo

Prefácio

Este texto cobre o material para um curso de Geometria Analítica ministrado para estudantes da área de Ciências Exatas. O texto pode, mas **não** é necessário, ser acompanhado do programa MATLAB®*.

O conteúdo é dividido em sete capítulos. O Capítulo 1 trata das matrizes e sistemas lineares. Aqui todas as propriedades da álgebra matricial são demonstradas. A resolução de sistemas lineares é feita usando somente o método de Gauss-Jordan (transformando a matriz até que ela esteja na forma escalonada reduzida). Este método requer mais trabalho do que o método de Gauss (transformando a matriz, apenas, até que ela esteja na forma escalonada). Ele foi o escolhido, por que também é usado no estudo da inversão de matrizes no Capítulo 2. Neste Capítulo é também estudado o determinante, que é definido usando cofatores. As subseções 2.2.2 e 2.2.3 são independentes entre si. As demonstrações dos resultados deste capítulo podem ser, a critério do leitor, feitas somente para matrizes 3×3.

*MATLAB® é marca registrada de The Mathworks, Inc.

O Capítulo 3 trata de vetores no plano e no espaço. Os vetores são definidos de forma geométrica, assim como a soma e a multiplicação por escalar. São provadas algumas propriedades geometricamente. Depois são introduzidos sistemas de coordenadas de forma natural sem a necessidade da definição de base. Os produtos escalar e vetorial são definidos geometricamente. O Capítulo 4 trata de retas e planos no espaço. São estudados ângulos, distâncias e posições relativas de retas e planos.

O Capítulo 5 traz um estudo das seções cônicas. São também estudadas as coordenadas polares e parametrizações das cônicas. As superfícies são estudadas no Capítulo 6 incluindo aí as quádricas, superfícies cilíndricas, cônicas e de revolução. Neste Capítulo são também estudadas as coordenadas cilíndricas, esféricas e parametrização de superfícies e curvas no espaço. O Capítulo 7 traz mudança de coordenadas, rotação e translação. Dada uma equação geral de 2º grau em duas ou três variáveis, neste Capítulo, através de mudanças de coordenadas é feita a identificação da cônica ou da quádrica correspondente a equação.

Os exercícios estão agrupados em três classes. Os "Exercícios Numéricos", que contém exercícios que são resolvidos fazendo cálculos, que podem ser realizados sem a ajuda de um computador ou de uma máquina de calcular. Os "Exercícios Teóricos", que contém exercícios que requerem demonstrações. Alguns são simples, outros são mais complexos. Os mais difíceis complementam a teoria e geralmente são acompanhados de sugestões. Os "Exercícios usando o MATLAB®", que contém exercícios para serem resolvidos usando o MATLAB® ou outro software. Os comandos necessários a resolução destes exercícios são também fornecidos juntamente com uma explicação rápida do uso. Os exercícios numéricos são imprescindíveis, enquanto a resolução dos outros, depende do nível e dos objetivos pretendidos para o curso.

O MATLAB® é um software destinado a fazer cálculos com matrizes (MATLAB® = MATrix LABoratory). Os comandos do MATLAB® são muito próximos da forma como escrevemos expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso. Podem ser incorporados às rotinas pré-definidas, pacotes para cálculos específicos. Um pacote chamado `gaal` com funções que são direcionadas para o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear pode ser obtido através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB® e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Mais informações sobre o que o MATLAB® é capaz, podem ser obtidas em [4, 17].

No fim de cada capítulo temos um "Teste do Capítulo", onde o aluno pode avaliar os seus conhecimentos. Os Exercícios Numéricos e os Exercícios usando o MATLAB® estão resolvidos após o último capítulo utilizando o MATLAB®. Desta forma o leitor que não estiver interessado em usar o software pode obter apenas as respostas dos exercícios, enquanto aquele que tiver algum interesse, pode ficar sabendo como os exercícios poderiam ser resolvidos fazendo uso do MATLAB® e do pacote `gaal`.

O programa MATLAB® pode ser adquirido gratuitamente na compra do livro "Student Edition of MATLAB Version 5 for Windows" - Book and CD-ROM edition [17], por exemplo na Amazon.com (`http://www.amazon.com`).

Gostaria de agradecer aos professores que colaboraram apresentando correções, críticas e sugestões, entre eles Dan Avritzer, Joana Darc A. S. da Cruz, Francisco Dutenhefner, Jorge Sabatucci, Seme Gebara, Alexandre Washington, Vivaldo R. Filho, Hamilton P. Bueno, Paulo A. F. Machado, Helder C. Rodrigues, Flaviana A. Ribeiro, Cristina Marques, Rogério S. Mol, Maria Laura M. Gomes, Maria Cristina C. Ferreira, Paulo C. de Lima, José Barbosa Gomes, Moacir G. dos Anjos e Daniel C. de Morais Filho.

Histórico

Julho 2004 Foi acrescentado um exercício na seção 1.1. Foi incluída a demonstração de que toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida. Este resultado era o Teorema 1.4 na página 26 que passou para o Apêndice II da seção 1.2. O Teorema 1.4 agora contém as propriedades da relação "ser equivalente por linhas" com a demonstração. No Capítulo 3 foram acrescentados 2 exercícios na seção 3.1, 1 exercício na seção 3.2. No Capítulo 4 a seção 4.1 foi reescrita e foram acrescentados 2 exercícios.

Março 2002 Criado a partir do texto 'Geometria Analítica e Álgebra Linear' para ser usado numa disciplina de Geometria Analítica.

Sugestão de Cronograma

Capítulo 1	Seções 1.1 e 1.2	8 aulas
Capítulo 2	Seções 2.1 e 2.2	8 aulas
Capítulo 3	Seções 3.1 e 3.2	8 aulas
Capítulo 4	Seções 4.1 e 4.2	8 aulas
Capítulo 5	Seções 5.1 e 5.2	8 aulas
Capítulo 6	Seções 6.1 a 6.3	12 aulas
Capítulo 7	Seções 7.1 a 7.3	12 aulas
	Total	64 aulas

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

1.1 Matrizes

Operando com matrizes estamos utilizando uma forma compacta de fazermos operações com vários números simultaneamente. Vamos definir operações matriciais análogas às operações com números e provar as propriedades que são válidas para essas operações. Depois disto, o estudo envolvendo operações com vários números pode ser simplificado fazendo operações com as matrizes e usando as propriedades que já foram demonstradas. Por exemplo, veremos que um sistema de várias equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.

Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n

colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A i-**ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \dots, m$ e a j-**ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \dots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.

Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a chamada **diagonal (principal)** de A.

Exemplo 1.1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1. De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{12} = 2$, $c_{23} = -2$, $e_{21} = 4$, $[A]_{22} = 4$, $[D]_{12} = 3$.

Duas matrizes são consideradas iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Vamos, agora, introduzir as operações matriciais.

1.1.1 Operações com Matrizes

Definição 1.1. A **soma** de duas matrizes de **mesmo tamanho** $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz

$$A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, ,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 1.2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & -3+5 \\ 3+0 & 4+3 & 0+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição 1.2. A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **por um escalar** (número) α é definida pela matriz

$$\alpha A = B = (b_{ij})_{m\times n}$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

para $i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um **múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 1.3. O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por

$$-3\,A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)\,1 \\ (-3)\,0 & (-3)\,3 \\ (-3)\,5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.3. O **produto** de duas matrizes, tais que **o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda**, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$$

obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \qquad (1.1)\\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,, \qquad (1.2) \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

A equação (1.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{a_{i1}} & a_{i2} & \ldots & \multicolumn{1}{c|}{a_{ip}} \\ \hline \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{array}\right]$$

Na equação (1.2) estamos usando a **notação de somatório** para escrever a equação (1.1) de forma compacta. O símbolo $\sum_{k=1}^{p}$ significa que estamos fazendo uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$.

Exemplo 1.4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se chamamos de C o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1\,(-2) + 2\cdot 0 + (-3)\,5 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-3)\,(-4) & 0 \\ 3\,(-2) + 4\cdot 0 + 0\cdot 5 & 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 0\,(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação. No exemplo anterior o produto BA não está definido (por que?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, BA pode não ser igual a AB, ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 1.5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Vamos ver no próximo exemplo como as matrizes podem ser usadas para descrever quantitativamente um processo de produção.

Exemplo 1.6. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

$$\begin{array}{r} \\ \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = A \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \end{array}$$

Definição 1.4. A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz

$$A^t = B = (b_{ij})_{n\times m}$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}\,,$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Escrevemos também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.7. As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A seguir, mostraremos as propriedades que são válidas para a álgebra matricial. Várias propriedades são semelhantes àquelas que são válidas para os números reais, mas deve-se tomar cuidado com as diferenças. Uma propriedade importante que é válida para os números reais, mas não é válida para as matrizes é a comutatividade do produto, como foi mostrado no Exemplo 1.5. Por ser compacta, usaremos a notação de somatório na demonstração de várias propriedades. Algumas propriedades desta notação estão explicadas no Apêndice I na página 29.

1.1.2 Propriedades da Álgebra Matricial

Teorema 1.1. *Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) *(comutatividade da soma) $A + B = B + A$;*

(b) *(associatividade da soma) $A + (B + C) = (A + B) + C$;*

(c) *(elemento neutro da soma) Existe uma única matriz $\bar{0}$, $m \times n$, tal que*

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz A, $m \times n$. A matriz $\bar{0}$ é chamada **matriz nula** *$m \times n$.*

(d) *(elemento simétrico) Para cada matriz A, existe uma única matriz B, tal que*

$$A + B = \bar{0}.$$

Representamos B por $-A$.

(e) *(associatividade) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;*

(f) *(distributividade) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;*

(g) *(distributividade) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;*

(h) *(associatividade do produto)* $A(BC) = (AB)C$;

(i) *(distributividade)* $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;

(j) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(k) $(A^t)^t = A$;

(l) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(m) $(AB)^t = B^t A^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha\, A^t$;

(o) *A matriz, $n \times n$,*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada **matriz identidade** *é tal que*

$$A\, I_n = A, \quad \textit{para toda matriz } A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ e}$$

$$I_n\, B = B, \quad \textit{para toda matriz } B = (b_{ij})_{n\times m}.$$

Demonstração. Para provar as igualdades acima, devemos mostrar que os elementos da matriz do lado esquerdo são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito. Serão usadas várias propriedades dos números sem citá-las explicitamente.

(a) $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B+A]_{ij}$;

(b) $[A+(B+C)]_{ij} = a_{ij} + [B+C]_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = [A+B]_{ij} + c_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$;

(c) Seja X uma matriz $m \times n$ tal que
$$A + X = A \tag{1.3}$$
para qualquer matriz A, $m \times n$. Comparando os elementos correspondentes, temos que
$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij}\,,$$
ou seja, $x_{ij} = 0$, para $i = 1\ldots, m$ e $j = 1\ldots, n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.3) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Denotamos a matriz X por $\bar{0}$.

(d) Dada uma matriz A, $m \times n$, seja X uma matriz $m \times n$, tal que
$$A + X = \bar{0}\,. \tag{1.4}$$
Comparando os elementos correspondentes, temos que
$$a_{ij} + x_{ij} = 0\,,$$
ou seja, $x_{ij} = -a_{ij}$, para $i = 1\ldots, m$ e $j = 1\ldots, n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.4) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais aos simétricos dos elementos de A. Denotamos a matriz X por $-A$.

(e) $[\alpha(\beta A)]_{ij} = \alpha[\beta A]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$.

(f) $[(\alpha+\beta)A]_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$.

(g) $$\begin{aligned} [\alpha(A+B)]_{ij} &= \alpha[A+B]_{ij} = \alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} \\ &= [\alpha A + \alpha B]_{ij}. \end{aligned}$$

(h) A demonstração deste item é a mais trabalhosa. Sejam A, B e C matrizes $m\times p$, $p \times q$ e $q \times n$ respectivamente. A notação de somatório aqui pode ser muito útil, pelo fato de ser compacta.

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^{q}[AB]_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}\,. \end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned} [A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}\,. \end{aligned}$$

A outra igualdade é inteiramente análoga a anterior e deixamos como exercício.

(j) $[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij}$ e

$$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = [A(\alpha B)]_{ij}.$$

(k) $[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$.

(l) $[(A+B)^t]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$.

(m) $[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p} [B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^tA^t]_{ij}$.

(n) $[(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha[A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$.

(o) É imediato.

$\square$

A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tamanho A e B é definida por

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz A com a simétrica da matriz B.

Sejam A uma matriz $n \times n$ e p um inteiro positivo. Definimos a **potência** p de A, por $A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p \text{ vezes}}$. E para $p = 0$, definimos $A^0 = I_n$.

Exemplo 1.8. Vamos verificar se para matrizes A e B, quadradas, vale a igualdade

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2. \tag{1.5}$$

Usando a propriedade (i) do teorema anterior obtemos

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= (A+B)A + (A+B)(-B) \\ &= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2 \end{aligned}$$

Assim, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se, e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, se, e somente se, $AB = BA$. Como o produto de matrizes não é comutativo, a conclusão é que a igualdade (1.5), **não** vale para matrizes em geral. Como contra-exemplo basta tomarmos duas matrizes que não comutem entre si. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estas matrizes

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 535)

1.1.1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se for possível calcule:

(a) $AB - BA$,

(b) $2C - D$,

(c) $(2D^t - 3E^t)^t$,

(d) $D^2 - DE$.

1.1.2. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC, como podemos calcular $A(B + C)$, B^tA^t, C^tA^t e $(ABA)C$?

1.1.3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que:

(a) AB é diferente de BA.

(b) AE_j é a j-ésima coluna de A, para $j = 1, 2, 3$ e $E_i^t B$ é a i-ésima linha de B, para $i = 1, 2, 3$ (o caso geral está no Exercício 1.1.15 na página 23).

(c) $CD = [\, d_1C_1 \; d_2C_2 \; d_3C_3 \,]$, em que $C_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, são as colunas de C (o caso geral está no Exercício 1.1.16 (a) na página 24).

(d) $DC = \begin{bmatrix} d_1C_1 \\ d_2C_2 \\ d_3C_3 \end{bmatrix}$, em que $C_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são as linhas de C (o caso geral está no Exercício 1.1.16 (b) na página 24).

(e) Escrevendo B em termos das suas colunas, $B = [\, B_1 \; B_2 \,]$, em que $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

$B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, o produto AB pode ser escrito como $AB = A\,[\, B_1 \; B_2 \,] = [\, AB_1 \; AB_2 \,]$ (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (a) na página 25).

(f) escrevendo A em termos das suas linhas, $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, o produto AB pode ser escrito como $AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$ (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (b) na página 25).

1.1.4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Verifique que $xA_1 + yA_2 + zA_3 = AX$, em que A_j é a j-ésima coluna de A, para $j = 1, 2, 3$ (o caso geral está no Exercício 1.1.18 na página 26).

1.1.5. Encontre um valor de x tal que $AB^t = 0$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{bmatrix}$, em que y é uma número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

1.1.7. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = BA$.

1.1.8. (a) Determine todas as matrizes A, 2×2, **diagonais** que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

(b) Determine todas as matrizes A, 2×2, que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

Exercícios usando o MATLAB®

Uma vez inicializado o MATLAB®, aparecerá na janela de comandos um prompt >> ou `EDU>>`. O prompt significa que o MATLAB® está esperando um comando. Todo comando deve ser finalizado teclando-se **Enter**. Comandos que foram dados anteriormente podem ser obtidos novamente usando as teclas ↑ e ↓. Enquanto se estiver escrevendo um comando, este pode ser corrigido usando as teclas ←, →, **Delete** e **Backspace**. O MATLAB® faz diferença entre letras maiúsculas e minúsculas.

No MATLAB®, pode-se obter ajuda sobre qualquer comando ou função. O comando
`>> help`
(sem o prompt >>) mostra uma listagem de todos os pacotes disponíveis. Ajuda sobre um pacote específico ou sobre um comando ou função específica pode ser obtida com o comando
`>> help nome`,
(sem a vírgula e sem o prompt >>) em que `nome` pode ser o nome de um pacote ou o nome de um comando ou função.

Além dos comandos e funções pré-definidas, escrevemos um pacote chamado `gaal` com funções específicas para a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Este pacote pode ser obtido gratuitamente através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB®

e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Depois deste pacote ser devidamente instalado, o comando `help gaal` no prompt do MATLAB® dá informações sobre este pacote.

Mais informações sobre as capacidades do MATLAB® podem ser obtidas em [4, 17].

Vamos descrever aqui alguns comandos que podem ser usados para a manipulação de matrizes. Outros comandos serão introduzidos a medida que forem necessários.

`>> syms x y z` diz ao MATLAB® que as variáveis `x y` e `z` são simbólicas.

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz, m por n, usando os elementos `a11, a12, ..., amn` e a armazena numa variável de nome `A`. Por exemplo, `>> A=[1,2,3;4,5,6]` cria a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

`>> I=eye(n)` cria a matriz identidade n por n e a armazena numa variável `I`;

`>> O=zeros(n)` ou `>> O=zeros(m,n)` cria a matriz nula n por n ou m por n, respectivamente, e a armazena numa variável `O`;

`>> A+B` é a soma de `A` e `B`,

`>> A-B` é a diferença `A` menos `B`,

`>> A*B` é o produto de `A` por `B`,

`>> num*A` é o produto do escalar `num` por `A`,

`>> A.'` é a transposta de `A`,

`>> A^k` é a potência `A` elevado a k.

`>> A(:,j)` é a coluna j da matriz `A`, `>> A(i,:)` é a linha i da matriz `A`.

`>> diag([d1,...,dn])` cria uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são iguais aos elementos da matriz `[d1,...,dn]`, ou seja, são `d1,...,dn`.

`>> A=sym(A)` converte a matriz `A` numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função `numeric` faz o processo inverso.

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`. Por exemplo, `>> solve(x^2-4)` determina as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;

Comando do pacote GAAL:

`>> A=randi(n)` ou `>> A=randi(m,n)` cria uma matriz `n` por `n` ou `m` por `n`, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios entre -5 e 5.

1.1.9. Use o MATLAB® para calcular alguns membros da seqüência $A, A^2, \ldots, A^k, \ldots$, para

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

A seqüência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

1.1.10. Calcule as potências das matrizes dadas a seguir e encontre experimentalmente (por tentativa!) o menor inteiro $k > 1$ tal que (use o comando `>> A=sym(A)` depois de armazenar a matriz na variável `A`):

(a) $A^k = I_3$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(b) $A^k = I_4$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(c) $A^k = \bar{0}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.11. Vamos fazer um experimento no MATLAB® para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. No prompt do MATLAB® digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(3);B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB® fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis `A` e `B`, 1000 matrizes 3×3 com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5.
- Se `AB=BA`, ou seja, `A` e `B` comutarem, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

1.1.12. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que cada uma das matrizes é **diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB® de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=diag(randi(1,3));if( ....
```

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável c?

1.1.13. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que uma das matrizes é diagonal. Use a seta para cima ↑ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB® de forma a obter a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;A,B,end,end,c
```

Aqui são impressas as matrizes A e B quando elas comutarem. Qual a conclusão que você tira deste experimento? Qual a probabilidade de um tal par de matrizes comutarem?

1.1.14. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**.

Exercícios Teóricos

1.1.15. Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $n \times 1$.

(a) Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times n$, então AE_j é igual à coluna j da matriz A.

(b) Mostre que se

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

é uma matriz $n \times m$ então $E_i^t B$ é igual à linha i da matriz B.

1.1.16. Seja

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

uma **matriz diagonal** $n \times n$, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o produto AD é obtido da matriz A multiplicando-se cada coluna j por λ_j, ou seja, se $A = [\, A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_n \,]$, em que $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ é a coluna j de A, então

$$AD = [\, \lambda_1 A_1 \; \lambda_2 A_2 \; \ldots \; \lambda_n A_n \,].$$

(b) Mostre que o produto DA é obtido da matriz A multiplicando-se cada linha i por λ_i, ou seja, se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, em que $A_i = [\, a_{i1} \ \ldots \ a_{in} \,]$ é a linha i de A, então

$$DA = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \lambda_2 A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n A_n \end{bmatrix}.$$

1.1.17. Sejam A e B matrizes $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente.

(a) Mostre que a j-ésima coluna do produto AB é igual ao produto AB_j, em que $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna de B, ou seja, se $B = [\, B_1 \ \ldots \ B_n \,]$, então

$$AB = A[\, B_1 \ \ldots \ B_n \,] = [\, AB_1 \ \ldots \ AB_n \,];$$

(b) Mostre que a i-ésima linha do produto AB é igual ao produto A_iB, em que $A_i =$

$$[\, a_{i1} \; \ldots \; a_{ip} \,] \text{ é a } i\text{-ésima linha de } A\text{, ou seja, se } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\text{, então}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}.$$

1.1.18. Seja A uma matriz $m \times n$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times 1$. Prove que $AX = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, em que A_j é a j-ésima coluna de A. (Sugestão: Desenvolva o lado direito e chegue ao lado esquerdo.)

1.1.19. (a) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ tal que $AX = \bar{0}$, para toda matriz X, $n \times 1$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: use o Exercício 15 na página 23.)

(b) Sejam B e C matrizes $m \times n$, tais $BX = CX$, para todo X, $n \times 1$. Mostre que $B = C$. (Sugestão: use o item anterior.)

1.1.20. Mostre que a matriz identidade I_n é a única matriz tal que $A\,I_n = I_nA = A$ para qualquer matriz A, $n \times n$. (Sugestão: Seja J_n uma matriz tal que $A\,J_n = J_n\,A = A$. Mostre que $J_n = I_n$.)

1.1.21. Se $AB = BA$ e p é um inteiro positivo, mostre que $(AB)^p = A^pB^p$.

1.1.22. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$.

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? E se $AB = BA$? Justifique.

(b) $(AB)C = C(AB)$? E se $AC = CA$ e $BC = CB$? Justifique.

(Sugestão: Veja o Exemplo 1.8 na página 15.)

1.1.23. (a) Se A e B são duas matrizes tais que $AB = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$ ou $B = \bar{0}$? Justifique.

(b) Se $AB = \bar{0}$, então $BA = \bar{0}$? Justifique.

(c) Se A é uma matriz tal que $A^2 = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$? Justifique.

1.1.24. Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é **simétrica** se $A^t = A$ e é **anti-simétrica** se $A^t = -A$.

(a) Mostre que se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$ e que se A é anti-simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$. Portanto, os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são iguais a zero.

(b) Mostre que se A e B são simétricas, então $A+B$ e αA são simétricas, para todo escalar α.

(c) Mostre que se A e B são simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

(d) Mostre que se A e B são anti-simétricas, então $A + B$ e αA são anti-simétricas, para todo escalar α.

(e) Mostre que para toda matriz A, $n \times n$, $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica.

(f) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica. (Sugestão: Observe o resultado da soma de $A + A^t$ com $A - A^t$.)

1.1.25. Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n\times n}$ definimos o **traço** de A como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de A, ou seja, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Mostre que $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) Mostre que $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.

(c) Mostre que $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$.

(d) Mostre que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (Sugestão: Prove inicialmente para matrizes 2×2.)

1.1.26. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que se $AA^t = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: use o traço.) E se a matriz A for $m \times n$, com $m \neq n$?

1.1.27. Já vimos que o produto de matrizes não é comutativo. Entretanto, certos conjuntos de matrizes são comutativos. Mostre que:

(a) Se D_1 e D_2 são matrizes diagonais $n \times n$, então $D_1D_2 = D_2D_1$.

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ e

$$B = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_kA^k,$$

em que $a_0, \ldots, a_k$ são escalares, então $AB = BA$.

Apêndice I: Notação de Somatório

São válidas algumas propriedades para a notação de somatório:

(a) O índice do somatório é uma variável muda que pode ser substituída por qualquer letra:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

(b) O somatório de uma soma pode ser escrito como uma soma de dois somatórios:

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Pois,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f_i + g_i) = (f_1 + g_1) + \ldots + (f_n + g_n) = (f_1 + \ldots + f_n) + (g_1 + \ldots + g_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i.$
Aqui foram aplicadas as propriedades associativa e comutativa da soma de números.

(c) Se no termo geral do somatório aparece um produto, em que um fator não depende do índice do somatório, então este fator pode "sair" do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Pois,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = f_1 g_k + \ldots + f_n g_k = g_k (f_1 + \ldots + f_n) = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i.$ Aqui foram aplicadas as propriedades distributiva e comutativa do produto em relação a soma de números.

(d) Num somatório duplo, a ordem dos somatórios pode ser trocada:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}.$$

Pois,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(f_{i1}+\ldots+f_{im}) = (f_{11}+\ldots+f_{1m})+\ldots+(f_{n1}+\ldots+f_{nm}) = (f_{11}+\ldots+f_{n1})+\ldots+(f_{1m}+\ldots+f_{nm}) = \sum_{j=1}^{m}(f_{1j}+\ldots+f_{nj}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_{ij}$. Aqui foram aplicadas as propriedades comutativa e associativa da soma de números.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando o produto de matrizes que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{A\,X = B,}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz A é chamada **matriz do sistema linear.**

Exemplo 1.9. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Definição 1.5. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema 1.2. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. A demonstração deste teorema segue de duas observações:

(a) Se X é solução de um sistema, então X também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações (verifique!).

(b) Se o sistema $CX = D$, é obtido de $AX = B$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações (ou equivalentemente às linhas da sua matriz aumentada), então o sistema $AX = B$ também pode ser obtido de $CX = D$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez (verifique!).

Pela observação (b), $AX = B$ e $CX = D$ podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma operação elementar sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem as mesmas soluções. $\square$

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue do Teorema 1.2 que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução.

Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo o número 1 (chamado de **pivô**). Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso.

Exemplo 1.10. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 5y & & & = & 15 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 10 \\ 3x & + & 4y & & & = & 11 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Vamos procurar para pivô da 1ª linha um elemento não nulo da primeira coluna não nula (se for o caso, podemos usar a troca de linhas para "trazê-lo" para a primeira linha). Precisamos "fazê-lo" igual a um, para isto, multiplicamos a 1ª linha por $1/5$.

$$\boxed{1/5 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -2 vezes a 1ª linha e adicionamos à 3ª linha, -3 vezes a 1ª linha.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -3\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Como temos que "fazer" o pivô igual a um, vamos escolher o elemento de posição 3,2. Precisamos "colocá-lo" na 2ª linha, para isto, trocamos a 3ª linha com a 2ª.

$$\boxed{2^{\underline{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 3ª linha, -2 vezes a 2ª e somamos à 1ª linha, -1 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

que possui solução geral dada por

$$X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right].$$

A última matriz que obtivemos está na forma que chamamos de **escalonada reduzida**.

Definição 1.6. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

(b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, chamado **pivô**, é igual a 1;

(c) O pivô da linha $i+1$ ocorre à direita do pivô da linha i, para $i = 1, \dots, m-1$.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

Exemplo 1.11. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são escalonadas, mas **não** são escalonadas reduzidas.

Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como **método de Gauss-Jordan**.

Exemplo 1.12. Considere o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 13z & = & 9 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & -2y & - & 10z & = & -8 \end{array} \right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Como o pivô da 1ª linha é igual a 1 e os outros elementos da 1ª coluna são iguais a zero, não há nada o que fazer na 1ª eliminação.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como ele é igual a 1, precisamos, agora, "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto somamos à 1ª linha, -3 vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{r} -3\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 1^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}}\text{ linha} \\ 2\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha} \end{array}} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 2z & = & 3 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right.$$

que **não** possui solução.

Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma $[\,0\ \ldots\ 0\,|\,b'_m\,]$, com $b'_m \neq 0$.

Exemplo 1.13. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3z & - & 9w & = & 6 \\ 5x & + & 15y & - & 10z & + & 40w & = & -45 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5w & = & -7 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Como temos que "fazer" o pivô igual a um, escolhemos para pivô o elemento de posição 3,1. Precisamos "colocá-lo" na primeira linha, para isto, trocamos a 3ª linha com a 1ª .

$$\boxed{1^{\underline{a}}\text{ linha} \longleftrightarrow 4^{\underline{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -5 vezes a 1ª.

$$\boxed{-5\times 1^{\text{a}}\ \text{linha} + 2^{\text{a}}\ \text{linha} \longrightarrow 2^{\text{a}}\ \text{linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Escolhemos o elemento de posição 2,3. Como temos que fazer o pivô igual a 1, multiplicamos a 2ª linha por $-1/5$.

$$\boxed{-(1/5)\times 2^{\text{a}}\ \text{linha} \longrightarrow 2^{\text{a}}\ \text{linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 1ª linha a 2ª e à 4ª linha, -3 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{r} 2^{\text{a}}\ \text{linha} + 1^{\text{a}}\ \text{linha} \longrightarrow 1^{\text{a}}\ \text{linha} \\ -3\times 2^{\text{a}}\ \text{linha} + 4^{\text{a}}\ \text{linha} \longrightarrow 4^{\text{a}}\ \text{linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz é escalonada reduzida. Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & & & + & 2w & = & -5 \\ & & & & z & - & 3w & = & 2. \end{array} \right.$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Neste exemplo as variáveis y e w não estão associadas a pivôs e podem ser consideradas variáveis livres. Sejam $w = \alpha$ e $y = \beta$. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres, $z = 2 + 3\alpha$, $x = -5 - 2\alpha - 3\beta$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2\alpha - 3\beta \\ \beta \\ 2 + 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todos os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivôs, as variáveis que **não** estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma $[\,0\ \ldots\ 0\,|\,b'_m\,]$, com $b'_m \neq 0$, como no Exemplo 1.12 na página 39.

Observação. Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da Definição 1.6). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

Vamos ver no próximo exemplo como a partir do faturamento e do gasto com insumos podemos determinar quanto foi produzido de cada produto manufaturado em uma indústria.

Exemplo 1.14. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. Como vimos no Exemplo 1.6 na página 8, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} = A \qquad X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \left[\begin{array}{c} x+y+z \\ 2x+y+4z \\ 2x+3y+5z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

Assim precisamos resolver o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1000 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 2000 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 2500 \end{array}\right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}}\text{ linha} + 2^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}}\text{ linha} \\ -2\times 1^{\text{a}}\text{ linha} + 3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$$\boxed{-1\times 2^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 1^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}}\text{ linha} \\ -1\times 2^{\text{a}}\text{ linha} + 3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right]$$

3ª eliminação:

$\boxed{1/5 \times 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

$\boxed{\begin{array}{r} -3 \times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ 2 \times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}}$
$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto X, 200 kg do produto Y e 100 kg do produto Z.

O próximo resultado mostra que um sistema linear que tenha mais de uma solução não pode ter um número finito de soluções.

Proposição 1.3. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $A\,X = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Demonstração. Seja
$$X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$
Vamos mostrar que X_λ é solução do sistema $A\,X = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto vamos mostrar que $A\,X_\lambda = B$.

Aplicando as propriedades (i), (j) das operações matriciais (Teorema 1.1 na página 10) obtemos
$$A\,X_\lambda = A[(1-\lambda)X_0 + \lambda X_1] = A(1-\lambda)X_0 + A\lambda X_1 = (1-\lambda)A\,X_0 + \lambda A\,X_1$$

Como X_0 e X_1 são soluções de $A\,X = B$, então $A\,X_0 = B$ e $A\,X_1 = B$, portanto

$$A\,X_\lambda = (1-\lambda)B + \lambda B = [(1-\lambda)+\lambda]B = B,$$

pela propriedade (f) do Teorema 1.1.

Assim o sistema $A\,X = B$ tem infinitas soluções, pois para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução e $X_\lambda - X_{\lambda'} = (\lambda - \lambda')(X_1 - X_0)$, ou seja, $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$, para $\lambda \neq \lambda'$. Observe que para $\lambda = 0$, $X_\lambda = X_0$, para $\lambda = 1$, $X_\lambda = X_1$, para $\lambda = 1/2$, $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$, para $\lambda = 3$, $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$ e para $\lambda = -2$, $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$.

No Exemplo 3.4 na página 169 temos uma interpretação geométrica desta demonstração. $\square$

Para resolver sistemas lineares vimos aplicando operações elementares à matriz aumentada do sistema linear. Isto pode ser feito com quaisquer matrizes.

1.2.2 Matrizes Equivalentes por Linhas

Definição 1.7. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é **equivalente por linhas** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma seqüência de operações elementares sobre as suas linhas.

Exemplo 1.15. Observando os Exemplos 1.10, 1.13 e 1.12, vemos que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 4 & 12 & -2 & 14 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas às matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Matrizes estas que são escalonadas reduzidas.

Cuidado: elas são equivalentes por linhas, **não** são iguais!

A relação "ser equivalente por linhas" satisfaz as seguintes propriedades.

Teorema 1.4. *(a) Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);*

(b) Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);

(c) Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

Demonstração. (a) Basta multiplicar qualquer linha da matriz por um escalar igual a 1.

(b) Cada operação elementar e tem uma operação elementar inversa e^{-1} do mesmo tipo que desfaz o que a anterior fez (verifique!). Se aplicando-se as operações $e_1, \ldots, e_k$ na matriz A chegamos a matriz B, então aplicando-se as operações inversas $e_k^{-1}, \ldots, e_1^{-1}$ à matriz B chegamos à matriz A.

(c) Se aplicando-se as operações elementares $e_1, \ldots, e_k$ chegamos de A em B e aplicando-se as operações $e_{k+1}, \ldots, e_l$ chegamos de B em C, então aplicando-se as operações $e_1, \ldots, e_l$ chegamos de A em C.

$\square$

Em geral, qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma matriz na forma escalonada reduzida e a demonstração, que omitiremos, pode ser feita da mesma maneira que fizemos no caso particular das matrizes aumentadas dos Exemplos 1.10, 1.13 e 1.12. No Teorema 1.10 na página 70 mostramos que essa matriz escalonada reduzida é a única matriz na forma escalonada reduzida equivalente a A.

O próximo resultado será usado para provar alguns resultados no capítulo de inversão de matrizes.

Proposição 1.5. *Seja R uma matriz $n \times n$, na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I_n$, então R tem uma linha nula.*

Demonstração. Observe que o pivô de uma linha i está sempre numa coluna j com $j \geq i$. Portanto, ou a última linha de R é nula ou o pivô da linha n está na posição n, n. Mas, neste caso todas as linhas anteriores são não nulas e os pivôs de cada linha i está na coluna i, ou seja, $R = I_n$. $\square$

1.2.3 Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.6}$$

é chamado **sistema homogêneo**. O sistema (1.6) pode ser escrito como $A\,X = \bar{0}$. Todo sistema homogêneo admite pelo menos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ chamada de **solução trivial**. Portanto, todo sistema homogêneo tem solução.

Observação. Para resolver um sistema linear homogêneo $A\,X = \bar{0}$, basta escalonarmos a matriz A do sistema, já que sob a ação de uma operação elementar a coluna de zeros não é alterada. Mas, é preciso ficar atento quando se escreve o sistema linear associado à matriz resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

Teorema 1.6. *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, é tal que $m < n$, então o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução diferente da solução trivial, ou seja, todo sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.*

Demonstração. Como o sistema tem menos equações do que incógnitas ($m < n$), o número de linhas não nulas r da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema também é tal que $r < n$. Assim, temos r pivôs e $n - r$ variáveis (incógnitas) livres, que podem assumir todos os valores reais. Logo, o sistema admite solução não trivial e portanto infinitas soluções. $\square$

Proposição 1.7. *Seja* $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

(a) *Se* X *e* Y *são soluções do sistema homogêneo,* $AX = \bar{0}$, *então* $X + Y$ *também o é.*

(b) *Se* X *é solução do sistema homogêneo,* $AX = \bar{0}$, *então* αX *também o é.*

Demonstração. (a) Se X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então $AX = \bar{0}$ e $AY = \bar{0}$ e portanto $X + Y$ também é solução pois, $A(X + Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$;

(b) Se X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então αX também o é, pois $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\bar{0} = \bar{0}$.

□

Estas propriedades não são válidas para sistemas lineares em geral. Por exemplo, considere o sistema linear $A\,X = B$, em que $A = [1]$ e $B = [1]$. A solução deste sistema é $X = [1]$. Mas, $X + X = 2\,X = 2$, não é solução do sistema.

1.2.4 Matrizes Elementares (opcional)

Definição 1.8. Uma **matriz elementar** $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I_n aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por E_{ij} a matriz elementar obtida trocando-se a linha i com a linha j da matriz I_n, $E_i(\alpha)$ a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz I_n pelo escalar $\alpha \neq 0$ e $E_{i,j}(\alpha)$ a matriz elementar obtida da matriz I_n, somando-se à linha j, α vezes a linha i.

$$E_{i,j} = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \ldots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \ldots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}, E_i(\alpha) = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \ldots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Exemplo 1.16. As matrizes seguintes são as matrizes elementares 2×2:

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0,$$

$$E_{1,2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $m \times 1$.

As matrizes elementares podem ser escritas em termos das matrizes E_i como

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \quad E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 1.8. *Sejam E uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz qualquer $m \times n$. Então, EA é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz A a mesma operação elementar que originou E.*

Demonstração. Como a i-ésima linha de um produto de matrizes BA é igual a B_iA, em que B_i é a i-ésima linha da matriz B (Exercício 1.1.17 (b) na página 25) e $E_i^tA = A_i$, em que A_i é a linha i da matriz A (Exercício 15 (b) na página 23), então:

$$E_{i,j}A = \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_j^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

$$E_i(\alpha)A = \begin{array}{c} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array}$$

$$E_{i,j}(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^t A \\ \vdots \\ E_i^t A \\ \vdots \\ E_j^t A + \alpha E_i^t A \\ \vdots \\ E_m^t A \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$\square$

Assim, aplicar uma seqüência de operações elementares em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por um produto de matrizes elementares.

Exemplo 1.17. Quando usamos o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema do Exemplo 1.10 na página 35, aplicamos uma seqüência de operações elementares na matriz aumentada do sistema. Isto corresponde a multiplicar a matriz aumentada

$$[\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc:c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

à esquerda pelas matrizes elementares

$$E_1(1/5) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,2}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{2,1}(-1)\ E_{2,3}(-2)\ E_{2,3}\ E_{1,3}(-3)\ E_{1,2}(-2)\ E_1(1/5)\ [\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 544)

1.2.1. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Em cada item suponha que a matriz aumentada de um sistema foi transformada usando operações elementares na matriz escalonada reduzida dada. Resolva o sistema correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2.3. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array} \right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$.

1.2.4. Os sistemas lineares seguintes possuem a mesma matriz A. Resolva-os usando o método de Gauss-Jordan. Observe que os dois sistemas podem ser resolvidos ao mesmo tempo escalonando a matriz aumentada $[\,A\,|\,B_1\,|\,B_2\,]$.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$.

1.2.5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre a solução geral do sistema $(A + 4I_3)X = \bar{0}$;

(b) Encontre a solução geral do sistema $(A - 2I_3)X = \bar{0}$.

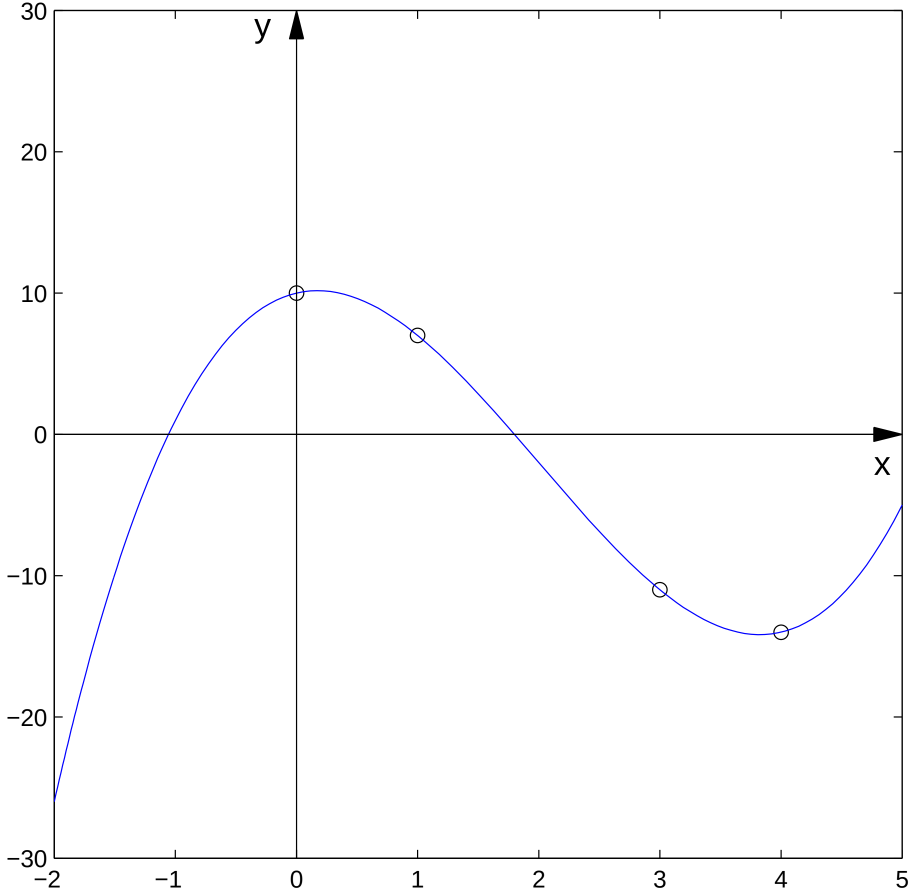
1.2.6. Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}\right.$;

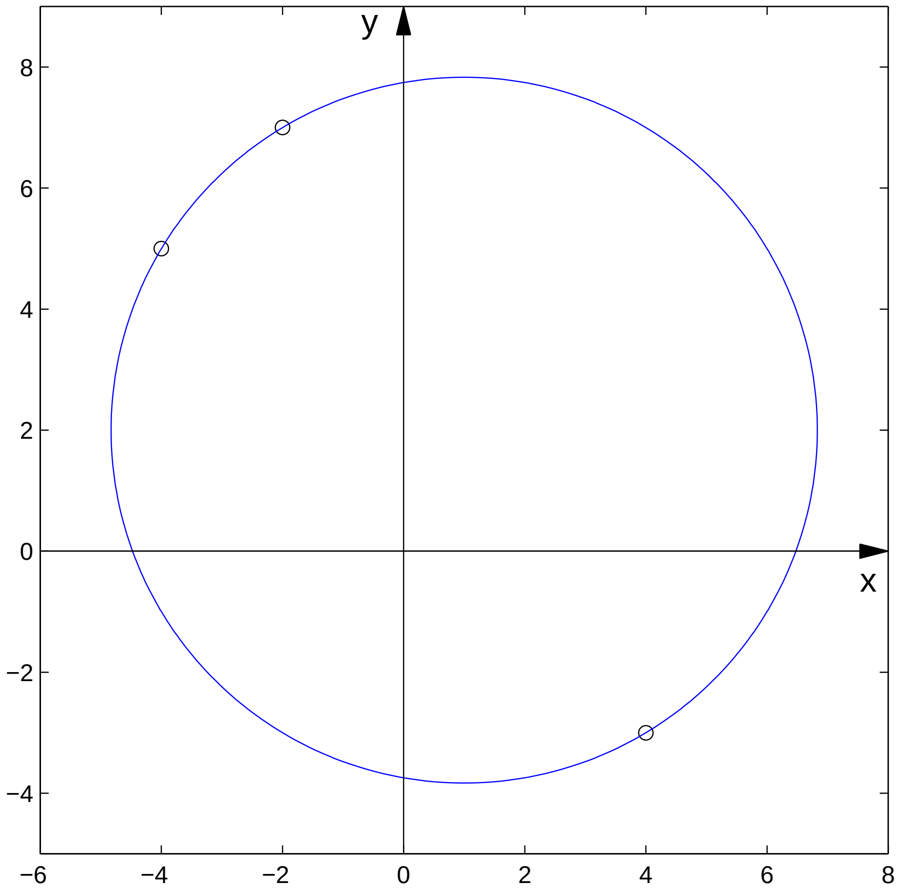
(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & (a^2-1)z & = & a+1 \end{array}\right.$.

1.2.7. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. (Sugestão: veja o Exemplo 1.14 na página 44.)

1.2.8. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.


30
20
10
0
−10
−20
−30
−2
−1
0
1
2
3
4
5
y
x

1.2.9. Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.



y
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

1.2.10. Encontre condições sobre os b_i's para que cada um dos sistemas seja **consistente** (isto é, tenha solução):

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$.

1.2.11. (Relativo à sub-seção 1.2.4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes elementares E, F, G e H tais que $R = EFGHA$ é uma matriz escalonada reduzida. (Sugestão: veja o Exemplo 1.17 na página 56.)

1.2.12. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & = & 9 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6 \end{array}\right.$;

1.2.13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2\,a-2 & -a-2 & 3\,a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2\,a+1 \end{bmatrix}$. Determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, em que $B = [\,4\;3\;1\;6\,]^t$, para todos os valores de a.

1.2.14. Resolva os sistemas lineares cujas matrizes aumentadas são:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$;

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1`, `...,` `An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> expr=subs(expr,x,num)` substitui na expressão `expr` a variável `x` por `num`.

`>> p=poly2sym([an,...,a0],x)` armazena na variável `p` o polinômio $a_n x^n + \ldots + a_0$.

`>> clf` limpa a figura ativa.

Comandos do pacote GAAL:

`>> B=opel(alpha,i,A)` ou `>> oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar `alpha`×`linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=opel(alpha,i,j,A)` ou `>> oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar `alpha`×`linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena em `B`.

`>> B=opel(A,i,j)` ou `>> oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> matvand(P,k)` obtém a matriz de Vandermonde de ordem `k`, se `P=[x1;...;xn]` e a matriz de Vandermonde generalizada no caso em que `P=[x1,y1;...;xn,yn]`.

`>> po([x1,y1;x2,y2;...xk,yk])` desenha os pontos `(x1,y1),...,(xk,yk)`.

`>> plotf1(f,[a,b])` desenha o gráfico da função dada pela expressão simbólica `f` no intervalo `[a,b]`.

`>> plotci(f,[a,b],[c,d])` desenha o gráfico da curva dada implicitamente pela expressão `f(x,y)=0` na região do plano `[a,b]x[c,d]`.

`>> p=poly2sym2([a,b,c,d,e,f],x,y)` armazena na variável `p` o polinômio em duas variáveis $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

`>> eixos` desenha os eixos coordenados.

1.2.15. (a) Use o comando `P=randi(4,2)`, para gerar 4 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico passa pelos pontos dados pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P(:,1),3)` pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz `B=P(:,2)`. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos `clf`, `po(P)`, `syms x`, `p=poly2sym(R(:,5),x)`, `plotf1(p,[-5,5])`, em que `R` é forma escalonada reduzida da matriz `[A,B]`.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.16. (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c, d, e e f da cônica, curva de equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, cujo gráfico passa pelos pontos cujas coordenadas são dadas pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P,2)` pode ser útil na solução deste problema. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos `clf`, `po(P)`, `syms x y`, `p=poly2sym2([-R(:,6);1],x,y)`, `plotci(p,[-5,5],[-5,5])`, em que `R` é a forma escalonada reduzida da matriz `A`.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.17. Use o MATLAB® e resolva os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 1.2.3.**

Exercícios Teóricos

1.2.18. Suponha que $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar sobre suas linhas. Mostre que X é solução do sistema linear $A\,X = B$ se, e somente se, X também é solução de $C\,X = D$,

1.2.19. Mostre que toda operação elementar possui inversa, do mesmo tipo, ou seja, para cada operação elementar existe uma outra operação elementar do mesmo tipo que desfaz o que a operação anterior fez.

1.2.20. (a) Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. Mostre que $\alpha X_1 + \beta X_2$ é solução, para quaisquer escalares α e β. (Sugestão: veja o Exemplo 1.7.)

(b) Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema $A\,X = B$. Mostre que se $\alpha X_1 + \beta X_2$ é solução, para quaisquer escalares α e β, então $B = \bar{0}$. (Sugestão: faça $\alpha = \beta = 0$.)

1.2.21. Sejam A uma matriz $m \times n$ e $B \neq \bar{0}$ uma matriz $m \times 1$.

(a) Mostre que se X_1 é uma solução do sistema $AX = B$ e Y_1 é uma solução do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$, então $X_1 + Y_1$ é solução de $AX = B$.

(b) Seja X_0 solução particular do sistema $AX = B$. Mostre que toda solução X do sistema $AX = B$, pode ser escrita como $X = X_0 + Y$, em que Y é uma solução do sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$. Assim, a solução geral do sistema $AX = B$ é a soma de uma solução particular de $AX = B$ com a solução geral do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$. (Sugestão: Escreva $X = X_0 + (X - X_0)$ e mostre que $X - X_0$ é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$.)

Apêndice II: Unicidade da Forma Escalonada Reduzida

Proposição 1.9. *Sejam A e B matrizes $m \times n$ equivalentes por linhas. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz A e $B_1, \ldots, B_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz B. Se existem escalares $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ tais que*

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k},$$

Demonstração. Se B é equivalente por linhas a A, então B pode ser obtida de A aplicando-se uma seqüência de operações elementares. Aplicar uma operação elementar a uma matriz corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz invertível (Teorema 1.8 na página 54). Seja M o produto das matrizes invertíveis correspondentes às operações elementares aplicadas na matriz A para se obter a matriz B. Então M é invertível e $B = MA$.

Sejam $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ escalares tais que

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então multiplicando-se à esquerda pela matriz M obtemos

$$MA_k = \alpha_{j_1} MA_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} MA_{j_k}.$$

Como $MA_j = B_j$, para $j = 1, \ldots, n$ (Exercício 1.1.17 (a) na página 25), então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k}.$$

$\square$

Teorema 1.10. *Se $R = (r_{ij})_{m\times n}$ e $S = (s_{ij})_{m\times n}$ são matrizes escalonadas reduzidas equivalentes por linhas a uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, então $R = S$.*

Demonstração. Sejam S e R matrizes escalonadas reduzidas equivalentes a A. Sejam $R_1, \ldots, R_n$ as colunas de R e $S_1, \ldots, S_n$ as colunas de S. Seja r o número de linhas não nulas de R. Sejam $j_1, \ldots, j_r$ as colunas onde ocorrem os pivôs das linhas $1, \ldots, r$, respectivamente, da matriz R. Pelo Teorema 1.4 na página 48, R e S são equivalentes por linha, ou seja, existe uma seqüência de operações elementares que podemos aplicar em R para chegar a S e uma outra seqüência de operações elementares que podemos aplicar a S e chegar a R.

Assim, como as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de R são nulas o mesmo vale para as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de S. Logo o pivô da 1ª linha de S ocorre numa coluna maior ou igual a j_1. Trocando-se R por S e usando este argumento chegamos a conclusão que $R_{j_1} = S_{j_1}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_1} = S_{j_1}$.

Vamos supor que $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$ e vamos mostrar que

$$R_{j_k+1} = S_{j_k+1}, \ldots, R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}, \quad \text{se } k < r \text{ ou}$$

$$R_{j_r+1} = S_{j_r+1}, \ldots, R_n = S_n, \quad \text{se } k = r.$$

Observe que para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$, ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$, temos que

$$R_j = (r_{1j}, \ldots, r_{kj}, 0, \ldots, 0) = r_{1j} R_{j_1} + \ldots + r_{kj} R_{j_k},$$

o que implica pela Proposição 1.9 que

$$S_j = r_{1j} S_{j_1} + \ldots + r_{kj} S_{j_k}.$$

Mas por hipótese $R_{j_1} = S_{j_1}, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$, então,

$$S_j = r_{1j} R_{j_1} + \ldots + r_{kj} R_{j_k} = R_j,$$

para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$ ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$.

Logo, se $k < r$, o pivô da $(k+1)$-ésima linha de S ocorre numa coluna maior ou igual a j_{k+1}. Trocando-se R por S e usando o argumento anterior chegamos a conclusão que $R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_r} = S_{j_r}$. E se $k = r$, então $R_1 = S_1, \ldots, R_n = S_n$.

Portanto $R = S$. $\square$

Teste do Capítulo

1. Para o sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}\right.$$

2. Se possível, encontre os valores de x, y e z tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & x \\ 13 & -5 & y \\ 5 & -2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sejam

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que $A = P^t D P$, calcule D^2, PP^t e A^2.

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I_n + A^2)(I_n - 2A^2) = I_n$;

(b) Se $A = P^tDP$, onde D é uma matriz diagonal, então $A^t = A$;

(c) Se D é uma matriz diagonal, então $DA = AD$, para toda matriz A, $n \times n$;

(d) Se $B = AA^t$, então $B = B^t$.

(e) Se B e A são tais que $A = A^t$ e $B = B^t$, então $C = AB$, é tal que $C^t = C$.

Capítulo 2

Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1 Matriz Inversa

Todo número real a, não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número b, tal que $a\,b = b\,a = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1}. Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A *não nulas* possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $A\,B = B\,A = I_n$. De início, para que os produtos AB e BA estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo número não nulo tem inverso. Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem menor do que o conjunto das que tem (Exercício 2.2.?? na página ??).

Definição 2.1. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n\,, \tag{2.1}$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A. Se A não tem inversa, dizemos que A é **singular** ou **não invertível**.

Exemplo 2.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é a inversa da matriz A, pois $A\,B = B\,A = I_2$.

Teorema 2.1. *Se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então, $AB = BA = I_n = AC = CA$ e assim,

$$B = B\,I_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

$\square$

Denotamos a inversa de A, quando ela existe, por A^{-1}. Devemos chamar atenção para o fato de que o índice superior -1, aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão. Assim como no caso da transposta, em que A^t significa a transposta de A, aqui, A^{-1} significa a inversa de A.

2.1.1 Propriedades da Inversa

Teorema 2.2. *(a) Se A é invertível, então A^{-1} também o é e*

$$(A^{-1})^{-1} = A\,;$$

(b) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,;$$

(c) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível, então A^t também é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t\,.$$

Demonstração. Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

(a) Uma matriz B é a inversa de A^{-1} se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n\,.$$

Mas, como A^{-1} é a inversa de A, então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n\,.$$

Como a inversa é única, então $B = A$ é a inversa de A^{-1}, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que os produtos $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ e $(B^{-1}A^{-1})AB$ são iguais à matriz identidade. Mas,

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} &= I_n,\\ (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B &= I_n.\end{aligned}$$

(c) Queremos mostrar que a inversa de A^t é $(A^{-1})^t$. Assim,

$$\begin{aligned}A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t &= I_n,\\ (A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I_n^t &= I_n.\end{aligned}$$

$\square$

O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida no momento (Subseção 2.1.2), garante que basta verificarmos uma das duas igualdades em (2.1) para sabermos se uma matriz é a inversa de outra.

Teorema 2.3. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$;

(b) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$;

Assim, para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se um deles é igual a I_n. O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz tal que $A^3 = \bar{0}$ (A pode não ser a matriz nula!). Vamos mostrar que a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$. Para provar isto, devemos multiplicar a matriz $I_n - A$, pela matriz que possivelmente seja a inversa dela, aqui $I + A + A^2$, e verificar se o produto das duas é igual a matriz identidade I_n.

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n.$$

Aqui foram usadas as propriedades (i) e (o) do Teorema 1.1 na página 10.

2.1.2 Matrizes Elementares e Inversão (opcional)

As matrizes elementares têm um papel importante no estudo da inversão de matrizes e da solução de sistemas lineares.

Proposição 2.4. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar. Usando a notação introduzida na página 52, temos:*

(a) $E_{i,j}^{-1} = E_{j,i} = E_{i,j}$;

(b) $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha)$, *para* $\alpha \neq 0$;

(c) $E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$.

Demonstração. Seja E uma matriz elementar. Esta matriz é obtida de I_n aplicando-se uma operação elementar. Seja F a matriz elementar correspondente a operação que transforma E de volta em I_n. Agora, pelo Teorema 1.8 na página 54, temos que $F\,E = E\,F = I_n$. Portanto, F é a inversa de E. □

Teorema 2.5. *Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma matriz B, $n \times n$, tal que $BA = I_n$.*

(b) *A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

(c) *A matriz A é invertível.*

Demonstração. (a)⇒(b) Se $BA = I_n$, então o sistema $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial, pois $X = I_n X = BAX = B\,\bar{0} = \bar{0}$. Isto implica que a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n, pois caso contrário a forma escalonada reduzida de A teria uma linha nula (Proposição 1.5 na página 49).

(b)⇒(c) A matriz A ser equivalente por linhas à I_n significa, pelo Teorema 1.8 na página 54, que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$, tais que

$$\begin{aligned} E_k \ldots E_1 A &= I_n & (2.2) \\ (E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}) E_k \ldots E_1 A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} \\ A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}. & (2.3) \end{aligned}$$

Aqui, usamos o fato de que as matrizes elementares são invertíveis (Proposição 2.4). Portanto, A é invertível como o produto de matrizes invertíveis.

(c)⇒(a) Claramente.

□

Se A é invertível, então multiplicando-se ambos os membros de (2.2) à direita por A^{-1} obtemos

$$E_k \ldots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Assim, a mesma seqüência de operações elementares que transforma a matriz A na matriz identidade I_n transforma também I_n em A^{-1}.

A demonstração do Teorema 2.3 na página 78, agora, é uma simples conseqüência do Teorema anterior.

Demonstração do Teorema 2.3. (a) Vamos mostrar que se $BA = I_n$, então A é invertível e $B = A^{-1}$. Se $BA = I_n$, então pelo Teorema 2.5, A é invertível e $B = BI_n = BAA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$. Logo, $AB = BA = I_n$.

(b) Se $AB = I_n$, então pelo item anterior B é invertível e $B^{-1} = A$. Portanto $BA = AB = I_n$. $\square$

Segue da demonstração, do Teorema 2.5 (equação (2.3)) o resultado seguinte.

Teorema 2.6. *Uma matriz A é invertível se, e somente se, ela é um produto de matrizes elementares.*

Exemplo 2.3. Vamos escrever a matriz A do Exemplo 2.5 na página 86 como o produto de matrizes elementares. Quando encontramos a inversa da matriz A, aplicamos uma seqüência de operações elementares em $[\,A\,|\,I_3\,]$ até que encontramos a matriz $[\,I_3\,|\,A^{-1}\,]$. Como as operações são por linha, esta mesma seqüência de operações elementares transforma A em I_n. Isto corresponde a multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **à esquerda** pelas matrizes elementares

$$E_{1,2}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3(\tfrac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad E_{3,1}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{3,2}(2)\; E_{3,1}(-3)\; E_3(\tfrac{1}{5})\; E_{2,3}(-1)\; E_{2,1}(-1)\; E_2(-1)\; E_{1,3}(-2)\; E_{1,2}(-2)\; A = I_3.$$

Multiplicando à esquerda pelas inversas das matrizes elementares correspondentes obtemos

$$A = E_{1,2}(2)\; E_{1,3}(2)\; E_2(-1)\; E_{2,1}(1)\; E_{2,3}(1)\; E_3(5)\; E_{3,1}(3)\; E_{1,2}(-2).$$

2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

O exemplo seguinte mostra, para matrizes 2×2, não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_2]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_2$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível.

Exemplo 2.4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Devemos procurar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & bz & & & & & = & 1 \\ cx & + & dz & & & & & = & 0 \\ & & & & ay & + & bw & = & 0 \\ & & & & cy & + & dw & = & 1 \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz A. Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] = [\, A \,|\, I_2 \,].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz $[\, A \,|\, I_2 \,]$ for da forma $[\, I_2 \,|\, S \,] = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array} \right]$ (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz A não for igual a I_2). Neste caso, $x = s, z = u$ e $y = t, w = v$, ou seja, a matriz A possuirá inversa, $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$.

Para os leitores da Subseção 2.1.2 o próximo teorema é uma simples conseqüência do Teorema 2.5 na página 80. Entretanto a demonstração que daremos a seguir fornece um método para encontrar a inversa de uma matriz, se ela existir.

Teorema 2.7. *Uma matriz A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 na página 78, para verificarmos se uma matriz A, $n \times n$, é invertível, basta verificarmos se existe uma matriz B, tal que

$$A\,B = I_n\,. \tag{2.4}$$

Vamos denotar as colunas de B por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ou seja, $B = [\,X_1 \ \ldots\ X_n\,]$, em que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

e as colunas da matriz identidade I_n, por $E_1, E_2, \ldots, E_n$, ou seja, $I_n = [\,E_1 \ \ldots\ E_n\,]$, em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim a equação (2.4) pode ser escrita como

$$A\,B = A\,[\,X_1\ \ldots\ X_n\,] = [\,AX_1\ \ldots\ AX_n\,] = [\,E_1\ \ldots\ E_n\,] = I_n,$$

pois a j-ésima coluna do produto AB é igual a A vezes a j-ésima coluna da matriz B (Exercício 17 na página 25). Analisando coluna a coluna a equação anterior vemos que encontrar B é equivalente a resolver n sistemas lineares

$$A\,X_j = E_j \quad \text{para } j = 1\ldots,n.$$

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formaríamos as matrizes aumentadas $[A \mid E_1]$, $[A \mid E_2], \ldots, [A \mid E_n]$. Entretanto, como as matrizes dos sistemas são todas iguais à A, podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz $n \times 2n$

$$[\,A \mid E_1\,E_2\ldots E_n\,] = [\,A \mid I_n\,].$$

Transformando $[\,A \mid I_n\,]$ na sua forma escalonada reduzida, que vamos denotar por $[\,R \mid S\,]$, vamos chegar a duas situações possíveis: ou a matriz R é a matriz identidade, ou não é.

- Se $R = I_n$, então a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A \mid I_n\,]$ é da forma $[\,I_n \mid S\,]$. Se escrevemos a matriz S em termos das suas colunas $S = [\,S_1\,S_2\ldots S_n\,]$, então as soluções dos sistemas $A\,X_j = E_j$ são $X_j = S_j$ e assim $B = S$ é tal que $A\,B = I_n$ e pelo Teorema 2.3 na página 78 A é invertível.

- Se $R \neq I_n$, então a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade I_n. Então, pela Proposição 1.5 na página 49 a matriz R tem uma linha nula. O que implica que os sistemas $A\,X_j = E_j$ não tenham solução única. Isto implica que a matriz A não tem inversa, pois as colunas da (única) inversa seriam X_j, para $j = 1,\ldots n$. $\square$

Observação. Da demonstração do Teorema 2.7 obtemos não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_n]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_n$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível. Vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 2.5. Vamos encontrar, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1ª eliminação:

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$$\boxed{-1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \quad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3ª eliminação:

$$\boxed{\tfrac{1}{5}\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}} \quad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{r} -3\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ 2\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \quad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[I_3 \mid S]$, portanto a matriz A é invertível e a sua inversa é a matriz S, ou seja,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Exemplo 2.6. Vamos determinar, se existir, a inversa da matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

$$\boxed{-1\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$$\boxed{-1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[R \mid S]$, com $R \neq I_3$. Assim, a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade e portanto **não** é invertível.

Se um sistema linear $AX = B$ tem o **número de equações igual ao número de incógnitas**, então o conhecimento da inversa da matriz do sistema A^{-1}, reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes, como está enunciado no próximo teorema.

Teorema 2.8. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) *O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$;*

(b) *O sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, A é singular (não invertível).*

Demonstração. (a) Se a matriz A é invertível, então multiplicando $A\,X = B$ por A^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\,X) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Aqui foram usadas as propriedades (h) e (o) do Teorema 1.1 na página 10. Portanto, $X = A^{-1}B$ é a única solução do sistema $A\,X = B$. Por outro lado, se o sistema $A\,X = B$ possui solução única, então a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema $[A \mid B]$ é da forma $[R \mid C]$, em que $R = I_n$. Pois a matriz A é quadrada e caso R fosse diferente da identidade possuiria uma linha de zeros (Proposição 1.5 na página 49) o que levaria a que o sistema $A\,X = B$ ou não tivesse solução ou tivesse infinitas soluções. Logo, a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade o que pelo Teorema 2.7 na página 84 implica que A é invertível.

(b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo item anterior, esta será a única solução se, e somente se, A é invertível. □

Vamos ver no próximo exemplo que se conhecemos a inversa de uma matriz, então a produção de uma indústria em vários períodos pode ser obtida apenas multiplicando-se a inversa por matrizes colunas que contenham a arrecadação e as quantidades dos insumos utilizados em cada período.

Exemplo 2.7. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Como vimos no Exemplo 1.6 na página 8, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} \\ \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} = A \qquad X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \left[\begin{array}{c} x+y+z \\ 2x+y+4z \\ 2x+3y+5z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

No Exemplo 2.5 na página 86 determinamos a inversa da matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

que é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se a inversa da matriz A podemos saber a produção da indústria sempre que soubermos quanto foi gasto do insumo A, do insumo B e a arrecadação.

(a) Se em um período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ $2500,00$, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{r} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 700 kg do produto X, 200 kg de Y e 100 kg de Z.

(b) Se em outro período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e $2,1$ kg de B, essa indústria arrecadou R\$ $2900,00$, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{r} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

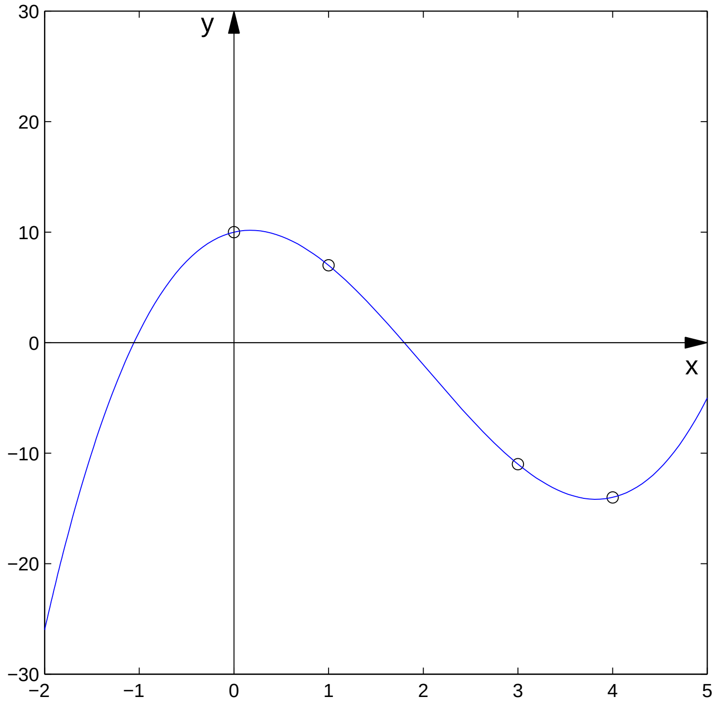
Portanto, foram produzidos 500 kg do produto X, 300 kg de Y e 200 kg de Z.

Exemplo 2.8 (Interpolação Polinomial). Sejam $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$, com $x_1, \ldots, x_n$ números distintos. Considere o problema de encontrar um polinômio de grau $n-1$

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

que *interpola* os dados, no sentido de que $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Por exemplo se os pontos são $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11), P_4 = (4, -14)$ então o problema consiste em encontrar um polinômio de grau 3 que interpola os pontos dados (veja o Exercício 1.2.8 na página 60).



Vamos mostrar que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas. Substituindo os pontos no polinômio $p(x)$, obtemos um sistema linear $AX = B$, em que

$$X = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada **matriz de Vandermonde**.

Vamos mostrar que $AX = B$ tem somente única. Pelo Teorema 2.8 na página 90, um sistema de n equações e n incógnitas $AX = B$ tem solução única se, e somente se, o sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$, tem somente a solução trivial. $X = [\ a_{n-1} \ \cdots \ a_0\ ]$ é solução do sistema homogêneo se, e somente se, o polinômio de grau $n-1$, $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, se anula em n pontos distintos. O que implica que o polinômio $p(x)$ é o polinômio com todos os seus coeficientes iguais a zero. Portanto, o sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial. Isto prova que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas.

Assim a solução do sistema linear é $X = A^{-1}B$. Como a matriz A depende apenas das abscissas dos pontos, tendo calculado a matriz A^{-1} podemos determinar rapidamente os polinômios que interpolam vários conjuntos de pontos, desde que os pontos de todos os conjuntos tenham as mesmas abscissas dos pontos do conjunto inicial.

Exemplo 2.9. Vamos transformar uma mensagem em uma matriz da seguinte forma. Vamos quebrar a mensagem em pedaços de tamanho 3 e cada pedaço será convertido em uma matriz coluna usando a Tabela 2.1 de conversão entre caracteres e números.

Considere a seguinte mensagem criptografada

`1ydobbr,?` (2.5)

Quebrando a mensagem criptografada em pedaços de tamanho 3 e convertendo cada pedaço para uma coluna de números usando a Tabela 2.1 obtemos a matriz

$$Y = \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que esta mensagem foi criptografada fazendo o produto da mensagem inicial pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$X = M^{-1}Y$$

será a mensagem inicial convertida para números, ou seja,

$$X = M^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 15 & 5 \\ 21 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Convertendo para texto usando novamente a Tabela 2.1 obtemos que a mensagem que foi criptografada é

`Tudo bem?` (2.6)

Vamos mostrar a recíproca do item (b) do Teorema 2.2 na página 76. Este resultado será útil na demonstração de que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes (Subseção na página 123).

Proposição 2.9. *Se A e B são matrizes $n \times n$, com AB invertível, então A e B são invertíveis.*

Demonstração. Considere o sistema $(AB)X = \bar{0}$. Se B **não** fosse invertível, então existiria $X \neq \bar{0}$, tal que $B\,X = \bar{0}$ (Teorema 2.8 na página 90). Multiplicando-se por A, teríamos $AB\,X = \bar{0}$, o que, novamente pelo Teorema 2.8 na página 90, contradiz o fato de AB ser invertível. Portanto, B é invertível. Agora, se B e AB são invertíveis, então A também é invertível, pois $A = (AB)B^{-1}$, que é o produto de duas matrizes invertíveis. $\square$

Exercícios Numéricos (respostas na página 569)

2.1.1. Seja A uma matriz 3×3. Suponha que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. A matriz A é singular ou não? Justifique.

2.1.2. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$;

2.1.3. Encontre todos os valores de a para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ tem inversa.

2.1.4. Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontre $(A\,B)^{-1}$.

2.1.5. Resolva o sistema $A\,X = B$, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.1.6. (Relativo à Subseção 2.1.2) Encontre matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que $A = E_1 \ldots E_k$, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> M=[A,B]` atribui à matriz `M` a matriz obtida colocando lado a lado as matrizes `A` e `B`.

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> M=A(:,k:l)` atribui à matriz `M` a submatriz da matriz `A` obtida da coluna `l` à coluna `k` da matriz `A`.

Comandos do pacote GAAL:

`>> B=opel(alpha,i,A)` ou `B=oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar `alpha*linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=opel(alpha,i,j,A)` ou `B=oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar `alpha*linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> B=opel(A,i,j)` ou `B=oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

2.1.7. O pacote `GAAL` contem alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.
`>> menc=lerarq('menc1'), key=lerarq('key')`
Aqui são lidos os arquivos `menc1` e `key`. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes numéricas use os comandos do pacote `gaal`:
`>> y=char2num(menc), M=char2num(key)`
A mensagem criptografada, `y`, foi obtida multiplicando-se a matriz `M` pela mensagem original (convertida para números), `x`. Determine `x`. Descubra a mensagem usando o comando do pacote `gaal`, `num2char(x)`. Decifre as mensagens que estão nos arquivos `menc2` e `menc3`. Como deve ser a matriz `M` para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

2.1.8. Resolva os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 2.1.2** usando o MATLAB®.

Exercícios Teóricos

2.1.9. (a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: encontre a forma escalonada reduzida da matriz $[\, A \,|\, I_2 \,]$, para $a \neq 0$ e para $a = 0$.)

(b) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

tem como solução

$$x = \frac{gd - bh}{ad - bc}, \quad y = \frac{ah - gc}{ad - bc}$$

Sugestão para os próximos 4 exercícios: Para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se é igual a I_n.

2.1.10. Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^k = \bar{0}$, para k um inteiro positivo, mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

2.1.11. Seja A uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero ($a_{ij} = 0$, para $i \neq j$). Se $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, mostre que A é invertível e a sua inversa é também uma matriz diagonal com elementos na diagonal dados por $1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$.

2.1.12. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A + B$ e A forem invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}.$$

2.1.13. Seja J_n a matriz $n \times n$, cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

(Sugestão: observe que $J_n^2 = nJ_n$.)

2.1.14. Mostre que se B é uma matriz invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e somente se, $AB = BA$. (Sugestão: multiplique a equação $AB = BA$ por B^{-1}.)

2.1.15. Mostre que se A é uma matriz invertível, então $A + B$ e $I_n + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis. (Sugestão: multiplique $A + B$ por A^{-1}.)

2.1.16. Mostre que se A não é invertível, então AB também não o é.

2.1.17. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$, invertíveis, então A e B são equivalentes por linhas.

2.1.18. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$, com $n < m$. Mostre que AB não é invertível. (Sugestão: Mostre que o sistema $(AB)X = \bar{0}$ tem solução não trivial.)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	à	á	â
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
ã	ç	é	ê	í	ó	ô	õ	ú	ü	A	B	C	D	E
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
U	V	W	X	Y	Z	À	Á	Â	Ã	Ç	É	Ê	Í	Ó
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
Ô	Õ	Ú	Ü	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
;	<	=	>	?	@	!	"	#	$	%	&	'	(	)
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
*	+	,	-	.	/	[	\	]	_	{	|	}		
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117		

Tabela 2.1: Tabela de conversão de caracteres em números

2.2 Determinantes

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes 1×1. Para cada matriz $A = [a]$ definimos o **determinante** de A, indicado por $\det(A)$, por $\det(A) = a$. Vamos, agora, definir o determinante de matrizes 2×2 e a partir daí definir para matrizes de ordem maior. A cada matriz A, 2×2, associamos um número real, denominado **determinante** de A, por:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas maiores, precisamos definir o que são os menores de uma matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, o **menor** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{A}_{ij}$, é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, que tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exemplo 2.10. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos definir os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator A_{ij}, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.11. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det(\tilde{A}_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$$

Vamos, agora, definir o determinante de uma matriz 3×3. Se

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array}\right],$$

então, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma que a partir do determinante de matrizes 2×2, definimos o determinante de matrizes 3×3, podemos definir o determinante de matrizes quadradas de ordem maior. Supondo que sabemos como calcular o determinante de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ vamos definir o determinante de matrizes $n \times n$.

Vamos definir, agora, os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator A_{ij}, do elemento a_{ij} é igual a mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definição 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **determinante** de A, denotado por $\det(A)$, é definido por

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \tag{2.7}$$

em que $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det(\tilde{A}_{1j})$ é o cofator do elemento a_{1j}. A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de** A em termos da 1ª linha.

Exemplo 2.12. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = 0A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + (-3)(-1)^{1+4}\det(B), \quad \text{em que} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Mas o $\det(B)$ também pode ser calculado usando cofatores,

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1B_{11} + 2B_{12} + 3B_{13} \\ &= 1(-1)^{1+1}\det(\tilde{B}_{11}) + 2(-1)^{1+2}\det(\tilde{B}_{12}) + 3(-1)^{1+3}\det(\tilde{B}_{13}) \\ &= \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -8 - 2\,(-2) + 3\,(-7) \\ &= -25 \end{aligned}$$

Portanto,
$$\det(A) = 3\det(B) = -75.$$

Exemplo 2.13. Usando a definição de determinante, vamos mostrar que o determinante de uma matriz **triangular inferior** (isto é, os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero) é o produto dos elementos da diagonal principal. Vamos mostrar inicialmente para matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Vamos supor termos provado que para qualquer matriz $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Então vamos provar que isto também vale para matrizes $n \times n$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & & \ldots & & a_{nn} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n2} & & \ldots & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

pois o determinante acima é de uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ triangular inferior. Em particular, o determinante da matriz identidade I_n é igual a 1 ($\det(I_n)=1$).

Vamos provar uma propriedade importante do determinante. Para isso vamos escrever a matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ em termos das suas linhas

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_k \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a linha i da matriz A, ou seja, $A_i=[\,a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{in}\,]$. A propriedade importante a que nos referimos acima é que se $A_k=\alpha X+\beta Y$, em que $X=[\,x_1\ldots x_n\,]$, $Y=[\,y_1\ldots y_n\,]$ e α e β são escalares, então:

$$\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X+\beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}=\alpha\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}+\beta\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Vamos verificar isto, em primeiro lugar, no caso em que a matriz A é 2×2.

Exemplo 2.14. Seja $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e vamos supor que $A_2 = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1\, x_2 \,]$, $Y = [\, y_1\, y_2 \,]$ e α e β são escalares, então:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix} &= a_{11}(\alpha x_2 + \beta y_2) - a_{12}(\alpha x_1 + \beta y_1) \\
&= \alpha(a_{11}x_2 - a_{12}x_1) + \beta(a_{11}y_2 - a_{12}y_1) \\
&= \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que se $A_1 = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1\, x_2 \,]$, $Y = [\, y_1\, y_2 \,]$ e α e β são escalares, então:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= a_{22}(\alpha x_1 + \beta y_1) - a_{21}(\alpha x_2 + \beta y_2) \\
&= \alpha \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vamos verificar, agora, a propriedade acima para matrizes $n \times n$ no caso em que a 1a. linha, A_1, é da forma $A_1 = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$, $Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$ e α e β são escalares.

Exemplo 2.15. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ se $A_1 = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$, $Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$ e α e β são escalares, então:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \alpha X + \beta Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (\alpha x_j + \beta y_j) \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j \det(\tilde{A}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^{n} y_j \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \alpha \det \begin{bmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vamos provar a seguir o caso geral.

Teorema 2.10. *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ escrita em termos das suas linhas, denotadas por A_i, ou seja, $A_i = [\, a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in} \,]$. Se para algum k, a linha $A_k = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$,*

$Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$ e α e β são escalares, então:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Aqui, $A_k = \alpha X + \beta Y = [\, \alpha x_1 + \beta y_1 \, \ldots \, \alpha x_n + \beta y_n \,]$.

Demonstração. Mostramos no Exemplo 2.14 que para matrizes 2×2 o resultado é verdadeiro. Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, vamos provar para matrizes $n \times n$. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

O caso em que $k = 1$ foi provado no Exemplo 2.15. Suponha que $k = 2, \ldots, n$. As matrizes $\tilde{A}_{1j}$, $\tilde{B}_{1j}$ e $\tilde{C}_{1j}$ só diferem na $(k-1)$-ésima linha (lembre-se que a primeira linha é retirada!). Além disso, a $(k-1)$-ésima linha de $\tilde{A}_{1j}$ é igual a α vezes a linha correspondente de $\tilde{B}_{1j}$ mais β vezes a linha correspondente de $\tilde{C}_{1j}$ (esta é a relação que vale para a k-ésima linha de A). Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes $(n-1)\times(n-1)$, então $\det(\tilde{A}_{1j}) = \alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})\right] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\tilde{C}_{1j}) \\
&= \alpha \det(B) + \beta \det(C),
\end{aligned}$$

pois $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$, para $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Exemplo 2.16. O cálculo do determinante da matriz a seguir pode ser feito da seguinte forma:

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e+3h & f+3c & g+3d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & f & g \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ h & c & d \end{bmatrix} = a(cg - df)$$

Corolário 2.11. *Se uma matriz A, $n \times n$, possui uma linha formada inteiramente por zeros, então*

$$\det(A) = 0.$$

Demonstração. Seja A uma matriz que tem uma linha nula. Multiplicando-se a linha nula por qualquer escalar α, obtemos pelo Teorema 2.10 que $\det(A) = \alpha \det(A)$, para qualquer escalar α, ou seja, $\det(A) = 0$. $\square$

Pela definição de determinante, o determinante deve ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo a 1ª linha. O próximo resultado, que não vamos provar neste momento (Apêndice II na página 140), afirma que o determinante pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo *qualquer linha*.

Teorema 2.12. *Seja A uma matriz $n \times n$. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo* **qualquer linha**. *Ou seja, para $i = 1, \ldots, n$,*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \tag{2.8}$$

em que $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}. A expressão (2.7) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de A em termos da i-ésima linha**.

Temos a seguinte conseqüência deste resultado.

Corolário 2.13. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se A possui duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$.*

Demonstração. O resultado é claramente verdadeiro para matrizes 2×2. Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Suponhamos que as linhas k e l sejam iguais, para $k \neq l$. Desenvolvendo o determinante de A em termos de uma linha i, com $i \neq k, l$, obtemos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Mas, cada $\tilde{A}_{ij}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ com duas linhas iguais. Como estamos supondo que o resultado seja verdadeiro para estas matrizes, então $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$. Isto implica que $\det(A) = 0$. $\square$

2.2.1 Propriedades do Determinante

Teorema 2.14. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) *Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então*

$$\det(B) = \alpha \det(A)\,;$$

(b) *Se B resulta de A pela troca da posição relativa de duas linhas, então*

$$\det(B) = -\det(A)\,;$$

(c) *Se B é obtida de A substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha j, $j \neq i$, então*

$$\det(B) = \det(A)\,;$$

(d) *Os determinantes de A e de sua transposta A^t são iguais,*

$$\det(A) = \det(A^t)\,;$$

(e) *O determinante do produto de A por B é igual ao produto dos seus determinantes,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Demonstração. Vamos demonstrar, agora, apenas os ítens (a), (b) e (c) deste teorema.

(a) Segue diretamente do Teorema 2.10 na página 112.

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Teorema 2.10 na página 112 e o Corolário 2.13, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\ &= 0 + \det(A) + \det(B) + 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\det(A) = -\det(B)$.

(c) Novamente, pelo Teorema 2.10 na página 112, temos que

$$\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \alpha\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

$\square$

Observação. Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta (Teorema 2.14 (d)), segue que todas as propriedades que se referem a linhas são válidas com relação às colunas.

Exemplo 2.17. Vamos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

usando operações elementares para transformá-la numa matriz triangular superior e aplicando o Teorema 2.14 na página 116.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -\det\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{1^{\text{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{1/3 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} & \boxed{-2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} & \boxed{-10 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}} \\
&= (-3)(-55) = 165
\end{aligned}$$

Quando multiplicamos uma linha de uma matriz por um escalar α o determinante da nova matriz é igual a α multiplicado pelo determinante da matriz antiga. Mas o que estamos calculando aqui é o determinante da matriz antiga, por isso ele é igual a $1/\alpha$ multiplicado pelo determinante da matriz nova.

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, que por sua vez vai precisar de $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários $n!$ produtos. Para se calcular o determinante de uma matriz 20×20, é necessário se realizar $20! \approx 10^{18}$ produtos. Os computadores pessoais realizam da ordem de 10^8 produtos por segundo. Portanto, um computador pessoal precisaria de cerca de 10^{10} segundos ou 10^3 anos para calcular o determinante de uma matriz 20×20 usando a expansão em cofatores. Enquanto, o cálculo do determinante pelo método apresentado no exemplo anterior é necessário apenas da ordem de n^3 produtos para se calcular o determinante.

O resultado seguinte caracteriza em termos do determinante as matrizes invertíveis e os sistemas lineares homogêneos que possuem solução não trivial.

Teorema 2.15. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) A matriz A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

(b) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Demonstração. (a) Seja R a forma escalonada reduzida da matriz A.

A demonstração deste item segue de três observações:

- Pelo Teorema 2.14 na página 116, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $\det(R) \neq 0$.
- Pela Proposição 1.5 da página 49, ou $R = I_n$ ou a matriz R tem uma linha nula. Assim, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $R = I_n$.
- Pelo Teorema 2.7 na página 84, $R = I_n$ se, e somente se, A é invertível.

(b) Pelo Teorema 2.8 na página 90, o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, a matriz A não é invertível. E pelo item anterior, a matriz A é não invertível se, e somente se, $\det(A) = 0$.

$\square$

Exemplo 2.18. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Vamos mostrar que se A é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Como $A\,A^{-1} = I_n$, aplicando-se o determinante a ambos os membros desta igualdade e usando a propriedade (e) do Teorema 2.14 na página 116, obtemos

$$\det(A)\ \det(A^{-1}) = \det(I_n).$$

Mas, $\det(I_n) = 1$ (Exemplo 2.13 na página 109, a matriz identidade também é triangular inferior!). Logo, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Exemplo 2.19. Se uma matriz quadrada é tal que $A^2 = A^{-1}$, então vamos mostrar que $\det(A) = 1$. Aplicando-se o determinante a ambos os membros da igualdade acima, e usando novamente a propriedade (e) do Teorema 2.14 e o resultado do exemplo anterior, obtemos

$$(\det(A))^2 = \frac{1}{\det(A)}.$$

Logo, $(\det(A))^3 = 1$. Portanto, $\det(A) = 1$.

Exemplo 2.20. A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Neste caso a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

como pode ser verificado multiplicando-se a candidata a inversa pela matriz A.

Observe que este exemplo fornece uma regra para se encontrar a inversa de uma matriz 2×2: troca-se a posição dos elementos da diagonal principal, troca-se o sinal dos outros elementos e divide-se todos os elementos pelo determinante de A.

2.2.2 Matrizes Elementares e o Determinante (opcional)

Relembramos que uma matriz elementar é uma matriz que se obtém aplicando-se uma operação elementar na matriz identidade. Assim, aplicando-se os ítens (a), (b) e (c) do Teorema 2.14 na página 116 obtemos o resultado seguinte.

Proposição 2.16. *(a) Se $E_{i,j}$ é a matriz elementar obtida trocando-se as linhas i e j da matriz identidade, então $\det(E_{i,j}) = -1$.*

(b) Se $E_i(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, multiplicando-se a linha i por α, então $\det(E_i(\alpha)) = \alpha$.

(c) Se $E_{i,j}(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, somando-se à linha j, α vezes a linha i, então $\det(E_{i,j}(\alpha)) = 1$.

Lembramos também que uma matriz é invertível se, e somente se, ela é o produto de matrizes elementares (Teorema 2.6 na página 81). Além disso, o resultado da aplicação de uma operação elementar em uma matriz é o mesmo que multiplicar a matriz à esquerda pela matriz elementar correspondente. Usando matrizes elementares podemos provar os ítens (d) ($\det(A^t) = \det(A)$) e (e) ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$) do Teorema 2.14 na página 116.

Demonstração dos ítens (d) e (e) do Teorema 2.14.

(e) Queremos provar que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Vamos dividir a demonstração deste item em três casos:

Caso 1: Se $A = E$ é uma matriz elementar. Este caso segue diretamente da proposição anterior e dos ítens (a), (b) e (c) do Teorema 2.14 na página 116.

Caso 2: Se A é invertível, então pelo Teorema 2.6 na página 81 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. Aplicando-se o caso anterior sucessivas vezes, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1)\ldots\det(E_k)\det(B) = \det(E_1 \ldots E_k)\det(B) = \det(A)\det(B).$$

Caso 3: Se A é singular, pela Proposição 2.9 na página 97, AB também é singular. Logo,

$$\det(AB) = 0 = 0\,\det(B) = \det(A)\det(B).$$

(d) Queremos provar que $\det(A) = \det(A^t)$. Vamos dividir a demonstração deste item em dois casos.

Caso 1: Se A é uma matriz invertível, pelo Teorema 2.6 na página 81 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. É fácil ver que se E é uma matriz elementar, então $\det(E) = \det(E^t)$ (verifique!). Assim,

$$\det(A^t) = \det(E_k^t) \ldots \det(E_1^t) = \det(E_k) \ldots \det(E_1) = \det(E_1 \ldots E_k) = \det(A).$$

Caso 2: Se A não é invertível, então A^t também não o é, pois caso contrário, pelo Teorema 2.2 na página 76, também $A = (A^t)^t$ seria invertível. Assim neste caso, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$. $\square$

2.2.3 Matriz Adjunta e Inversão (opcional)

Vamos definir a adjunta de uma matriz quadrada e em seguida enunciar e provar um teorema sobre a adjunta que permite provar vários resultados sobre matrizes, entre eles um que fornece uma fórmula para a inversa de uma matriz e também a regra de Cramer. Tanto a adjunta quanto os resultados que vem a seguir são de importância teórica.

Definição 2.3. Seja A uma matriz $n \times n$. Definimos a matriz **adjunta (clássica)** de A, denotada por $\operatorname{adj}(A)$, como a transposta da matriz formada pelos cofatores de A, ou seja,

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

em que, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2.21. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular a adjunta de B.

$$\begin{array}{ll}
B_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -6, & B_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 0, \\
B_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, & B_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4, \\
B_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2, & B_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \\
B_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -5, & B_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -2, \\
B_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3, &
\end{array}$$

Assim, a adjunta de B é

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Na definição do determinante são multiplicados os elementos de uma linha pelos cofatores da mesma linha. O teorema seguinte diz o que acontece se somamos os produtos dos elementos de uma linha com os cofatores de outra linha ou se somamos os produtos dos elementos de uma coluna com os cofatores de outra coluna.

Lema 2.17. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$
\begin{aligned}
a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} &= 0 \quad \textit{se } k \neq i; & (2.9)\\
a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} &= 0 \quad \textit{se } k \neq j; & (2.10)
\end{aligned}
$$

em que, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Para demonstrar a equação (2.9), definimos a matriz A^* como sendo a matriz obtida de A substituindo a i-ésima linha de A por sua k-ésima linha, ou seja,

$$
A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}
\quad \text{e} \quad
A^* = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array}
.
$$

Assim, A^* possui duas linhas iguais e pelo Corolário 2.13 na página 116, $\det(A^*) = 0$. Mas, o determinante de A^* desenvolvido segundo a sua i-ésima linha é exatamente a equação (2.9).

A demonstração de (2.10) é feita de forma análoga, mas usando o item (d) do Teorema 2.14, ou seja, que $\det(A) = \det(A^t)$. □

Teorema 2.18. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$A(\mathrm{adj}(A)) = (\mathrm{adj}(A))A = \det(A)I_n$$

Demonstração. O produto da matriz A pela matriz adjunta de A é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{j1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & \ldots & A_{j2} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{jp} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento de posição i, j de $A\ \mathrm{adj}(A)$ é

$$(A\ \mathrm{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots a_{in}A_{jn}\,.$$

Pelo Lema 2.17, equação (2.9) e do Teorema 2.12 na página 115 segue que

$$(A\,\mathrm{adj}(A))_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Assim,

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I_n \,.$$

Analogamente, usando Lema 2.17, equação (2.10), se prova que $\mathrm{adj}(A)\,A = \det(A) I_n$. ☐

Exemplo 2.22. Vamos mostrar que se uma matriz A é singular, então $\mathrm{adj}(A)$ também é singular. Vamos separar em dois casos.

(a) Se $A = \bar{0}$, então $\mathrm{adj}(A)$ também é a matriz nula, que é singular.

(b) Se $A \neq \bar{0}$, então pelo Teorema 2.18 na página 129, $\mathrm{adj}(A)\,A = \bar{0}$. Mas, então, se $\mathrm{adj}(A)$ fosse invertível, então A seria igual à matriz nula (por que?), que estamos assumindo não ser este o caso. Portanto, $\mathrm{adj}(A)$ tem que ser singular.

Corolário 2.19. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se $\det(A) \neq 0$, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)\,;$$

Demonstração. Se $\det(A) \neq 0$, então definindo $B = \dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$, pelo Teorema 2.18 temos que

$$A\,B = A(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)) = \frac{1}{\det(A)}(A\operatorname{adj}(A)) = \frac{1}{\det(A)}\det(A)I_n = I_n\,.$$

Aqui, usamos a propriedade (j) do Teorema 1.1 na página 10. Portanto, A é invertível e B é a inversa de A. □

Exemplo 2.23. No Exemplo 2.20 na página 123 mostramos como obter rapidamente a inversa de ma matriz 2×2. Usando o Corolário 2.19 podemos também obter a inversa de uma matriz 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{se } \det(A) \neq 0$$

Ou seja, a inversa de uma matriz 2×2 é facilmente obtida trocando-se a posição dos elementos da diagonal principal, trocando-se o sinal dos outros elementos e dividindo-se todos os elementos pelo determinante de A.

Exemplo 2.24. Vamos calcular a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A sua adjunta foi calculada no Exemplo 2.21 na página 127. Assim,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\text{adj}(B) = \frac{1}{-6}\left[\begin{array}{rrr} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{lrr} 1 & -frac23 & frac56 \\ 0 & frac13 & frac13 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right].$$

Corolário 2.20 (Regra de Cramer). *Se o sistema linear $AX = B$ é tal que a matriz A é $n \times n$ e invertível, então a solução do sistema é dada por*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Como A é invertível, pelo Corolário 2.19

$$X = A^{-1}\,B = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)B.$$

A entrada x_j é dada por

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}(A_{1j}b_1 + \ldots + A_{nj}b_n) = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$ e $\det(A_j)$ foi calculado fazendo o desenvolvimento em cofatores em relação a j-ésima coluna de A_j. $\square$

Se a matriz A não é invertível, então a regra de Cramer não pode ser aplicada. Pode ocorrer que $\det(A) = \det(A_j) = 0$, para $j = 1, \ldots, n$ e o sistema não tenha solução (verifique!). A regra de Cramer tem um valor teórico, por fornecer uma fórmula para a solução de um sistema linear, quando a matriz do sistema é quadrada e invertível.

Exercícios Numéricos (respostas na página 571)

2.2.1. Se $\det(A) = -3$, encontre
(a) $\det(A^2)$; (b) $\det(A^3)$; (c) $\det(A^{-1})$; (d) $\det(A^t)$;

2.2.2. Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det(A^t B^{-1})$.

2.2.3. Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule o determinante das matrizes a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$;

2.2.4. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes usando operações elementares para transformá-las em matrizes triangulares superiores.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.2.5. Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_n) = 0$, em que

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.6. Ache os valores de λ, para os quais o sistema linear $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$ tem solução não trivial, em que

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.7. Para as matrizes do exercício anterior, e os valores de λ encontrados, encontre a solução geral do sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$.

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> det(A)` calcula o determinante da matriz `A`.

Comando do pacote GAAL:

`>> detopelp(A)` calcula o determinante de `A` aplicando operações elementares até que a matriz esteja na forma triangular superior.

2.2.8. Vamos fazer um experimento no MATLAB® para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes invertíveis. No prompt do MATLAB® digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(2);if(det(A)~=0),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB® fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável `A`, 1000 matrizes 2×2 com entradas inteiras aleatórias entre -5 e 5.
- Se $\det(\mathtt{A}) \neq 0$, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

2.2.9. O pacote `gaal` contem alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.

```
>> menc=lerarq('menc1'), key=lerarq('key')
```

Aqui são lidos os arquivos `menc1` e `key`. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes numéricas use os comandos do pacote `gaal`:

```
>> y=char2num(menc), M=char2num(key)
```

A mensagem criptografada, `y`, foi obtida multiplicando-se a matriz `M` pela mensagem original (convertida para números), `x`. Determine `x`. Descubra a mensagem usando o comando do pacote `gaal`, `num2char(x)`. Decifre as mensagens que estão nos arquivos `menc2` e `menc3`. Como deve ser a matriz `M` para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

2.2.10. Resolva, com o MATLAB®, os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 2.2.4.**

Exercícios Teóricos

2.2.11. Mostre que se $\det(AB) = 0$, então ou A é singular ou B é singular.

2.2.12. O determinante de AB é igual ao determinante de BA? Justifique.

2.2.13. Mostre que se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$.

2.2.14. Mostre que se $A^k = \bar{0}$, para algum k inteiro positivo, então A é singular.

2.2.15. Mostre que se $A^t = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;

2.2.16. Mostre que se α é um escalar e A é uma matriz $n \times n$, então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

2.2.17. Mostre que A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, $A^t A$ é invertível.

2.2.18. Sejam A e P matrizes $n \times n$, sendo P invertível. Mostre que $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

2.2.19. Mostre que se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **triangular superior**, (isto é, os elementos situados abaixo da diagonal são iguais a zero) então $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

2.2.20. (a) Mostre que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 0$ se, e somente se, uma linha é múltiplo escalar da outra. E se A for uma matriz $n \times n$?

(b) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \alpha A_k + \beta A_l$, para α e β escalares e $i \neq k, l$, então $\det(A) = 0$.

(c) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \sum_{k\neq i} \alpha_k A_k$, para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ escalares, então $\det(A) = 0$.

2.2.21. Mostre que o **determinante de Vandermonde** é dado por

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

A expressão à direita significa o produto de todos os termos $x_i - x_j$ tais que $i > j$ e $i, j = 1, \ldots, n$. (Sugestão: Mostre primeiro que $V_3 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$. Suponha que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem $n-1$, mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem n. Faça as seguintes operações nas colunas da matriz, $-x_1 C_{i-1} + C_i \to C_i$, para $i = n, \ldots, 2$. Obtenha $V_n = (x_n - x_1) \ldots (x_2 - x_1) V_{n-1}$.)

2.2.22. Sejam A, B e D matrizes $p \times p$, $p \times (n-p)$ e $(n-p) \times (n-p)$, respectivamente. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \bar{0} & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D).$$

(Sugestão: O resultado é claramente verdadeiro para $n = 2$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para matrizes de ordem $n-1$. Desenvolva o determinante da matriz em termos da 1ª coluna, escreva o resultado em termos de determinantes de ordem $n-1$ e mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de ordem n.)

2.2.23. Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) Prove que $\det(\mathrm{adj}(A)) = [\det(A)]^{n-1}$. (Sugestão: separe em dois casos, $\det(A) = 0$ e $\det(A) \neq 0$, e use o Teorema 2.18 na página 129.)

(b) Prove que se A é invertível e $n \geq 2$, então $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

2.2.24. Dê um exemplo de sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas, $AX = B$, em que $\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0$ e o sistema não tenha solução, em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$.

Apêndice III: Demonstração do Teorema 2.12 na página 115

Lema 2.21. *Sejam* $E_1 = [1\,0\,\ldots\,0]^t, E_2 = [0\,1\,0\,\ldots\,0]^t, \ldots, E_n = [0\,\ldots\,0\,1]^t$. *Se* A *é uma matriz* $n \times n$, *cuja* i*-ésima linha é igual a* E_k^t, *para algum* k $(1 \leq k \leq n)$, *então*

$$\det(A) = (-1)^{i+k} \det(\tilde{A}_{ik}).$$

Demonstração. É fácil ver que para matrizes 2×2 o lema é verdadeiro. Suponha que ele seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$ e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Podemos supor que $1 < i \leq n$.

Seja B_j a matriz $(n-2) \times (n-2)$ obtida de A eliminando-se as linhas 1 e i e as colunas j e k, para $1 \leq j \leq n$.

Para $j < k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual a E_{k-1}^t. Para $j > k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual a E_k^t. Como estamos supondo o lema verdadeiro para estas matrizes e como pelo Corolário 2.11 na página 115 $\det(\tilde{A}_{1k}) = 0$, segue que

$$\det(\tilde{A}_{1j}) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)+(k-1)} \det(B_j) & \text{se } j < k, \\ 0 & \text{se } j = k, \\ (-1)^{(i-1)+k} \det(B_j) & \text{se } j > k. \end{cases} \tag{2.11}$$

Usando (2.11), obtemos

$$\det(A) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{ij})$$

$$= \sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+k}\det(B_j)$$

Por outro lado, temos que

$$(-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ik}) = (-1)^{i+k}\left[\sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}\det(B_j)\right]$$

É simples a verificação de que as duas expressões acima são iguais. ☐

Demonstração do Teorema 2.12 na página 115. Sejam $E_1 = [1\,0\,\ldots\,0]^t, E_2 = [0\,1\,0\,\ldots\,0]^t$, $\ldots, E_n = [0\,\ldots\,0\,1]^t$. Observe que a linha i de A pode ser escrita como $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_j^t$. Seja B_j a matriz obtida de A substituindo-se a linha i por E_j^t. Pelo Teorema 2.10 na página 112 e o Lema 2.21 segue que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\tilde{A}_{ij}).$$

☐

Teste do Capítulo

1. Calcule o determinante da matriz seguinte usando operações elementares para transformá-la em uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Se possível, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I + A^2)^{-1} = I - 2A^2$;

(b) Se $A^t = -A^2$ e A é não singular, então determinante de A é -1;

(c) Se $B = AA^tA^{-1}$, então $\det(A) = \det(B)$.

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$

Capítulo 3

Vetores no Plano e no Espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado. A direção e o sentido do segmento orientado identifica a direção e o sentido do vetor. O comprimento do segmento orientado representa a magnitude do vetor.

Um vetor poder ser representado por vários segmentos orientados. Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo,

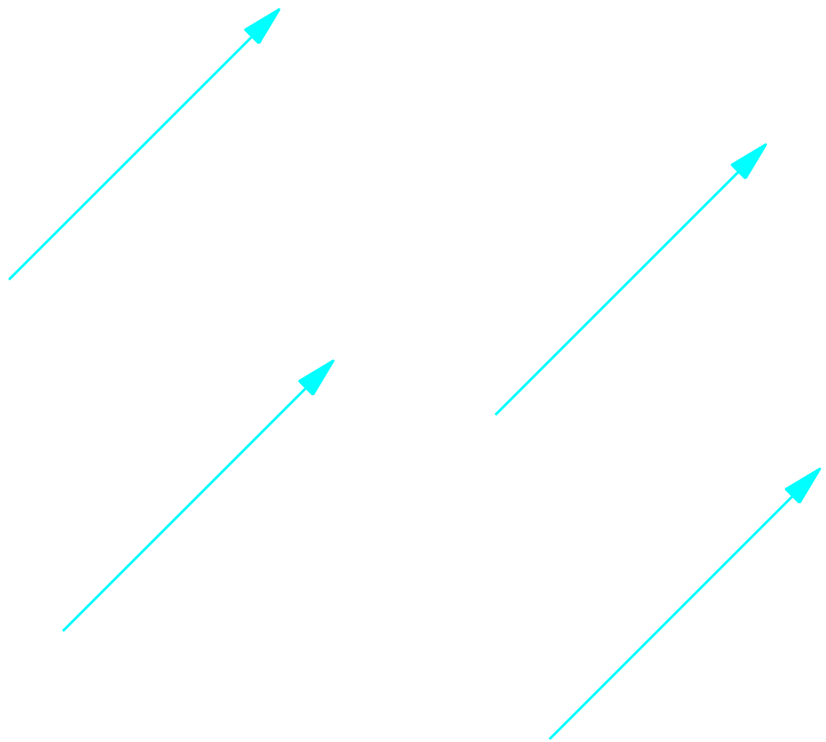


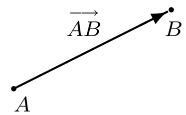
Figura 3.1: Segmentos orientados representando o mesmo vetor

as frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional. De forma análoga, dizemos que dois segmentos orientados representam o mesmo vetor se possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Analogamente, dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na Figura 3.1 temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma, $V + W$, de dois vetores V e W é determinada da seguinte forma:

- tome um segmento orientado que representa V;
- tome um segmento orientado que representa W, com origem na extremidade de V;
- o vetor $V + W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.

Da Figura 3.2, deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \tag{3.1}$$

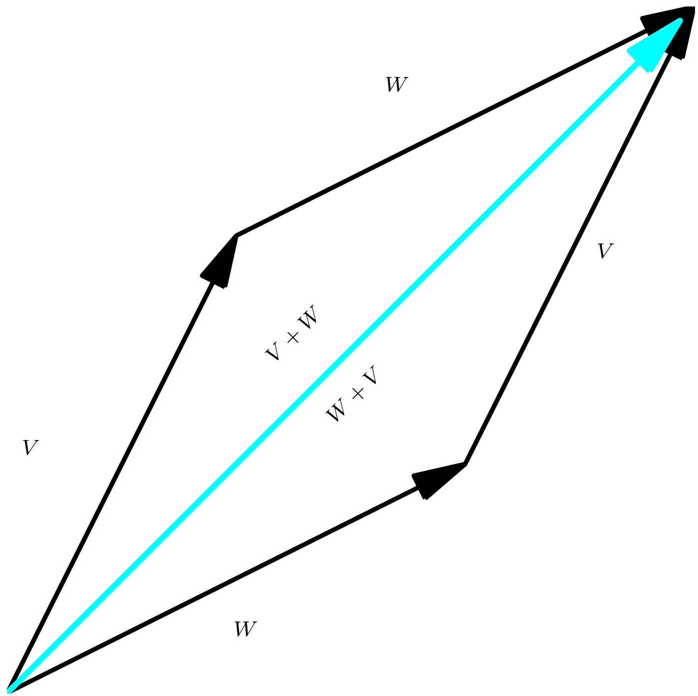


Figura 3.2: $V + W = W + V$

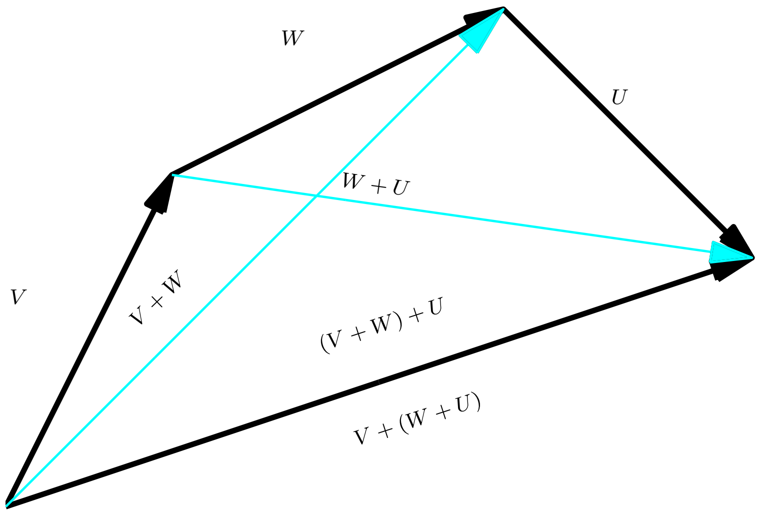


Figura 3.3: $V + (W + U) = (V + W) + U$

para quaisquer vetores V e W. Observamos também que a soma $V + W$ está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W, quando estão representados com a mesma origem.

Da Figura 3.3, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \tag{3.2}$$

para quaisquer vetores V, W e U.

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por $\bar{0}$. Segue então, que

$$V + \bar{0} = \bar{0} + V = V, \tag{3.3}$$

para todo vetor V.

Para qualquer vetor V, o **simétrico** de V, denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V. Segue então, que

$$V + (-V) = \bar{0}. \tag{3.4}$$

Definimos a **diferença** W **menos** V, por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \bar{0} = V.$$

Assim, a diferença $V - W$ é um vetor que somado a W dá V, portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V, desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

A **multiplicação de um vetor** V **por um escalar** α, αV, é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

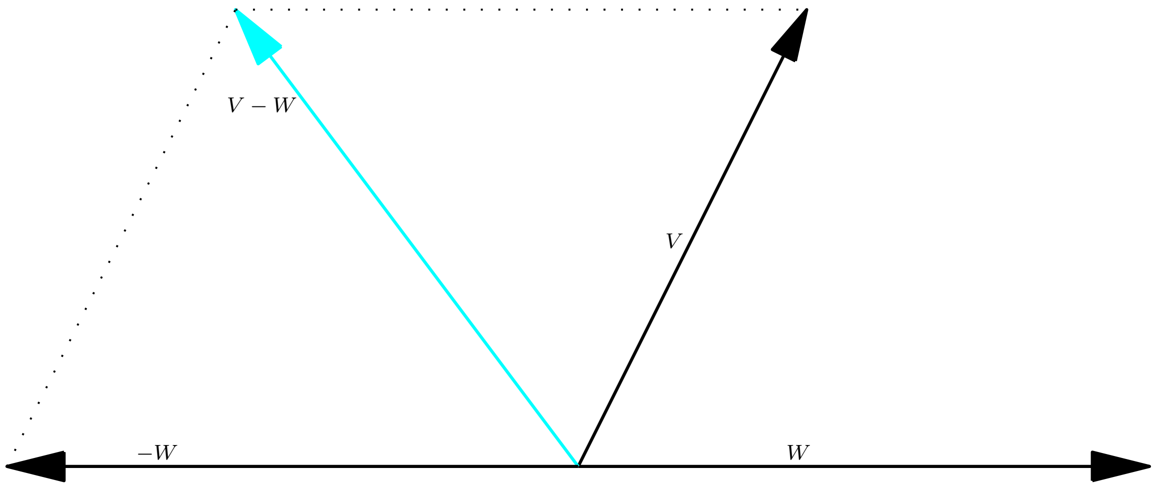


Figura 3.4: A diferença $V - W$

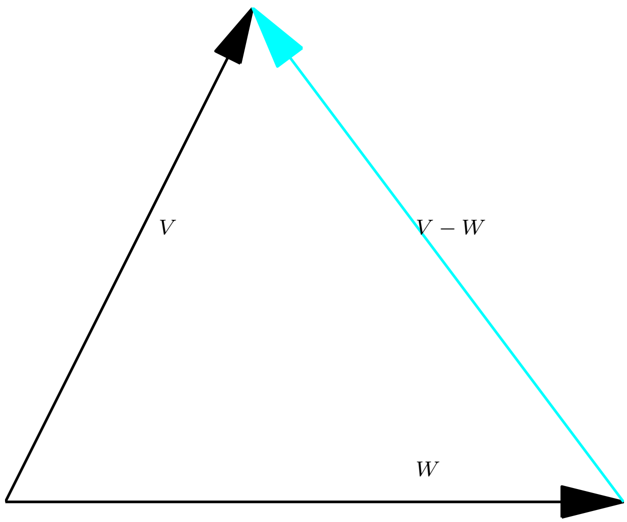


Figura 3.5: A diferença $V - W$

(a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$,

(b) caso contrário,

   i. tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de V,

   ii. a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),

   iii. tem o mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ e
   tem o sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$.

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se $W = \alpha V$, dizemos que W é **um múltiplo escalar** de V. É fácil ver que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2).}$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0, 0)$. Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

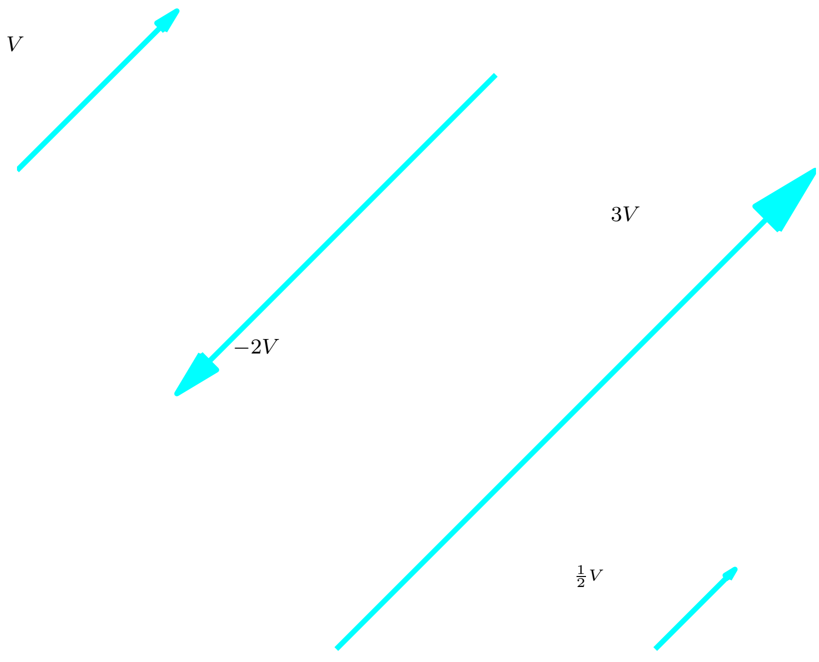


Figura 3.6: Multiplicação de vetor por escalar

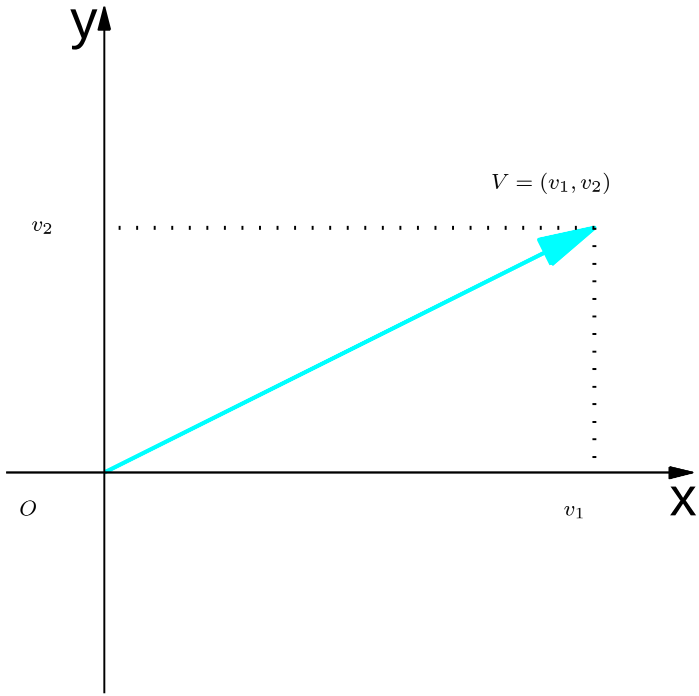


Figura 3.7: As componentes do vetor V no plano

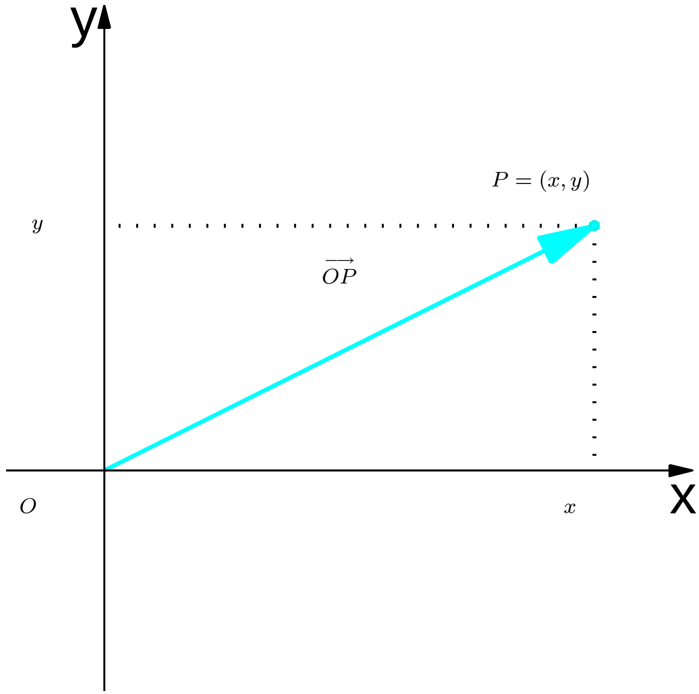


Figura 3.8: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

- Como ilustrado na Figura 3.9, a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por
$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);}$$

- Como ilustrado na Figura 3.10, a **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar α é dada por
$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2).}$$

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço**. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical. Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y. Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo x positivo de forma que o semi-eixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto os três planos coordenados são: xy, yz e xz.

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), chamado de **coordenadas do ponto** P como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;

- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.

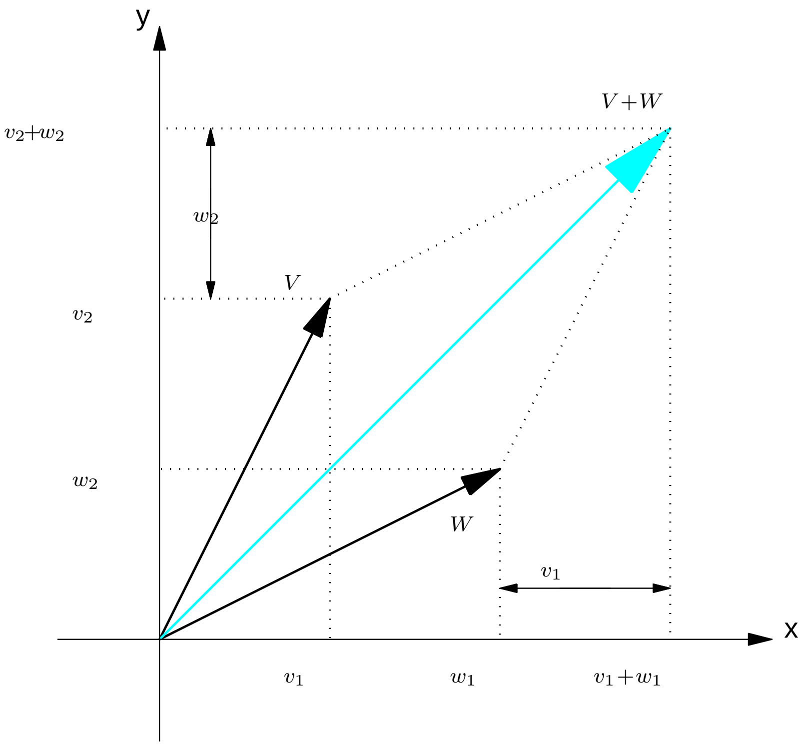


Figura 3.9: A soma de dois vetores no plano

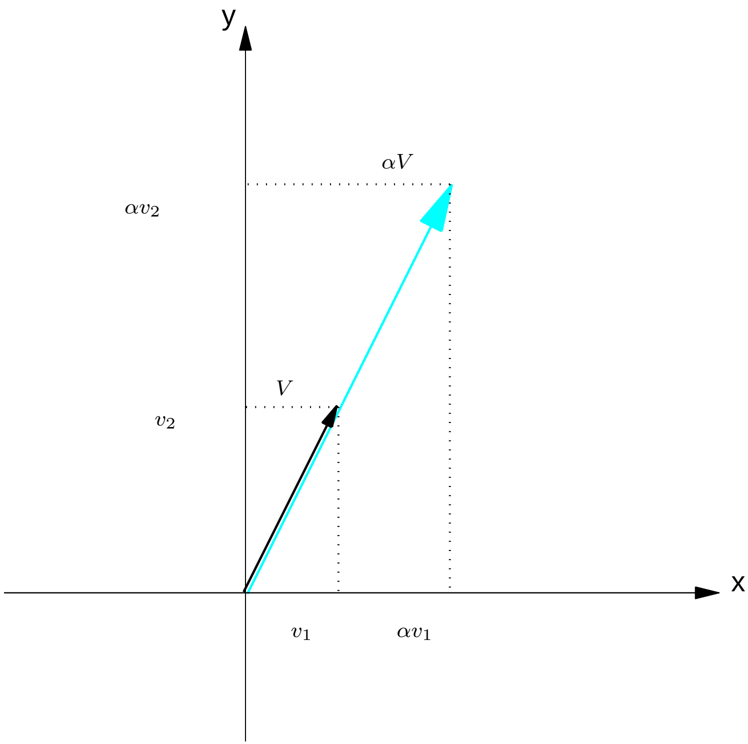


Figura 3.10: A multiplicação de vetor por escalar no plano

- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.

- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.

- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y

- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2, v_3).}$$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0, 0, 0)$. Assim como

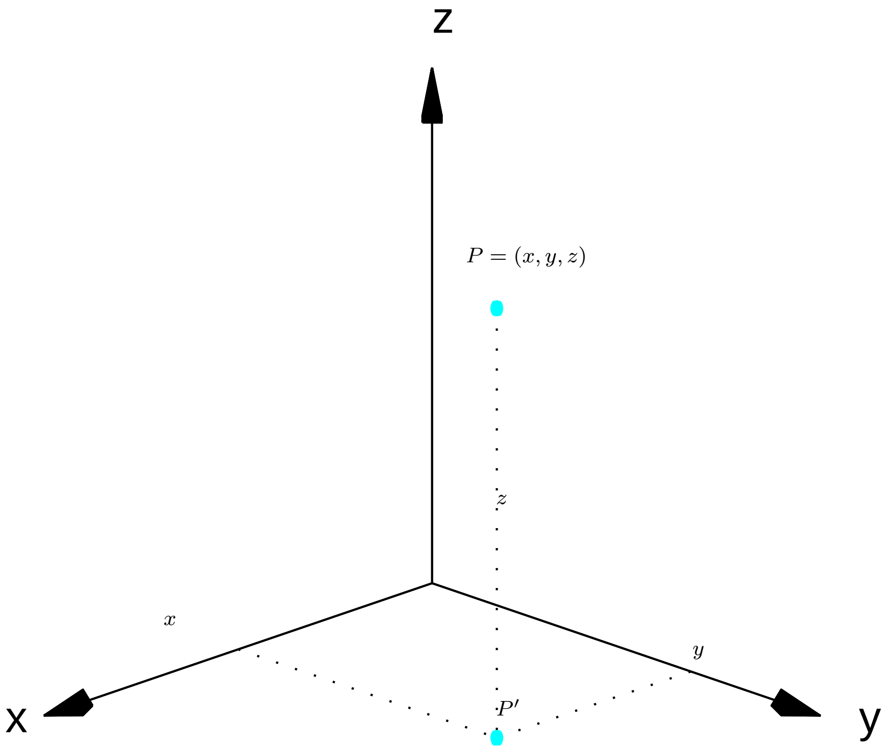


Figura 3.11: As coordenadas de um ponto no espaço

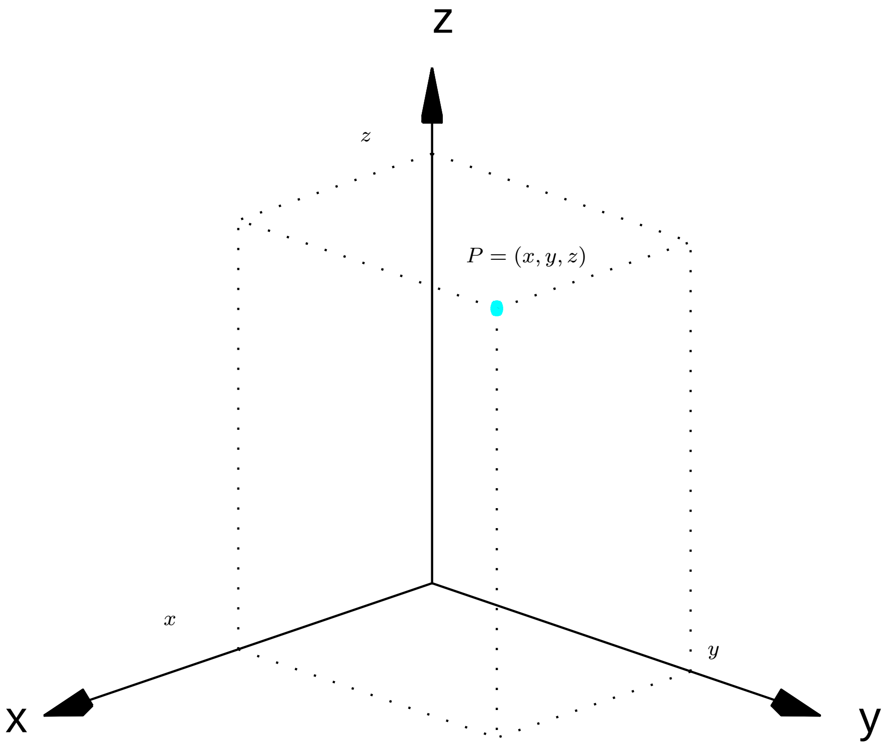


Figura 3.12: As coordenadas de um ponto no espaço

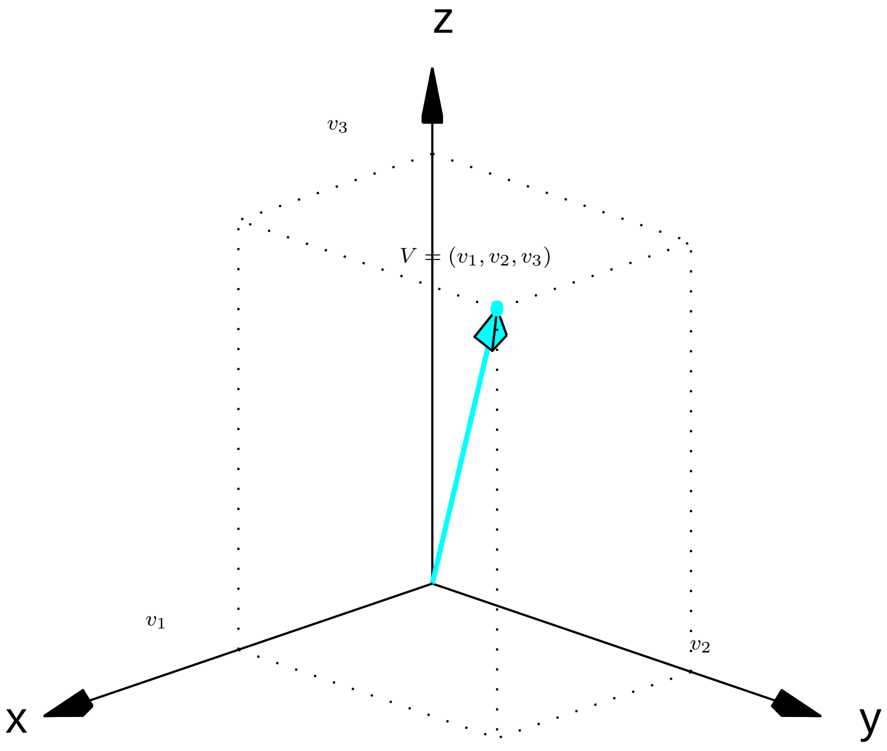


Figura 3.13: As componentes de um vetor no espaço

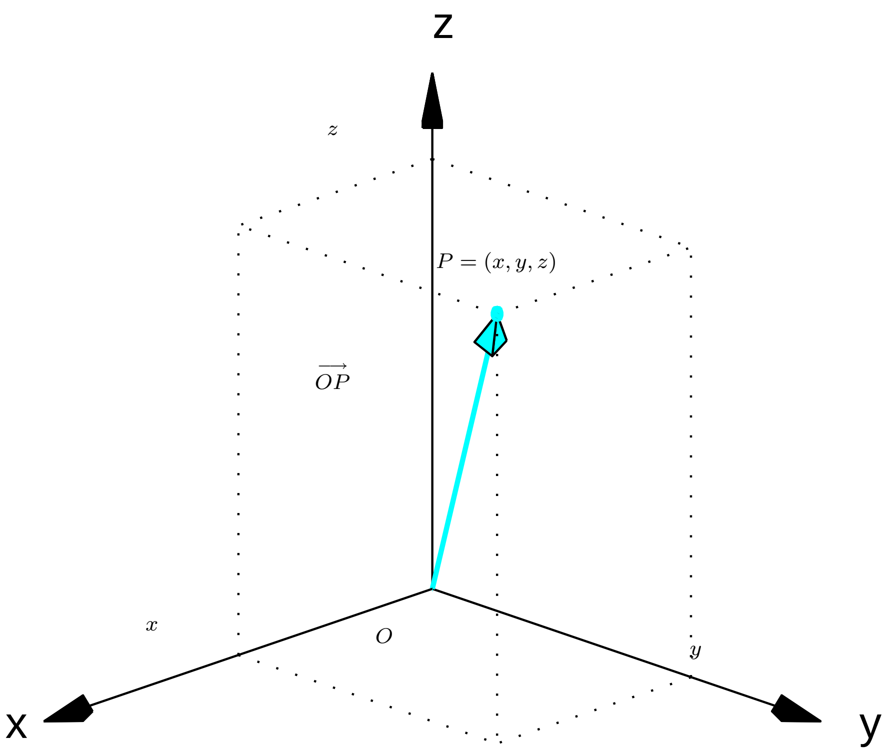


Figura 3.14: As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por
$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);}$$

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por
$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3).}$$

Exemplo 3.1. Se $V = (1, -2, 3)$, $W = (2, 4, -1)$, então
$$V + W = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2), \quad 3V = (3 \cdot 1, 3\,(-2), 3 \cdot 3) = (3, -6, 9).$$

Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (Figura 3.15), digamos em $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor V são dadas por
$$\boxed{V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

Portanto, as componentes de V são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.

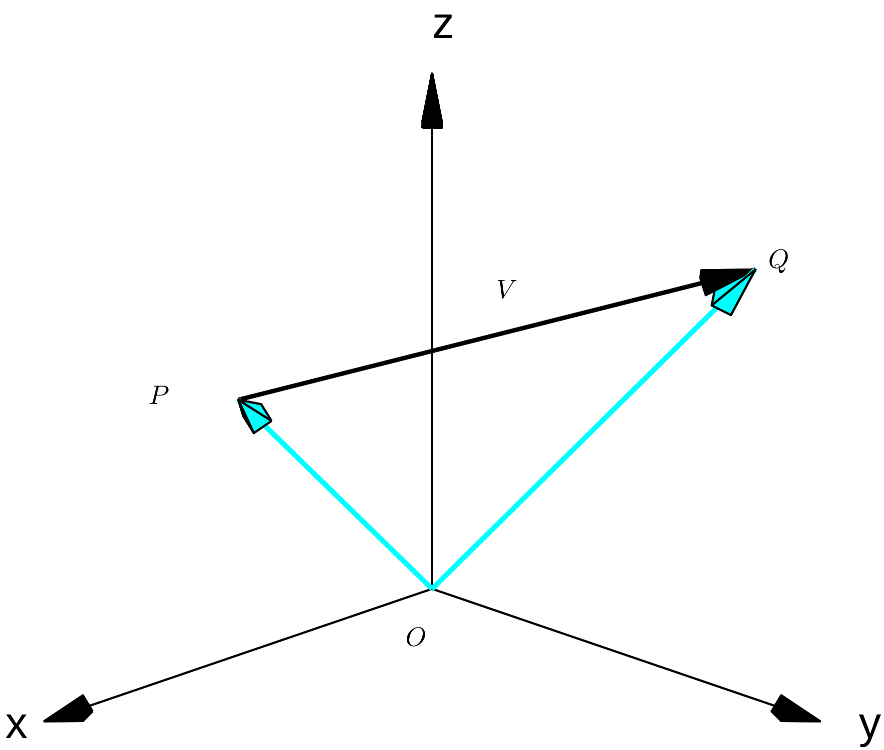


Figura 3.15: $V = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Exemplo 3.2. As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

Observação. O vetor é "livre", ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$, no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto $P = (5/2, 1, 2)$. Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{bmatrix},$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V + W = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3),$$

$$\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U + V = V + U$;

(b) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

(c) $U + \bar{0} = U$;

(d) $U + (-U) = \bar{0}$;

(e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

(f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

(g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

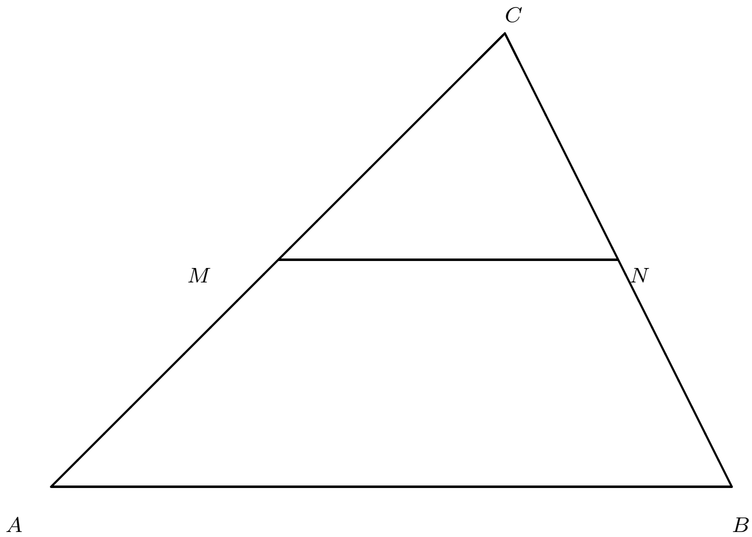
(h) $1U = U$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 10). □

Exemplo 3.3. Vamos usar vetores e as suas propriedades para provar um resultado conhecido de geometria plana. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB.

Devemos provar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$



Agora, a partir da figura acima temos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}\,.$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\,.$$

Logo,

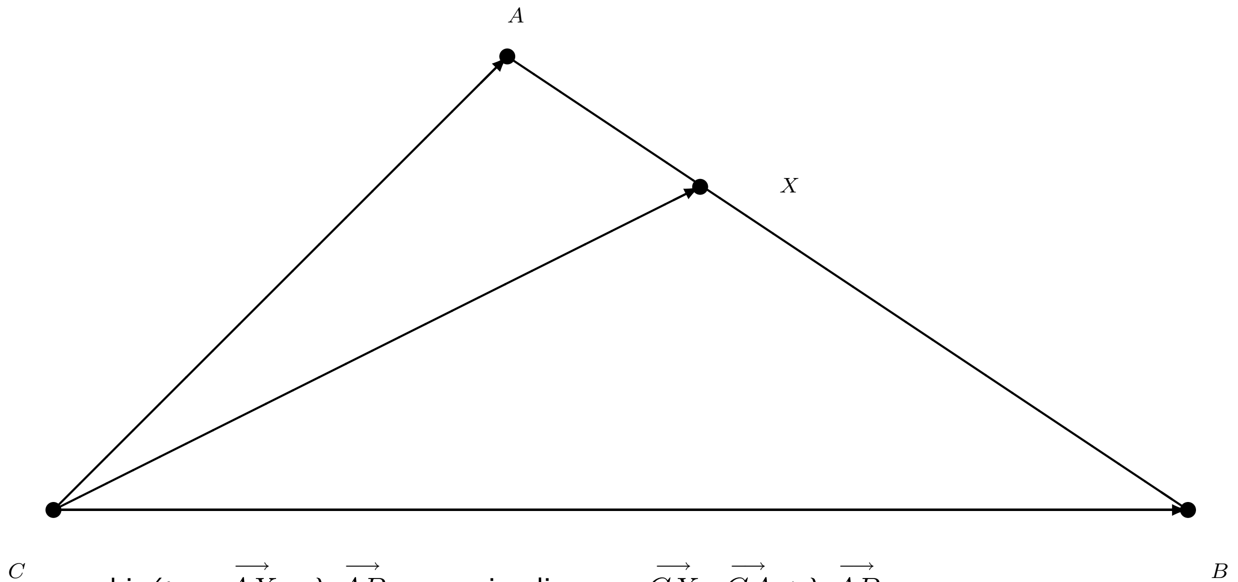
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

Exemplo 3.4. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, chamada de **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não vai representar nenhuma restrição.

O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}\,.$$



Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{AB}$.
Mas, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = (1 - \lambda) \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{CB} .$$

Observe que para $\lambda = 0$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA}$, para $\lambda = 1$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$, para $\lambda = 1/2$, $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$, para $\lambda = 1/3$, $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$.

Exemplo 3.5. Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_1, y_2, z_2)$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

O ponto M é o ponto médio de AB se, e somente se, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto C sendo a origem O), $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$. Como as coordenadas de um ponto são iguais as componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$ e

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 581)

3.1.1. Uma reta no plano tem equação $y = 2x + 1$. Determine um vetor paralelo a esta reta.

3.1.2. Determine uma equação para a reta no plano que é paralela ao vetor $V = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (1, 2)$.

3.1.3. Determine o vetor X, tal que $3X - 2V = 15(X - U)$.

3.1.4. Determine o vetor X, tal que $\begin{cases} 6X & - & 2Y & = & U \\ 3X & + & Y & = & U + V \end{cases}$

3.1.5. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $V = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

3.1.6. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$)

3.1.7. Verifique se os pontos dados a seguir são **colineares**, isto é, pertencem a uma mesma reta:

(a) $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$;

(b) $A = (-1, 1, 3)$, $B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$;

3.1.8. Dados os pontos $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$. Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

3.1.9. Verifique se o vetor U é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de V e W:

(a) $V = (9, -12, -6), W = (-1, 7, 1)$ e $U = (-4, -6, 2)$;

(b) $V = (5, 4, -3), W = (2, 1, 1)$ e $U = (-3, -4, 1)$;

Exercícios usando o MATLAB®

>> `V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo >> `V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

>> `V+W` é a soma de `V` e `W`; >> `V-W` é a diferença `V` menos `W`; >> `num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

>> `subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

>> `solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos gráficos do pacote GAAL:

>> `desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e >> `desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

>> `po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.
>> `lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`. >> `tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

>> `axiss` reescala os eixos com a mesma escala. >> `eixos` desenha os eixos coordenados.

>> `box` desenha uma caixa em volta da figura. >> `rota` faz uma rotação em torno do eixo z. >> `zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

3.1.10. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores do plano ou do espaço a seu critério

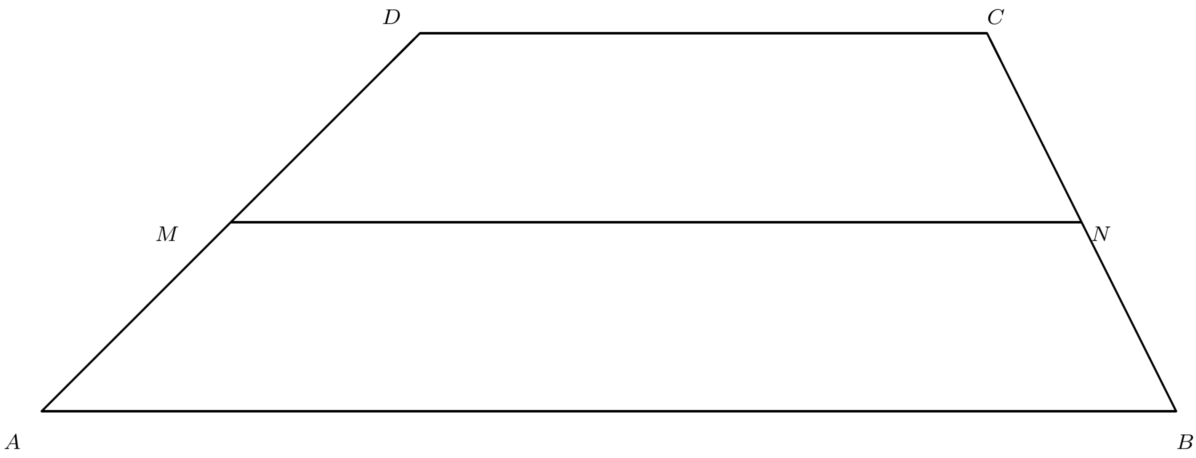
(a) Use a função `ilsvw(V,W)` para visualizar a soma dos dois vetores.

(b) Coloque em uma variável `a` um número e use a função `ilav(a,V)` para visualizar a multiplicação do vetor `V` pelo escalar `a`.

3.1.11. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos** a partir do Exercício 1.3.

Exercícios Teóricos

3.1.12. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{MN}= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ e depois conclua que $\overrightarrow{MN}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Revise o Exemplo 3.3 na página 168)



3.1.13. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor $\overrightarrow{MN} = \bar{0}$, então conclua que $M = N$.)

3.1.14. Sejam A, B e C pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

(a) Um ponto X pertence a reta determinada por A e B se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(b) Um ponto X pertence ao segmento AB se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(c) Um ponto X é um ponto interior ao triângulo ABC se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta < 1.$$

3.1.15. Mostre que se $\alpha V = \bar{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$.

3.1.16. Se $\alpha U = \alpha V$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

3.1.17. Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? E se $V \neq \bar{0}$?

3.2 Produtos de Vetores

3.2.1 Norma e Produto Escalar

Já vimos que o **comprimento** de um vetor V é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. O comprimento do vetor V também é chamado de **norma de** V e é denotado(a) por $||V||$. Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2)$ é um vetor no plano, e por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor no espaço (verifique usando as Figuras 3.16 e 3.17).

Um vetor de norma igual a 1 é chamado de **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1, z_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ (Figura 3.15 na página 165). Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, então a distância de P a Q é dada por

$$\boxed{\mathrm{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2)$ no plano é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que é dada por

$$\boxed{\mathrm{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

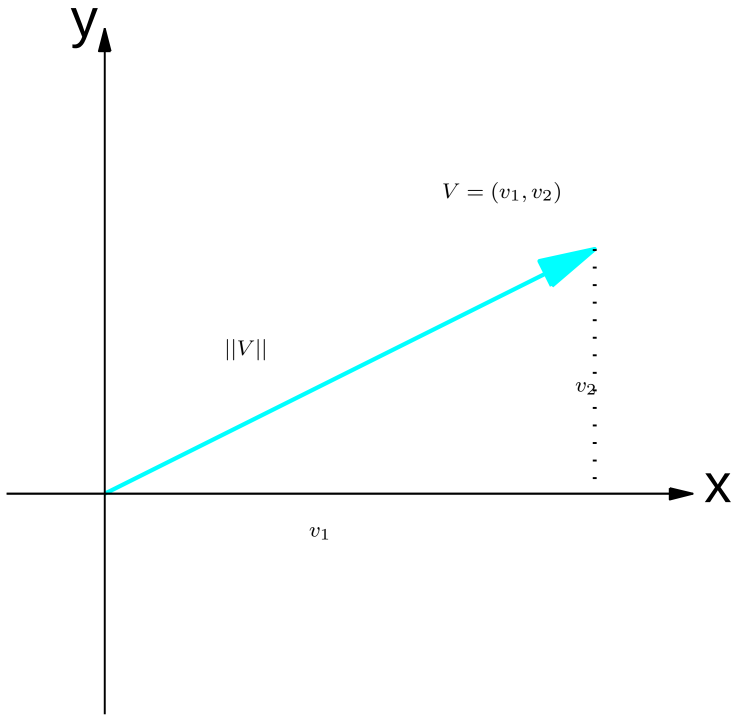


Figura 3.16: A norma de um vetor V no plano

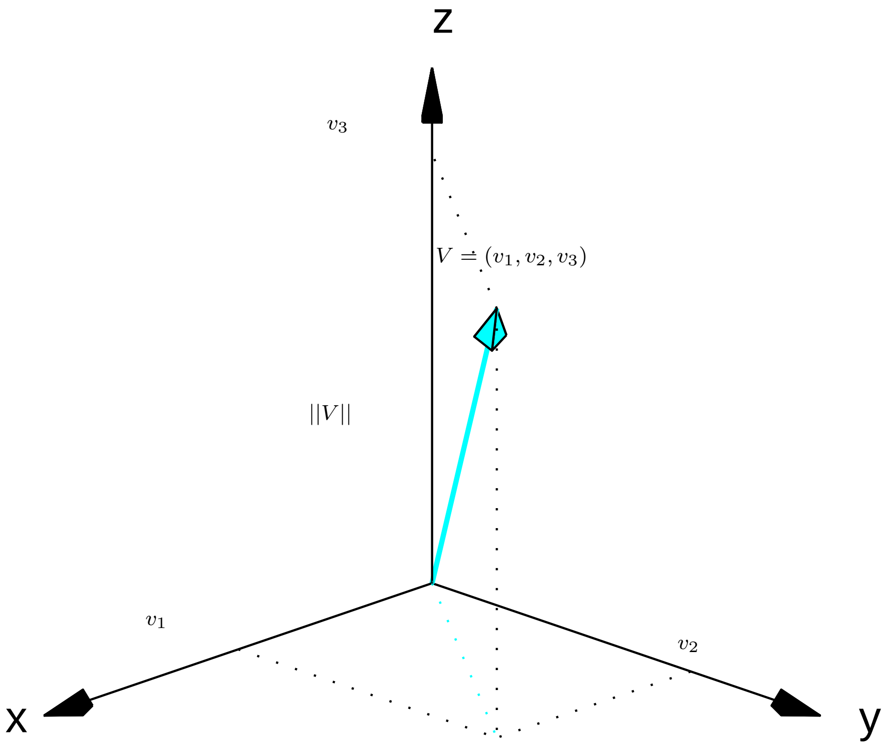


Figura 3.17: A norma de um vetor V no espaço

Exemplo 3.6. A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\mathrm{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||(-1-2, 4-(-3), 5-1)|| = ||(-3, 7, 4)|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue que

$$||\alpha V|| = ||(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)|| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$\boxed{||\alpha V|| = |\alpha|\,||V||.} \tag{3.5}$$

Dado um vetor V **não nulo**, o vetor

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V.}$$

é um **vetor unitário na direção de** V, pois por (3.5), temos que

$$||U|| = \left|\frac{1}{||V||}\right| ||V|| = 1.$$

Exemplo 3.7. Um vetor unitário na direção do vetor $V = (1, -2, 3)$ é o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(1, -2, 3) = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W, é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem (Figura 3.18).

Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90°$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

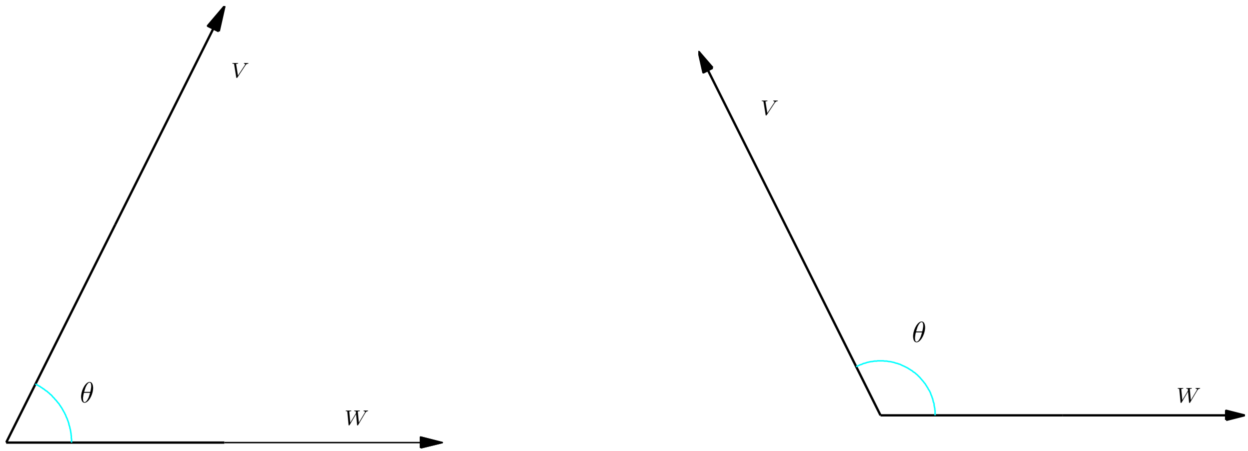


Figura 3.18: Ângulo entre dois vetores

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

Definição 3.1. O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores V e W é definido por

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ ||V||\,||W|| \cos\theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre eles.

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

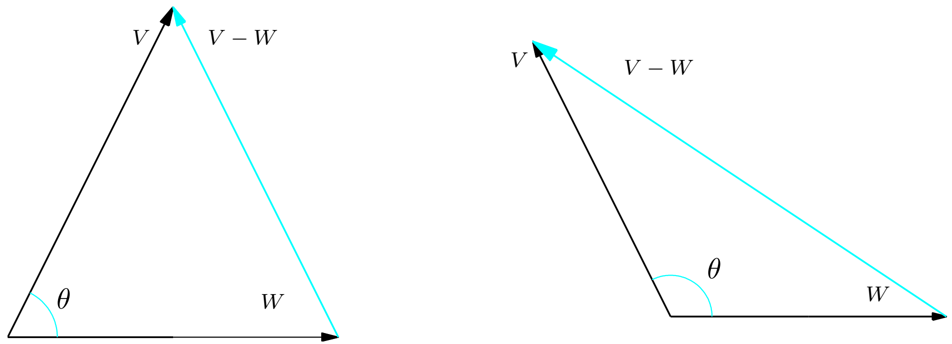


Figura 3.19: Ângulo entre dois vetores e a diferença entre eles

Se V e W são dois vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2||V||\,||W||\cos\theta.$$

Assim,

$$V \cdot W = ||V||\,||W||\cos\theta = \frac{1}{2}\left(||V||^2 + ||W||^2 - ||V - W||^2\right). \tag{3.6}$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Por exemplo, se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se $||V||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, $||W||^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ e $||V - W||^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$ em (3.6) os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Teorema 3.2. *O produto escalar ou interno, $V \cdot W$, entre dois vetores é dado por*

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

se $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são vetores no plano e por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço.

Exemplo 3.8. Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$. O produto escalar de V por W é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2\,.$$

Podemos usar o Teorema 3.2 para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W. O cosseno do ângulo entre V e W é, então, dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||}\,.}$$

Se V e W são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

(a) θ é agudo ($0 \leq \theta < 90^{\text{o}}$) se, e somente se, $V \cdot W > 0$,

(b) θ é reto ($\theta = 90^{\mathrm{o}}$) se, e somente se, $V \cdot W = 0$ e

(c) θ é obtuso ($90^{\mathrm{o}} < \theta \leq 180^{\mathrm{o}}$) se, e somente se, $V \cdot W < 0$.

Exemplo 3.9. Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam $V_1 = (1,0,0), V_2 = (0,1,0)$ e $V_3 = (0,0,1)$ (Figura 3.20). Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor D dado por

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1,1,1)\,.$$

Então o ângulo entre D e V_1 satisfaz

$$\cos\theta = \frac{D \cdot V_1}{||D||||V_1||} = \frac{1.1 + 0.1 + 0.1}{(\sqrt{1^2+1^2+1^2})(\sqrt{1^2+0^2+0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54^{\mathrm{o}}\,.$$

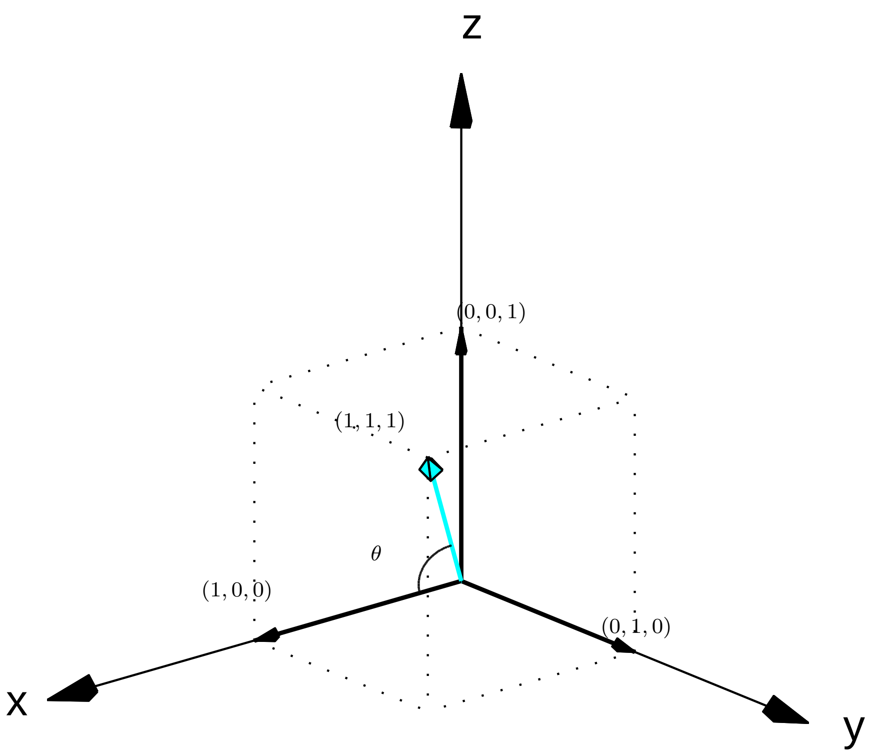


Figura 3.20: Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas

Teorema 3.3. *Sejam U, V e W vetores e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) (comutatividade) $U \cdot V = V \cdot U$;

(b) (distributividade) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) (associatividade) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, para todo V e $V \cdot V = 0$ se, e somente se, $V = \bar{0}$.

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) $U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V+W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) = u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3) = (u_1v_1+u_1w_1)+(u_2v_2+u_2w_2)+(u_3v_3+u_3w_3) = (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = (\alpha U) \cdot V$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2$ é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual a zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero. $\square$

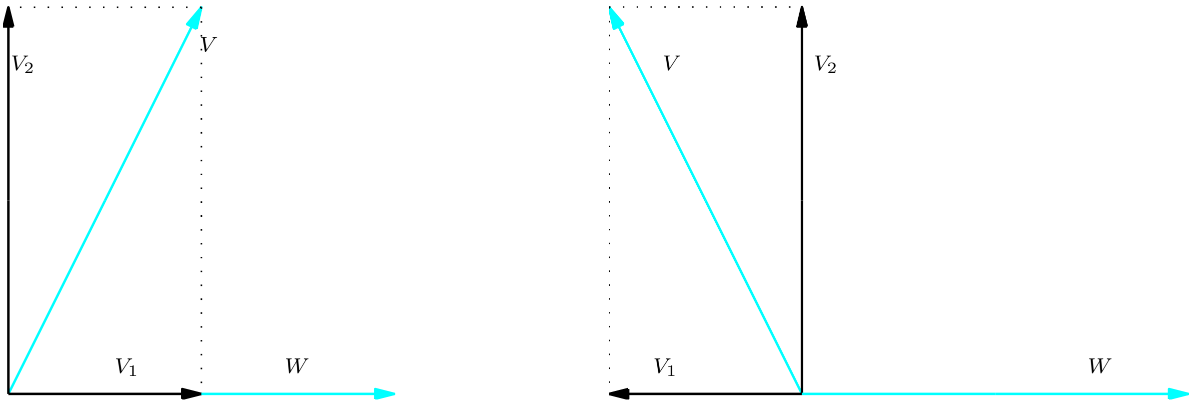


Figura 3.21: Decomposição de V em uma soma $V_1 + V_2$, em que V_1 é paralelo a W

3.2.2 Projeção Ortogonal

Podemos decompor um vetor V em uma soma de dois vetores, V_1 e V_2, sendo V_1 na direção de um vetor W e V_2 perpendicular a W (Figura 3.21).

O vetor V_1 é chamado **projeção ortogonal de V sobre W** e é denotado por $\mathrm{proj}_W V$.

Proposição 3.4. *Seja W um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor V em W é dada por*

$$\mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W\,.$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \mathrm{proj}_W V$ e $V_2 = V - \mathrm{proj}_W V$. Como V_1 é paralelo a W, então

$$V_1 = \alpha W. \tag{3.7}$$

Assim,

$$V = V_1 + V_2 = \alpha W + V_2\,.$$

Multiplicando-se escalarmente V por W e usando o Teorema 3.3 (d) obtemos

$$V \cdot W = \alpha ||W||^2 + V_2 \cdot W\,. \tag{3.8}$$

Mas, V_2 é perpendicular a W, então $V_2 \cdot W = 0$. Portanto, de (3.8) obtemos

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}\,.$$

Substituindo este valor de α na equação (3.7) segue o resultado. □

Exemplo 3.10. Sejam $V = (2, -1, 3)$ e $W = (4, -1, 2)$. Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo a W e V_2 é perpendicular a W (Figura 3.21). Temos que

$$V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4, -1, 2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2, -1, 3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})\,.$$

3.2.3 Produto Vetorial

Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor. Por isso, ele é chamado **produto vetorial**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: a força exercida sobre uma partícula carregada mergulhada num campo magnético é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético, desde que o campo seja constante e a carga seja unitária.

Definição 3.2. Sejam V e W dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial**, $V \times W$, como sendo o vetor com as seguintes características:

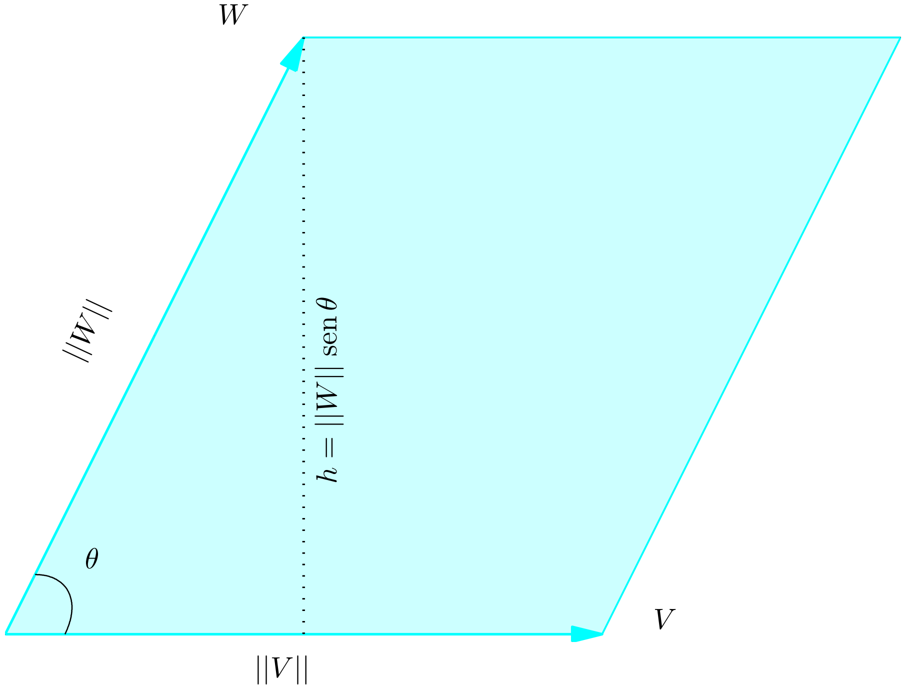


Figura 3.22: Área de um paralelogramo

(a) Tem comprimento dado por

$$||V \times W|| = ||V||\,||W||\,\text{sen}\,\theta,$$

ou seja, a *norma* de $V \times W$ é igual à área do paralelogramo determinado por V e W.

(b) Tem direção perpendicular a V e a W.

(c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.23): Se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $V \times W$.

Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma fórmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.

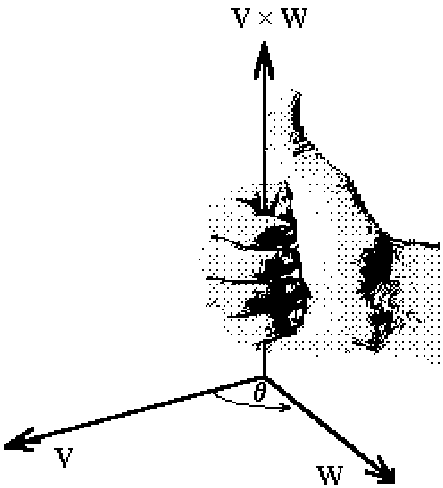


Figura 3.23: Regra da mão direita

Teorema 3.5. *Sejam V, W e U vetores no espaço e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $V \times W = -(W \times V)$, *isto é, o produto vetorial é* **anti-comutativo**.

(b) $V \times W = \bar{0}$ *se, e somente se,* $V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$.

(c) $V \cdot (V \times W) = W \cdot (V \times W) = 0$.

(d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$.

(e) $(V \times W) \cdot U > 0$ *se, e somente se,* V, W *e* U *satisfazem a regra da mão direita, isto é, se o ângulo entre* V *e* W *é* θ, *giramos o vetor* V *de um ângulo* θ *até que coincida com* W *e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de* U.

(f) $|(V \times W) \cdot U|$ *é igual ao volume do paralelepípedo determinado por* V, W *e* U *(Figura 3.24 na página 200).*

(g) $(V \times W) \cdot U = V \cdot (W \times U)$, *ou seja, pode-se trocar os sinais* $\times$ *e* $\cdot$ *em* $(V \times W) \cdot U$.

(h) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ *(Distributividade em relação a soma de vetores).*

Demonstração. (a) Trocando-se V por W troca-se o sentido de $V \times W$ (Figura 3.23).

(b) $||V \times W|| = 0$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou $\operatorname{sen}\theta = 0$, em que θ é o ângulo entre V e W, ou seja, V e W são paralelos. Assim, $V \times W = \bar{0}$ se, e somente se, $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$.

(c) Segue imediatamente da definição do produto vetorial.

(d) Segue facilmente da definição do produto vetorial, por isso deixamos como exercício para o leitor.

(e) Como vemos na Figura 3.24 V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $0 < \theta < \pi/2$ ou $\cos\theta > 0$, em que θ é o ângulo entre $V \times W$ e U. Como, $(V \times W) \cdot U = ||V \times W||||U|| \cos\theta$, então V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $(V \times W) \cdot U > 0$.

(f) O volume do paralelepípedo determinado por V, W e U é igual à área da base vezes a altura, ou seja, pela definição do produto vetorial, o volume é dado por

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, h\,.$$

Mas, como vemos na Figura 3.24 a altura é $h = ||U||| \cos\theta|$, o que implica que

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, ||U||| \cos\theta| = |U \cdot (V \times W)|\,.$$

(g) Como o produto escalar é comutativo, pelo item (f), $|(V \times W) \cdot U| = |V \cdot (W \times U)|$. Agora, pelo item (e), $(V \times W) \cdot U$ e $V \cdot (W \times U)$ têm o mesmo sinal, pois V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, W, U e V também satisfazem.

(h) Vamos provar a primeira igualdade e deixamos como exercício para o leitor a demonstração da segunda. Vamos mostrar que o vetor $Y = V \times (W + U) - V \times W - V \times U$ é o vetor nulo. Para isso, vamos mostrar que para qualquer vetor X no espaço $X \cdot Y = 0$.

Pela distributividade do produto escalar, Teorema 3.3 item (b) na página 189, temos que

$$X \cdot Y = X \cdot V \times (W + U) - X \cdot (V \times W) - X \cdot (V \times U).$$

Pelo item (g), temos que

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot W - (X \times V) \cdot U \\ &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot (W + U) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $X \cdot Y = 0$, para todo vetor X, em particular para $X = Y$, temos que $Y \cdot Y = ||Y||^2 = 0$. Portanto, $Y = \bar{0}$, ou seja, $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$.

□

Os **vetores canônicos**

$$\boxed{\vec{i} = (1, 0, 0), \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0, 0, 1)}$$

são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode ser escrito em termos de uma soma de múltiplos escalares de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = \\ &= v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

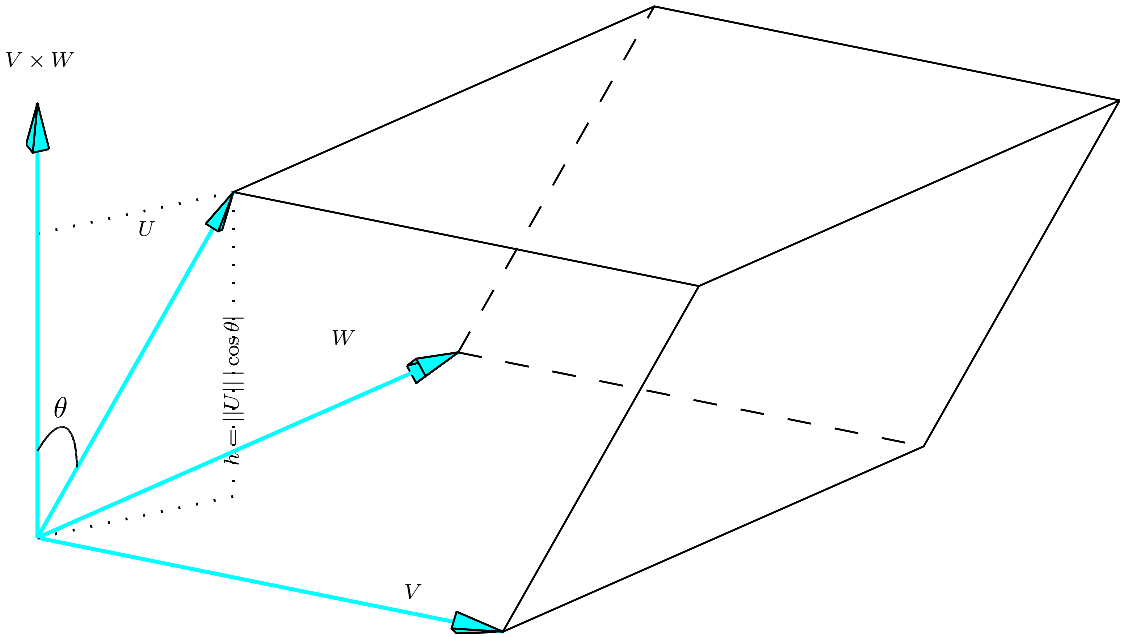


Figura 3.24: Volume do paralelepípedo determinado por V, W e U

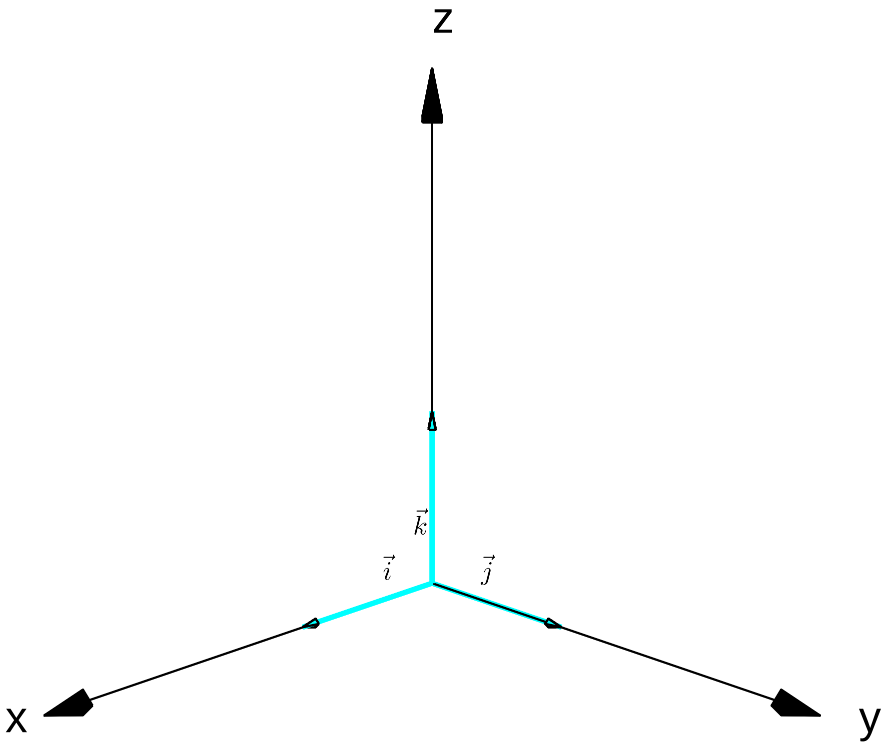


Figura 3.25: Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

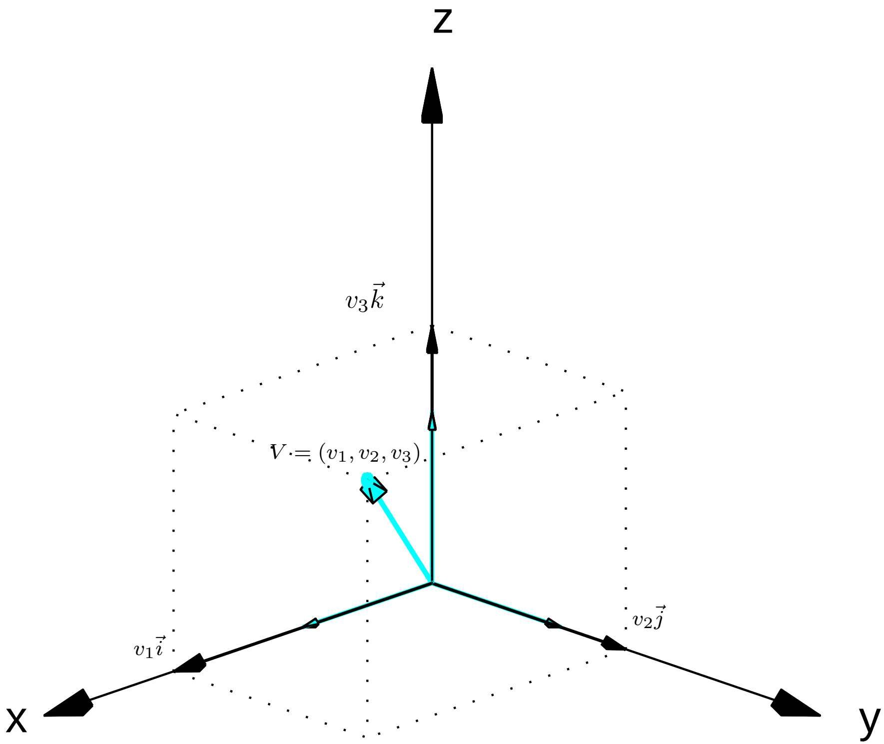


Figura 3.26: $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \bar{0}, & \vec{j} \times \vec{j} = \bar{0}, & \vec{k} \times \vec{k} = \bar{0}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{array}$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das suas componentes.

Teorema 3.6. *Sejam $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ vetores no espaço. Então, o produto vetorial $V \times W$ é dado por*

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right). \tag{3.10}$$

Demonstração. De (3.9) segue que podemos escrever $V = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}$ e $W = w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}$. Assim, pela distributividade do produto vetorial em relação a soma temos que

$$\begin{aligned}
V \times W &= (v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}) \times (w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}) \\
&= v_1w_1(\vec{i} \times \vec{i}) + v_1w_2(\vec{i} \times \vec{j}) + v_1w_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&\quad + v_2w_1(\vec{j} \times \vec{i}) + v_2w_2(\vec{j} \times \vec{j}) + v_2w_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&\quad + v_3w_1(\vec{k} \times \vec{i}) + v_3w_2(\vec{k} \times \vec{j}) + v_3w_3(\vec{k} \times \vec{k}) \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k} \\
&= \det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}\vec{i} - \det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}\vec{j} + \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\vec{k} \\
&= \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Para obter as componentes do produto vetorial $V \times W$ podemos proceder como segue:

- Escreva as componentes de V acima das componentes de W:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix};$$

- Para calcular a primeira componente de $V \times W$, elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante. A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o sinal trocado. A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

Exemplo 3.11. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto vetorial $V \times W$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2, -7, -6)\,.$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do determinante simbólico

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}\,.$$

Exemplo 3.12. Vamos calcular a área do triângulo determinado pelos pontos $P = (2, 2, 0), Q = (0, 4, 3)$ e $R = (-1, 0, 2)$ (Figura 3.27). Sejam

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 2, 4 - 2, 3 - 0) = (-2, 2, 3)$$

$$W = \overrightarrow{PR} = (-1 - 2, 0 - 2, 2 - 0) = (-3, -2, 2)\,.$$

Então,

$$V \times W = (10, -5, 10) \quad \text{e} \quad \text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = \frac{15}{2}.$$

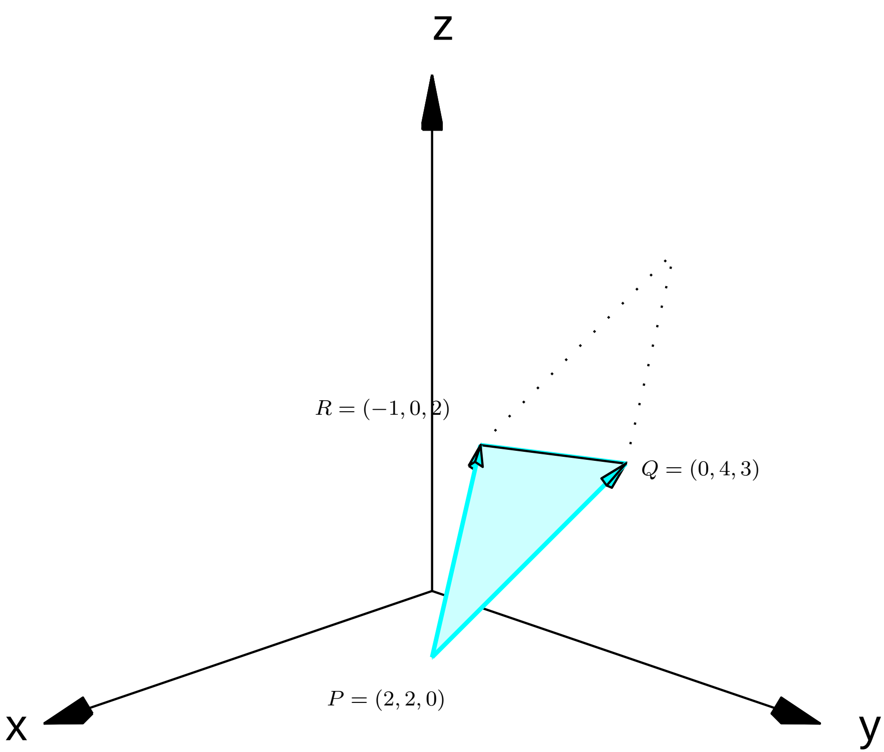


Figura 3.27: Área do triângulo PQR

3.2.4 Produto Misto

Teorema 3.7. *Sejam* $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ *e* $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. *Então,*

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 3.2 na página 186, do Teorema 3.6 na página 203 e da definição de determinante de uma matriz que

$$\begin{aligned} U \cdot (V \times W) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= u_1 \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

□

O produto $U \cdot (V \times W)$ é chamado de **produto misto** de U, V e W.

Exemplo 3.13. O produto misto dos vetores $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ é

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -84.$$

Pelo Teorema 3.5 ítem (f) na página 197 o volume de um paralelepípedo determinado por três vetores é igual ao valor absoluto do produto misto destes vetores.

Exemplo 3.14. Sejam $U = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}, V = \vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$ e $W = 3\vec{j} + 2\vec{k}$. O volume de um paralelepípedo com arestas determinadas por U, V e W é dado por

$$|U \cdot (V \times W)| = |\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}| = |-49| = 49\,.$$

Segue imediatamente do Teorema 3.7 e do Teorema 3.5 ítem (f) na página 197 um critério para saber se três vetores são paralelos a um mesmo plano.

Corolário 3.8. *Sejam $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Estes vetores são* **coplanares** *(isto é, são paralelos a um mesmo plano) se, e somente se,*

$$U \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Exemplo 3.15. Vamos verificar que os pontos $P = (0,1,1)$, $Q = (1,0,2)$, $R = (1,-2,0)$ e $S = (-2,2,-2)$ são **coplanares**, isto é, pertencem a um mesmo plano. Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{PQ} = (1-0, 0-1, 2-1) = (1,-1,1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (1-0, -2-1, 0-1) = (1,-3,-1) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{PS} = (-2-0, 2-1, -2-1) = (-2,1,-3)$$

Os pontos P, Q, R e S pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto entre eles é zero. Assim, P, Q, R e S são coplanares, pois

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0.$$

O próximo resultado será usado no próximo capítulo para deduzir as equações paramétricas do plano.

Corolário 3.9. *Sejam U, V e W vetores no espaço.*

(a) U, V e W são coplanares se, e somente se, a equação vetorial

$$xU + yV + zW = \bar{0}$$

tem solução não trivial, em que x, y e z são escalares.

(b) U, V e W são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear (soma de múltiplos escalares) dos outros dois.

Demonstração. (a) Seja A a matriz cujas colunas são U, V e W escritos como vetores colunas. A equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ é equivalente ao sistema $AX = \bar{0}$. Assim, a equação tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$. Mas, $\det(A) = \det(A^t) = U \cdot (V \times W) = 0$ se, e somente se, os vetores U, V e W são coplanares, o que prova o resultado.

(b) Pelo item anterior U, V e W são coplanares se, e somente se, a equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ possui solução não trivial. Mas se isto acontece, então um dos escalares x ou y ou z pode ser diferente de zero. Se $x \neq 0$, então $U = (-y/x)V + (-z/x)W$, ou seja, o vetor U é combinação linear de V e W. De forma semelhante, se $y \neq 0$, então V é combinação linear de U e W e se $z \neq 0$, então W é combinação linear de U e V. Claramente se um dos vetores é combinação linear dos outros dois, então eles são coplanares.

$\square$

Exercícios Numéricos (respostas na página 583)

3.2.1. Qual figura é representada pela equação $||(x, y, z)||^2 = 4$? E pela equação $x^2 + y^2 = 4$?

3.2.2. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $W = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine vetores unitários paralelos aos vetores (a) $V + W$; (b) $V - W$; (c) $2V - 3W$.

3.2.3. Determine o valor de x para o qual os vetores $V = x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.4. Demonstre que não existe x tal que os vetores $V = x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.5. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

(a) $2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} - \vec{k}$; (b) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $-2\vec{j} - 2\vec{k}$; (c) $3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3.2.6. Decomponha $W = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ como a soma de dois vetores W_1 e W_2, com W_1 paralelo ao vetor $\vec{j} + 3\vec{k}$ e W_2 ortogonal a este último. (Sugestão: revise o Exemplo 3.10 na página 193)

3.2.7. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (Sugestão: observe que a soma de dois vetores está na direção da bissetriz se, e somente se, os dois tiverem o mesmo comprimento. Portanto, tome múltiplos escalares de V e W de forma que eles tenham o mesmo comprimento e tome o vetor unitário na direção da soma deles.)

3.2.8. Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:

(a) $A = (2, 2, 1), B = (3, 1, 2), C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$;

(b) $A = (2, 0, 2), B = (3, 2, 0), C = (0, 2, 1)$ e $D = (10, -2, 1)$;

3.2.9. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3), C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

3.2.10. Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A = (1, 0, 1), B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, 4)$.

3.2.11. Calcule a área do triângulo com vértices $A = (1, 2, 1), B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$.

3.2.12. Ache X tal que $X \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $||X|| = \sqrt{6}$.

3.2.13. Sabe-se que o vetor X é ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo θ o ângulo entre X e $\vec{j}$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache X.

3.2.14. Mostre que $A = (3, 0, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?

Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> V=randi(1,3)` cria um vetor aleatório com componentes inteiras;

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e `>> desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.

`>> lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`.

`>> eixos` desenha os eixos coordenados.

`>> box` desenha uma caixa em volta da figura.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

`>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

`>> zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

`>> tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

3.2.15. Digite no prompt

`demog21`,

(sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para vetores.

3.2.16. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores bi-dimensionais ou tri-dimensionais a seu critério.

(a) Use a função `ilvijk(V)` para visualizar o vetor `V` como uma soma de múltiplos escalares (combinação linear) dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

(b) Use a função `ilpv(V,W)` para visualizar o produto vetorial $V \times W$.

(c) Use a função `ilproj(W,V)` para visualizar a projeção de V em W.

3.2.17. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

3.2.18. Se $V \cdot W = V \cdot U$, então $W = U$?

3.2.19. Mostre que se V é ortogonal a W_1 e W_2, então V é ortogonal a $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$.

3.2.20. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, usando o fato de que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $|| \overrightarrow{AB} || = || \overrightarrow{BC} ||$.)

3.2.21. Sejam V um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que V forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Demonstre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1\,.$$

(Sugestão: $\cos \alpha = \frac{V \cdot \vec{i}}{||V|| ||\vec{i}||}$, $\cos \beta = \frac{V \cdot \vec{j}}{||V|| ||\vec{j}||}$ e $\cos \gamma = \frac{V \cdot \vec{k}}{||V|| ||\vec{k}||}$)

3.2.22. Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $V \cdot W = \frac{1}{4}\left(||V + W||^2 - ||V - W||^2\right)$;

(b) $||V||^2 + ||W||^2 = \frac{1}{2}\left(||V + W||^2 + ||V - W||^2\right)$.

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que $||V + W||^2 = (V + W) \cdot (V + W)$ e $||V - W||^2 = (V - W) \cdot (V - W)$)

3.2.23. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $|V \cdot W| \leq ||V||\,||W||$;

(b) $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$;
(Sugestão: mostre que $||V + W||^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (||V|| + ||W||)^2$, usando o item anterior)

(c) $\Big|\, ||V|| - ||W|| \,\Big| \leq ||V - W||$.
(Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3.2.24. O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta. (Sugestão: experimente com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

3.2.25. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer no espaço, então

$$||V \times W|| \leq ||V||\,||W||.$$

3.2.26. Se U, V e W são vetores no espaço, prove que $|U \cdot (V \times W)| \leq ||U||\,||V||\,||W||$. (Sugestão: use o Teorema 3.2 na página 186 e o exercício anterior)

3.2.27. Mostre que $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$. (Sugestão: use as propriedades do determinante)

3.2.28. Mostre que

(a) $(\alpha U_1 + \beta U_2) \cdot (V \times W) = \alpha U_1 \cdot (V \times W) + \beta U_2 \cdot (V \times W)$;

(b) $U \cdot [(\alpha V_1 + \beta V_2) \times W] = \alpha U \cdot (V_1 \times W) + \beta U \cdot (V_2 \times W)$;

(c) $U \cdot [V \times (\alpha W_1 + \beta W_2)] = \alpha U \cdot (V \times W_1) + \beta U \cdot (V \times W2)$.

(d) $U \cdot (V \times W) = U \cdot [(V + \alpha U + \beta W) \times W]$.

(Sugestão: use as propriedades dos produtos escalar e vetorial)

3.2.29. Prove a identidade de Lagrange

$$||V \times W||^2 = ||V||^2||W||^2 - (V \cdot W)^2.$$

3.2.30. Mostre que a área do triângulo com vértices (x_i, y_i), para $i = 1, 2, 3$ é igual a $|\det(A)|/2$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: Marque os pontos $P_1 = (x_1, y_1, 1)$, $P_2 = (x_2, y_2, 1)$, $P_3 = (x_3, y_3, 1)$ e $P_1' = (x_1, y_1, 0)$. O volume do paralelepípedo determinado por P_1, P_2, P_3 e P_1' é dado por $|\ \overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\ |$. Mas, a altura deste paralelepípedo é igual a 1. Assim, o seu volume é igual à área da base que é o paralelogramo determinado por P_1, P_2 e P_3. Observe que $\overrightarrow{OP_1'}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são paralelos ao plano xy.)

3.2.31. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = [\ U_1\ U_2\ U_3\ ]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertível e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^t A = I_3$.)

3.2.32. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$. Prove a fórmula seguinte para o **duplo produto vetorial**

$$U \times (V \times W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W,$$

seguindo os seguintes passos:

(a) Prove que

$$\begin{array}{rcl} U \times (\vec{i} \times \vec{j}) & = & (U \cdot \vec{j})\vec{i} - (U \cdot \vec{i})\vec{j} \\ U \times (\vec{j} \times \vec{k}) & = & (U \cdot \vec{k})\vec{j} - (U \cdot \vec{j})\vec{k} \\ U \times (\vec{k} \times \vec{i}) & = & (U \cdot \vec{i})\vec{k} - (U \cdot \vec{k})\vec{i} \end{array}$$

(b) Prove usando o ítem anterior e as propriedades do produto vetorial que

$$\begin{array}{rcl} U \times (V \times \vec{i}) & = & (U \cdot \vec{i})V - (U \cdot V)\vec{i} \\ U \times (V \times \vec{j}) & = & (U \cdot \vec{j})V - (U \cdot V)\vec{j} \\ U \times (V \times \vec{k}) & = & (U \cdot \vec{k})V - (U \cdot V)\vec{k} \end{array}$$

(c) Prove agora o caso geral usando o ítem anterior e as propriedades do produto vetorial.

Teste do Capítulo

---

1. Mostre que os pontos $A = (4, 0, 1)$, $B = (5, 1, 3)$, $C = (3, 2, 5)$, $D = (2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo. Calcule a sua área.

---

2. Dado o triângulo de vértices $A = (0, 1, -1)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 0)$, determine a medida da altura relativa ao lado BC.

---

3. Sejam U e V vetores no espaço, com $V \neq \vec{0}$.

(a) Determine o número α, tal que $U - \alpha V$ seja ortogonal a V.

(b) Mostre que $(U + V) \times (U - V) = 2V \times U$.

---

4. Determine x para que $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

Capítulo 4

Retas e Planos

4.1 Equações de Retas e Planos

4.1.1 Equações do Plano

Equação Geral

Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é dada por um vetor perpendicular a ele e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos.

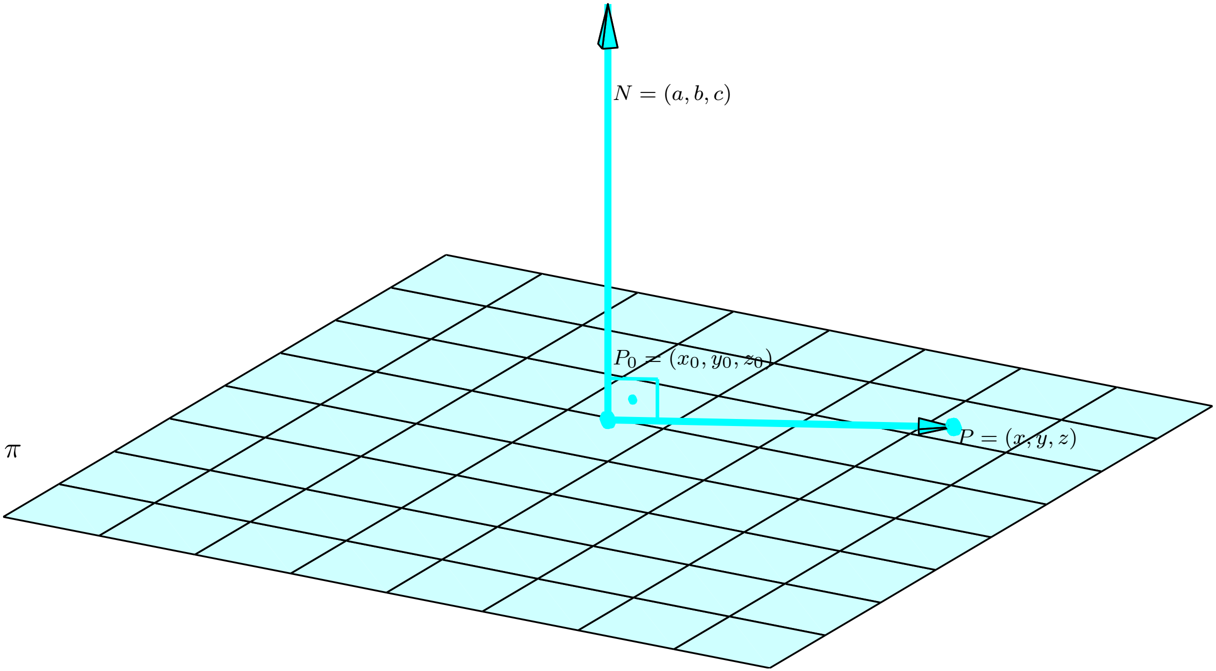


Figura 4.1: Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Proposição 4.1. *A equação de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{4.1}$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. A equação (4.1) é chamada **equação geral** *do plano π e o vetor N é chamado* **vetor normal** *do plano.*

Demonstração. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\,. \tag{4.2}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\,.$$

$\square$

Exemplo 4.1. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (1, 1, -2)$ e é perpendicular ao vetor $N = (4, 2, 3)$. Da proposição anterior, a equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor normal, ou seja, $a = 4$, $b = 2$ e $c = 3$. Assim, a equação de π é da forma

$$4x + 2y + 3z + d = 0\,.$$

Para determinar o coeficiente d, basta usarmos o fato de que $P_0 = (1, 2, -2)$ pertence a π. Mas, o ponto P_0 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + d = 0\,.$$

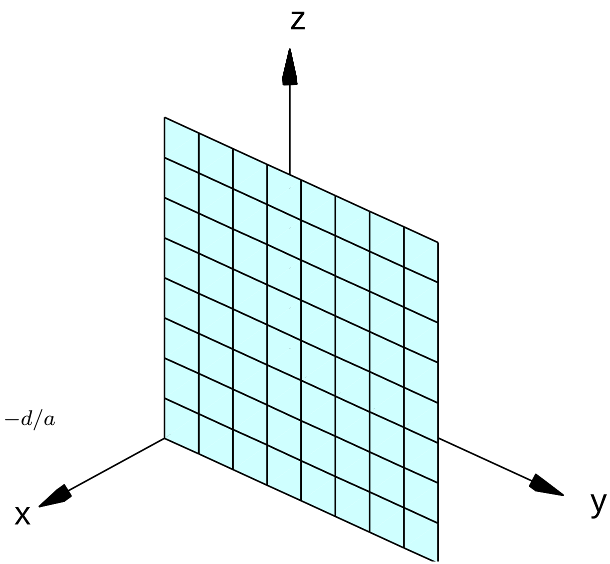


Figura 4.2: Plano $ax = -d$

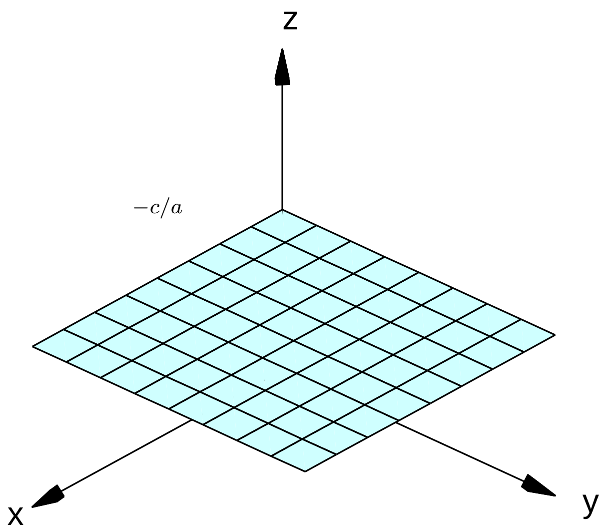


Figura 4.3: Plano $cz = -d$

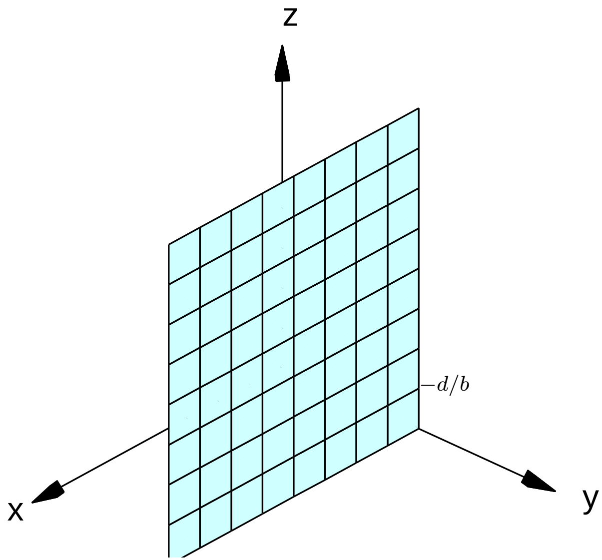


Figura 4.4: Plano $by = -d$

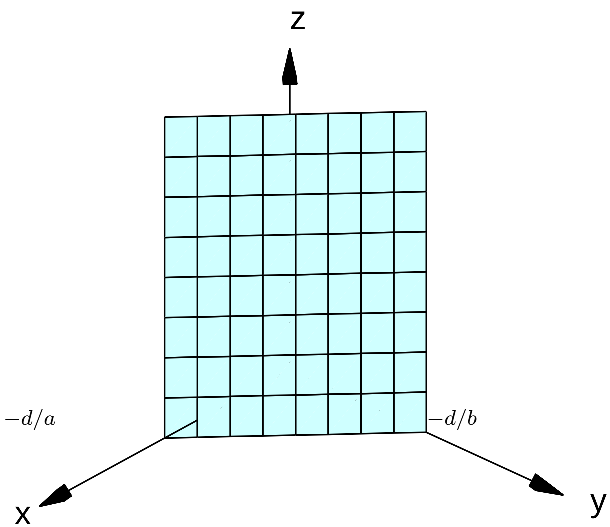


Figura 4.5: Plano $ax+by=-d$

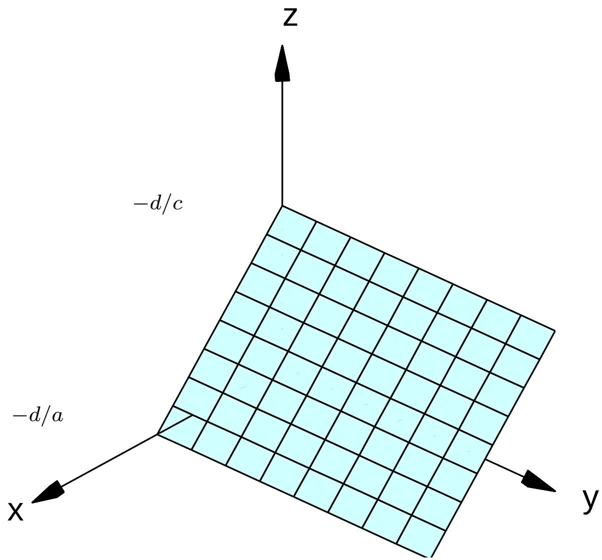


Figura 4.6: Plano $ax+cz=-d$

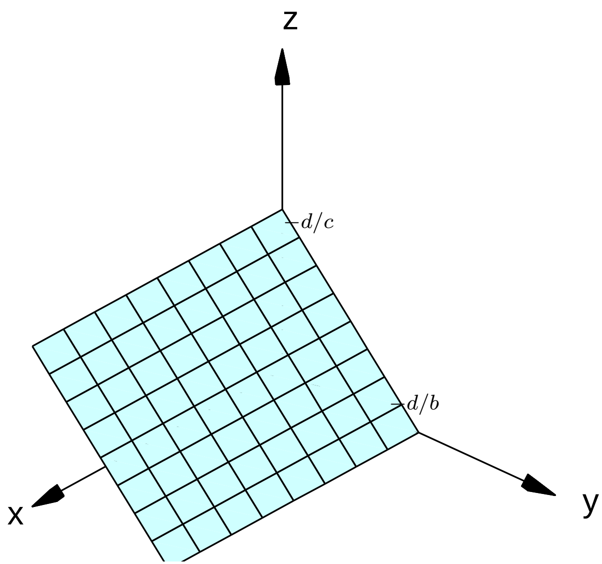


Figura 4.7: Plano $by+cz=-d$

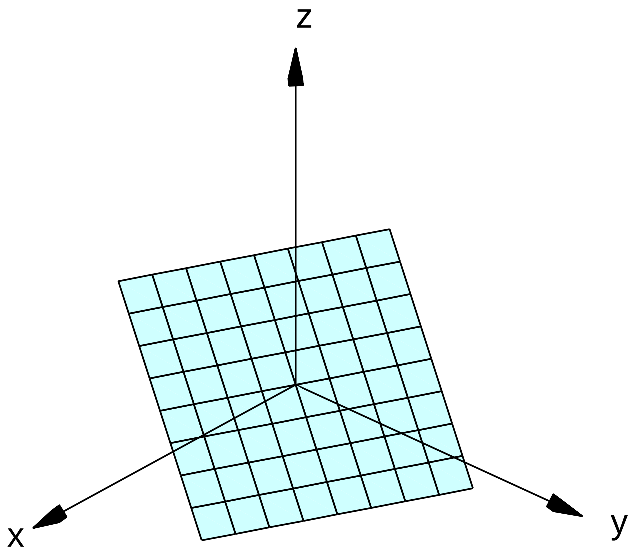


Figura 4.8: Plano $ax + by + cz = 0$

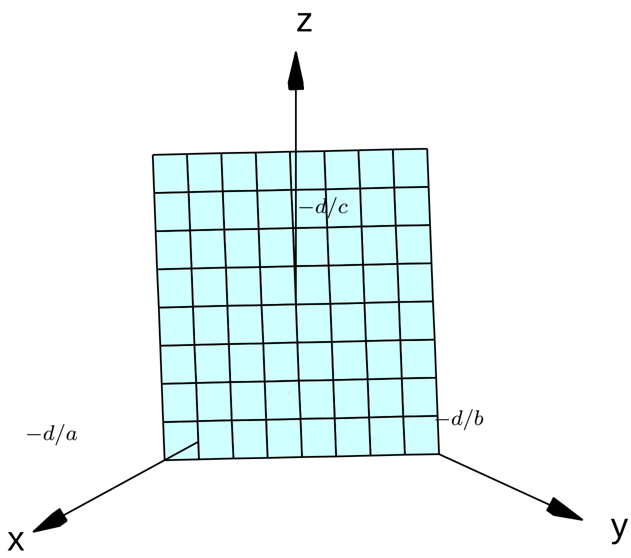


Figura 4.9: Plano $ax + by + cz + d = 0$

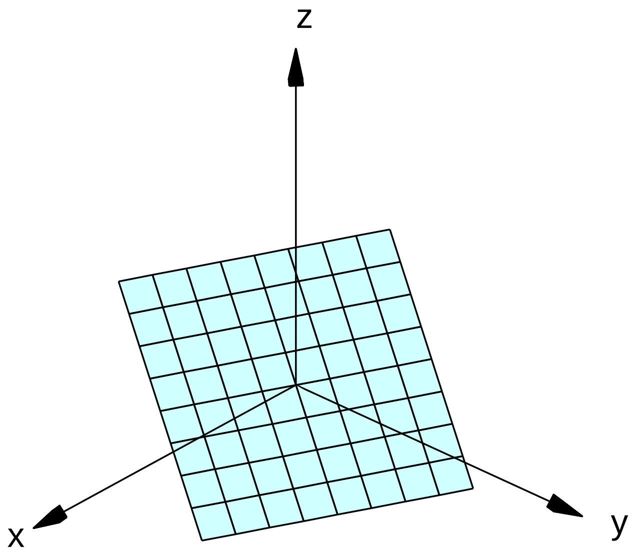


Figura 4.10: Plano $4x + 2y + 3z = 0$

Logo, $d = 4 + 2 - 6 = 0$. Finalmente, a equação do plano π é

$$4x + 2y + 3z = 0\,.$$

No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados dois pontos da reta. Analogamente, no espaço, a equação de um plano é determinada se são dados três pontos P_1, P_2 e P_3 não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 4.11).

Exemplo 4.2. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. O vetor

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

é um vetor normal ao plano. Assim, a equação do plano é da forma

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor N. Para determinar o coeficiente d, vamos usar o fato de que o ponto $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ pertence ao plano π. Mas, o ponto P_1 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + d = 0\,.$$

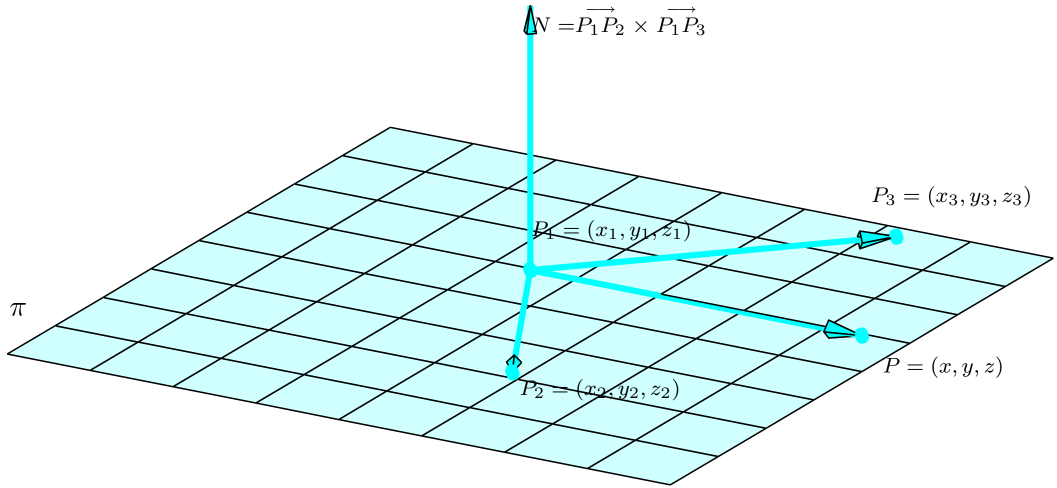


Figura 4.11: Plano que passa por três pontos

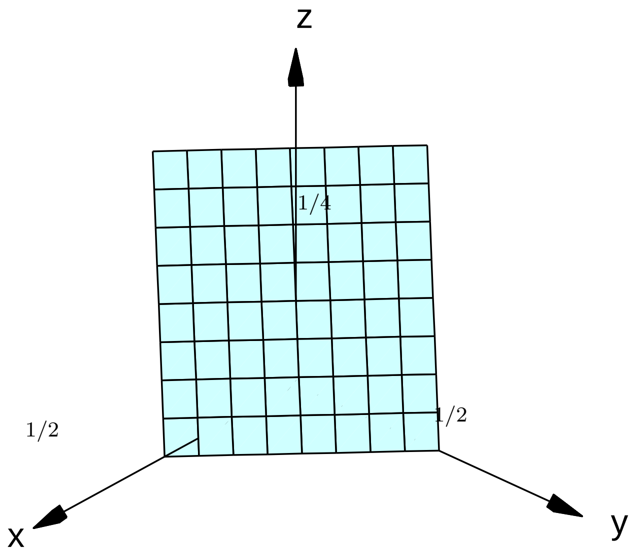


Figura 4.12: Plano $2x + 2y + 4z - 1 = 0$

Logo, $d = \frac{1}{8}$. Finalmente, uma equação do plano π é $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0$ ou multiplicando por 8, obtemos $2x + 2y + 4z - 1 = 0$.

Alternativamente, podemos encontrar a equação do plano da seguinte forma. Como vimos anteriormente (Corolário 3.8 na página 208), três vetores, $\overrightarrow{P_1P}$ $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0\,.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P} &= (x - \frac{1}{2}, y, z) \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Então,

$$\det \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

e assim a equação do plano é dada por

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0.$$

ou multiplicando por 8,

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0$$

A equação do plano também é determinada se ao invés de serem dados três pontos, forem dados um ponto P_1 do plano e dois vetores paralelos ao plano, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, desde que eles sejam não colineares. Ou ainda se forem dados dois pontos P_1 e P_2 do plano e um vetor paralelo ao plano $V = (v_1, v_2, v_3)$, já que neste caso podemos formar o vetor $W = \overrightarrow{P_1P_2} = (w_1, w_2, w_3)$ que é também paralelo ao plano.

Nestes casos temos novamente pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano. Uma delas é observando que o vetor $N = V \times W$ é um vetor normal ao plano. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano. A outra é observando que temos três vetores paralelos ao plano: $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, V e W. Como vimos anteriormente (Corolário 3.8 na página 208), os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0 \,. \tag{4.3}$$

Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a um plano π que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo aos vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ (não paralelos) se, e somente se, a equação (4.3) é verdadeira.

Observação. Não faz sentido dizer que um vetor pertence a um plano. Pois, por um lado, um plano é um conjunto de pontos e por outro, os vetores são "livres", podem ser "colocados" em qualquer ponto. O correto é dizer que um vetor é paralelo a um plano.

Equações Paramétricas

Além da equação geral do plano podemos também caracterizar os pontos de um plano da seguinte forma. Considere um plano π, um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a π e dois vetores $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ não colineares, paralelos a π. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é uma combinação linear de V_1 e V_2 (Corolário 3.9 na página 210), ou seja, se existem escalares t e s tais que

$$\overrightarrow{PP_0} = tV_1 + sV_2. \tag{4.4}$$

Escrevendo em termos de componentes (4.4) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta_1 + sa_2, tb_1 + sb_2, tc_1 + sc_2).$$

Logo um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, satisfaz as equações

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & x_0 & + & a_1\,t & + & a_2\,s \\ y & = & y_0 & + & b_1\,t & + & b_2\,s \\ z & = & z_0 & + & c_1\,t & + & c_2\,s \end{array}\right. \quad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

Estas equações são chamadas **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 4.3. Podemos obter equações paramétricas do plano do Exemplo 4.2 na página 232 usando o fato de que ele passa pelo ponto $P_1 = (1, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 + t + 2s \\ y & = & 2 + t - 3s \\ z & = & -1 + 2t + 3s \end{array}\right. \quad \text{para todos } t, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.4. Para encontrarmos as equações paramétricas do plano do Exemplo 4.1 na página 222 podemos resolver a equação geral do plano $4x+2y-5z+25=0$. Podemos proceder como no caso de sistemas lineares e considerar as variáveis y e z livres: $z=t$ e $y=s$. Assim, $x=-\frac{25}{4}+\frac{5}{4}\,t-\frac{1}{2}\,s$ e

$$\begin{cases} x &= -\frac{25}{4}+\frac{5}{4}\,t-\frac{1}{2}\,s \\ y &= s \\ z &= t \end{cases} \qquad \text{para todos } t,s\in\mathbb{R}.$$

são equações paramétricas do plano. Destas equações obtemos que os vetores $V_1=(\frac{5}{4},0,1)$ e $V_2=(-\frac{1}{2},1,0)$ são paralelos ao plano.

4.1.2 Equações da Reta

Vamos supor que uma reta r é paralela a um vetor $V=(a,b,c)$ não nulo e que passa por um ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$. Um ponto $P=(x,y,z)$ pertence a reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor V, isto é, se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de V, ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P}=t\,V\,. \tag{4.5}$$

Em termos de componentes, a equação (4.5) pode ser escrita como

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(ta,tb,tc).$$

Logo, $x-x_0=t\,a$, $y-y_0=t\,b$ e $z-z_0=t\,c$. Isto prova o resultado seguinte.

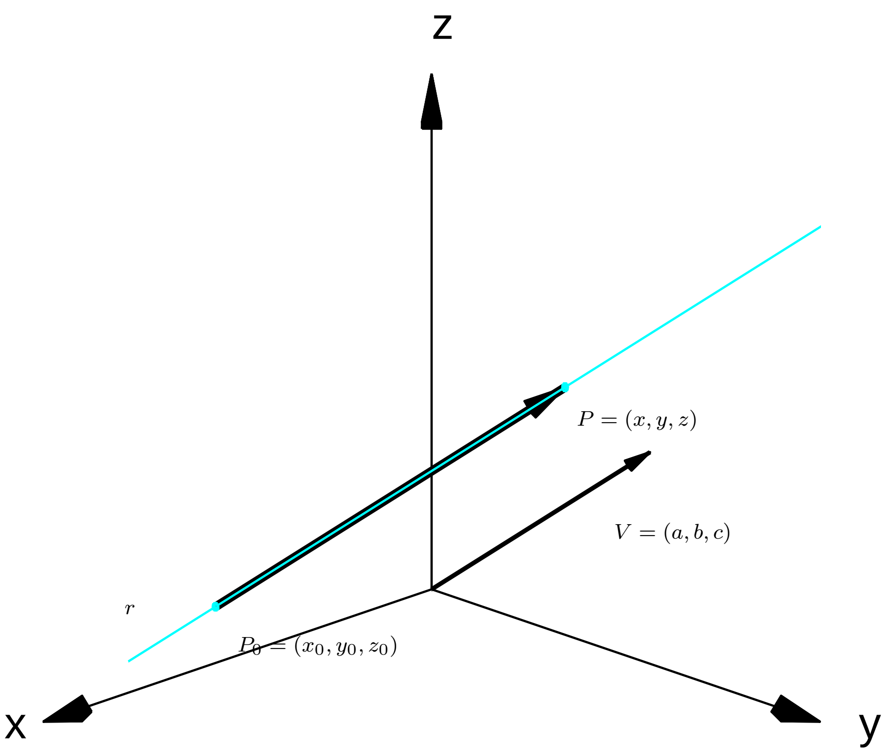


Figura 4.13: Reta paralela ao vetor $V = (a, b, c)$

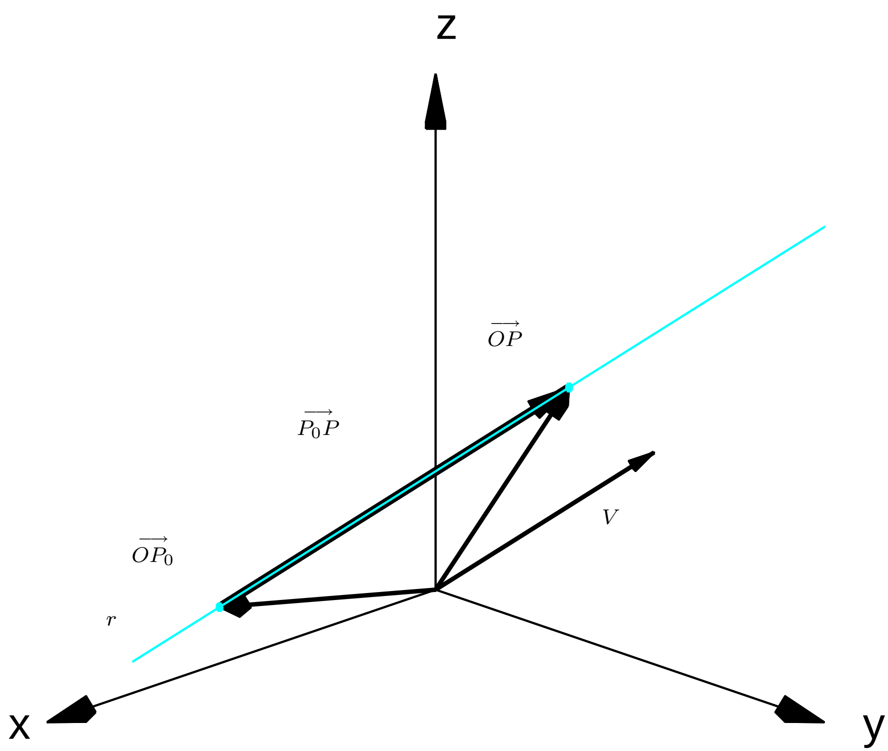


Figura 4.14: Reta paralela ao vetor $V = (a, b, c)$

Proposição 4.2. *As equações*

$$\begin{cases} x &= x_0 + t\,a \\ y &= y_0 + t\,b, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + t\,c \end{cases} \tag{4.6}$$

são de uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $V = (a, b, c)$. As equações (4.6) são chamadas **equações paramétricas da reta** *r. O vetor $V = (a, b, c)$ é chamado* **vetor diretor da reta** *r.*

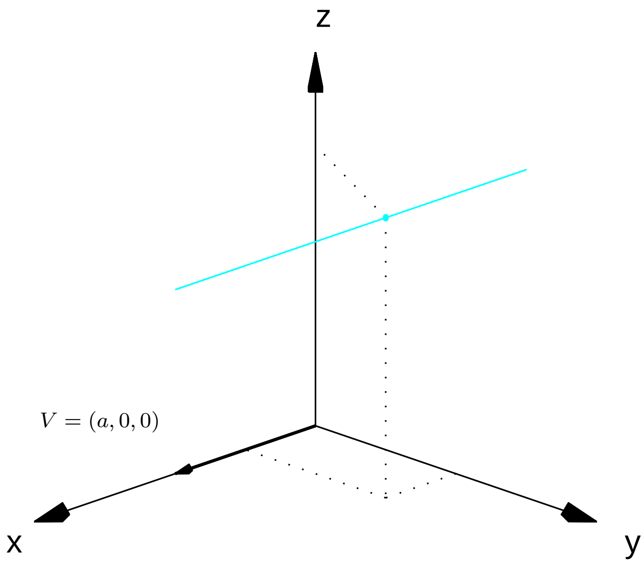


Figura 4.15: Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0)$

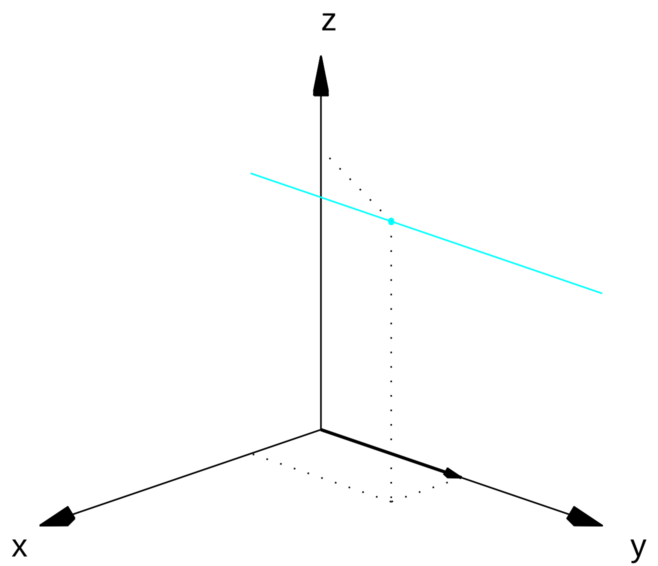


Figura 4.16: Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0)$

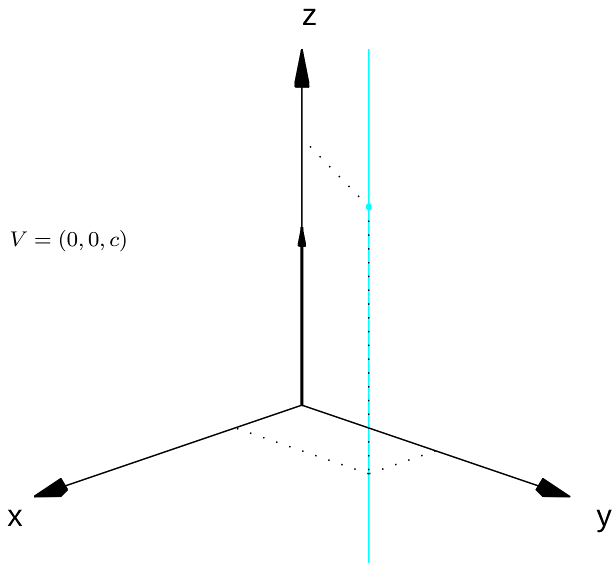


Figura 4.17: Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0 + ct)$

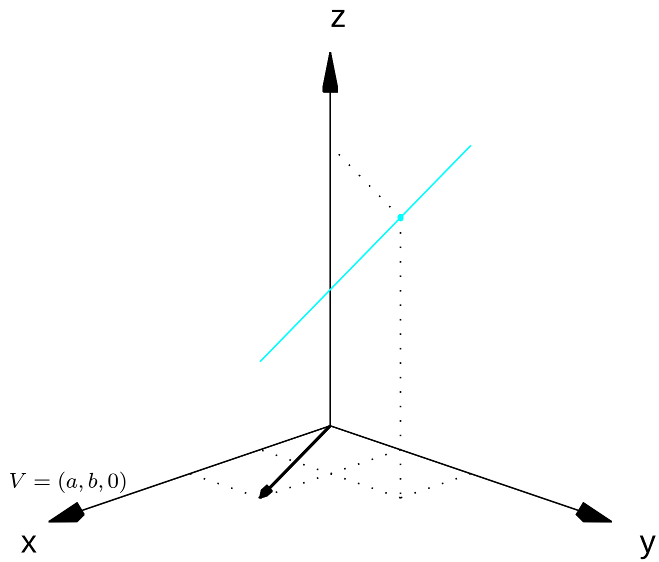


Figura 4.18: Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0)$

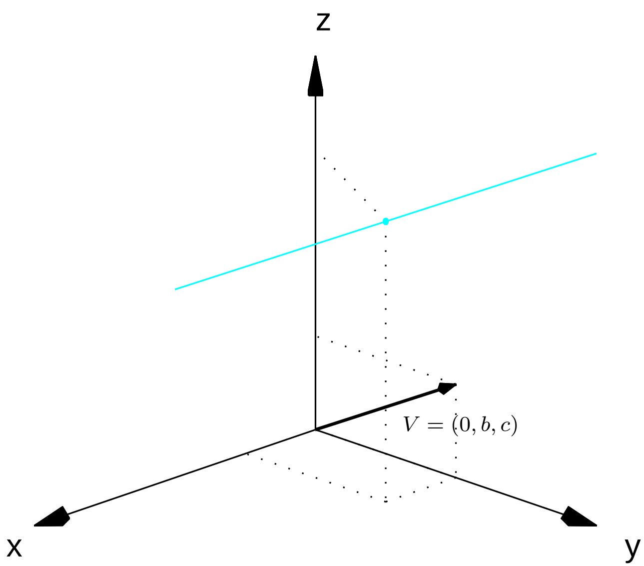


Figura 4.19: Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0 + ct)$

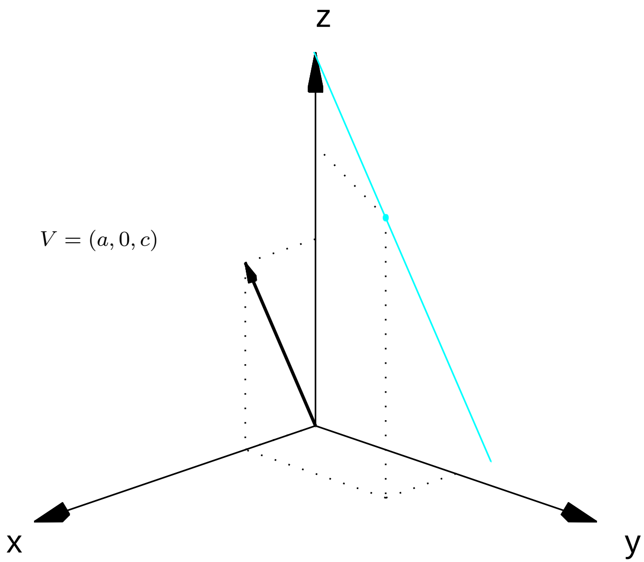


Figura 4.20: Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0 + ct)$

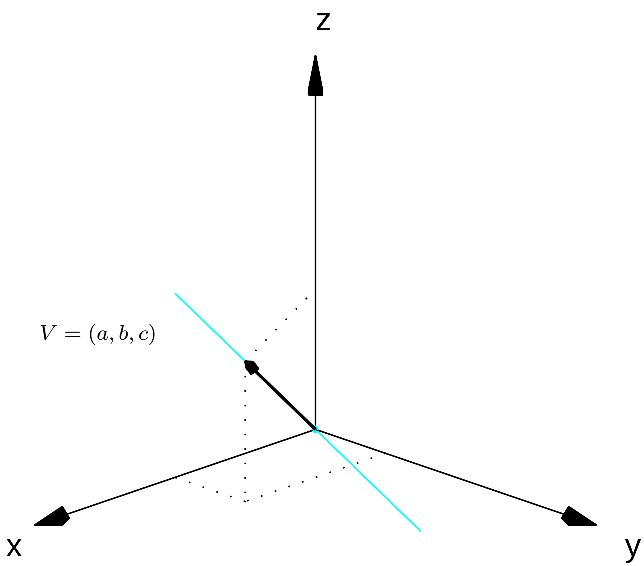


Figura 4.21: Reta $(x, y, z) = (at, bt, ct)$

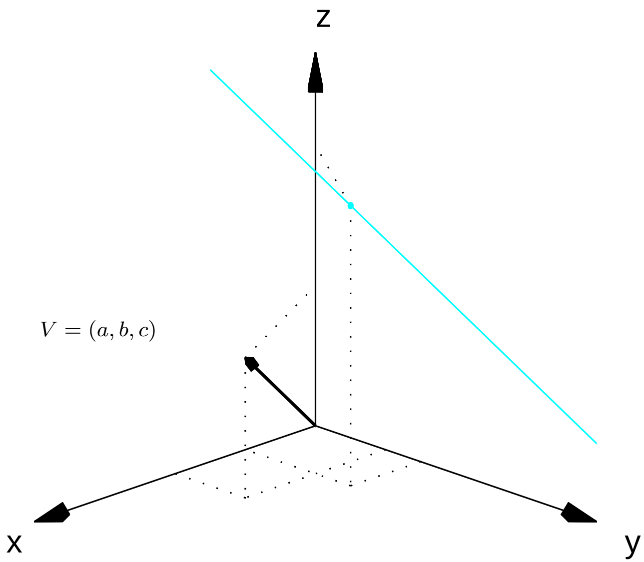


Figura 4.22: Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

O parâmetro t nas equações (4.6) pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P = (x, y, z)$ descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade $V = (a, b, c)$. Observe que para $t = 1$, $P = (x, y, z) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$, para $t = 2$, $P = (x, y, z) = (x_0 + 2a, y_0 + 2b, z_0 + 2c)$ e assim por diante.

As equações (4.6), podem ser reescritas como

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Observação. Não faz sentido dizer que o vetor está contido na reta. Por um lado, a reta é um conjunto de pontos e por outro um vetor não tem posição fixa.

Exemplo 4.5. A reta que passa por $P_0 = (1, 3/2, 3)$ e é paralela ao vetor $V = (2, 1, 3/2)$ tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = 3 + \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Podemos também encontrar a interseção da reta r com os planos coordenados xy, yz e xz. A equação do plano xy é $z = 0$, do plano yz é $x = 0$ e do plano xz é $y = 0$. Substituindo $z = 0$ nas equações de r, obtemos $t = -2$, $x = -3$ e $y = -1/2$, ou seja, o ponto de interseção de r com o plano xy é

$$(x, y, z) = (-3, -\frac{1}{2}, 0)\,.$$

De forma análoga, encontramos que $(x, y, z) = (0, 1, 9/4)$ é o ponto de interseção de r com o plano yz e $(x, y, z) = (-2, 0, 3/4)$ é o ponto de interseção de r com o plano xz.

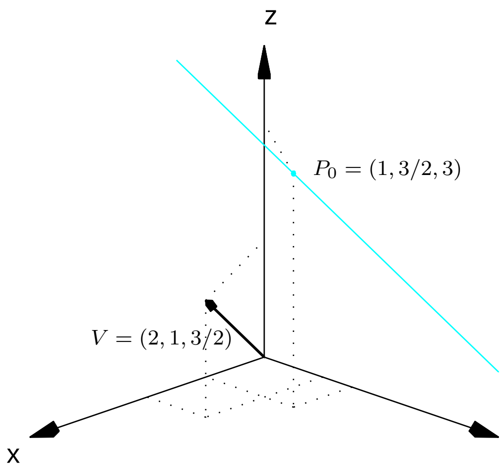


Figura 4.23: Reta que passa pelo ponto $P_0 = (1, 3/2, 3)$ paralela ao vetor $V = (2, 1, 3/2)$

Se todas componentes do vetor diretor da reta r são não nulos, podemos resolver cada equação em (4.6) para t e igualar os resultados obtendo o que chamamos de **equações na forma simétrica** de r:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.}$$

No Exemplo 4.5 as equações de r na forma simétrica são:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3/2}{1} = \frac{z-3}{3/2}\,.$$

Exemplo 4.6. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $P_1 = (3, 0, 2)$ e $P_2 = (0, 3, 3)$. O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-3, 3-0, 3-2)) = (-3, 3, 1)$$

é paralelo a r e o ponto $P_1 = (3, 0, 2)$ pertence a r. Portanto, as equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 3 - 3\,t \\ y = 3\,t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.7. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r, interseção dos planos

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad -2x + y + 4z &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad 2x - y + 2z &= 0\,. \end{aligned}$$

Vetores normais destes planos são

$$N_1 = (-2, 1, 4) \ \text{ e } \ N_2 = (2, -1, 2)\,.$$

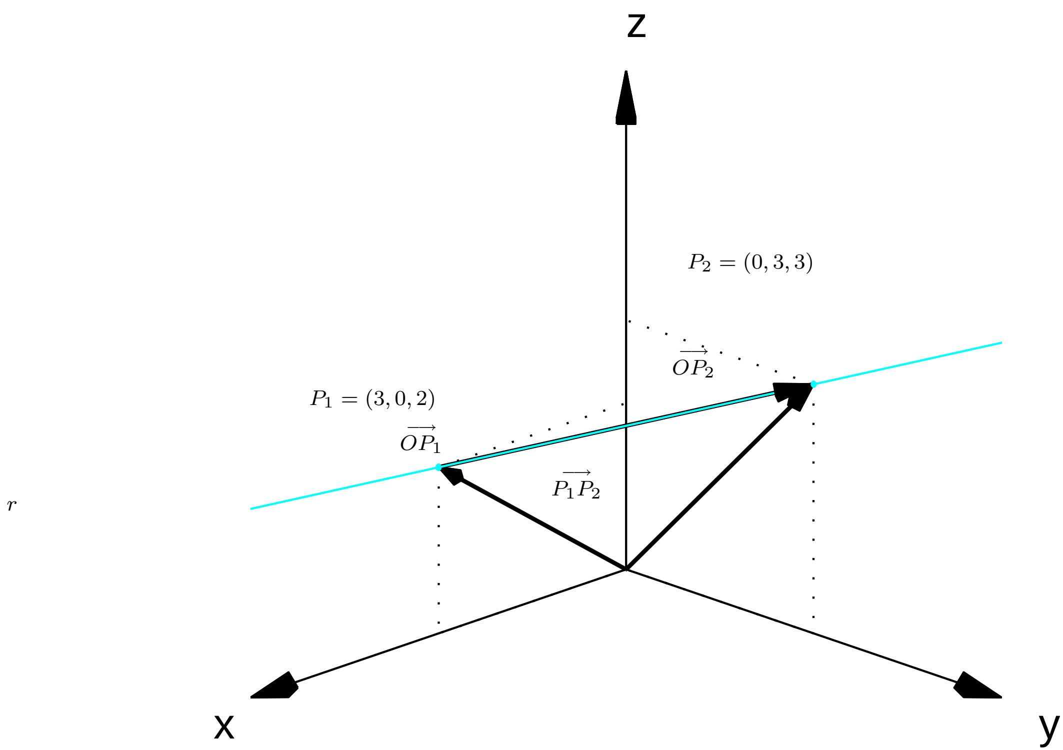


Figura 4.24: Reta que passa pelos pontos $P_1 = (3, 0, 2)$ e $P_2 = (0, 3, 3)$

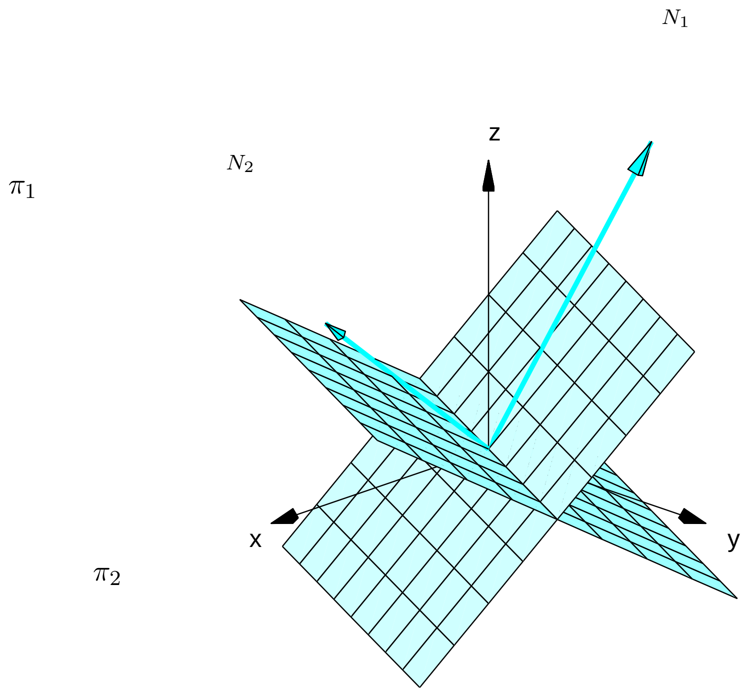


Figura 4.25: Reta interseção dos planos $\pi_1 \; : \; -2x + y + 4z = 0$ e $\pi_2 \; : \; 2x - y + 2z = 0$

A reta r está contida em ambos os planos, portanto é perpendicular a ambos os vetores normais (Figura 4.25). Assim, a reta r é paralela ao produto vetorial $N_1 \times N_2$ (Teorema 3.5 (c) na página 197).

$$N_1 \times N_2 = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (6, 12, 0)\,.$$

Assim, $V = N_1 \times N_2 = (6, 12, 0)$ é um vetor diretor de r. Agora, precisamos encontrar um ponto da reta r. Este ponto é uma solução particular do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} -2x & + & y & + & 4z = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z = & 0. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Para encontrar uma solução particular do sistema, atribuímos um valor a uma das incógnitas (neste exemplo podemos fazer $x = 0$) e resolvemos o sistema obtido, que é de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & + & 4z = 0 \\ -y & + & 2z = 0 \end{array} \right.$$

Obtemos então, $y = 0$ e $z = 0$, ou seja, o ponto $P_0 = (0, 0, 0)$ é um ponto da reta r, pois é uma solução particular do sistema (4.7). Assim, as equações paramétricas de r são

$$\left\{ \begin{array}{lclrcr} x & = & 0 + & 6\,t & = & 6t \\ y & = & 0 + & 12\,t & = & 12t \\ z & = & 0 + & 0\,t & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Alternativamente, podemos encontrar as equações paramétricas de r determinando a solução geral do sistema (4.7). Para isto devemos escalonar a matriz do sistema (4.7):

$$\left[\begin{array}{rrr:r} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Precisamos "zerar" o outro elemento da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, a 1ª linha.

$\boxed{1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Agora, já podemos obter facilmente a solução geral do sistema dado, já que ele é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

Obtemos $z = 0$. A variável y é uma variável livre. Podemos dar a ela um valor arbitrário, digamos t, para $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Assim, a solução geral do sistema dado é

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x & = & \frac{1}{2}\,t \\ y & = & t, \\ z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Estas equações são diferentes das equações (4.8), mas representam a mesma reta, pois os vetores diretores obtidos das duas equações são paralelos e o ponto $P_0 = (0, 0, 0)$ satisfaz também as equações (4.9). Poderíamos dizer que (4.8) e (4.9) representam retas coincidentes.

O próximo exemplo mostra como encontrar a equação da reta que é perpendicular a duas retas.

Exemplo 4.8. Achar as equações da reta r que intercepta as retas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2t \\ y & = & 1 + t, \\ z & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

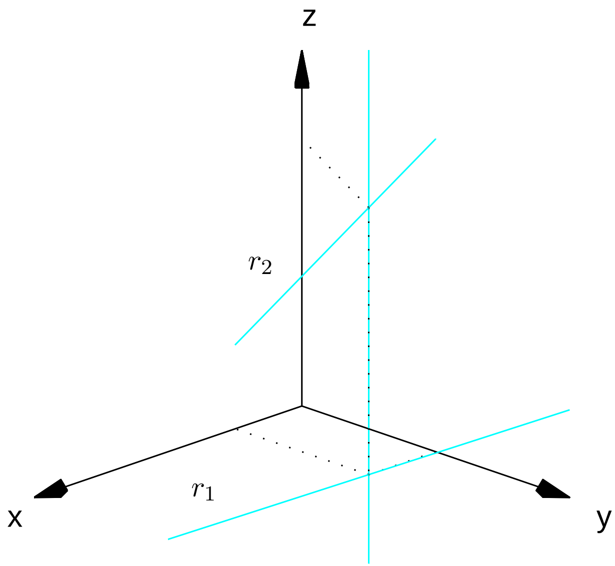


Figura 4.26: Retas do Exemplo 4.8

e

$$r_2: \; x - 2 = \frac{y-4}{2} \quad \text{e} \quad z = 3\,.$$

e é perpendicular a ambas.

Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (-1+2t, 1+t, 0)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (2+s, 4+2s, 3)$. Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta r_2. O vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (3+s-2t, 3+2s-t, 3)$ "liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor $V_1 = (2,1,0)$ de r_1 e ao vetor diretor $V_2 = (1,2,0)$ de r_2, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 & = & 9+4s-5t & = & 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 & = & 9+5s-4t & = & 0 \end{array} \right.$$

A solução deste sistema é $t = 1$, $s = -1$. Logo $P_{r_1} = (1,2,0)$, $P_{r_2} = (1,2,3)$ e $V_3 = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0,0,3)$. Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2, \\ z & = & 3t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 587)

4.1.1. Faça um esboço dos seguintes planos:

(a) $2x + 3y + 5z - 1 = 0$

(b) $x + 2y + 4z = 0$

(c) $3y + 2z - 1 = 0$

(d) $2x + 3z - 1 = 0$

(e) $3x + 2y - 1 = 0$

(f) $5y - 2 = 0$

(g) $3z - 2 = 0$

(h) $2x - 1 = 0$

4.1.2. Faça um esboço das retas dadas a seguir:

(a) $(x, y, z) = (1 + 2t, \frac{3}{2} + t, 3 + \frac{3}{2}t)$

(b) $(x, y, z) = (2t, t, \frac{3}{2}t)$

(c) $(x, y, z) = (1 + t, 2, 3 + 2t)$

(d) $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, 3 + t)$

(e) $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 + t, 3)$

(f) $(x, y, z) = (1, 2, 3 + 2t)$

(g) $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, 3)$

(h) $(x, y, z) = (1 + 2t, 2, 3)$

4.1.3. Ache a equação do plano paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$ e que passa por $P = (1, -2, 1)$.

4.1.4. Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P = (2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $2x - y + 4z - 1 = 0$.

4.1.5. Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y = z$.

4.1.6. Determine a interseção da reta que passa pela origem e tem vetor diretor $V = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ com o plano $2x + y + z = 5$.

4.1.7. Verifique se as retas $r : (x, y, z) = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$ e $s : (x, y, z) = (1 + 2t, 3 + t, 1)$ se interceptam e em caso afirmativo determine a interseção. (Sugestão: a questão é se as trajetórias se cortam e não se as partículas se chocam, ou seja, elas não precisam estar num ponto no mesmo instante.)

4.1.8. Dadas as retas

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad \text{e} \qquad s : x - 2 = y = z\,,$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

4.1.9. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : (x, y, z) = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$.

(a) Mostre que $P \notin r$;

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

4.1.10. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(-1, 1, -1)$.

4.1.11. Quais dos seguintes pares de planos se cortam segundo uma reta?

(a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ e $x - 4y + 2z + 1 = 0$;

(b) $2x - y + 4z + 3 = 0$ e $4x - 2y + 8z = 0$;

(c) $x - y = 0$ e $x + z = 0$.

4.1.12. Encontre as equações da reta que passa pelo ponto $Q = (1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 2z - 1 = 0$.

4.1.13. Ache a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é paralela aos planos $2x + 3y + z + 1 = 0$ e $x - y + z = 0$.

4.1.14. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z - 1 = 0$. Ache a equação do plano que passa por $A = (1, 0, -1)$ e contém a reta r.

4.1.15. Sejam r e s retas reversas passando por $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 1, 0)$ e por $C = (-3, 1, -4)$ e $D = (-1, 2, -7)$, respectivamente. Obtenha uma equação da reta concorrente com r e s e paralela ao vetor $V = (1, -5, -1)$.

4.1.16. (a) Mostre que os planos $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r;

(b) Ache a equação da reta que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.

Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> V+W` é a soma de `V` e `W`; `>> V-W` é a diferença `V` menos `W`; `>> num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

`>> subs(expr,x,num,)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> subst(expr,[x,y,z],[a,b,c])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y,z` por `a,b,c`, respectivamente.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> lin(P,V)` desenha a reta que passa por `P` com direção `V`.

`>> lin(P1,V1,P2,V2)` desenha retas que passam por `P1, P2`, direções `V1, V2`.

`>> plan(P,N)` desenha o plano que passa por `P` com normal `N`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2)` desenha planos que passam por `P1, P2`, normais `N1, N2`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2,P3,N3)` desenha planos que passam por `P1`, `P2` e `P3` com normais `N1`, `N2` e `N3`.

`>> poplan(P1,P2,N2)` desenha ponto `P1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

`>> poline(P1,P2,V2)` desenha ponto `P2` e reta passando por `P2` com direção `V2`.

`>> lineplan(P1,V1,P2,N2)` desenha reta passando por `P1` com direção `V1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

`>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

4.1.17. Digite no prompt `demog22`, (sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para visualização de retas e planos.

4.1.18. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercício Teórico

4.1.19. Seja $ax + by + cz + d = 0$ a equação de um plano π que não passa pela origem e corta os três eixos.

(a) Determine a interseção de π com os eixos;

(b) Se $P_1 = (p_1, 0, 0)$, $P_2 = (0, p_2, 0)$ e $P_3 = (0, 0, p_3)$ são as interseções de π com os eixos, a equação de π pode ser posta sob a forma

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1\,.$$

4.2 Ângulos e Distâncias

4.2.1 Ângulos

Ângulo entre Retas

Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

(a) As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são **concorrentes**;

(b) As retas são paralelas (ou coincidentes);

(c) As retas são **reversas**, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.

Se as retas se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos.

Se as retas r_1 e r_2 são reversas, então por um ponto P de r_1 passa um reta r_2' que é paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 é definido como sendo o ângulo entre r_1 e r_2' (Figura 4.27).

Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual a zero.

Em qualquer dos casos, se V_1 e V_2 são vetores paralelos a r_1 e r_2 respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta|,$$

em que θ é o ângulo entre V_1 e V_2.

Lembrando que da definição de produto escalar (Definição 3.1 na página 182), podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{||V_1||\,||V_2||}.$$

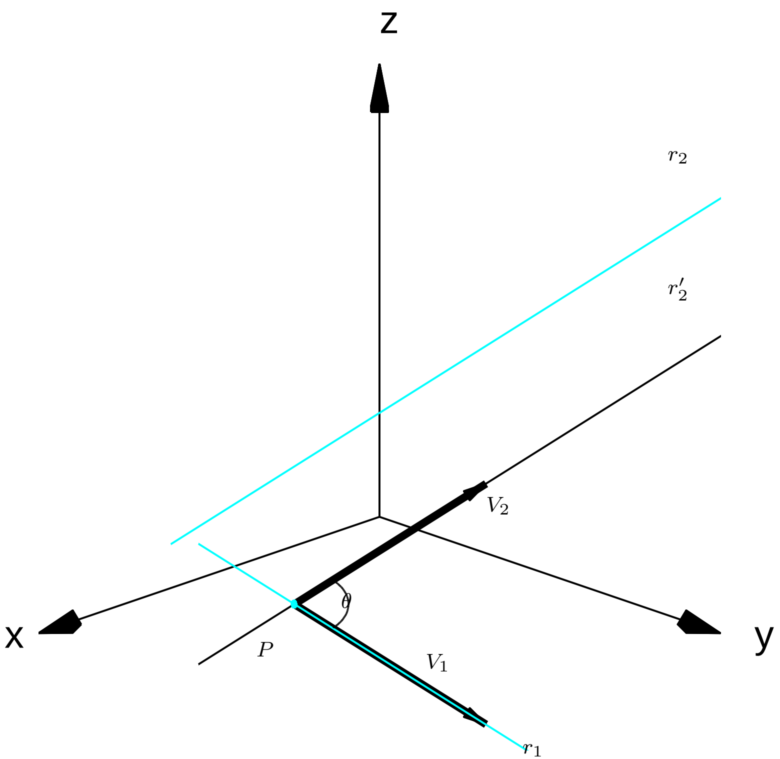


Figura 4.27: O Ângulo entre duas retas reversas r_1 e r_2

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.3. *Sejam duas retas*

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_1 + t\,a_1 \\ y & = & y_1 + t\,b_1 \\ z & = & z_1 + t\,c_1 \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_2 + t\,a_2 \\ y & = & y_2 + t\,b_2 \\ z & = & z_2 + t\,c_2 \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O cosseno do ângulo entre r_1 *e* r_2 *é*

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||}\,,$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Exemplo 4.9. Encontrar o ângulo entre a reta

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

e a reta

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\,t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 2 + 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar vetores paralelos a estas retas. A reta r_1 é dada como a interseção de pois planos, portanto o produto vetorial dos vetores normais dos dois planos é paralelo a r_1.

$$N_1 = (1, 1, -1),$$

$$N_2 = (2, -1, 1),$$

$$V_1 = N_1 \times N_2 = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (0, -3, -3)$$

é paralelo a r_1 e $V_2 = (2, -1, 3)$ é paralelo a r_2. Assim,

$$\begin{aligned} \cos(r_1, r_2) &= \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||} = \frac{|0 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67^\circ.$$

Ângulo entre Planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos com vetores normais $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. O ângulo entre π_1 e π_2 é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles.

Como toda reta perpendicular a π_1 tem N_1 como vetor diretor e toda reta perpendicular a π_2 tem N_2 como vetor diretor, então o cosseno do ângulo entre eles é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos\theta|\,,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores normais N_1 e N_2 de π_1 e π_2, respectivamente (Figura 4.28).

Portanto, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é $\cos(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}$. O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.4. *Sejam dois planos*

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

O cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}\,,$$

em que $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são os vetores normais de π_1 e π_2, respectivamente.

Dois planos π_1 e π_2 ou são paralelos ou se cortam segundo um reta. Eles são paralelos se, e somente se, os vetores normais de π_1 e π_2, são paralelos, ou seja, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Assim, π e π_2 são paralelos se, e somente se, o ângulo entre eles é igual a zero.

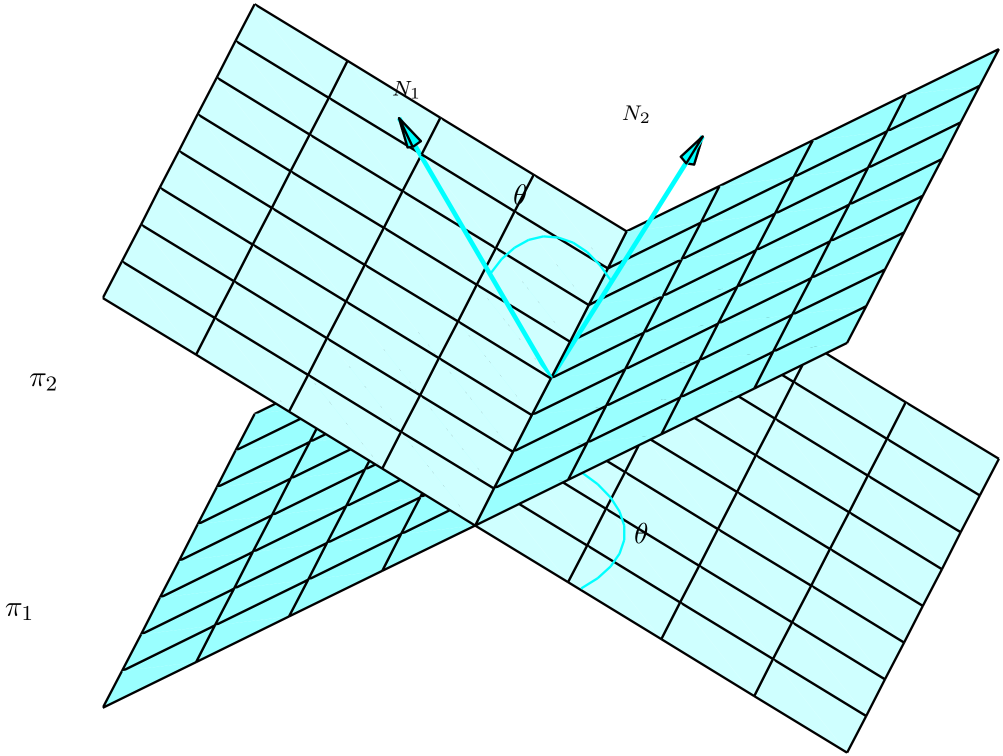


Figura 4.28: Ângulo entre dois planos

Exemplo 4.10. Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$\begin{aligned} \pi_1 \;:\quad x+y+z &= 0\,, \\ \pi_2 \;:\quad x-y-z &= 0\,. \end{aligned}$$

Os vetores normais a estes planos são os vetores cujas componentes são os coeficientes de x, y e z nas equações dos planos, ou seja,

$$N_1 = (1,1,1) \text{ e } N_2 = (1,-1,-1)\,.$$

Assim, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1,\pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\;||N_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Portanto, o ângulo entre eles é

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ\,.$$

4.2.2 Distâncias

Distância de Um Ponto a Um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi \;:\; ax+by+cz+d=0$ um plano. A distância de P_0 a π é definida como sendo a distância de P_0 até o ponto de π mais próximo de P_0.

Dado um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, $N = (a,b,c)$ e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor N é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em N. Como vemos na Figura 4.29, a distância de P_0 a π é igual à norma da projeção, ou seja,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| \,.$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 192, temos que

$$||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \left\|\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{||N||^2}\right) N\right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} \,.$$

O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.5. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : \ ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é dada por*

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} \,,$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

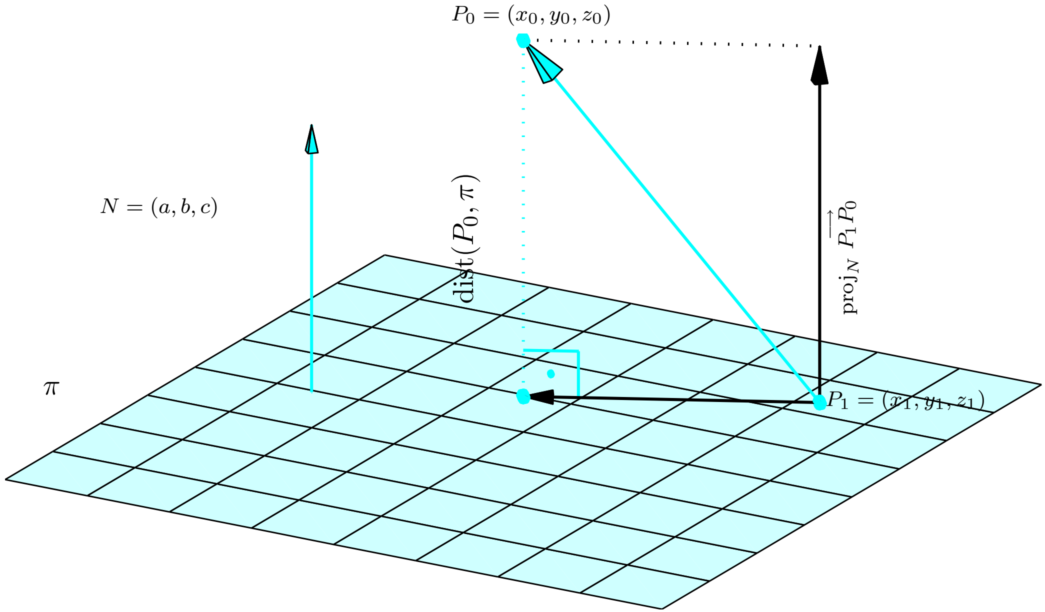


Figura 4.29: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano π

Exemplo 4.11. Calcular a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ ao plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $P_1 = (1, 0, 0)$ pertence a π.

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 0) = (0, 2, 3)$$

e

$$N = (1, -2, 1)\,.$$

Assim,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} = \frac{|0 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta. A distância de P_0 a r é definida como a distância de P_0 ao ponto de r mais próximo de P_0.

Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor V de r e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor V é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em V. Como vemos na Figura 4.30,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 + ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2,$$

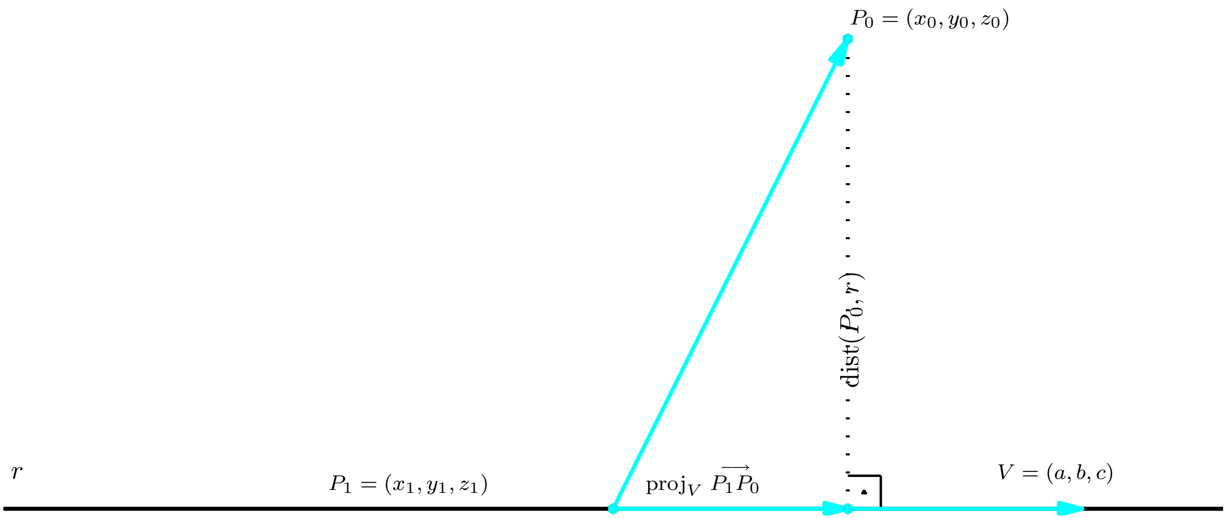


Figura 4.30: Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a uma reta r

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 - ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}||^2 . \tag{4.10}$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 192, temos que

$$||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}||^2 = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V}{||V||^2} \right) V \right\|^2 = \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} .$$

Substituindo esta expressão em (4.10) e usando a definição do produto escalar na página 182 e da norma do produto vetorial na página 193 obtemos

$$\begin{aligned}
(\text{dist}(P_0, r))^2 &= ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2 - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 - (\overrightarrow{P_1P_0} \cdot V)^2}{||V||^2} \\
&= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 - ||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 \cos^2\theta}{||V||^2} \\
&= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}||^2||V||^2 \text{sen}^2\theta}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||^2}{||V||^2} .
\end{aligned}$$

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.6. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e*

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& x_1 + t\,a \\ y &=& y_1 + t\,b \\ z &=& z_1 + t\,c \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 *a* r *é dada por*

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||}\,.$$

em que $V = (a, b, c)$ *é um vetor diretor e* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *é um ponto da reta* r*.*

Exemplo 4.12. Calcular a distância do ponto $P_0 = (1, -1, 2)$ à reta

$$r : \begin{cases} x &= 1 + 2\,t \\ y &= -t \\ z &= 2 - 3\,t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta r é $V = (2, -1, -3)$ e um ponto de r é $P_1 = (1, 0, 2)$. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 2) = (0, -1, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times V = (3, 0, 2)\,,$$

$$||\, \overrightarrow{P_1P_0} \times V|| = \sqrt{13} \;\text{ e }\; ||V|| = \sqrt{14}\,.$$

Portanto,

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{||\, \overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

Distância entre Dois Planos

Sejam dois planos π_1 e π_2 quaisquer. A distância entre π_1 e π_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.

Se os seus vetores normais **não** são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é igual a zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um

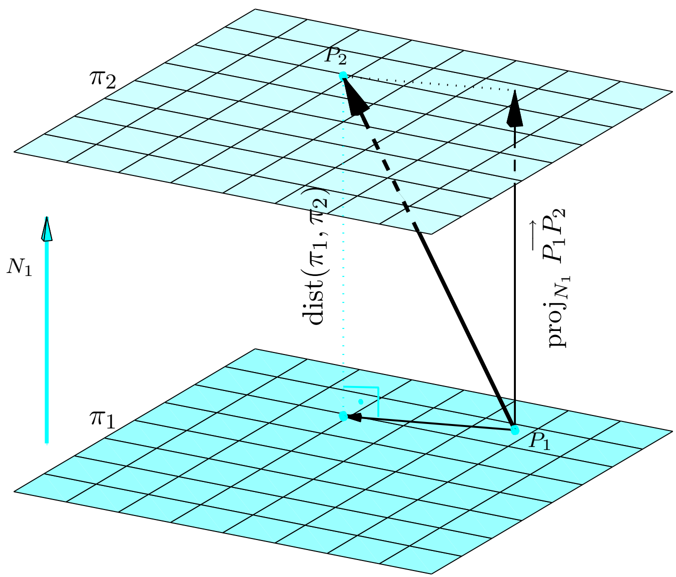


Figura 4.31: Distância entre dois planos

deles, por exemplo P_2 de π_2, e o ponto de π_1, mais próximo de P_2 (Figura 4.31). Mas, esta distância é igual à distância de P_2 a π_1. Vamos ver isto em um exemplo.

Exemplo 4.13. Os planos $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ são paralelos, pois os seus vetores normais $N_1 = (1, 2, -2)$ e $N_2 = (2, 4, -4)$ são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.

Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2$. Assim, $P_1 = (3, 0, 0)$ pertence a π_1 e $P_2 = (7/2, 0, 0)$ pertence a π_2. Portanto, pela Proposição 4.5 temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) &= \operatorname{dist}(\pi_1, P_2) = ||\operatorname{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1P_2}\, || = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N_1|}{||N_1||} \\ &= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0(-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Distância entre Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

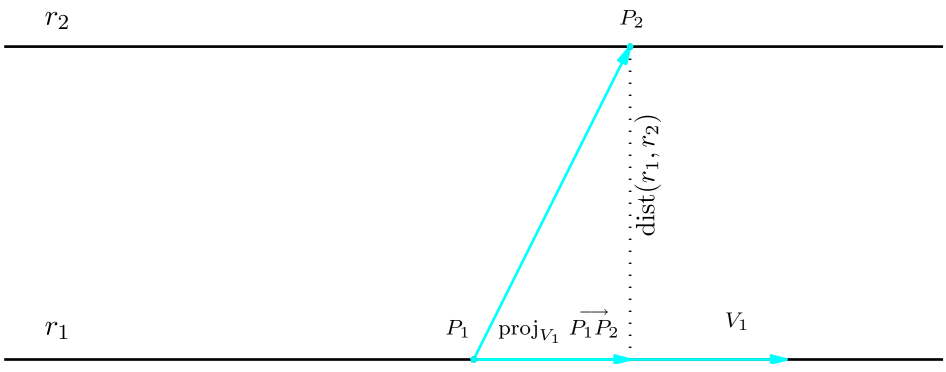


Figura 4.32: Distância entre duas retas paralelas

Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1, ou vice-versa, entre um ponto de r_1 e a reta r_2 (Figura 4.32). Assim, pela Proposição 4.6 na página 277, temos que

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||}, \qquad (4.11)$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente.

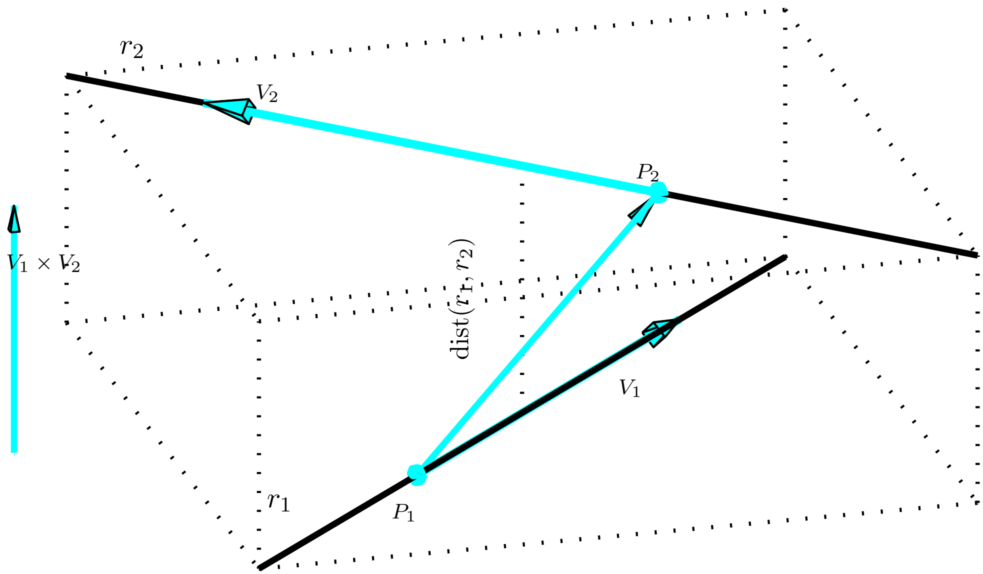


Figura 4.33: Distância entre duas retas reversas

(b) Se **os vetores diretores não são paralelos**, então elas são reversas ou concorrentes. Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes). Um é o plano que contém r_1 e é paralelo a r_2, vamos chamá-lo de π_1. O outro, contém r_2 e é paralelo a r_1, π_2. O vetor $N = V_1 \times V_2$, é normal (ou perpendicular) a ambos os planos, em que V_1 e V_2 são os vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura 4.33), ou seja,

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) = \operatorname{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)|}{||V_1 \times V_2||} \tag{4.12}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre elas é zero, pois os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.8 na página 208).

Exemplo 4.14. Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + 2\,t \\ y & = & -t \\ z & = & 2 - 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores $V_1 = (4, -2, -6)$ e $V_2 = (2, -1, -3)$ (Exemplo 4.5 na página 250) são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto $P_1 = (1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Como dissemos acima, a distância de r_1 a r_2 é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1 (Figura 4.32). Assim, pela Proposição 4.6 na página 277, temos que

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

As contas são as mesmas do Exemplo 4.12 na página 279.

Exemplo 4.15. Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

e

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2\,t \\ z & = & 1-t \end{array} \right. \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores $V_1 = (3, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 2, -1)$ e passam pelos pontos $P_1 = (-1, 1, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de V_1 é 3 vezes a 1ª componente de V_2, mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 0-1, 1-0) = (1, -1, 1)\,.$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$N = V_1 \times V_2 = (-4, 4, 4)\,.$$

Este vetor é normal aos planos π_1 (que contém r_1 e é paralelo a r_2) e π_2 (que contém r_2 e é paralelo a r_1) (veja a Figura 4.33). Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(r_1, r_2) &= \mathrm{dist}(\pi_1, \pi_2) = \mathrm{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} \\ &= \frac{|1(-4) + (-1)\cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 602)

4.2.1. Considere os vetores $V = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $W = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $U = \vec{i} - 2\vec{j}$. Seja π um plano paralelo aos vetores W e U e r uma reta perpendicular ao plano π. Ache a projeção ortogonal do vetor V sobre a reta r, ou seja, a projeção ortogonal de V sobre o vetor diretor da reta r.

4.2.2. Encontrar o ângulo entre o plano $2x - y + z = 0$ e o plano que passa pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

4.2.3. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e π_2 o plano que passa pelos pontos $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{i} + \vec{j}$. Ache o ângulo entre π_1 e π_2.

4.2.4. Ache uma reta que passa pelo ponto $(1, -2, 3)$ e que forma ângulos de 45^o e 60^o com os eixos x e y respectivamente.

4.2.5. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta $r : (x, y, z) = t\,(0, 1, -1)$. (Sugestão: Determine os pontos P_r da reta r tais que $\overrightarrow{P_rA}$ faz ângulo de 60^o e 120^o com o vetor diretor da reta r)

4.2.6. Seja π o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$. Encontre a distância do ponto $C = (1, 0, 1)$ ao plano π.

4.2.7. Seja r_1 a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 2, 0)$, e r_2 a reta

$$x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 4}{3}.$$

(a) Encontre as equações da reta perpendicular às retas r_1 e r_2;

(b) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

4.2.8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r : X = (0, 2, -2) + t\,(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Por que?

4.2.9. Dada a reta $r : X = (1, 0, 0) + t\,(1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r eqüidistante de A e B.

4.2.10. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$. Este plano passa pelo ponto médio de AB? Ele é perpendicular ao segmento AB?

4.2.11. Considere as retas $(x, y, z) = t(1, 2, -3)$ e $(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 4, -6)$. Encontre a equação geral do plano que contem estas duas retas.

4.2.12. Ache as equações dos planos em $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2, 2, 2)$, que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1, 1, 1)$.

4.2.13. Obtenha uma equação geral do plano π, que contém a reta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

e forma com o plano $\pi_1 : x + z = 0$ um ângulo de 60°.

Exercícios usando o MATLAB®

4.2.14. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

4.2.15. Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado **plano mediador** do segmento AB.

4.2.16. Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$ é

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

4.2.17. Mostre que a distância entre dois planos paralelos $\pi_1 : \ ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

4.2.18. Mostre que a distância entre duas retas não paralelas $r_1 : \ (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$ e $r_2 : \ (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$ é

$$\frac{\left|\det\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{\left(\det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)^2}}$$

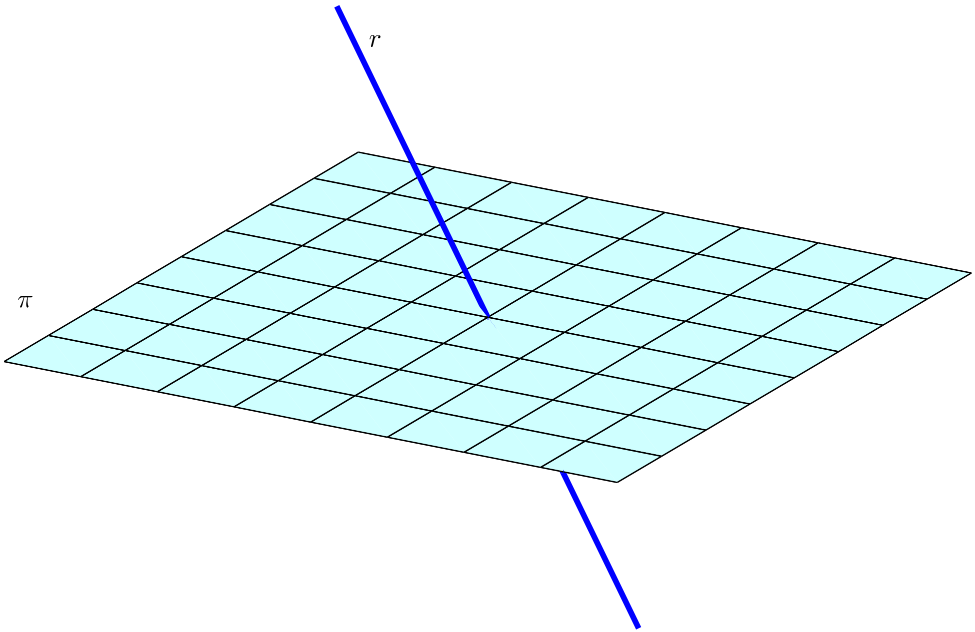


Figura 4.34: Reta e plano concorrentes

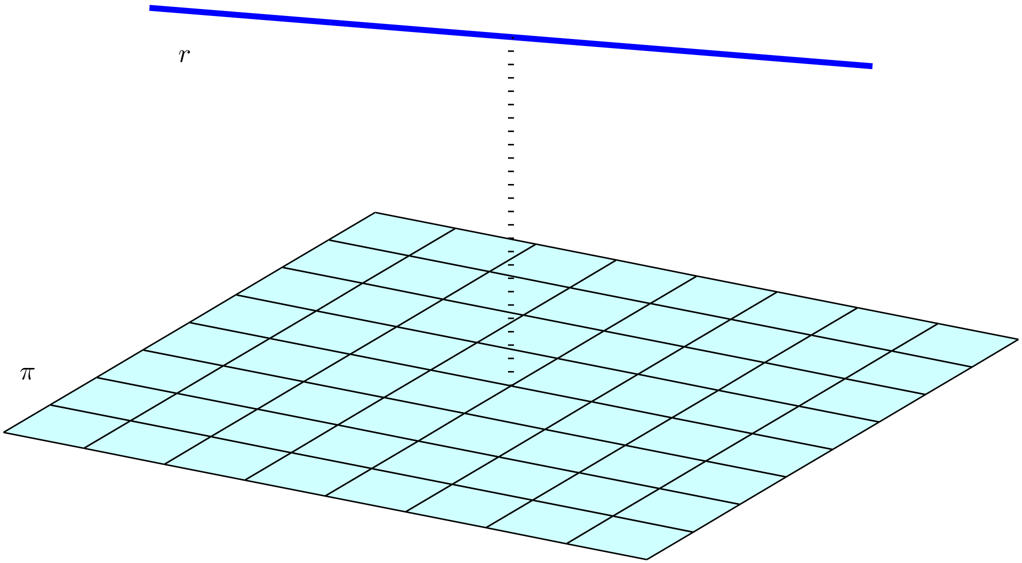


Figura 4.35: Reta e plano paralelos

4.2.19. O ângulo entre uma reta r que tem vetor diretor $V = (a_r, b_r, c_r)$ e um plano π que tem vetor normal $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$ é definido pelo complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano π e a reta r. Mostre que

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{|N \cdot V|}{||N||||V||}.$$

4.2.20. A distância entre uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $V = (a_r, b_r, c_r)$ e um plano $\pi : a_\pi x + b_\pi y + c_\pi z + d_\pi = 0$ é definida como a menor distância entre dois pontos um de r e outro de π. Se o vetor diretor da reta r, $V = (a_r, b_r, c_r)$, não é ortogonal ao vetor normal do plano π, $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$, então a reta e o plano são concorrentes e a distância entre eles é igual a zero, caso contrário a distância é igual a distância de uma ponto da reta r ao plano π. Mostre que

$$\operatorname{dist}(r, \pi) = \begin{cases} \dfrac{|a_\pi x_0 + b_\pi y_0 + c_\pi z_0 + d_\pi|}{\sqrt{a_\pi^2 + b_\pi^2 + c_\pi^2}}, & \text{se } V \cdot N = 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4.3 Posições Relativas de Retas e Planos

Posições Relativas de Duas Retas

Consideremos duas retas quaisquer $r_1 : (x, y, z) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + tV_1$ e $r_2 : (x, y, z) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + tV_2$. Para estudar a posição relativa destas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas são paralelas ou coincidentes (Figura 4.32 na página 282). Além de paralelas, elas são coincidentes se, e somente se, um ponto de uma reta pertence a outra reta. Portanto, se, e somente se, $\overrightarrow{P_1P_2}$ é paralelo a V_1 (e a V_2, pois V_1 e V_2 são paralelos).

(b) Se os **vetores diretores não são paralelos**, então as retas são reversas ou concorrentes (Figura 4.33 na página 284).

i. Se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares, ou seja, se $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.8 na página 208), então as retas são concorrentes.

ii. Se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 **não** são coplanares, ou seja, se $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) \neq 0$ (Corolário 3.8 na página 208), então as retas são reversas.

Posições Relativas de Dois Planos

Sejam dois planos $\pi_1 :\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 :\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ quaisquer.

(a) Se os seus **vetores normais** $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **não são paralelos**, então os planos são concorrentes (Figura 4.36).

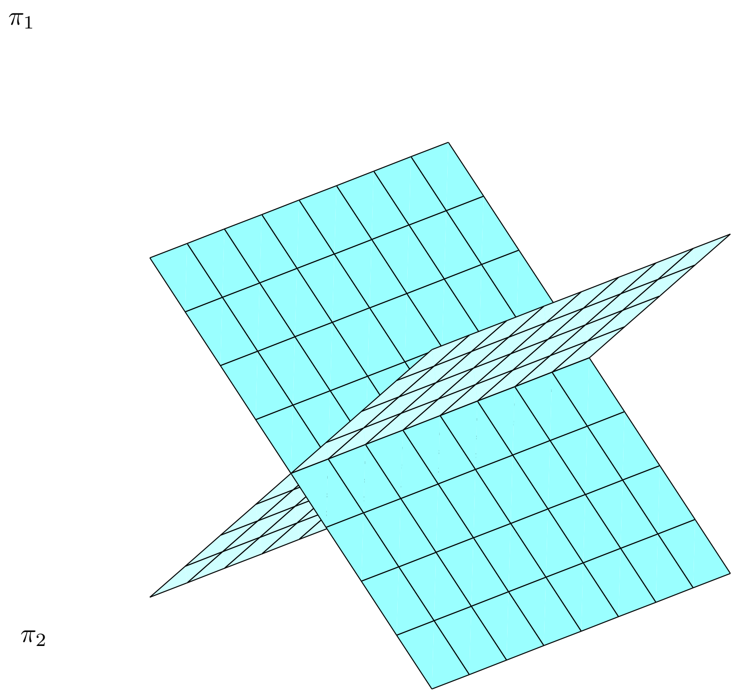


Figura 4.36: Dois planos que se interceptam segundo uma reta

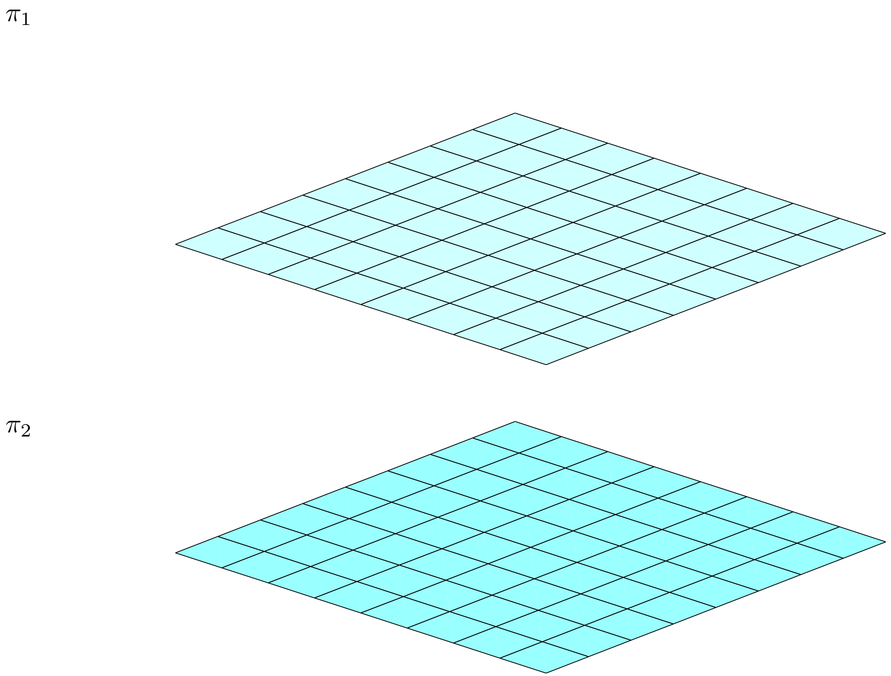


Figura 4.37: Dois planos paralelos

(b) Se os seus **vetores normais são paralelos**, ou seja, se $N_2 = \alpha N_1$, então os planos são paralelos distintos (Figura 4.37) ou coincidentes. Além de paralelos, eles são coincidentes se, e somente se, todo ponto que satisfaz a equação de π_1, satisfaz também a equação de π_2.

Suponha que π_1 e π_2 são coincidentes, com $N_2 = \alpha N_1$, então
$a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = \alpha a_1x+\alpha b_1y+\alpha c_1z+d_2 = \alpha(a_1x+b_1y+c_1z)+d_2 = \alpha(-d_1)+d_2 = 0.$
Portanto, $d_2 = \alpha d_1$ e as equações de π_1 e π_2 são proporcionais. Reciprocamente, se as equações de π_1 e π_2 são proporcionais, então claramente os dois planos são coincidentes. Portanto, dois planos são coincidentes se, e somente se, além dos vetores normais serem paralelos, as suas equações são proporcionais.

Posições Relativas de Reta e Plano

Sejam a reta $r : (x, y, z) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + tV$ e o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

(a) Se o **vetor diretor da reta** r**,** V**, e o vetor normal do plano** π**,** $N = (a, b, c)$**, são ortogonais** $(V \cdot N = 0)$, então a reta e o plano são paralelos ou a reta está contida no plano. A reta está contida no plano se além dos vetores V e N serem ortogonais, um ponto da reta pertence ao plano, por exemplo, se P_0 pertence a π (P_0 satisfaz a equação de π).

(b) Se o **vetor diretor da reta** r**,** V**, e o vetor normal do plano** π**,** $N = (a, b, c)$**, não são ortogonais** $(V \cdot N \neq 0)$, então a reta é concorrente ao plano.

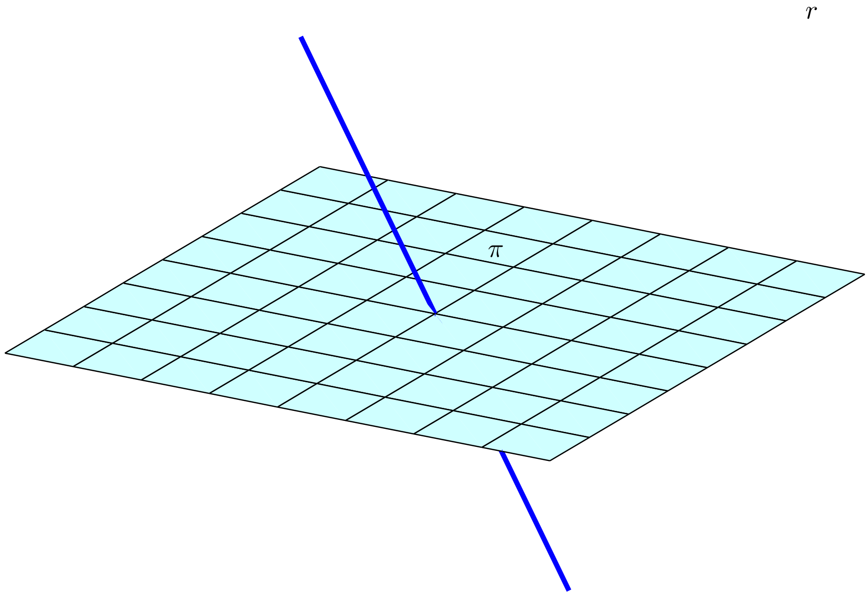


Figura 4.38: Reta e plano concorrentes

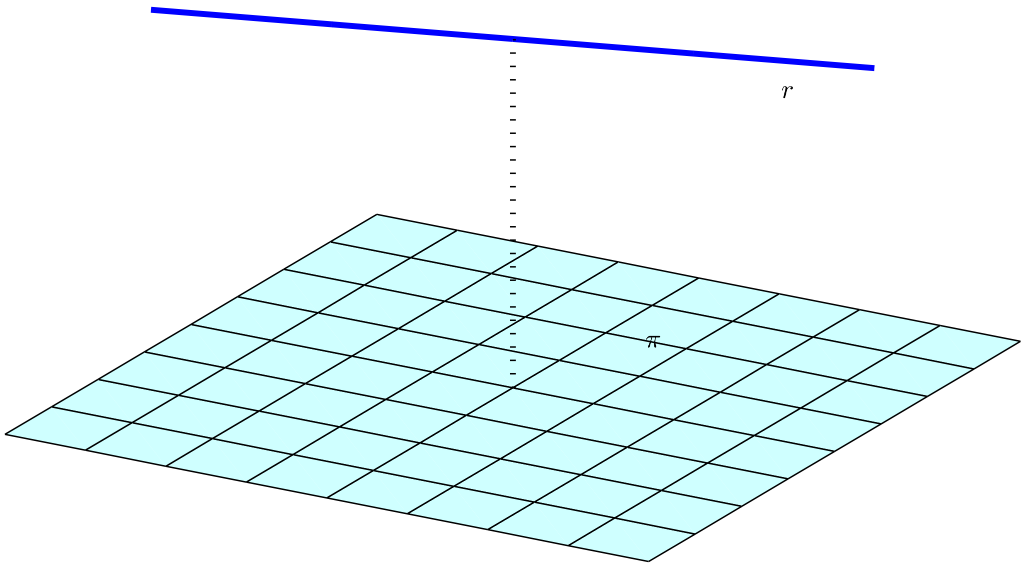


Figura 4.39: Reta e plano paralelos

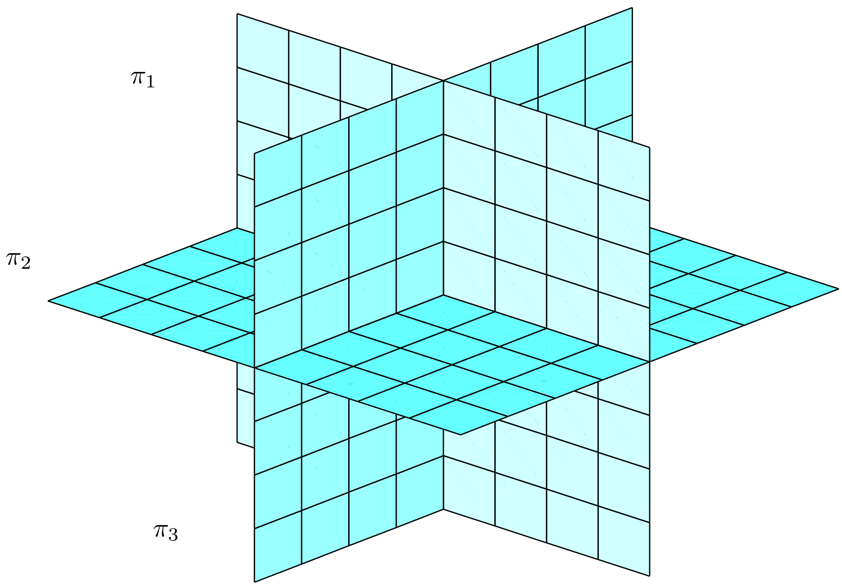


Figura 4.40: Três planos que se interceptam segundo um ponto

Posições Relativas de Três Planos

Consideremos três planos π_1, π_2, e π_3 dados pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{ll} \pi_1 : & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \pi_3 : & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Os vetores $N_i = (a_i, b_i, c_i)$ são normais aos planos π_i, para $i = 1, 2, 3$. Os três vetores são coplanares ou não são coplanares.

(a) Se os vetores N_1, N_2 e N_3 **não** são coplanares, então vamos mostrar que os planos se interceptam dois a dois segundo retas que se interceptam em um ponto. As retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_1 \cap \pi_3$ estão no plano π_1. Vamos mostrar que elas são concorrentes. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a N_1 e a N_2. Se as retas r e s fossem paralelas, então $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular também a N_3, ou seja, $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular a três vetores não coplanares o que implicaria que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Os vetores N_1, N_2 e N_3 não são coplanares se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0,$$

em que $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. Neste caso o sistema tem solução única (Figura 4.40).

(b) Se os três vetores normais são coplanares, então pode ocorrer uma das seguintes situações:

   i. Os vetores normais são paralelos, ou seja, $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \beta N_3$ e $N_2 = \gamma N_3$. Neste caso, os planos são paralelos.

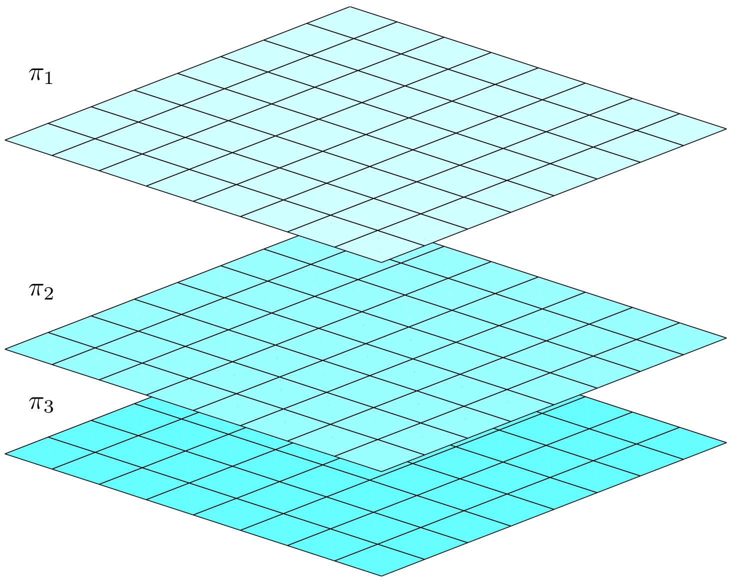


Figura 4.41: Três planos paralelos

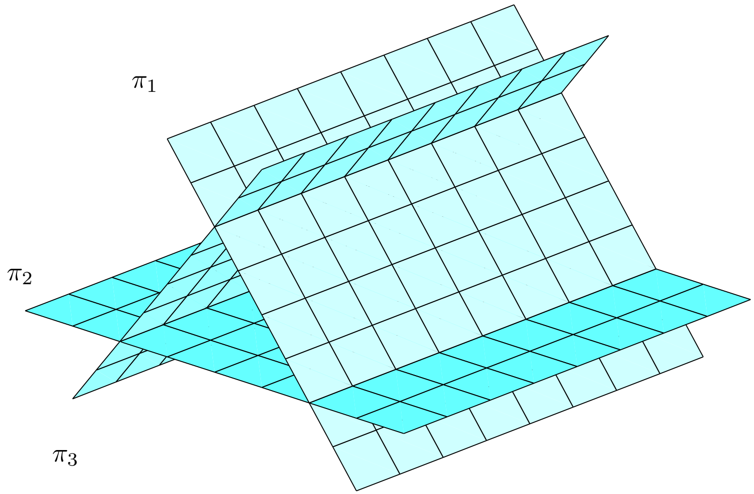


Figura 4.42: Planos interceptando-se 2 a 2

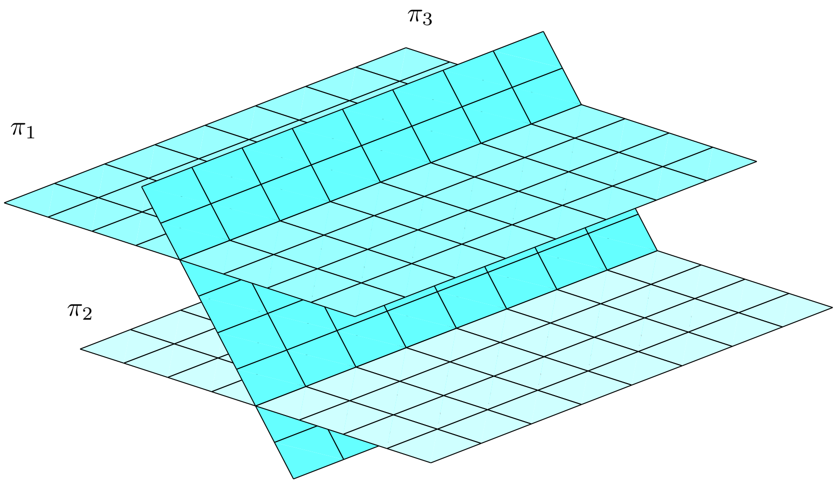


Figura 4.43: Três planos, sendo 2 paralelos

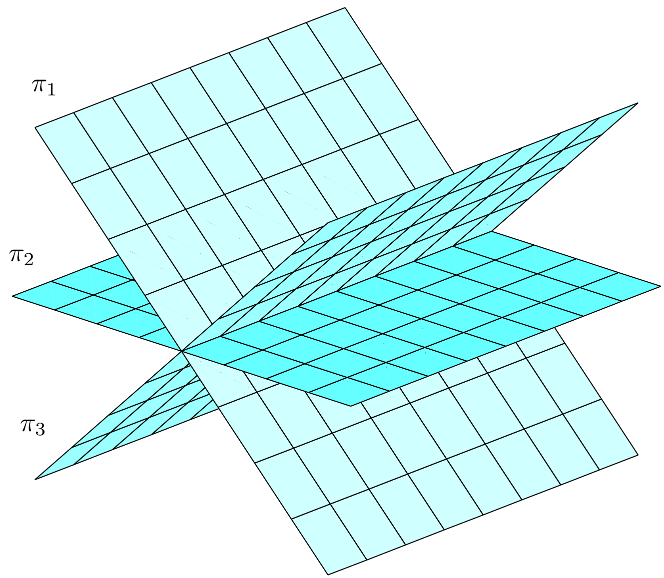


Figura 4.44: Reta interseção de 3 planos

Se além disso, exatamente duas das equações são proporcionais, então exatamente dois planos são coincidentes e o sistema não tem solução. Se as três equações são proporcionais, então os três planos são coincidentes e o sistema tem infinitas soluções. Se não ocorre nenhuma destas situações, os planos são paralelos e distintos e o sistema não tem solução (Figura 4.41).

ii. Exatamente dois vetores normais são paralelos, ou seja, vale uma, e somente uma, equação entre: $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \alpha N_3$, $N_2 = \alpha N_3$. Neste caso, exatamente dois planos são paralelos.

Se além de exatamente dois vetores normais serem paralelos, as equações correspondentes forem proporcionais, então dois planos são coincidentes e o terceiro corta os dois segundo uma reta. Neste caso o sistema tem infinitas soluções. Se isto não acontece, então os planos paralelos são distintos e o sistema não tem solução (Figura 4.43).

iii. Os vetores normais são coplanares e quaisquer dois vetores normais não são paralelos, ou seja, $\det(A) = 0$ e quaisquer dois vetores normais não são múltiplos escalares. Neste caso, quaisquer dois planos se interceptam segundo retas que são paralelas. Com estas condições podem ocorrer dois casos: **os três planos se interceptem segundo uma reta**, (Figura 4.44) ou **os planos se interceptem, dois a dois, segundo retas distintas** (Figura 4.42). No primeiro caso, o sistema (4.13) tem infinitas soluções. No segundo caso, o sistema não tem solução.

Exercícios Numéricos (respostas na página ??)

4.3.1. Sejam $r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 2) + (2t, t, 3t)$ e $r_2 : (x, y, z) = (0, 1, -1) + (t, mt, 2mt)$ duas retas.

(a) Determine m para que as retas sejam coplanares (não sejam reversas).

(b) Para o valor de m encontrado, determine a posição relativa entre r_1 e r_2.

(c) Determine a equação do plano determinado por r_1 e r_2.

4.3.2. Sejam a reta $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + (2t, mt, t)$ e o plano $\pi : 2x - y - 2z = 0$. Determine o valor de m para que a reta seja paralela ao plano. Para o valor de m encontrado a reta está contida no plano?

4.3.3. Dê a posição relativa dos seguintes ternos de planos:

(a) $2x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 2$, $x + y + 4z = 3$.

(b) $x - 2y + z = 0$, $2x - 4y + 2z = 1$, $x + y = 0$.

(c) $2x - y + z = 3$, $3x - 2y - z = -1$, $2x - y + 3z = 7$.

(d) $3x + 2y - z = 8$, $2x - 5y + 2z = -3$, $x - y + z = 1$.

(e) $2x - y + 3z = -2$, $3x + y + 2z = 4$, $4x - 2y + 6z = 3$.

(f) $-4x + 2y - 4z = 6$, $3x + y + 2z = 2$, $2x - y + 2z = -3$.

(g) $6x - 3y + 9z = 3$, $4x - 2y + 6z = 5$, $2x - y + 3z = 2$.

(h) $x - 2y + 3z = 2$, $3x + y - 2z = 1$, $5x - 3y + 4z = 4$.

Teste do Capítulo

1. Ache os pontos do plano $\pi : y = x$ que equidistam dos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

2. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 0)$ em relação à reta $r : (x, y, z) = t(1, 1, 1)$?

3. (a) Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (0, 0, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

(b) Encontre a distância da origem ao plano π.

4. (a) Mostre que os planos $x - y = 0$ e $y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r.

(b) Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta r.

Capítulo 5

Seções Cônicas

Neste capítulo estudaremos as **(seções) cônicas**, curvas planas que são obtidas da interseção de um cone circular com um plano. Vamos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas de **cônicas não degeneradas**. Vamos defini-las em termos de lugares geométricos. As outras cônicas, que incluem um único ponto, um par de retas, são chamadas **cônicas degeneradas**.

5.1 Cônicas Não Degeneradas

5.1.1 Elipse

Definição 5.1. Uma **elipse** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\operatorname{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c.$$

Proposição 5.1. *(a) A equação de uma* **elipse** *cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{5.1}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

(b) A equação de uma **elipse** *cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,, \tag{5.2}$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

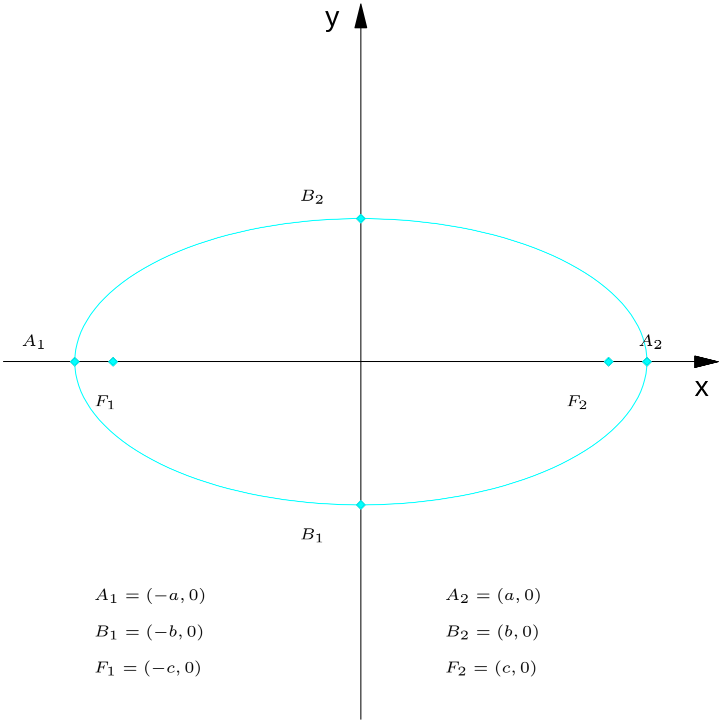


Figura 5.1: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

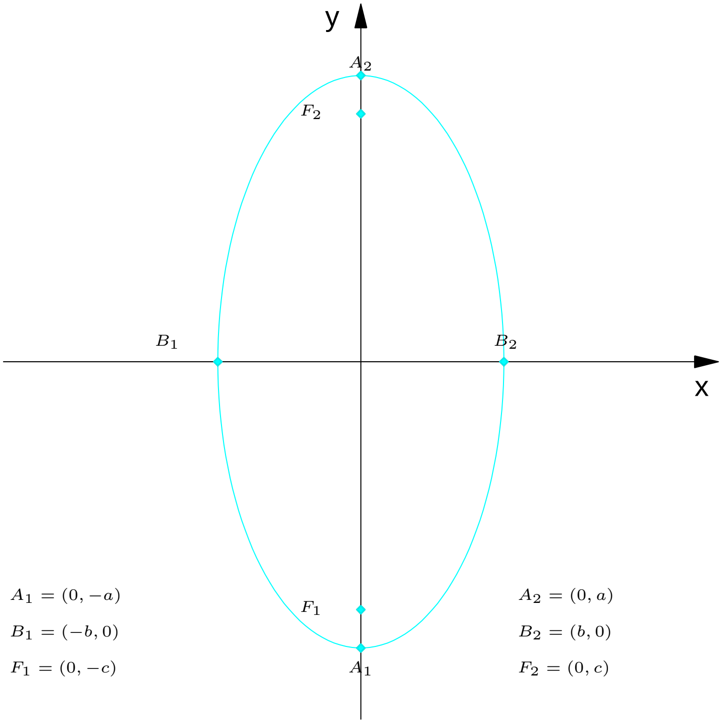


Figura 5.2: Elipse com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$||\ \overrightarrow{PF_1}\ || + ||\ \overrightarrow{PF_1}\ || = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir e equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (5.1). □

Nas Figuras 5.1 e 5.2, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da elipse**. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados **eixos da elipse**. A reta que passa pelos focos é chamada **eixo focal**.

A **excentricidade** da elipse é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c < a$, a excentricidade de uma elipse

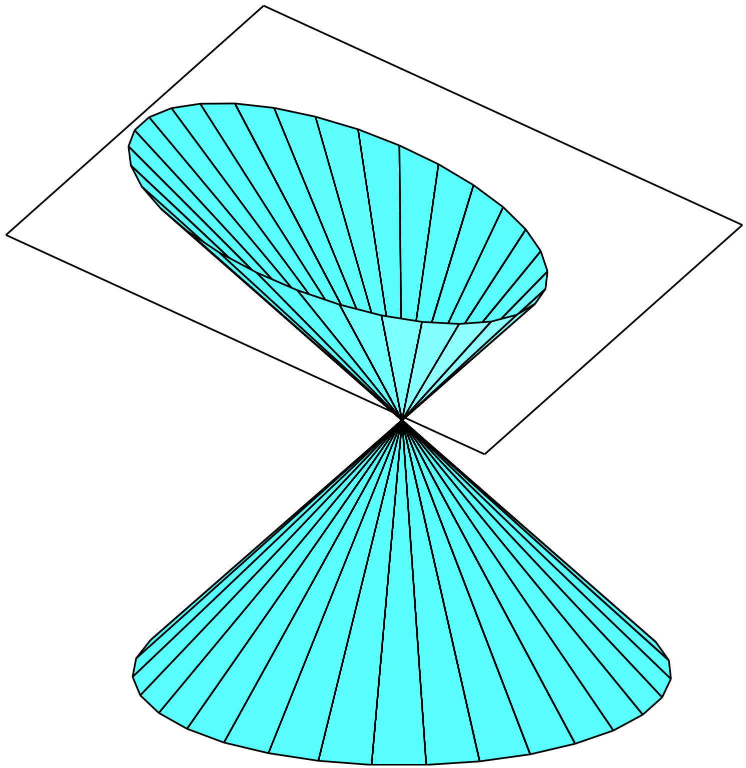


Figura 5.3: Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

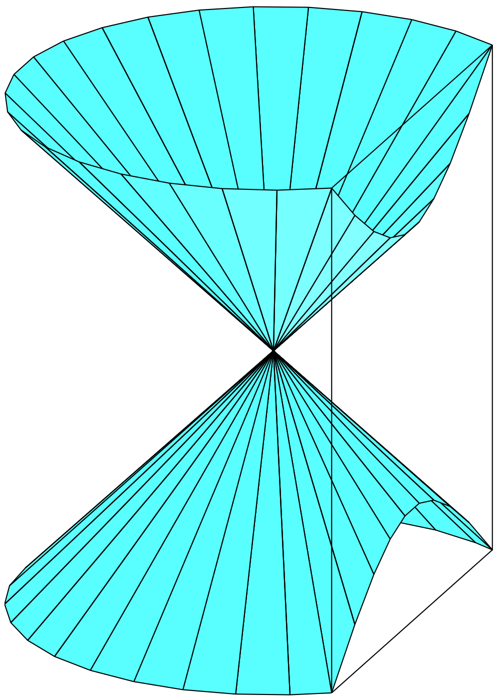


Figura 5.4: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano

é um número real não negativo menor que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, então a elipse reduz-se à **circunferência** de raio a. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, uma circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma **reta geratriz** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície.

5.1.2 Hipérbole

Definição 5.2. Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\mathrm{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$|\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a, \quad \text{em que } a < c.$$

Proposição 5.2. *(a) A equação de uma* **hipérbole** *cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.3}$$

e das **assíntotas** *(retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$),*

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(b) A equação de uma **hipérbole** *cujos focos são* $F_1 = (0, -c)$ *e* $F_2 = (0, c)$ *é*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.4}$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$*),*

$$x = \pm \frac{a}{b} y,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2) = \pm 2a\,,$$

ou seja,

$$||\ \overrightarrow{PF_1}\ || - ||\ \overrightarrow{PF_2}\ || = \pm 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a < c$, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e dividir e equação acima por $-a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (5.3).

Se a equação (5.3) é resolvida em y obtemos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

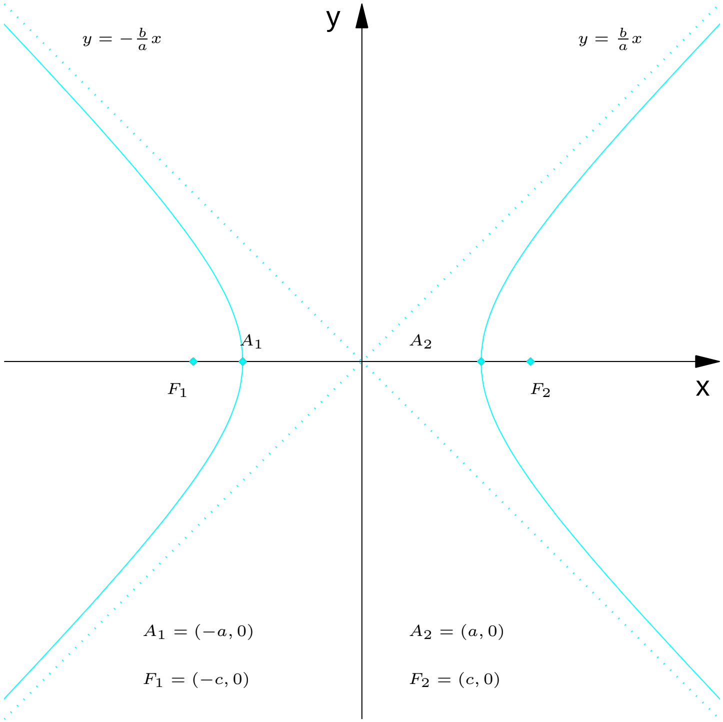


Figura 5.5: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

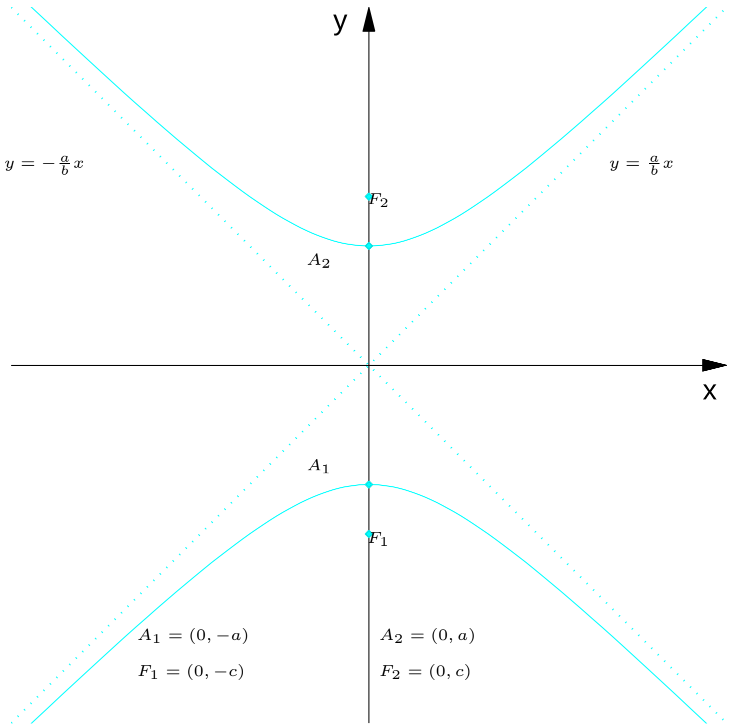


Figura 5.6: Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Se x tende a $+\infty$, então o radical no segundo membro se aproxima de 1 e a equação tende a

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

O mesmo ocorre para $x < 0$, quando x tende a $-\infty$ (verifique!). $\square$

Nas Figuras 5.5 e 5.6, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da hipérbole**. A reta que passa pelos focos é chamada **eixo focal**. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c > a$, a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior que 1. A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo ao seu eixo que não passa pelo vértice.

5.1.3 Parábola

Definição 5.3. Uma **parábola** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano eqüidistantes de uma reta r (**diretriz**) e de um ponto F (**foco**), não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)\,.$$

Proposição 5.3. *(a) A equação de uma* **parábola** *com foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz $r : \; x = -p$ é*

$$y^2 = 4px\,. \tag{5.5}$$

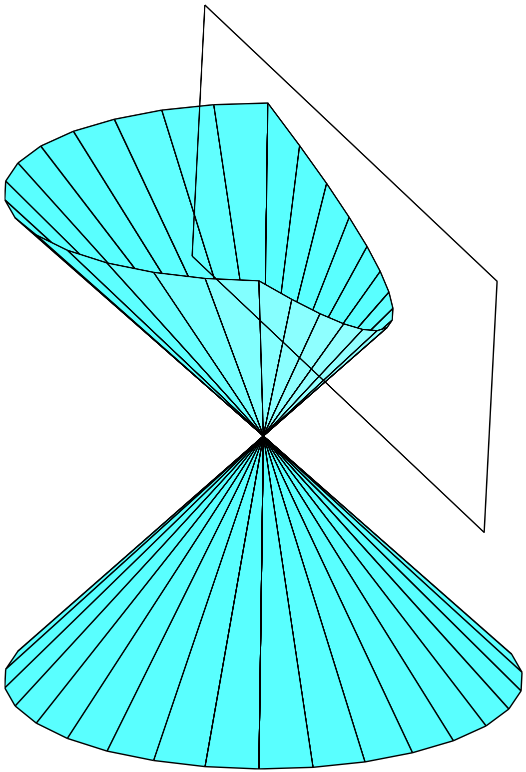


Figura 5.7: Parábola obtida seccionando-se um cone com um plano

(b) A equação de uma **parábola** *com foco* $F = (0, p)$ *e reta diretriz* $r:\ y = -p$ *é*

$$x^2 = 4py\,. \qquad (5.6)$$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r)\,,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|\,,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (5.5). □

Nas Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11, o ponto P_0 é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da parábola**. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone** conforme a Figura 5.7 na página 322.

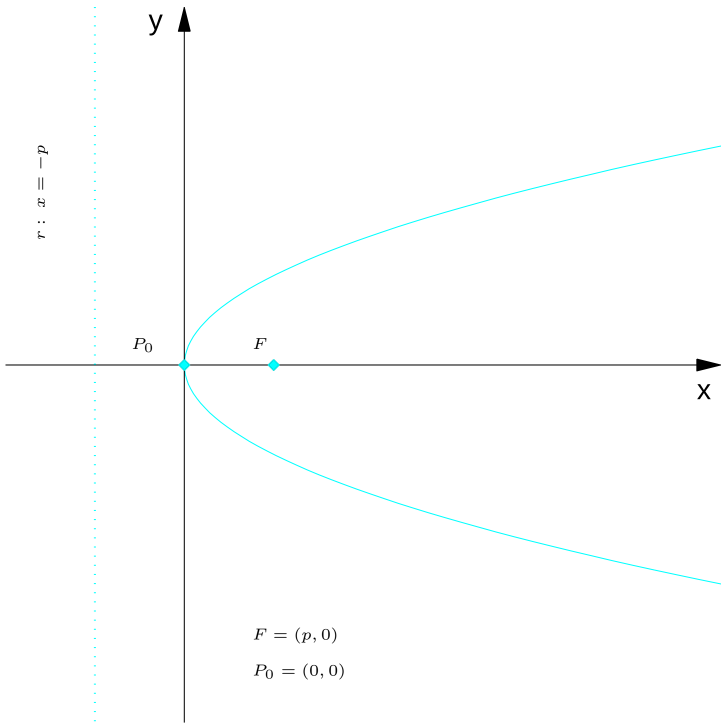


Figura 5.8: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p > 0$

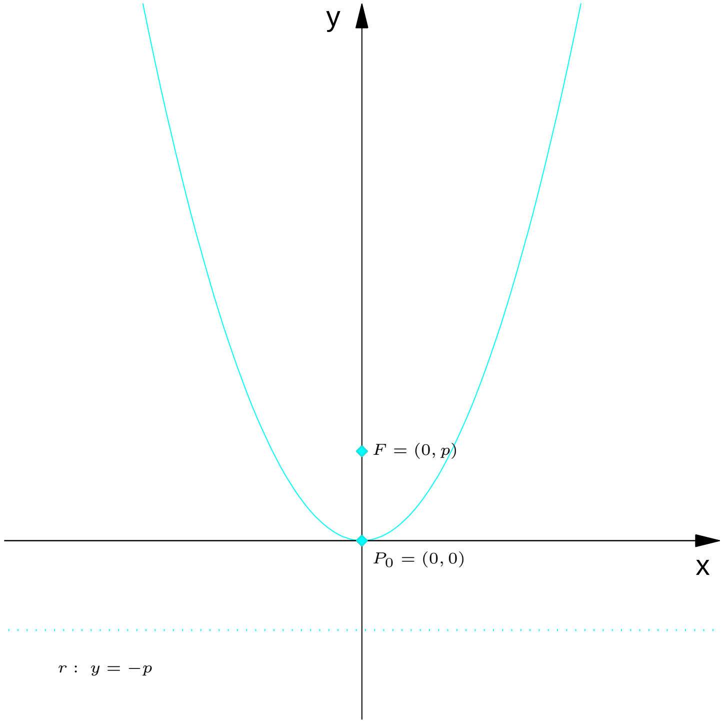


Figura 5.9: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p > 0$

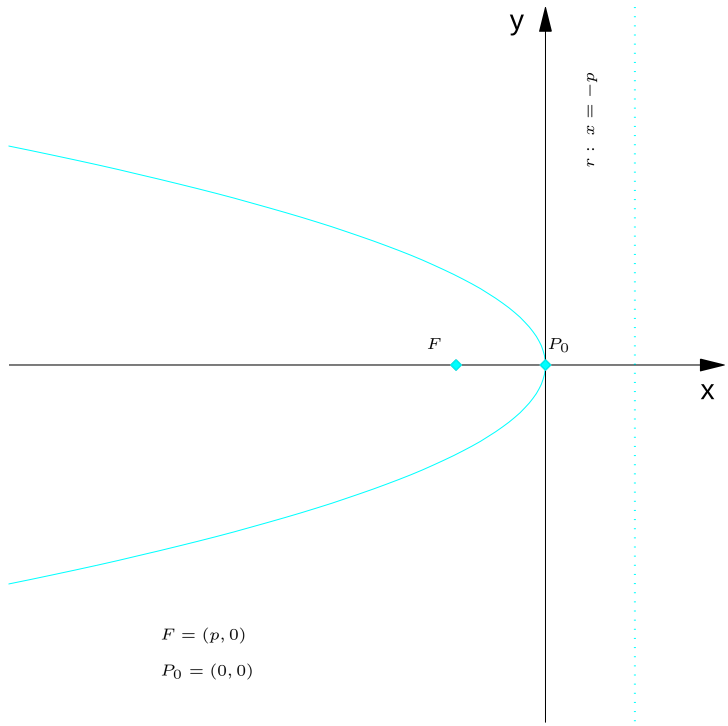


Figura 5.10: Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p < 0$

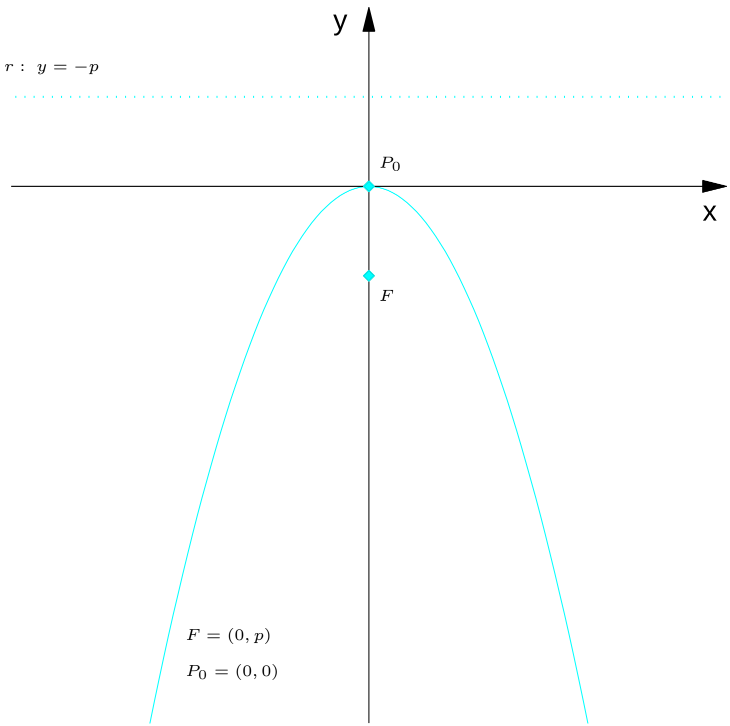


Figura 5.11: Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p < 0$

5.1.4 Caracterização das Cônicas

Vamos mostrar a seguir que todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

Proposição 5.4. *Seja s uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**foco**) não pertencente a s. O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que*

$$\text{dist}(P, F) = e\,\text{dist}(P, s), \tag{5.7}$$

em que $e > 0$ é uma constante fixa, é uma cônica.

(a) Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola.

(b) Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse.

(c) Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma (5.7).

Demonstração. Se $e = 1$, a equação (5.7) é a própria definição da parábola. Vamos considerar o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $s : x = \dfrac{p}{e^2}$, em que

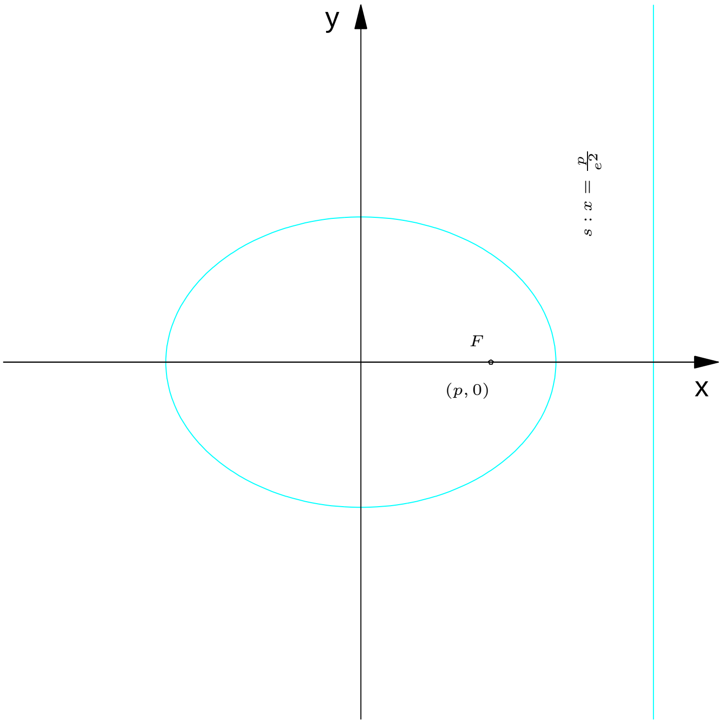


Figura 5.12: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à direita

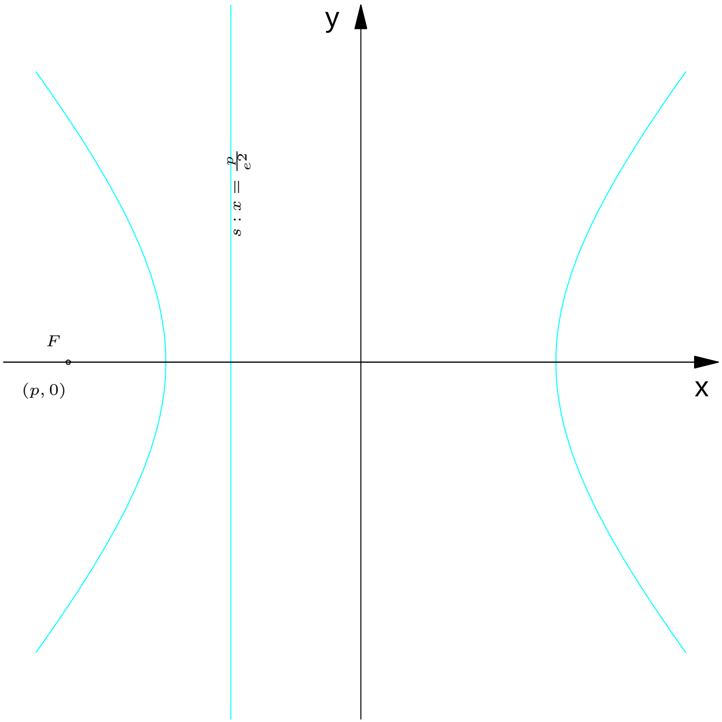


Figura 5.13: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à direita

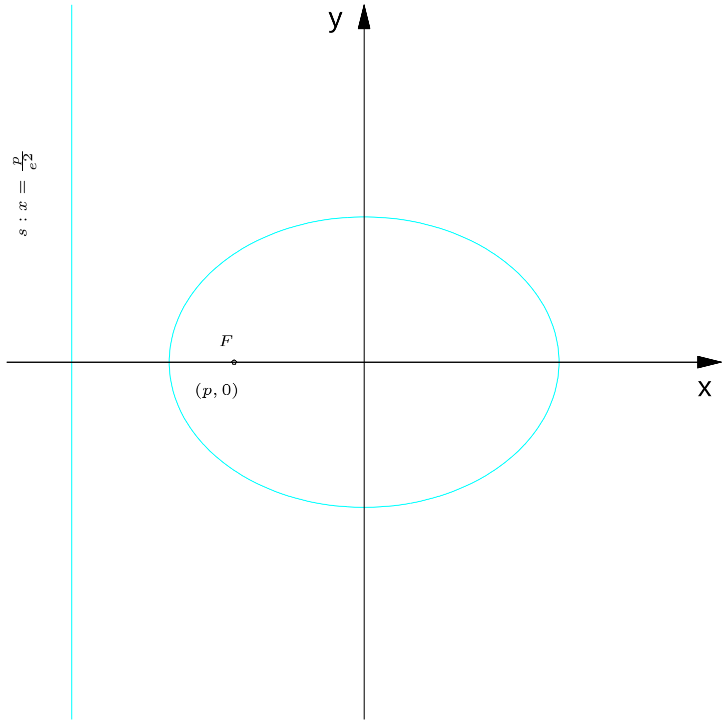


Figura 5.14: Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

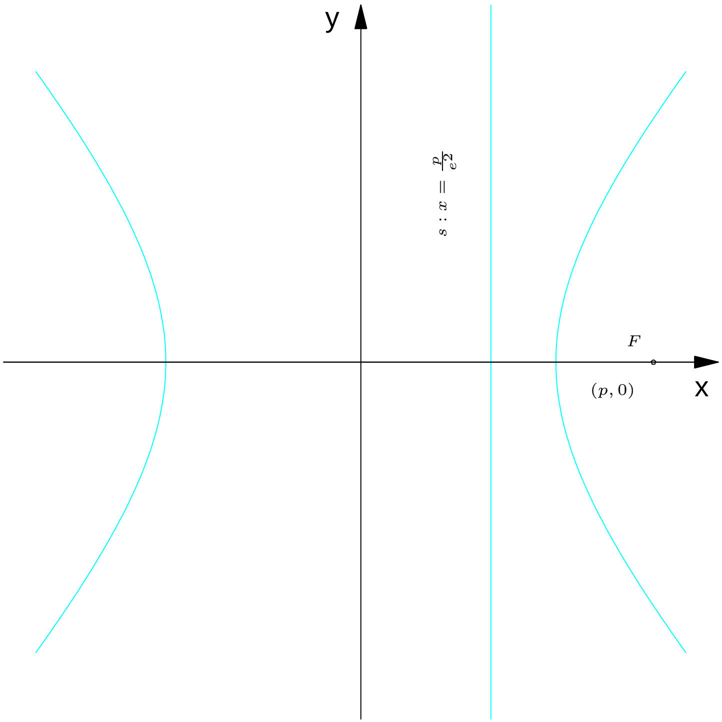


Figura 5.15: Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

$p = \frac{de^2}{1-e^2}$ se a reta s estiver à direita do foco F (Figuras 5.12 e 5.13) e $p = \frac{de^2}{e^2-1}$ se a reta s estiver à esquerda do foco F (Figuras 5.14 e 5.15).

Assim o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F) = e\,\mathrm{dist}(P, s)\,,$$

pode ser descrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{p}{e^2}\right|\,,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = p^2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$$

que pode ainda ser escrito como

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1. \tag{5.8}$$

Se $0 < e < 1$, esta é a equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole.

Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos em $F = (p, 0)$. É fácil verificar que (5.8) é a equação desta cônica e portanto (5.7) também o é, com a reta diretriz sendo $s : x = \dfrac{p}{e^2}$. $\square$

Exercícios Numéricos (respostas na página 609)

5.1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a cônica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 + 2y^2 = 1$

(b) $x^2 + y = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

5.1.2. Escreva as equações das seguintes elipses:

(a) Os focos são $F_1 = (-1, 2)$ e $F_2 = (3, 2)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 6$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 4$;

5.1.3. Escreva as equações das seguintes hipérboles:

(a) Os focos são $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (3, 4)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 3$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2$;

5.1.4. Escreva as equações das seguintes parábolas:

(a) O foco é $F = (0, 2)$ e diretriz $y = -2$;

(b) O foco é $F = (0, 0)$ e diretriz $x + y = 2$;

Exercícios Teóricos

5.1.5. Mostre que a equação da elipse com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

5.1.6. Mostre que a equação da hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a, \quad \text{em que } a < c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

5.1.7. Mostre que a equação da parábola com foco no ponto $F = (x_0 + p, y_0)$ e reta diretriz $r : \; x = x_0 - p$ é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

5.1.8. Seja uma elipse ou hipérbole com um dos focos em $F = (p, 0)$. Definindo a reta $r : x = \dfrac{p}{e^2}$, em que e é a excentricidade.

(a) Mostre que

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1$$

é a equação desta cônica.

(b) Mostre que esta cônica pode ser descrita pelo conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F) = e\,\mathrm{dist}(P, r).$$

5.2 Coordenadas Polares e Equações Paramétricas

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto do plano é localizado em relação a duas retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas polares** em que um ponto do plano é localizado em relação a um ponto e a uma reta que passa por esse ponto.

Escolhemos um ponto O (usualmente a origem do sistema cartesiano), chamado **polo** e uma reta orientada passando pelo polo chamada **eixo polar** (usualmente tomamos o próprio eixo x do sistema cartesiano). No sistema de coordenadas polares um ponto no plano é localizado dando-se a distância do ponto ao polo, $r = \operatorname{dist}(P, O)$ e o ângulo, θ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e um vetor na direção e sentido do eixo polar, com a mesma convenção da trigonometria, ou seja, ele é positivo se medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se medido no sentido horário a partir do eixo polar. As coordenadas polares de um ponto P do plano são escritas na forma (r, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares.

Proposição 5.5. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares coincidem com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas polares e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0.$$

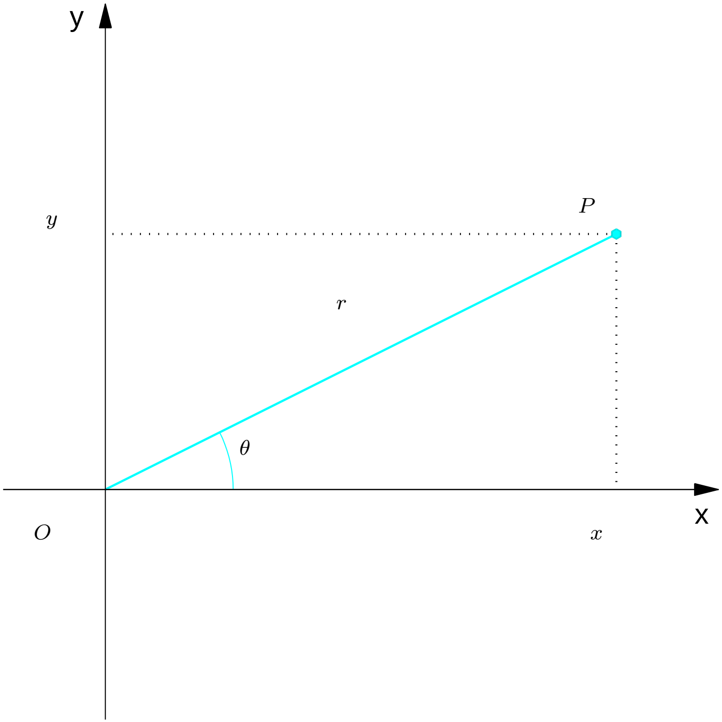


Figura 5.16: Ponto P do plano em coordenadas polares (r, θ) e cartesianas (x, y)

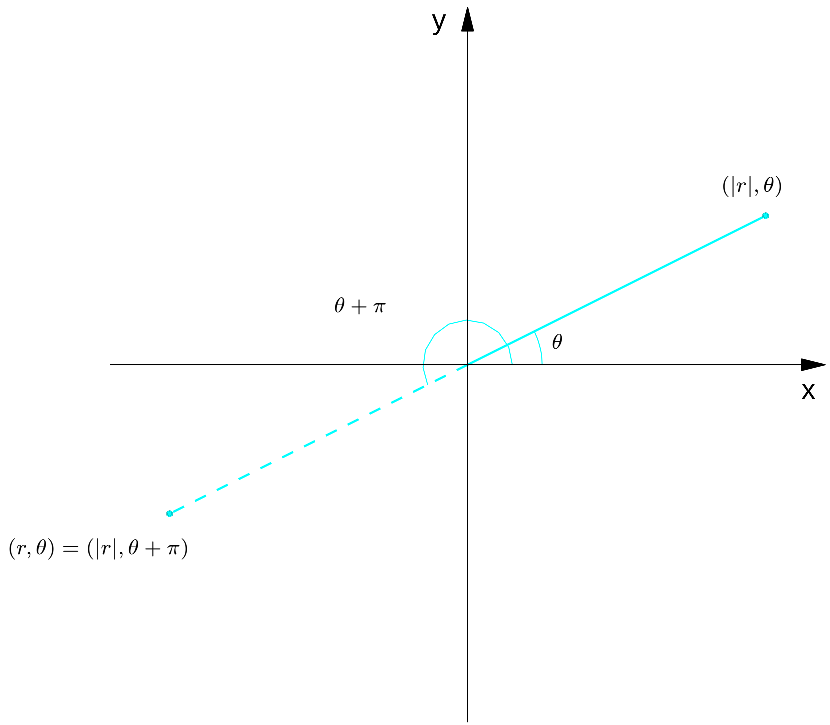


Figura 5.17: Para $r < 0$, $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$

Estendemos as coordenadas polares para o caso no qual r é negativo da seguinte forma:

$$\text{para } r < 0, \quad (r, \theta) = (|r|, \theta + \pi).$$

Assim, (r, θ) e $(-r, \theta)$ estão na mesma reta que passa pelo polo, à distância $|r|$ do polo, mas em lados opostos em relação ao polo.

Exemplo 5.1. Vamos determinar a equação em coordenadas polares da circunferência cuja equação em coordenadas retangulares é

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

ou simplificando

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Substituindo-se x por $r \cos \theta$ e y por $r \operatorname{sen} \theta$ obtemos

$$r^2 - 2r\cos\theta - 2r \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Dividindo-se por r ficamos com

$$r - 2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Exemplo 5.2. Vamos determinar a equação em coordenadas retangulares do lugar geométrico cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}.$$

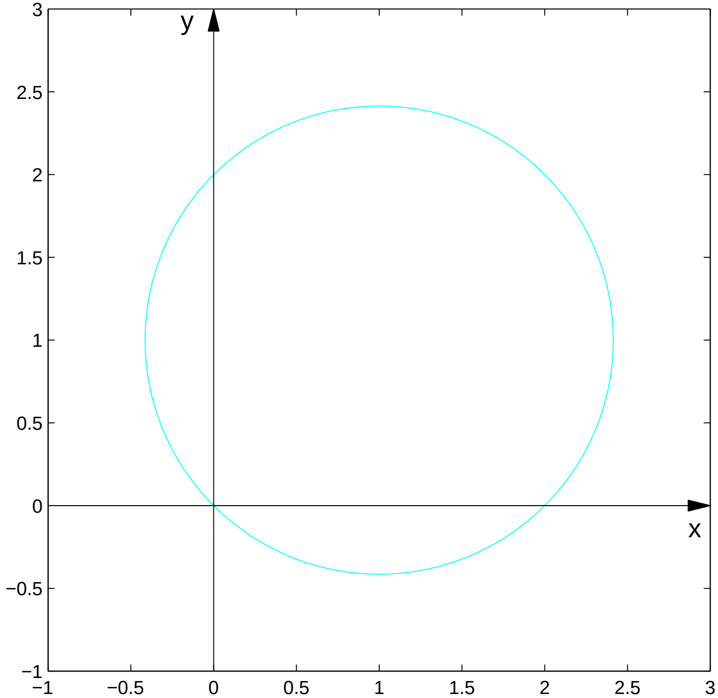


Figura 5.18: Circunferência com equação em coordenadas polares $r - 2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0$

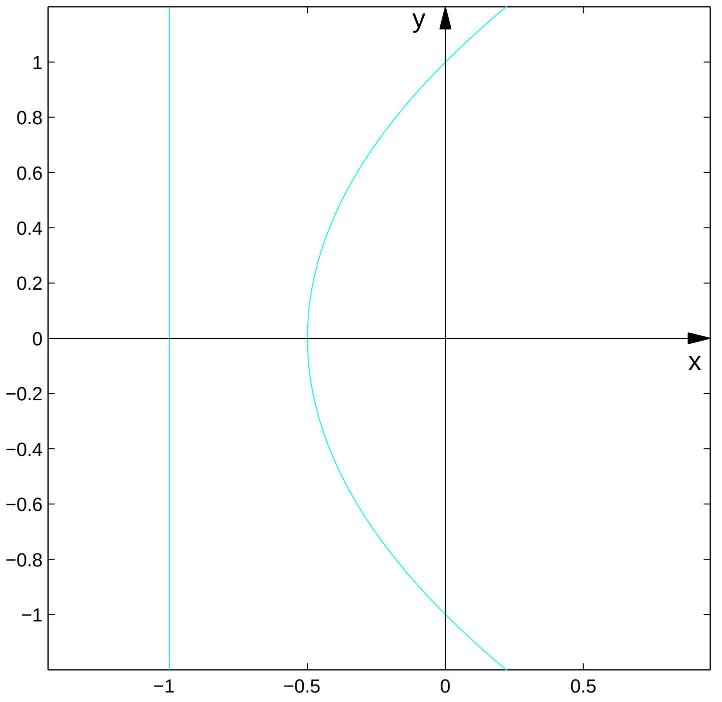


Figura 5.19: Parábola com equação em coordenadas polares $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

Substituindo-se r por $\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta$ por $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

ou simplificando

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 1.$$

Somando-se x a ambos os membros obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x.$$

Elevando-se ao quadrado obtemos

$$x^2 + y^2 = (1+x)^2.$$

Simplificando-se obtemos ainda

$$y^2 = 1 + 2x = 2(x + 1/2),$$

que é uma parábola com foco na origem $F = (0,0)$ e reta diretriz $x = -1$ (verifique!).

5.2.1 Cônicas em Coordenadas Polares

A equação polar de uma cônica, que não é uma circunferência, assume uma forma simples quando um foco F está no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ao eixo polar. Seja $d = \mathrm{dist}(F, s)$. Para deduzir a equação polar das cônicas vamos usar a caracterização dada na

Proposição 5.4 na página 328, ou seja, que uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem

$$\mathrm{dist}(P, F) = e\,\mathrm{dist}(P, s)$$

Como o foco F está no polo, temos que $\mathrm{dist}(P, F) = r$, em que (r, θ) são as coordenadas polares de P.

(a) Se a reta diretriz, s, é perpendicular ao eixo polar.

(i) Se a reta s está à *direita* do polo, obtemos que $\mathrm{dist}(P, r) = d - r\cos\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\cos\theta).$$

Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}.$$

(ii) Se a reta s está à *esquerda* do polo, obtemos que $\mathrm{dist}(P, s) = d + r\cos\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r\cos\theta).$$

Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}.$$

(b) Se a reta diretriz, s, é paralela ao eixo polar.

(i) Se a reta s está *acima* do polo, obtemos que $\mathrm{dist}(P, r) = d - r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e \operatorname{sen} \theta}.$$

(ii) Se a reta s está *abaixo* do polo, obtemos que $\operatorname{dist}(P, r) = d + r \operatorname{sen} \theta$. Assim a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r \operatorname{sen} \theta).$$

Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e \operatorname{sen} \theta}.$$

Isto prova o seguinte resultado

Proposição 5.6. *Considere uma cônica com excentricidade $e > 0$ (que não é uma circunferência), que tem um foco F no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ou eixo polar, com $d = \mathrm{dist}(s, F)$.*

(a) *Se a reta diretriz correspondente a F é perpendicular ao eixo polar e está* **à direita** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

e se está **à esquerda** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}$$

(b) *Se a reta diretriz correspondente a F é paralela ao eixo polar e está* **acima** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

e se está **abaixo** *do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

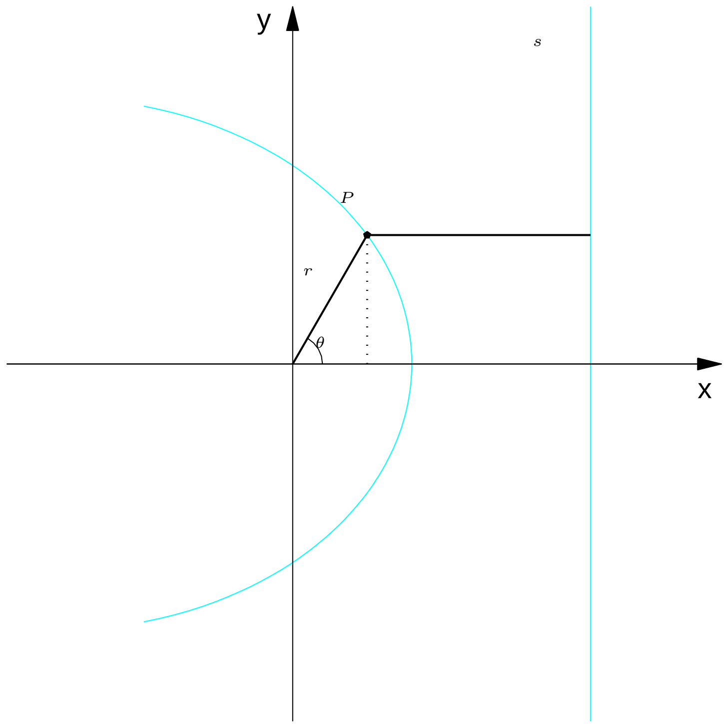


Figura 5.20: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

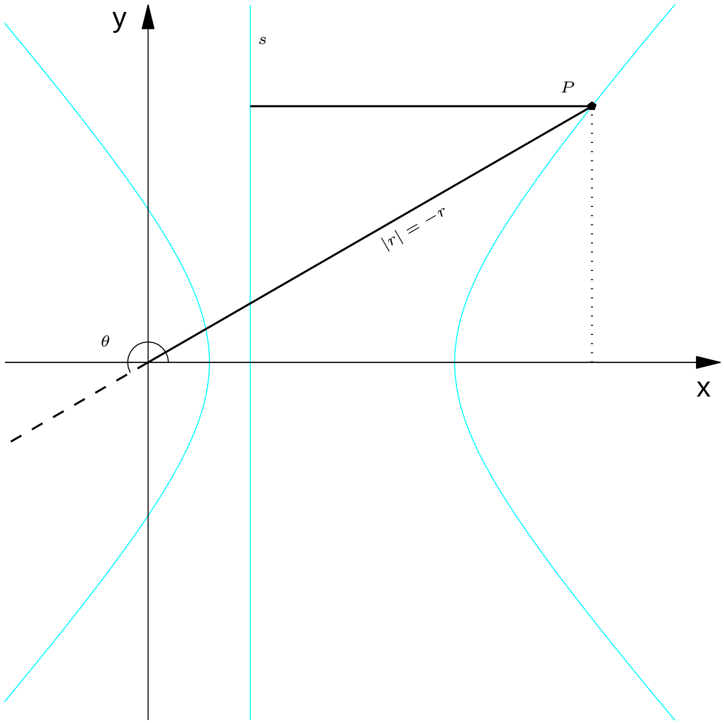


Figura 5.21: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

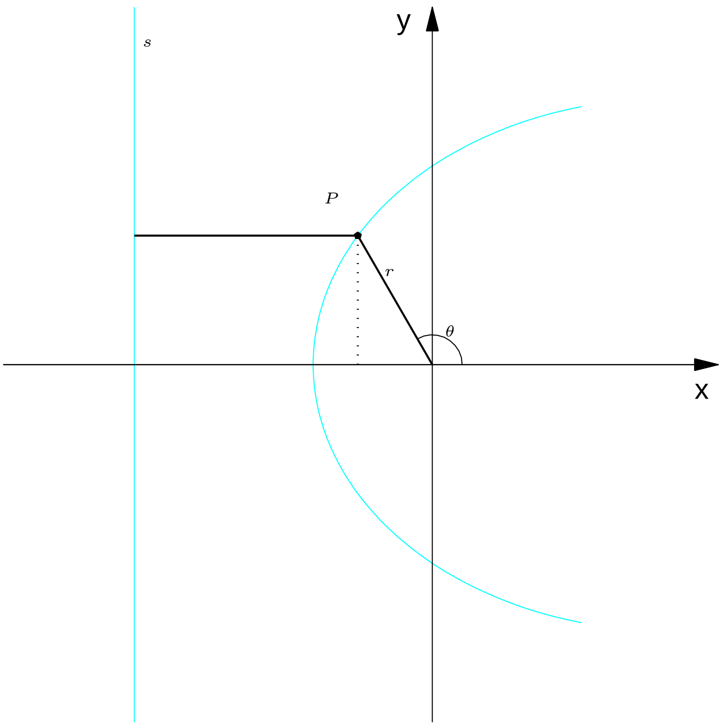


Figura 5.22: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

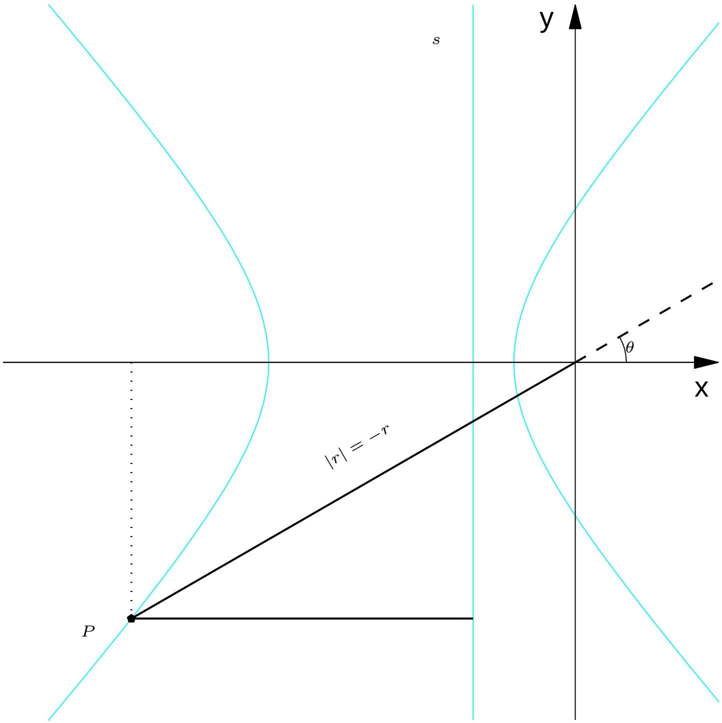


Figura 5.23: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

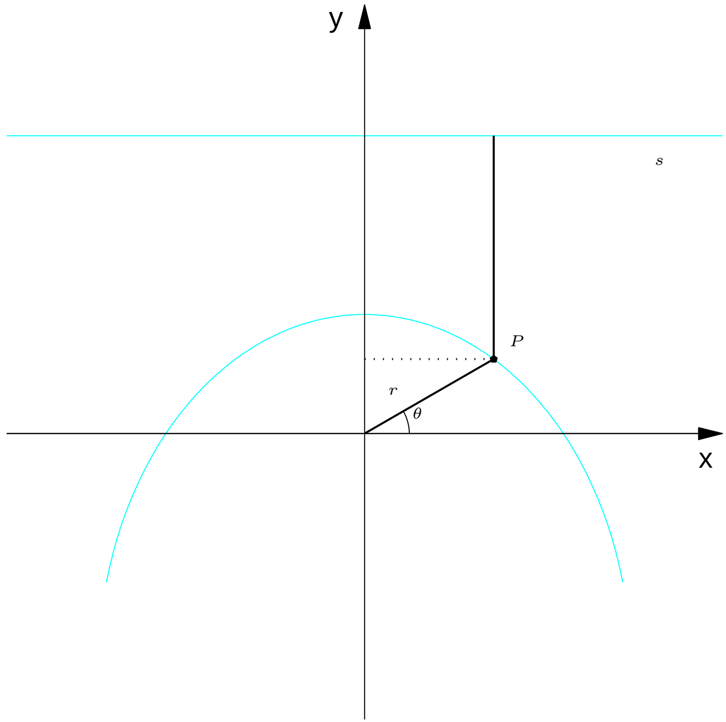


Figura 5.24: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

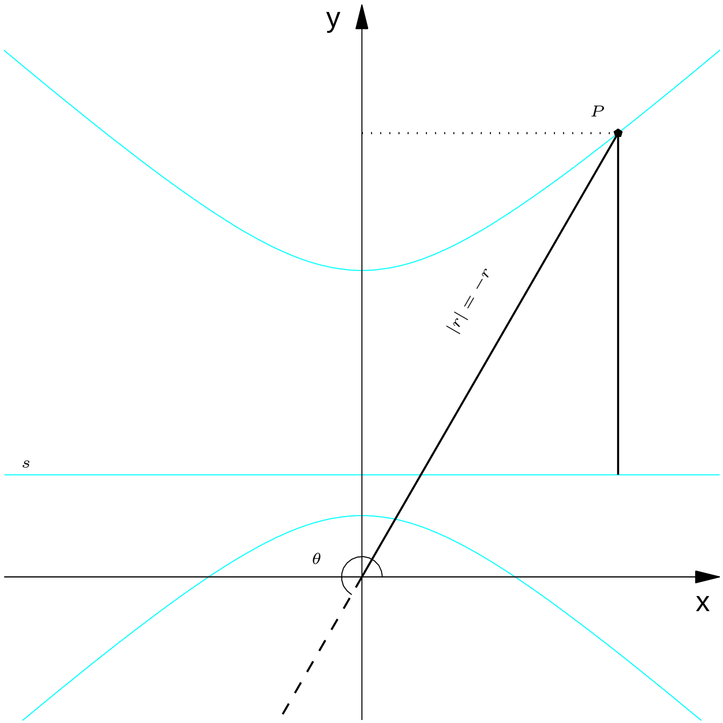


Figura 5.25: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

Exemplo 5.3. Vamos identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{4}{2 + \cos\theta}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador do segundo membro da equação por 2 obtemos

$$r = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta},$$

que é a equação em coordenadas polares de uma elipse com excentricidade igual a $1/2$, um dos focos no polo, reta diretriz $x = 4$ (coordenadas cartesianas) ou $r\cos\theta = 4$ (coordenadas polares). Vamos encontrar as coordenadas polares dos vértices. Para isso, fazemos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ na equação polar da elipse obtendo $r = 4/3$ e $r = 4$, respectivamente.

5.2.2 Circunferência em Coordenadas Polares

A forma mais simples da equação de uma circunferência em coordenadas polares ocorre quando seu centro está no polo. Neste caso a equação é simplesmente $r = a$, em que a é o raio da circunferência. Além deste caso, a equação polar de uma circunferência assume uma forma simples quando ela passa pelo polo e o seu centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(a) Se o centro está no eixo polar.

(i) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, 0)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{CP}\|^2 = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta. \end{aligned}$$

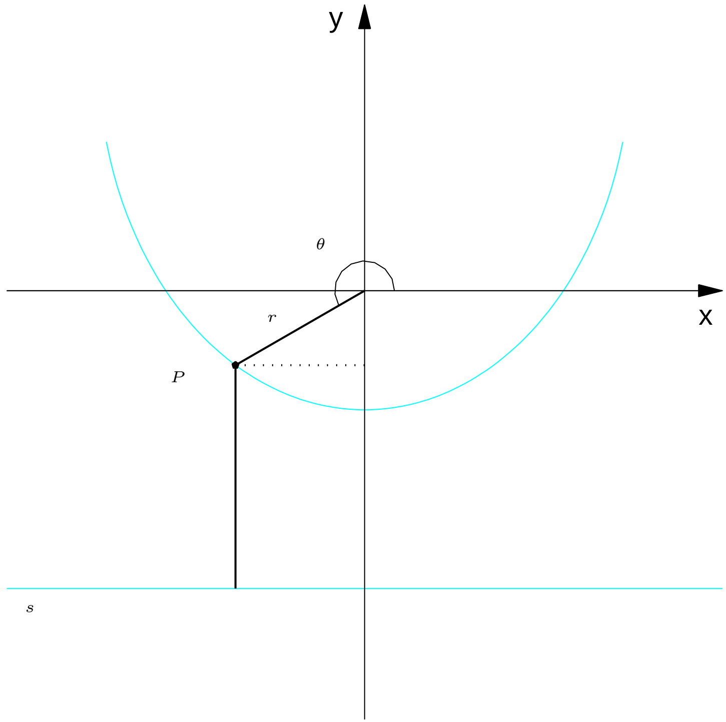


Figura 5.26: Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

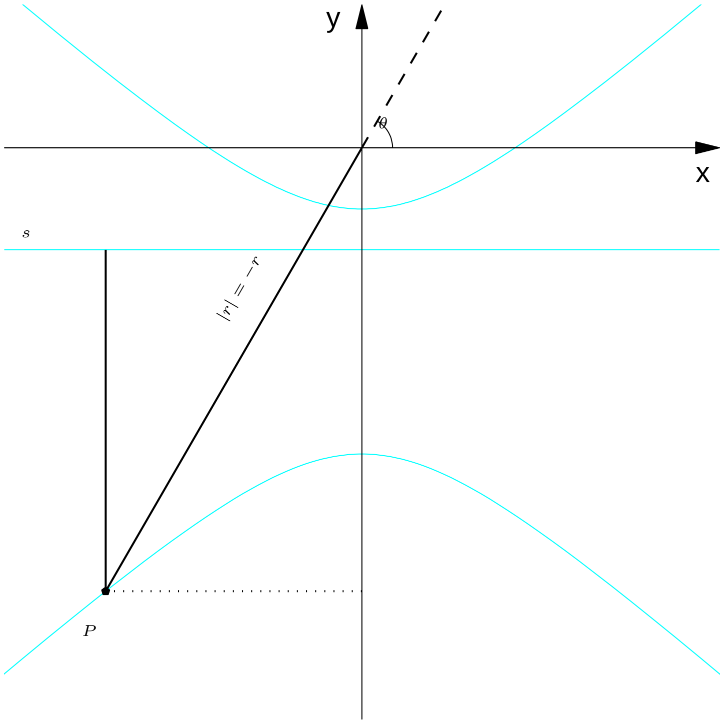


Figura 5.27: Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

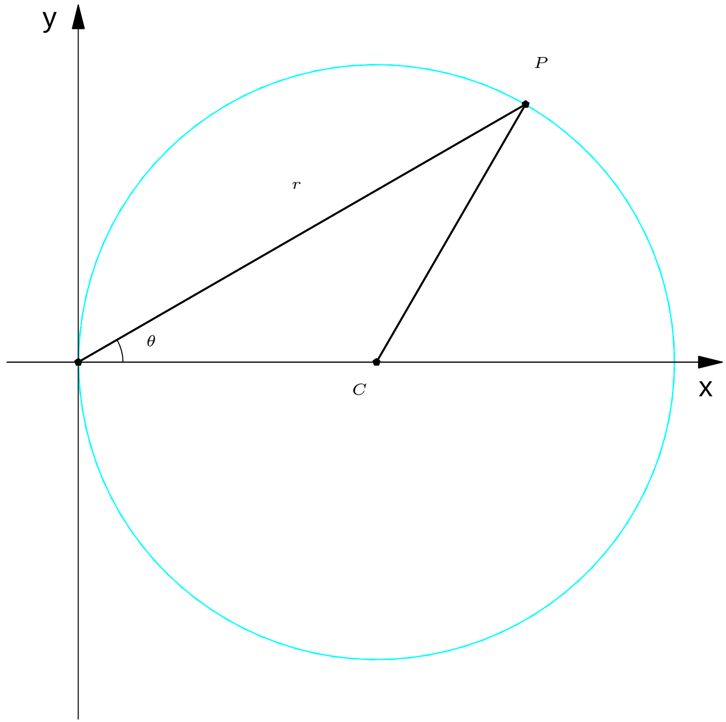


Figura 5.28: Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à direita

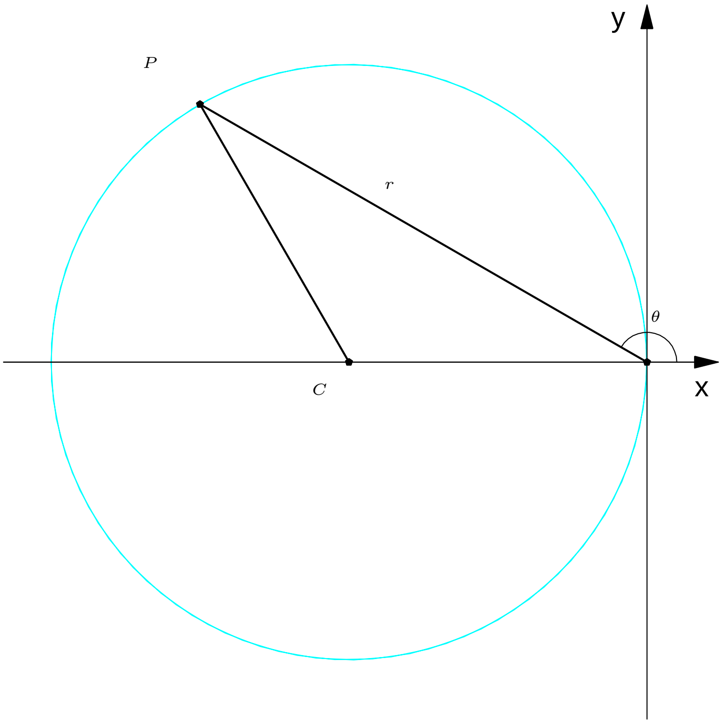


Figura 5.29: Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à esquerda

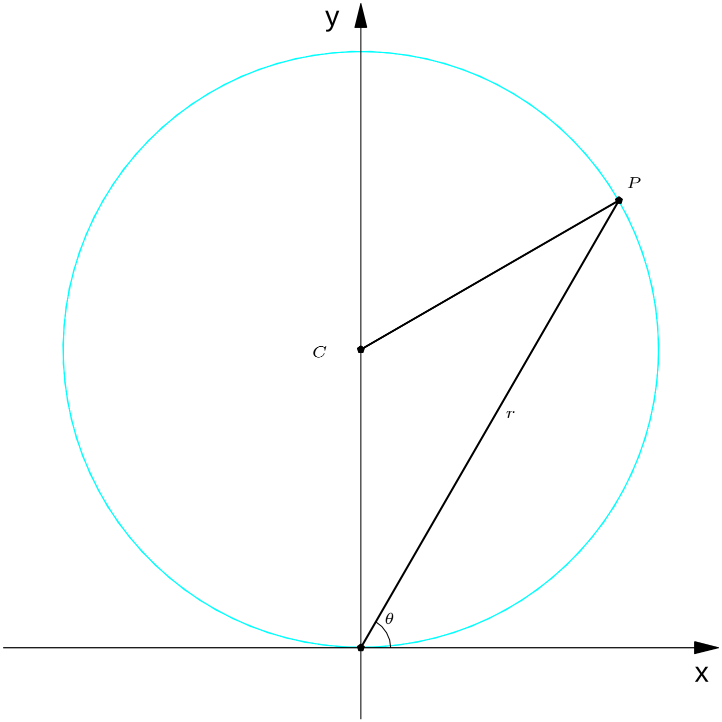


Figura 5.30: Circunferência que passa pelo polo com centro acima do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

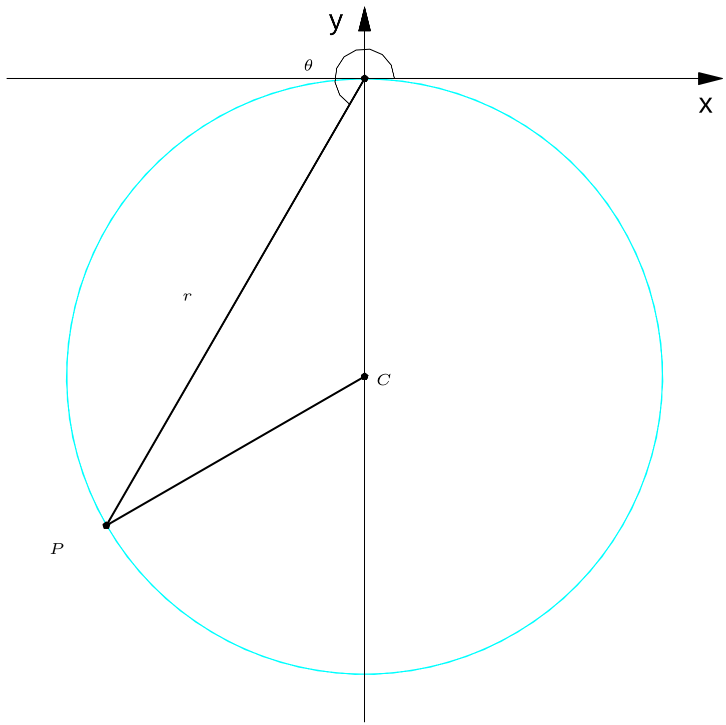


Figura 5.31: Circunferência que passa pelo polo com centro abaixo do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

Assim,

$$r^2 = 2ra\cos\theta$$

ou

$$r(r - 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a\cos\theta.$$

(ii) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{CP}\|^2 = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra\cos\theta$$

ou

$$r(r + 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a\cos\theta.$$

(b) Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(i) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= ||\overrightarrow{CP}||^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}||^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OC}||^2 - 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = 2ra \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$r(r - 2a \operatorname{sen} \theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta.$$

(ii) Se o raio é igual a a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, -\pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= ||\overrightarrow{CP}||^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}||^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OC}||^2 - 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(-\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra \operatorname{sen} \theta$$

ou

$$r(r + 2a \operatorname{sen} \theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a \operatorname{sen} \theta.$$

Proposição 5.7. *Considere uma circunferência de raio a que passa pelo polo cujo centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.*

(a) *Se o centro está no eixo polar e* **à direita** *do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = 2a\cos\theta$$

e se o centro está **à esquerda** *do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a\cos\theta.$$

(b) *Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo e* **acima** *do polo, então a equação polar é dada por*

$$r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e se está **abaixo** *do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Exemplo 5.4. Uma circunferência cuja equação em coordenadas polares é

$$r = -3\cos\theta$$

passa pelo polo, tem raio igual a $3/2$ e as coordenadas polares do seu centro são $(3/2, \pi)$.

5.2.3 Equações Paramétricas

Seja

$$F(x, y) = 0 \tag{5.9}$$

a equação de uma curva plana $\mathcal{C}$ em coordenadas retangulares. Sejam x e y funções de uma terceira variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{5.10}$$

Se para qualquer valor da variável t no conjunto $\mathcal{I}$, os valores de x e y determinados pelas equações (5.10) satisfazem (5.9), então as equações (5.10) são chamadas **equações paramétricas da curva** $\mathcal{C}$ e a variável independente t é chamada **parâmetro**. Dizemos também que as equações (5.10) formam uma **representação paramétrica da curva** $\mathcal{C}$. A representação paramétrica de curvas tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador.

Exemplo 5.5. Seja a um número real positivo fixo. A circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{5.11}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos t \quad \text{e} \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi]. \tag{5.12}$$

Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (5.12) e somando os resultados obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2.$$

A circunferência definida por (5.11) pode também ser representada parametricamente por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [0, a^2]. \tag{5.13}$$

ou por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [0, a^2]. \tag{5.14}$$

Apenas que com (5.13) obtemos somente a parte de cima da circunferência e com (5.14) obtemos somente a parte de baixo.

Exemplo 5.6. A elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.15}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos t \quad \text{e} \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi]. \tag{5.16}$$

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (5.16), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (5.16) e somando os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1.$$

Exemplo 5.7. A hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.17}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\sec t \quad \text{e} \quad y = b\tan t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi],\ t \neq \pi/2, 3\pi/2. \tag{5.18}$$

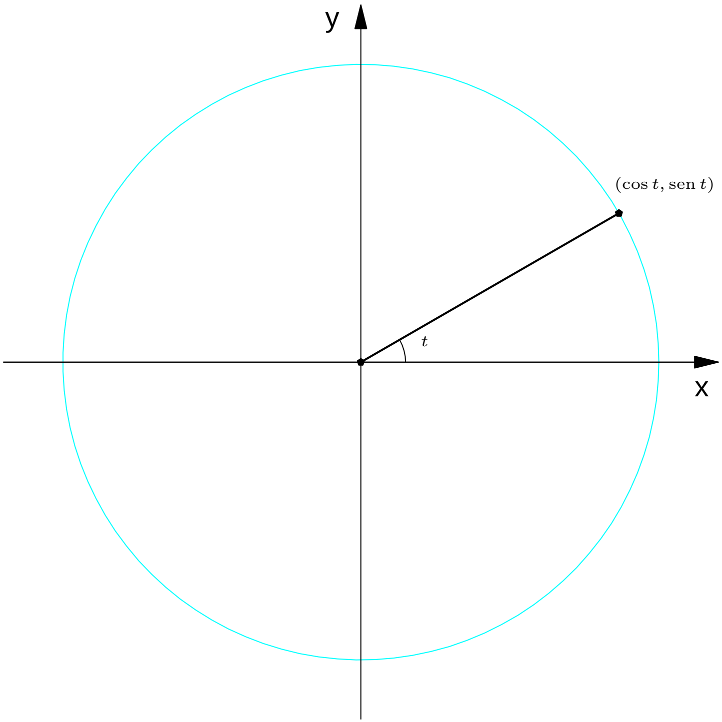


Figura 5.32: Circunferência parametrizada

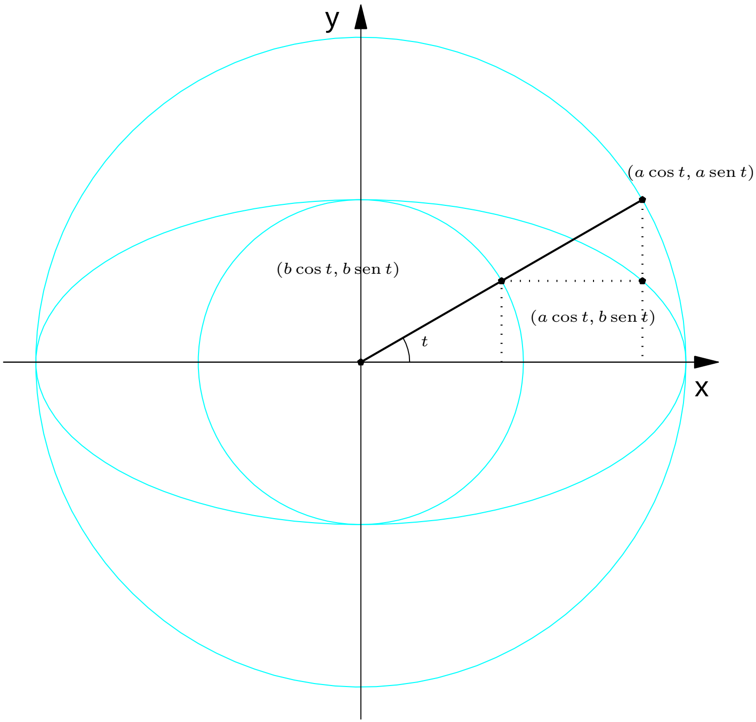


Figura 5.33: Elipse parametrizada

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (5.18), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (5.18) e subtraindo os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \tan^2 t = 1.$$

Vamos apresentar uma outra representação paramétrica da hipérbole. Para isso vamos definir duas funções

$$f_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad f_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{5.19}$$

A hipérbole definida por (5.17) pode, também, ser representada parametricamente por

$$x = a f_1(t) \quad \text{e} \quad y = b f_2(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (5.20), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (5.20) e subtraindo os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (f_1(t))^2 - (f_2(t))^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right) = 1. \tag{5.21}$$

As funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ definidas por (5.19) recebem o nome de **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**, respectivamente e são denotadas por $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$. De (5.21) segue a seguinte relação fundamental entre o cosseno e o seno hiperbólicos

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1. \tag{5.22}$$

e a representação paramétrica (5.20) pode ser escrita como

$$x = a \cosh t \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{senh} t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

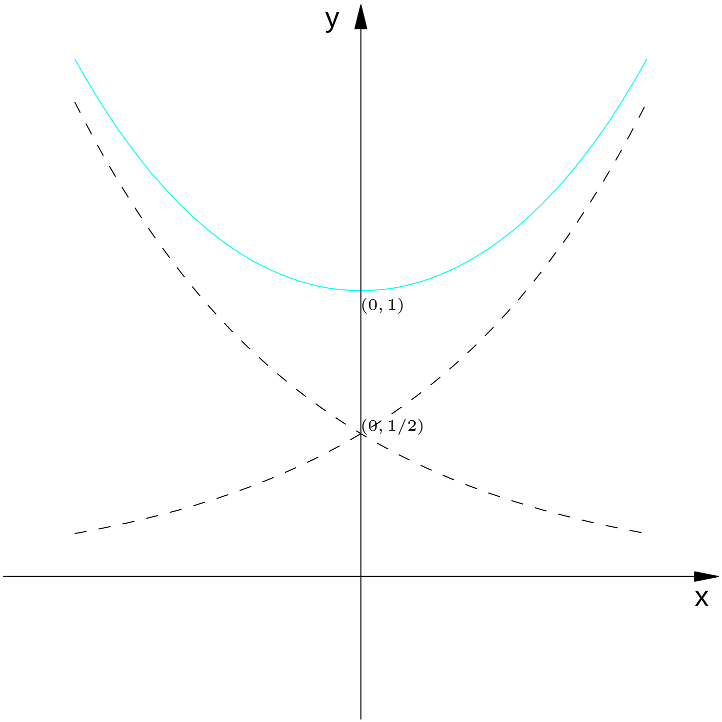


Figura 5.34: Cosseno hiperbólico

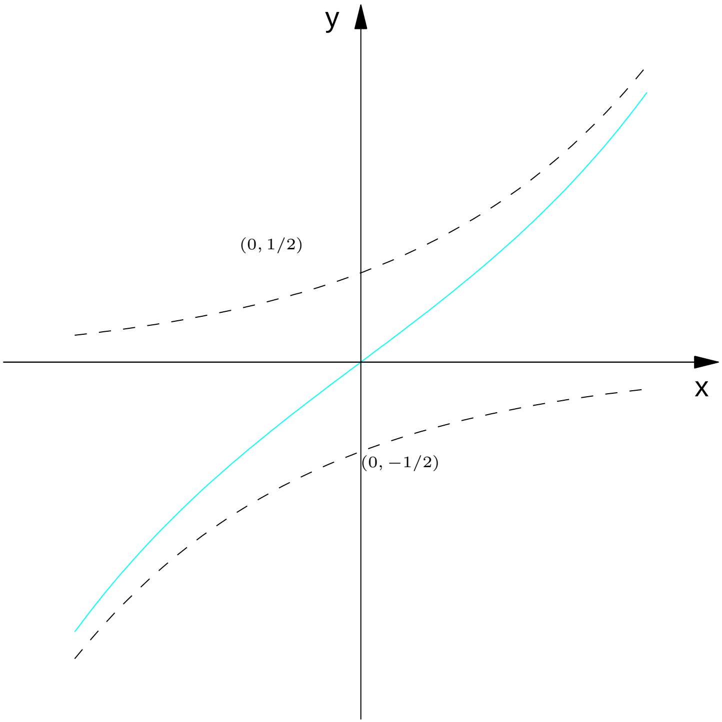


Figura 5.35: Seno hiperbólico

Também

$$x = -a\cosh t \quad \text{e} \quad y = b\,\mathrm{senh}\, t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.23}$$

é uma representação paramétrica da hipérbole (5.17). Apenas que com (5.20) obtemos somente o ramo direito da hipérbole e com (5.23), somente o ramo esquerdo.

Exemplo 5.8. Vamos mostrar que a parametrização de uma curva em relação a qual sabemos sua equação em coordenadas polares $r = f(\theta)$ pode ser feita da seguinte forma

$$x = f(t)\cos t \quad \text{e} \quad y = f(t)\,\mathrm{sen}\, t. \tag{5.24}$$

A equação da curva em coordenadas cartesianas é

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) < 0. \end{cases}$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2} = |f(\theta(x,y))|. \tag{5.25}$$

Para a parametrização (5.24) temos que

$$\sqrt{x^2+y^2} - |f(\theta(x,y))| = \sqrt{(f(t))^2\cos^2 t + (f(t))^2\,\mathrm{sen}^2\, t} - |f(t)| = 0.$$

O que mostra que (5.24) é uma parametrização para (5.25) e portanto para $r = f(\theta)$. Por exemplo,

$$x = \frac{e\cos t}{1 + e\cos t} \quad \text{e} \quad y = \frac{e\,\mathrm{sen}\, t}{1 + e\cos t}$$

é uma parametrização de uma cônica com excentricidade $e > 0$, reta diretriz localizada à direita a uma distância igual a 1 e um dos focos na origem.

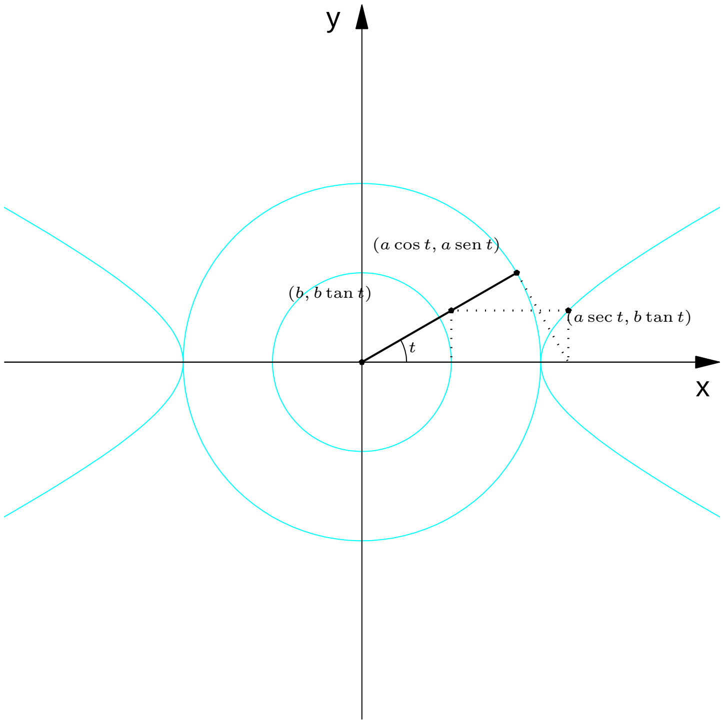


Figura 5.36: Hipérbole parametrizada usando secante e tangente

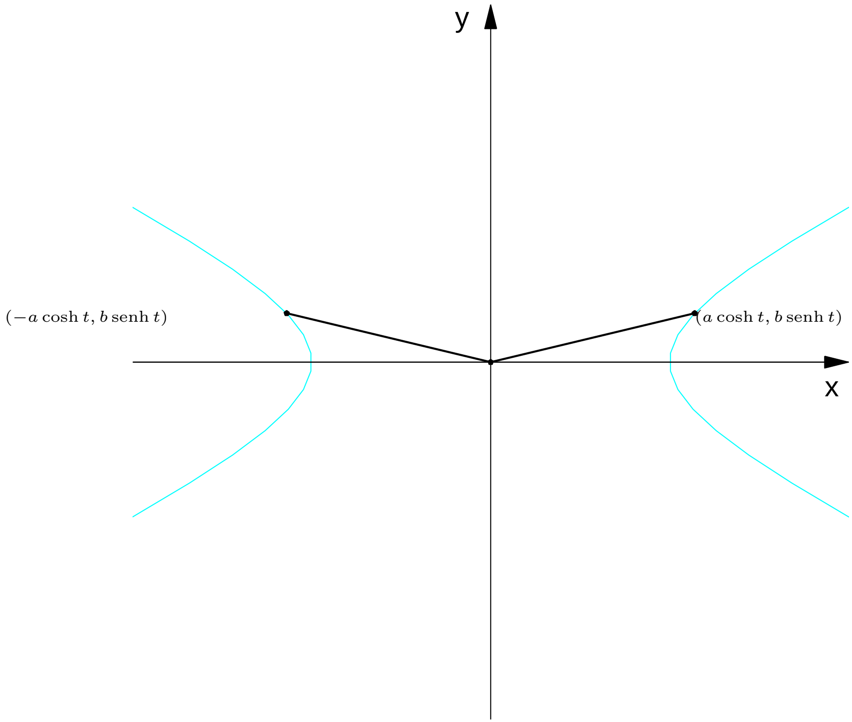


Figura 5.37: Hipérbole parametrizada usando as funções hiperbólicas

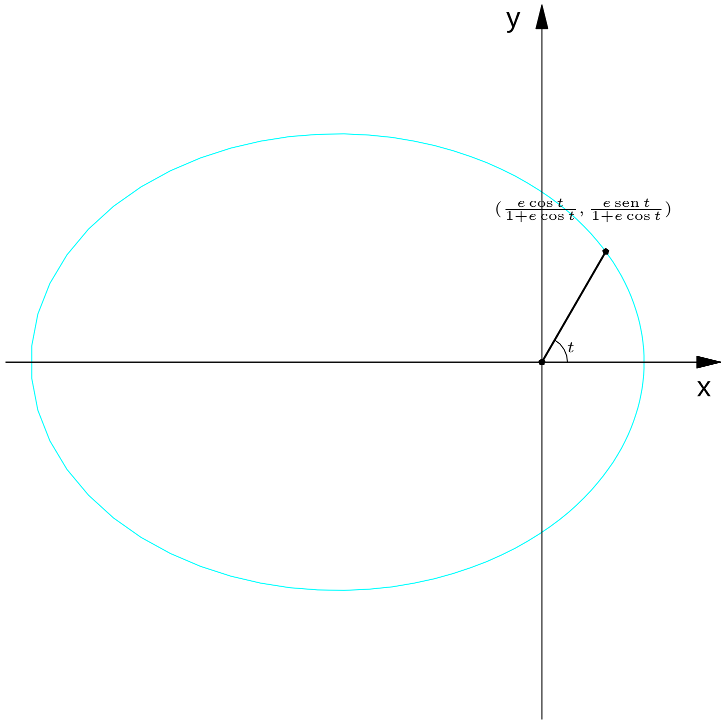


Figura 5.38: Elipse com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

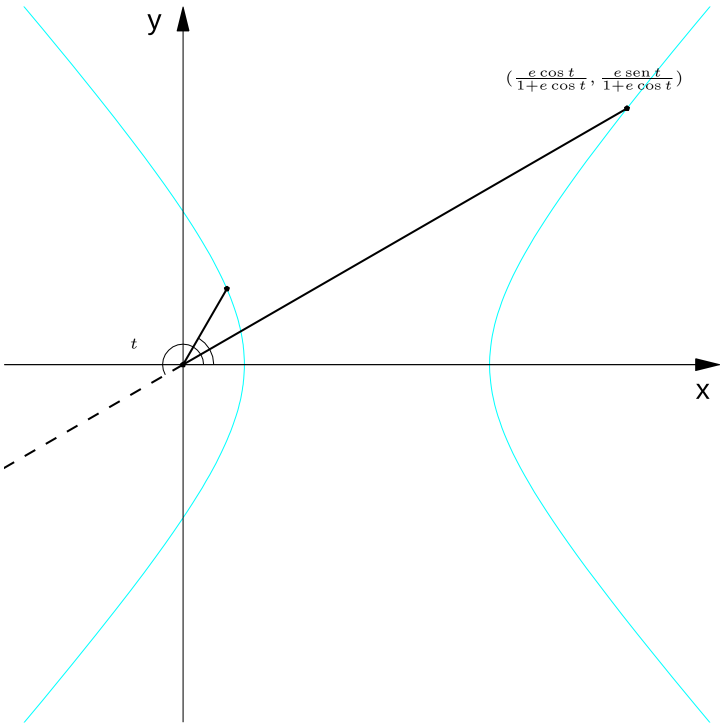


Figura 5.39: Hipérbole com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

Exercícios Numéricos

5.2.1. Transformar a equação em coordenadas retangulares em uma equação em coordenadas polares:

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $x^2 - y^2 = 4$

(c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

(d) $x^2 - 4y - 4 = 0$

5.2.2. Transformar a equação em coordenadas polares em uma equação em coordenadas retangulares:

(a) $r = \dfrac{2}{1 - 3\cos\theta}$

(b) $r = 4 \operatorname{sen}\theta$

(c) $r = 9\cos\theta$

(d) $r = \dfrac{3}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

5.2.3. Identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada. Determine a excentricidade, a equação da diretriz, a distância da diretriz ao foco e as coordenadas polares do(s) vértice(s):

(a) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$

(b) $r = \dfrac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$

(c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$

(d) $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

5.2.4. Determine o raio e e as coordenadas polares do centro da circunferência cuja equação em coordenadas polares é dada:

(a) $r = 4\cos\theta$

(b) $r = -3\operatorname{sen}\theta$

(c) $r = \frac{3}{2}\cos\theta$

(d) $r = -\frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta$

5.2.5. A equação da trajetória de uma partícula lançada do ponto $P_0 = (0, 0)$, com velocidade v_0, fazendo um ângulo α com o eixo x e sujeita apenas a ação da aceleração da gravidade g é dada por

$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Mostre que

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \quad \text{e} \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

são equações paramétricas da trajetória da partícula.

Exercícios Teóricos

5.2.6. Se o centro de uma circunferência que passa pelo polo é (a, α), mostre que sua equação em coordenadas polares é

$$r = 2a\cos(\theta - \alpha).$$

5.2.7. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 - e\cos\theta}$ representa uma parábola, determine as coordenadas polares do seu vértice e a equação em coordenadas polares da reta diretriz.

5.2.8. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ representa uma elipse, mostre que o comprimento do seu eixo menor é $\dfrac{2de}{\sqrt{1 - e^2}}$.

5.2.9. Mostre que a equação em coordenadas polares de uma elipse com um dos focos no polo, que tem eixo maior igual a $2a$ e excentricidade e é

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}.$$

Capítulo 6

Superfícies e Curvas no Espaço

6.1 Quádricas

Nesta seção estudaremos as superfícies que podem ser representadas pelas **equações quadráticas** nas variáveis x, y e z, ou seja, da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

em que $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos. Vamos nos limitar neste capítulo ao estudo de casos especiais da equação acima.

6.1.1 Elipsóide

Um **elipsóide** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

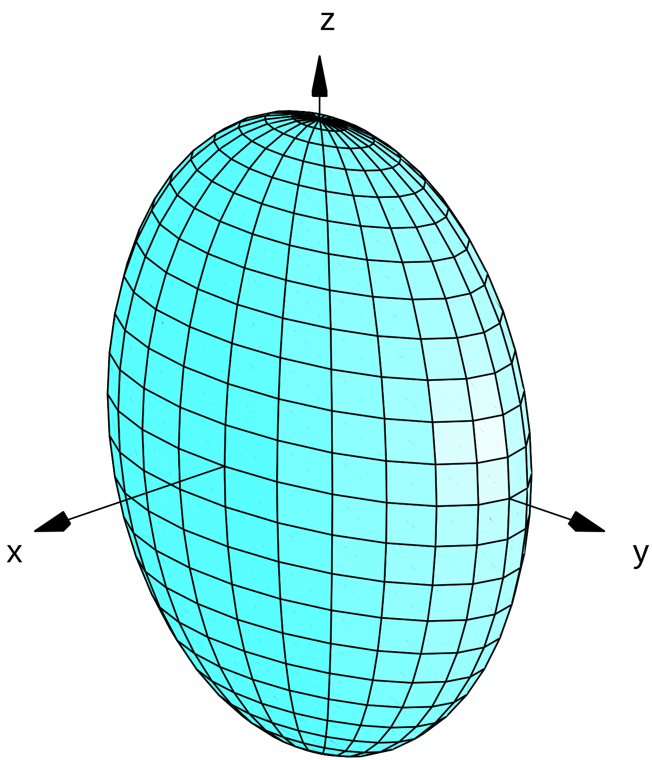


Figura 6.1: Elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

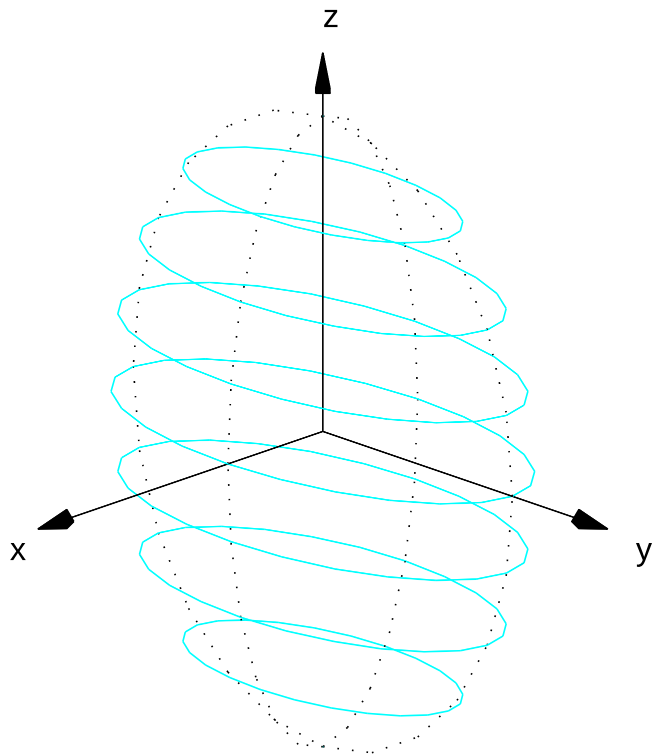


Figura 6.2: Elipsóide e interseções com os planos $z = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.1}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação ao plano xy, $(x, y, -z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao plano xy. Também $(x, -y, z)$ satisfaz (6.1), por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao plano xz. O mesmo acontece com $(-x, y, z)$, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao plano yz. Se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação ao eixo z, $(-x, -y, z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao eixo z. O mesmo acontece com $(-x, y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao eixo y. O mesmo acontece com $(x, -y, -z)$, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação ao eixo x. Finalmente se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação à origem, $(-x, -y, -z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsóide (6.1) é simétrico em relação à origem.

Se $|k| < c$, o plano $z = k$ intercepta o elipsóide (6.1) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse diminuem à medida que $|k|$ aumenta.

As interseções do elipsóide (6.1) com o plano $x = k$, para $|k| < a$ e com o plano $y = k$, para $|k| < b$, são também elipses. Se $a = b = c$, o elipsóide é uma **esfera** de raio $r = a = b = c$.

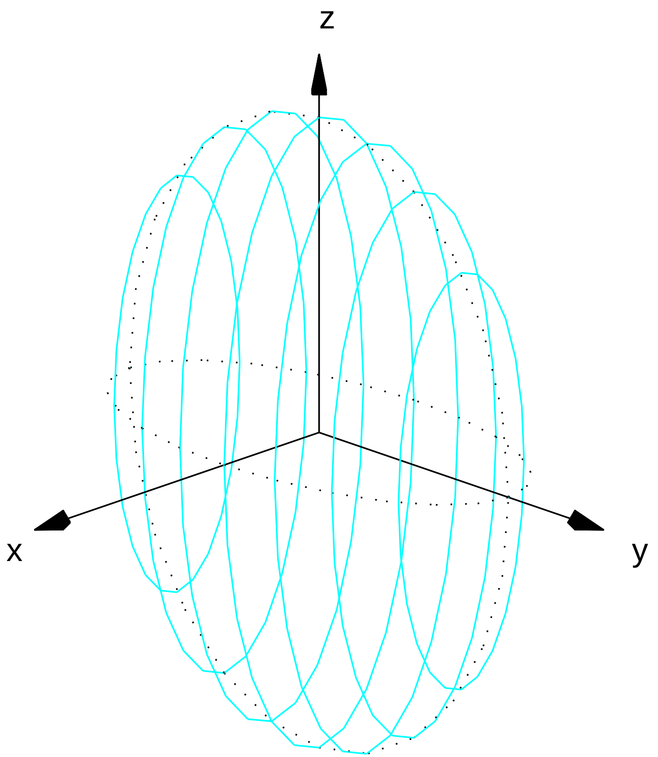


Figura 6.3: Elipsóide e interseções com os planos $y = k$

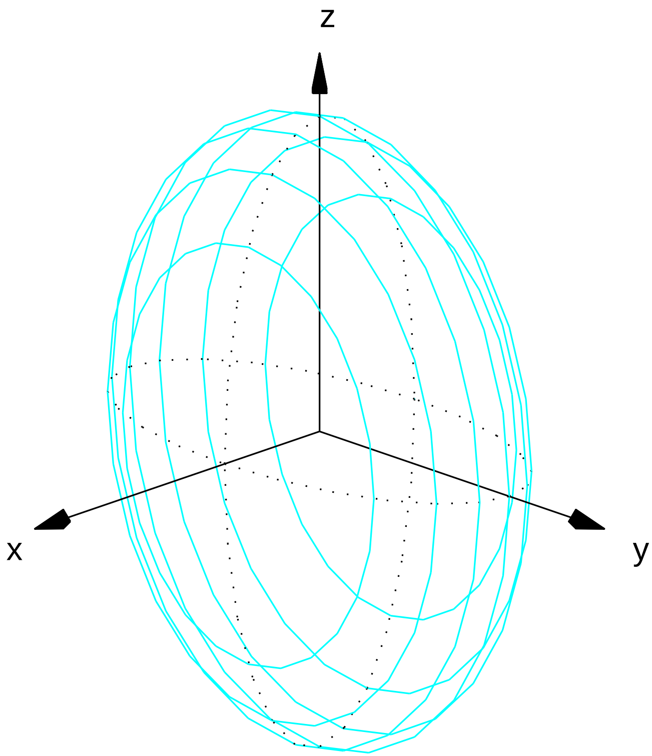


Figura 6.4: Elipsóide e interseções com os planos $x = k$

6.1.2 Hiperbolóide

Hiperbolóide de Uma Folha

Um **hiperbolóide de uma folha** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{6.2}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de uma folha (6.2) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.2), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (6.2) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1, \quad z=k.$$

Observe que os eixos da elipse aumentam à medida que $|k|$ cresce.

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de uma folha (6.2) segundo uma curva cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}, \quad y=k.$$

Se $|k/b| \neq 1$, então a interseção é uma hipérbole e se $|k/b| = 1$, então a interseção é um par de retas concorrentes.

Considerações semelhantes são válidas para a interseção do hiperbolóide de uma folha (6.2) com o plano $x = k$.

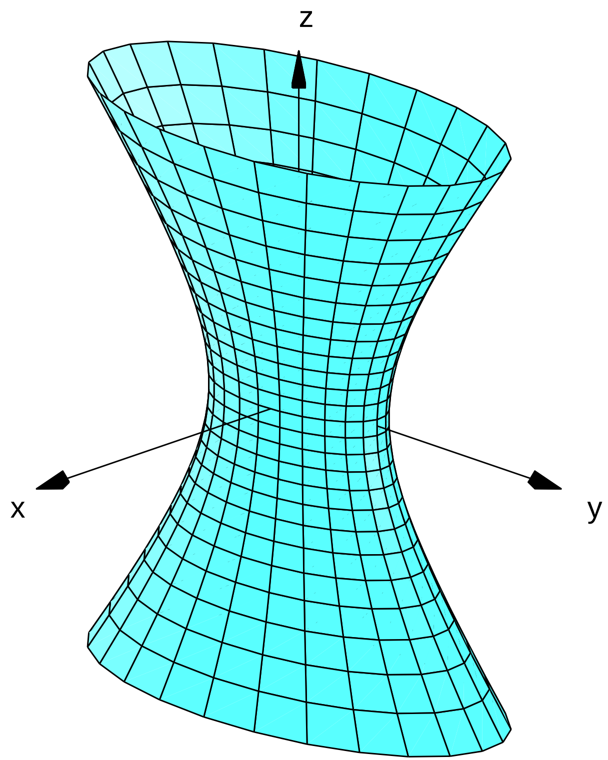


Figura 6.5: Hiperbolóide de uma folha de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

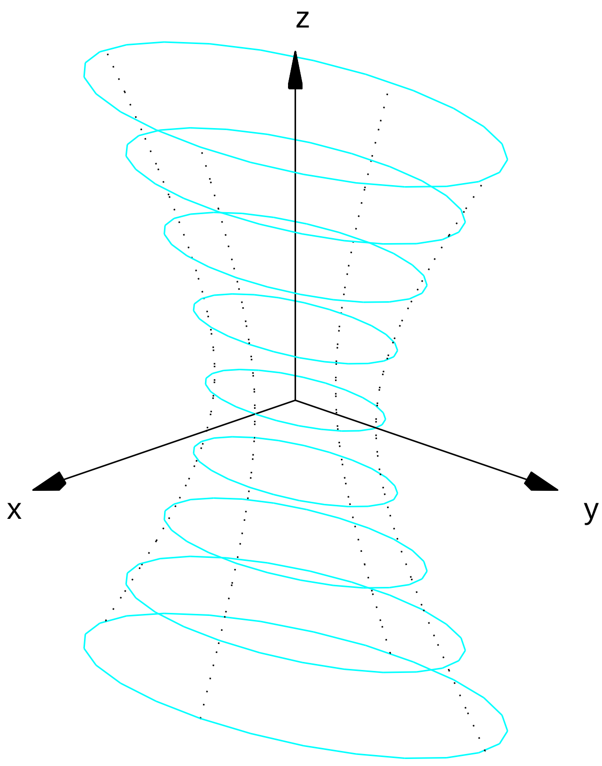


Figura 6.6: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $z = k$

As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperbolóides de uma folha.

Hiperbolóide de Duas Folhas

Um **hiperbolóide de duas folhas** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.3}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperbolóide de duas folhas (6.3) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.3), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$, para $|k| > c$, intercepta o hiperbolóide de duas folhas (6.3) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)} = 1, \quad z = k.$$

O plano $y = k$ intercepta o hiperbolóide de duas folhas (6.3) segundo a hipérbole

$$-\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1, \quad y = k.$$

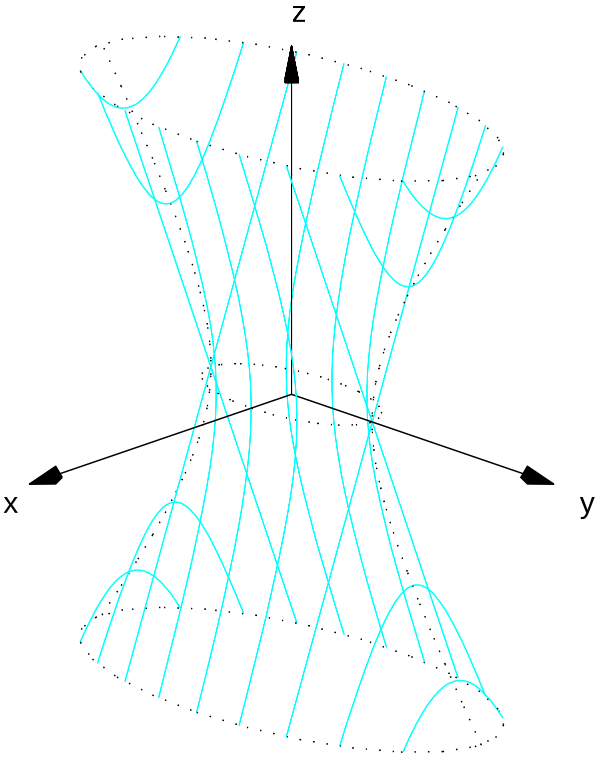


Figura 6.7: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $y = k$

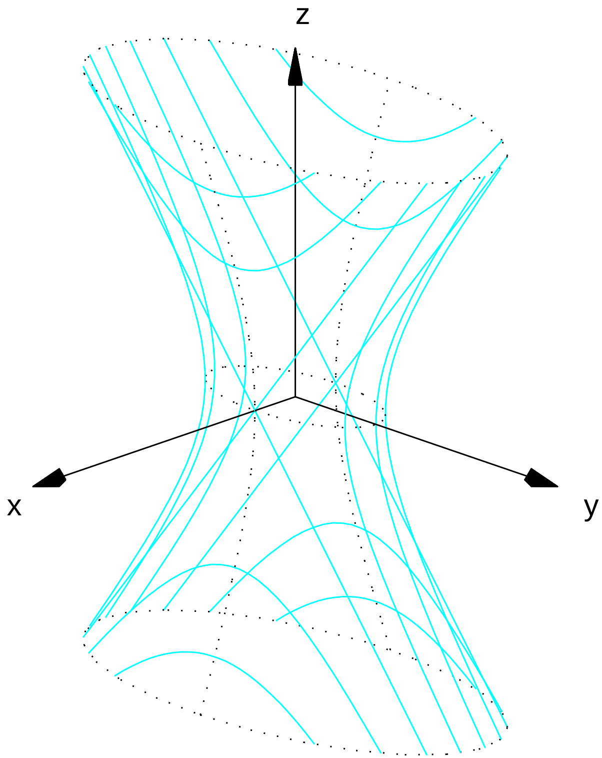


Figura 6.8: Hiperbolóide de uma folha e interseções com os planos $x = k$

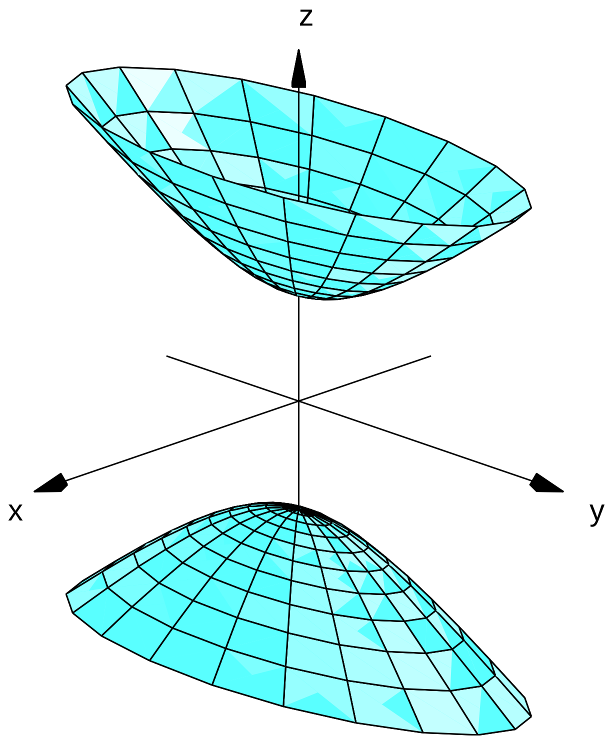


Figura 6.9: Hiperbolóide de duas folhas

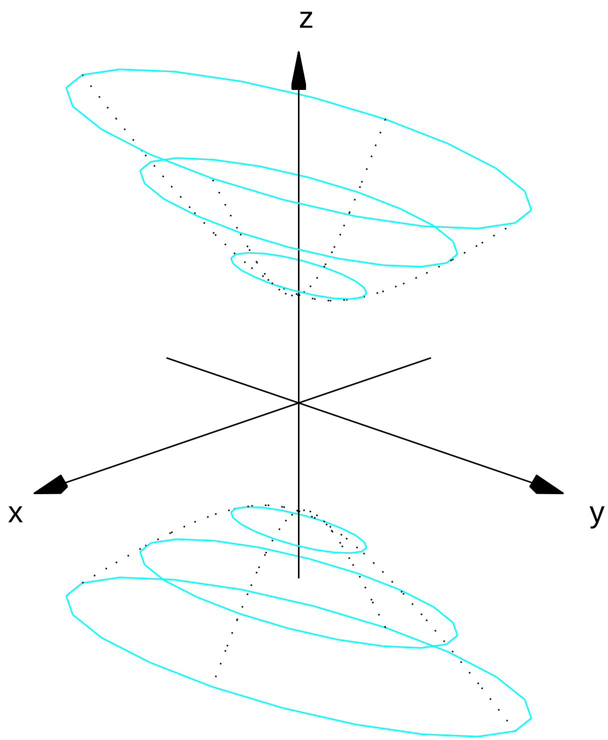


Figura 6.10: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $z = k$

A interseção do hiperbolóide de duas folhas (6.3) com o plano $x = k$ é também uma hipérbole. As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperbolóides de duas folhas.

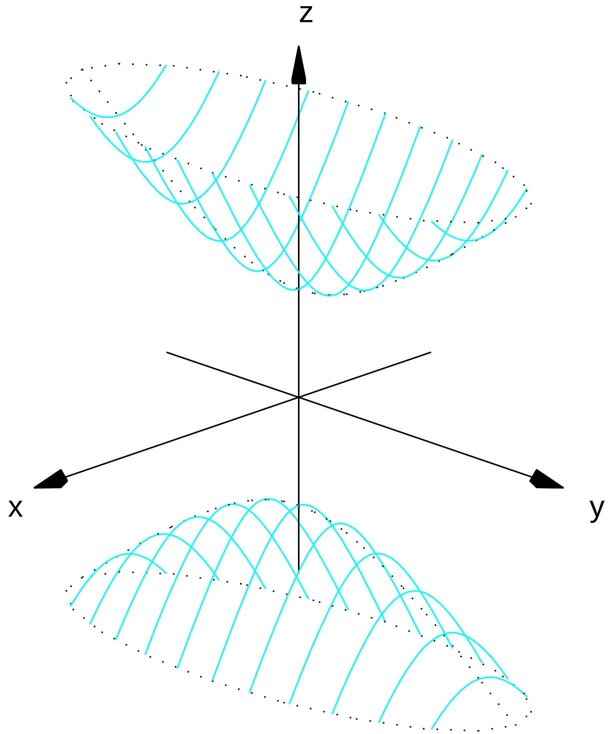


Figura 6.11: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $y = k$

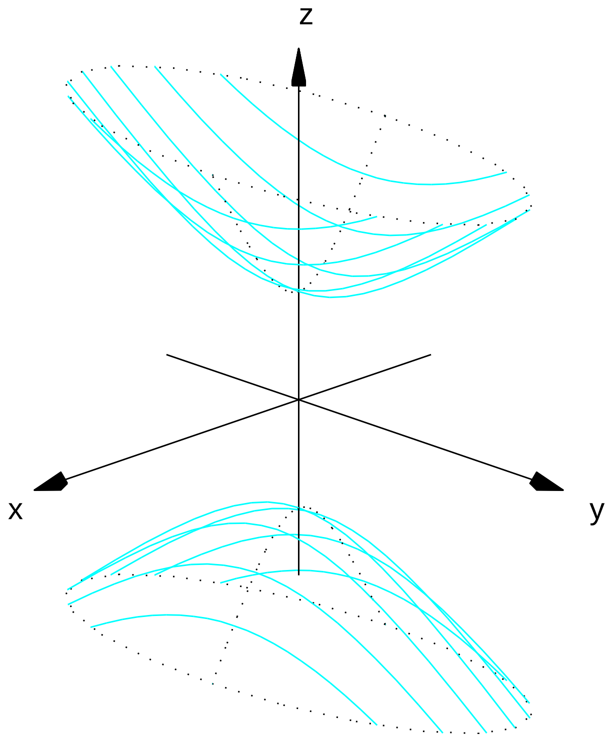


Figura 6.12: Hiperbolóide de duas folhas e interseções com os planos $x = k$

6.1.3 Parabolóide

Parabolóide Elíptico

Um **parabolóide elíptico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.4}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

O parabolóide elíptico (6.4) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.4), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (6.4), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

A interseção do parabolóide elíptico (6.4) com o plano $z = k$, para k tal que $ck > 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, \quad z = k.$$

A interseção do parabolóide elíptico (6.4) com plano $x = k$ é a parábola

$$z = \frac{k^2}{ca^2} + \frac{y^2}{cb^2}, \quad x = k.$$

A interseção do parabolóide elíptico (6.4) com plano $y = k$ também é uma parábola.

As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

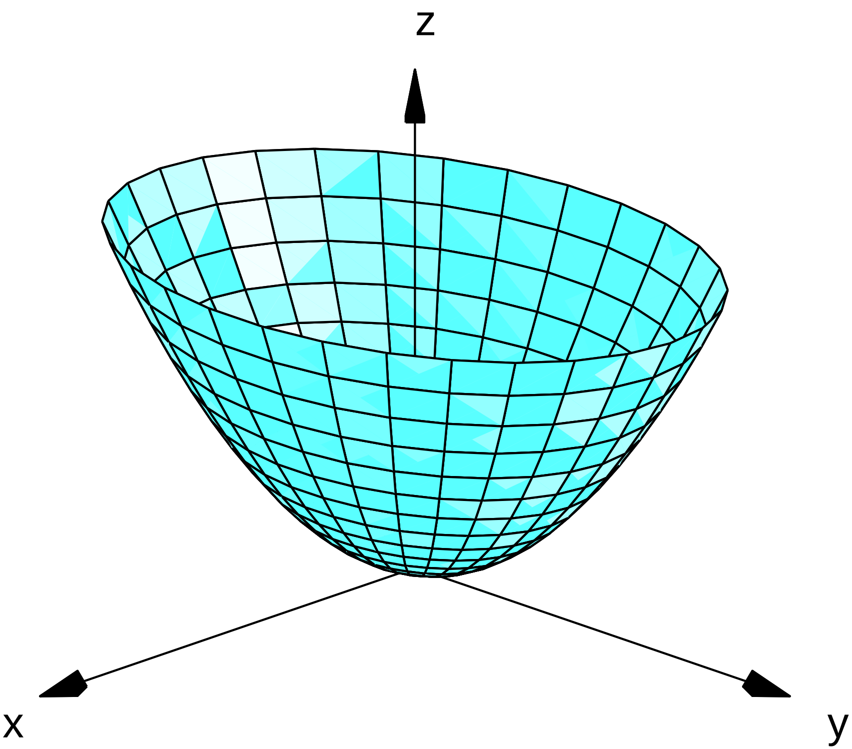


Figura 6.13: Parabolóide elíptico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, para $c > 0$

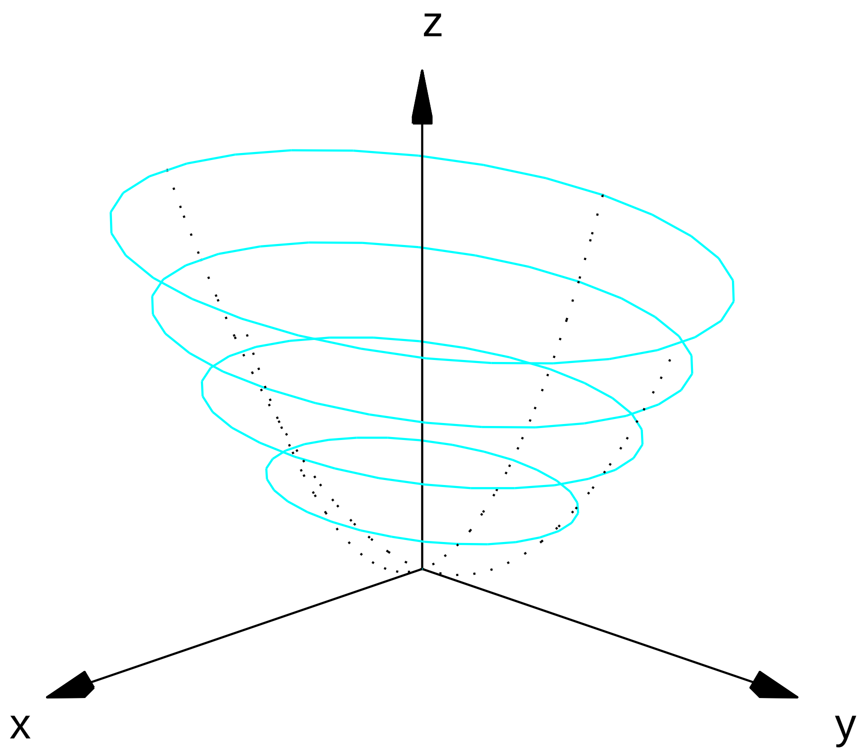


Figura 6.14: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $z = k$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam parabolóides elípticos.

Parabolóide Hiperbólico

Um **parabolóide hiperbólico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.5}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.

O parabolóide hiperbólico (6.5) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.5), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (6.5), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.

A interseção do plano $z = k$ com o parabolóide hiperbólico (6.5) é dada por

$$\frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2} = k, \quad z = k,$$

que representa uma hipérbole, se $k \neq 0$ e um par de retas, se $k = 0$.

A interseção do parabolóide hiperbólico (6.5) com plano $y = k$ é a parábola

$$z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{k^2}{cb^2}, \quad y = k$$

que tem concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$.

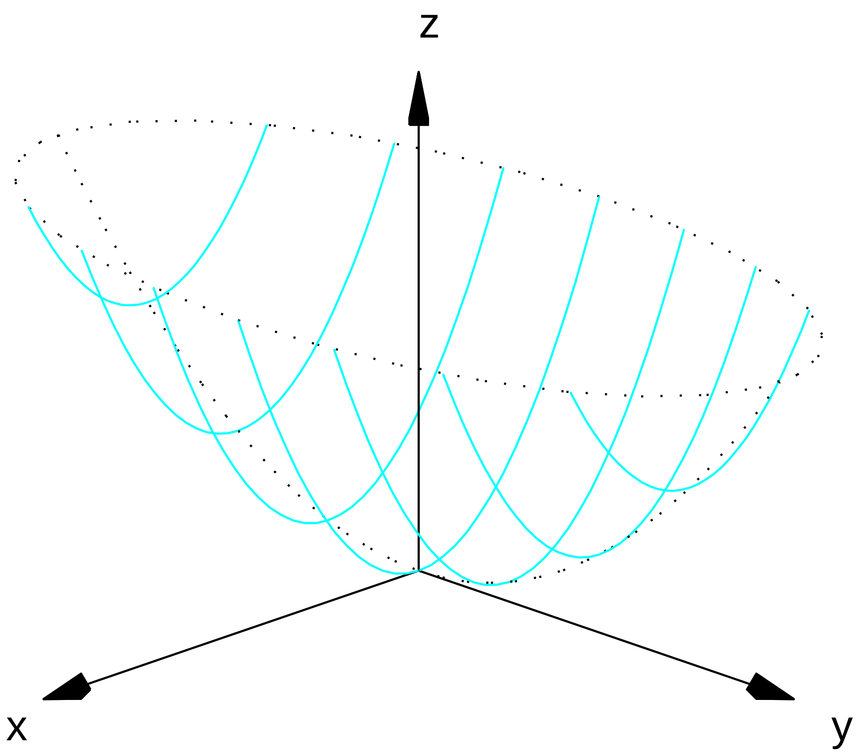


Figura 6.15: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $y = k$

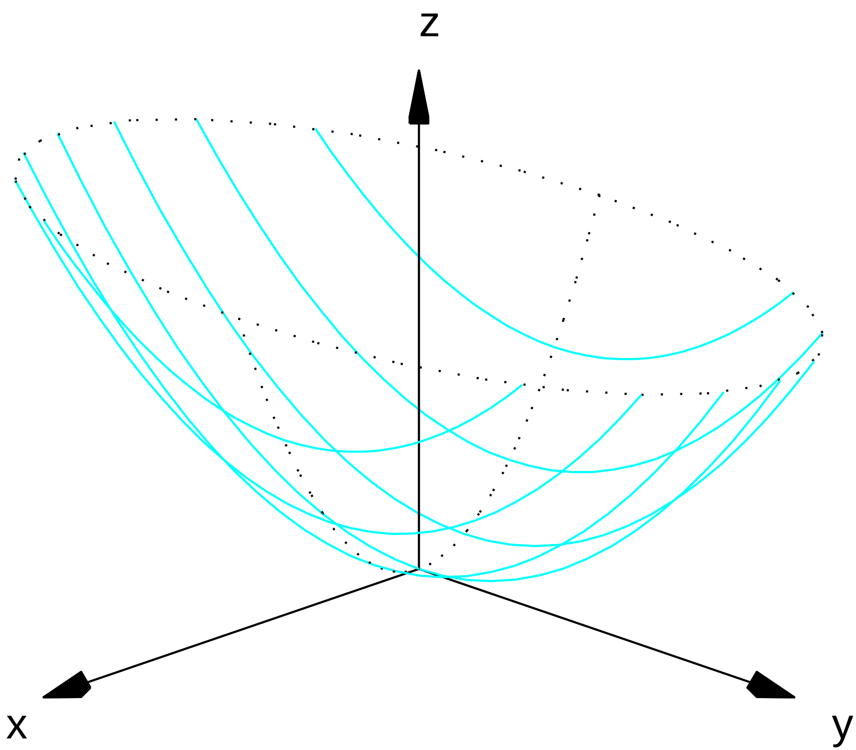


Figura 6.16: Parabolóide elíptico e interseções com os planos $x = k$

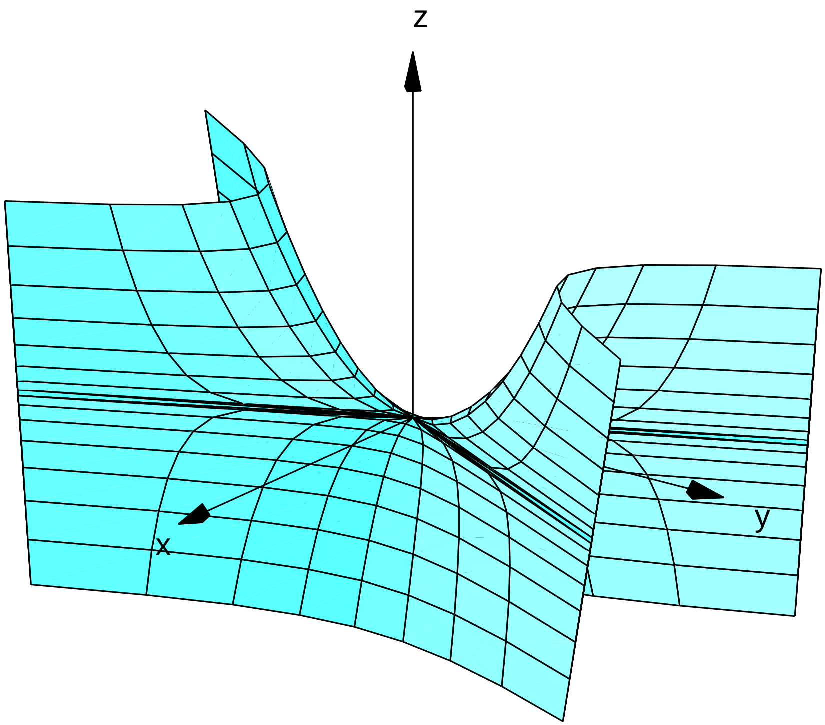


Figura 6.17: Parabolóide hiperbólico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, para $c < 0$

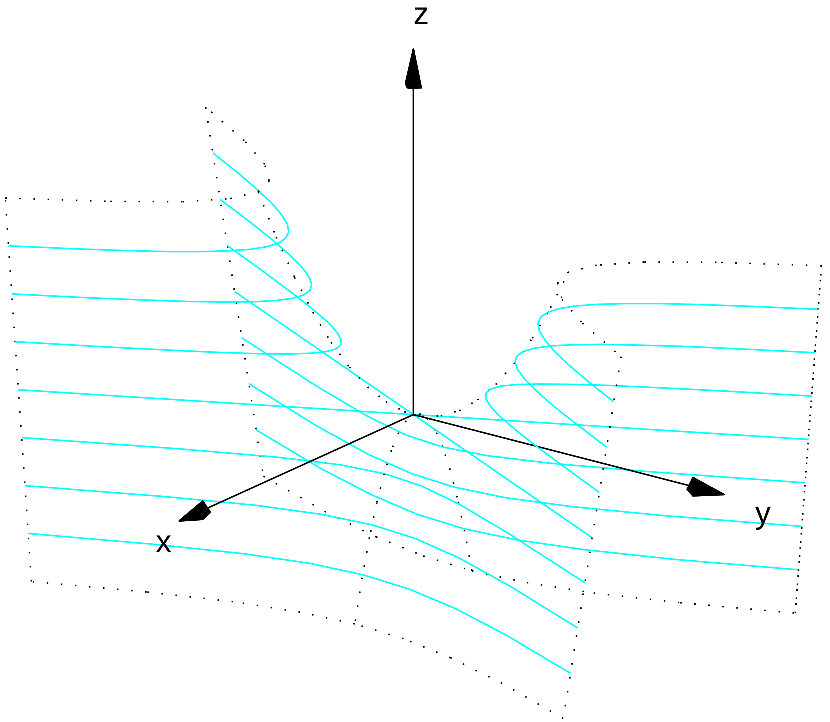


Figura 6.18: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $z = k$

A interseção do parabolóide hiperbólico com plano $x = k$ é a parábola

$$z = -\frac{y^2}{cb^2} + \frac{k^2}{ca^2}, \quad x = k$$

que tem concavidade para baixo se $c > 0$ e concavidade para cima se $c < 0$. O parabolóide hiperbólico é também chamado **sela**.

As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

também representam parabolóides hiperbólicos.

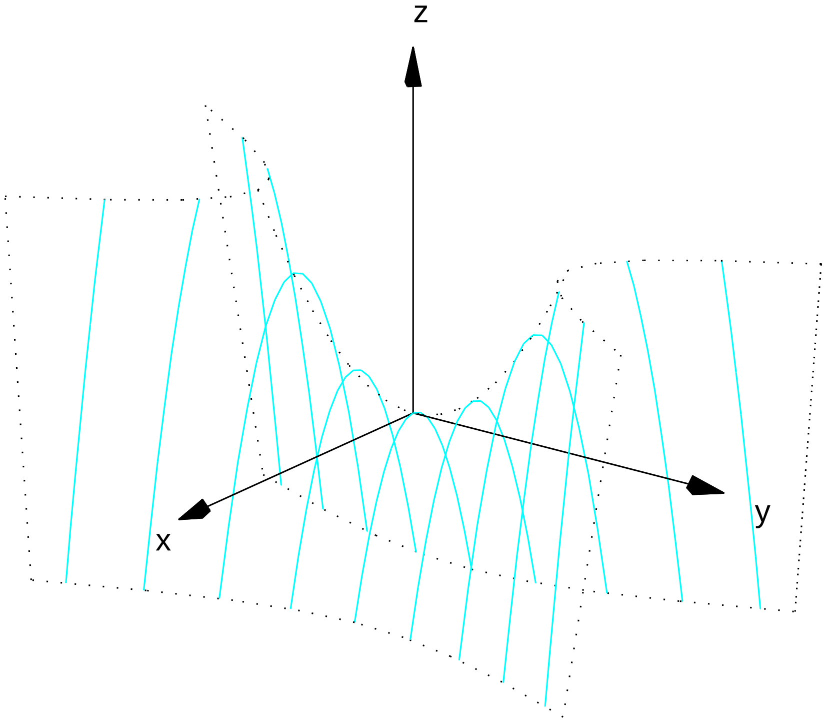


Figura 6.19: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $y = k$

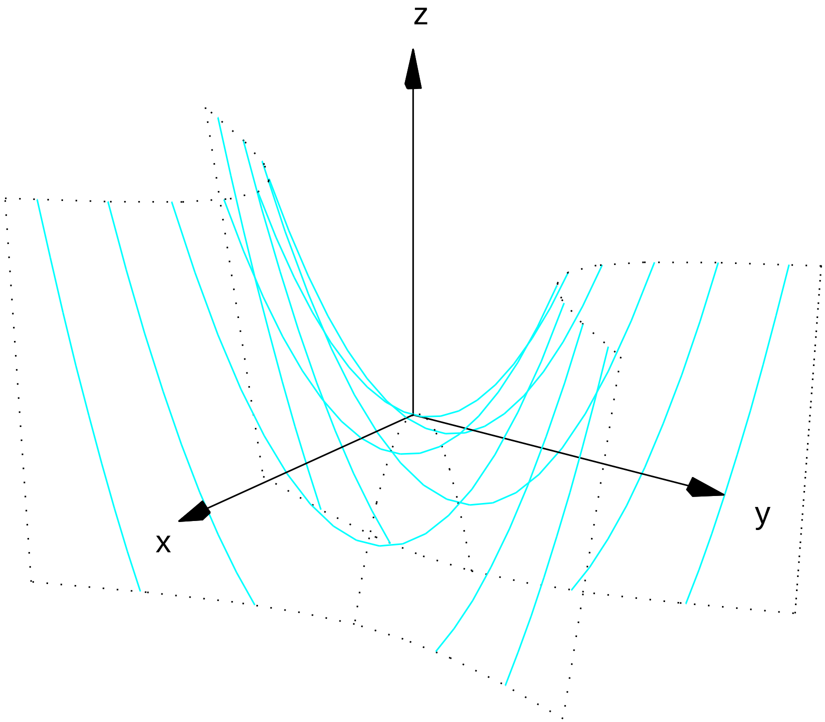


Figura 6.20: Parabolóide hiperbólico e interseções com os planos $x = k$

6.1.4 Cone Elíptico

Um **cone elíptico** é um conjunto de pontos que satisfaz a equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.6}$$

em que a e b são números reais positivos, em algum sistema de coordenadas. Se $a = b$, o cone é chamado **cone circular**.

Observe que o cone elíptico (6.6) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.6), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $z = k$, para $k \neq 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse crescem à medida que $|k|$ aumenta.

Os planos xz e yz cortam o cone elíptico (6.6) segundo as retas

$$x = \pm az,\ y = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm bz,\ x = 0,$$

respectivamente.

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $y = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2k^2/b^2} = 1, \quad y = k.$$

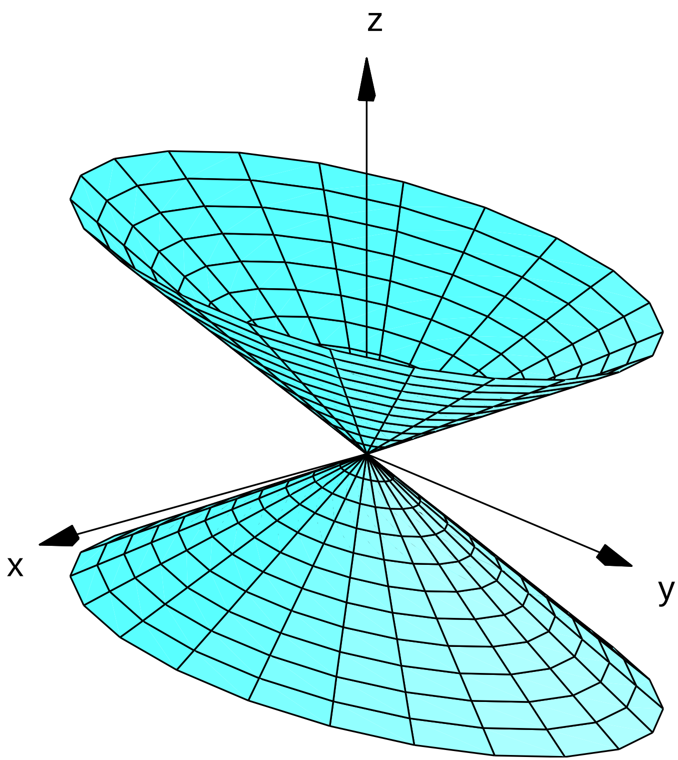


Figura 6.21: Cone elíptico de equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

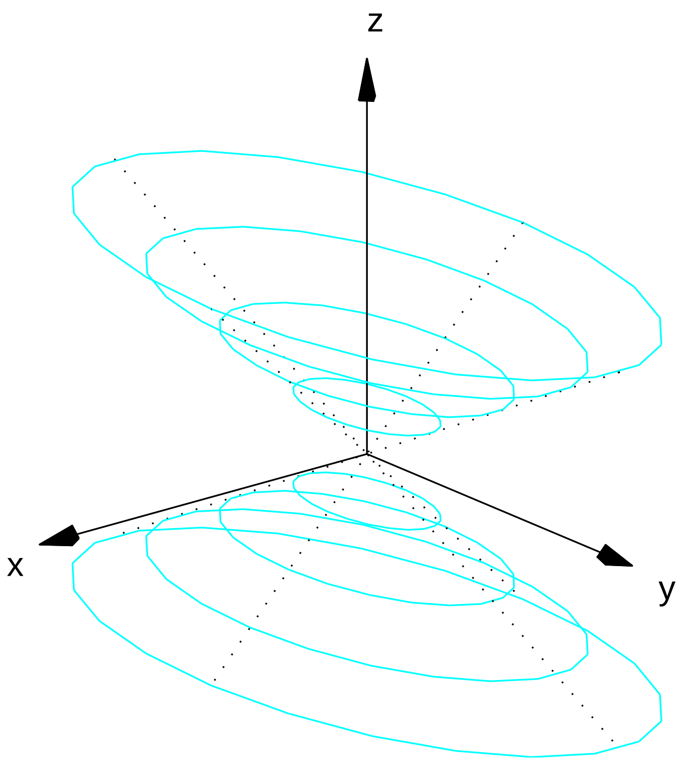


Figura 6.22: Cone elíptico e interseções com os planos $z = k$

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $x = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/a^2} - \frac{y^2}{b^2k^2/a^2} = 1, \quad x = k.$$

As equações

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam cones elípticos.

6.1.5 Cilindro Quádrico

Um **cilindro quádrico** é um conjunto de pontos do espaço, que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$f(x, y) = 0 \tag{6.7}$$

em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma cônica no plano xy.

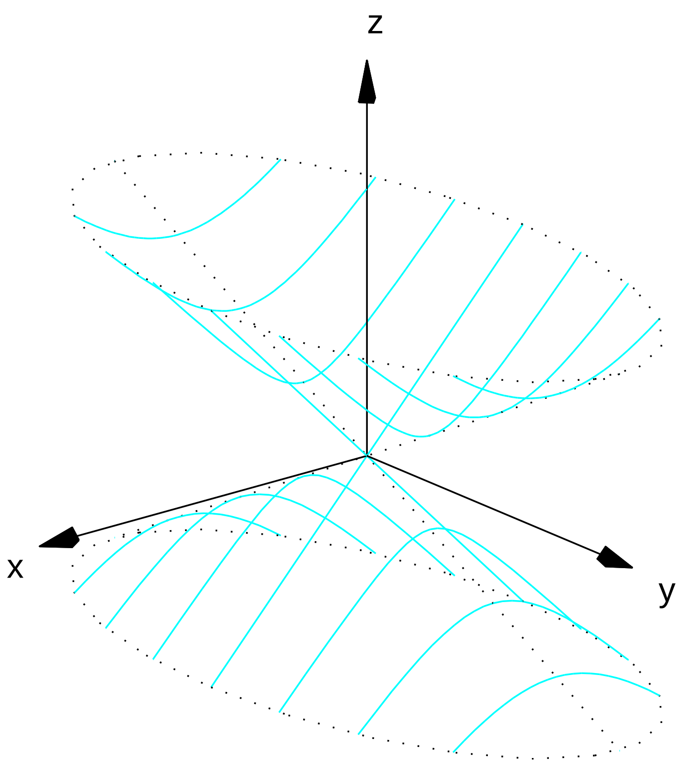


Figura 6.23: Cone elíptico e interseções com os planos $y = k$

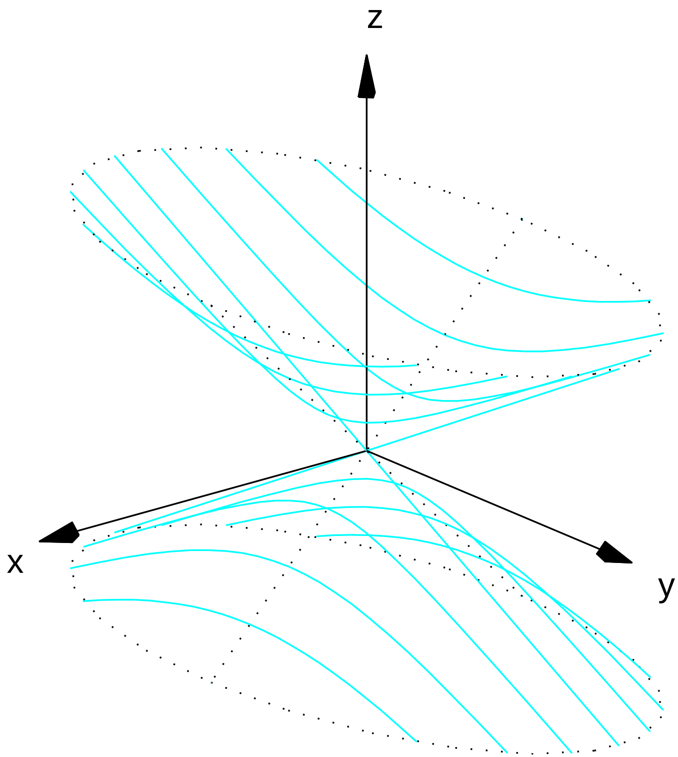


Figura 6.24: Cone elíptico e interseções com os planos $x = k$

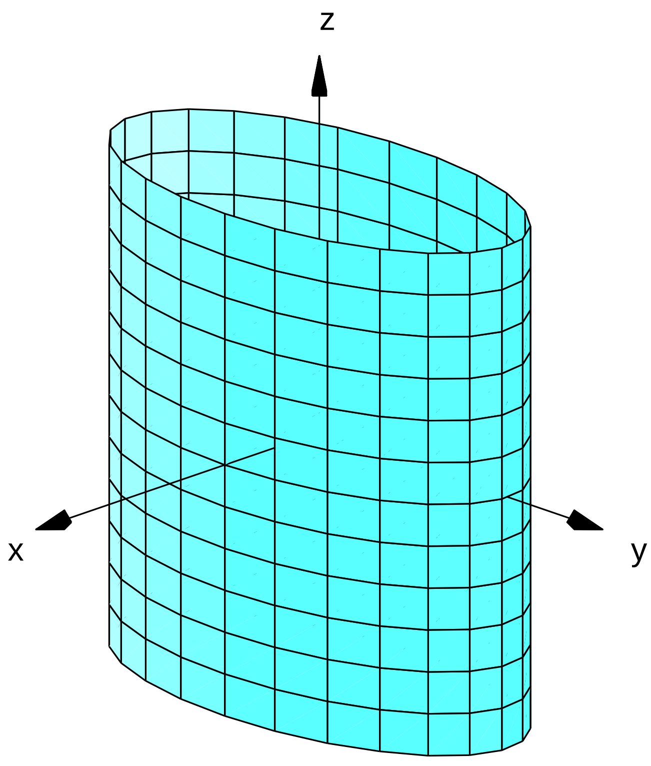


Figura 6.25: Cilindro elíptico de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

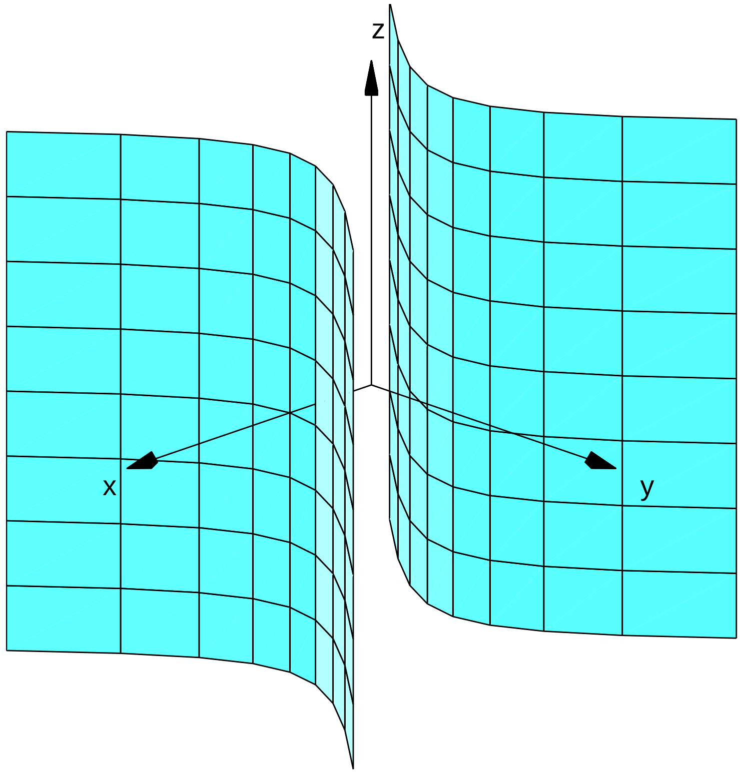


Figura 6.26: Cilindro hiperbólico de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

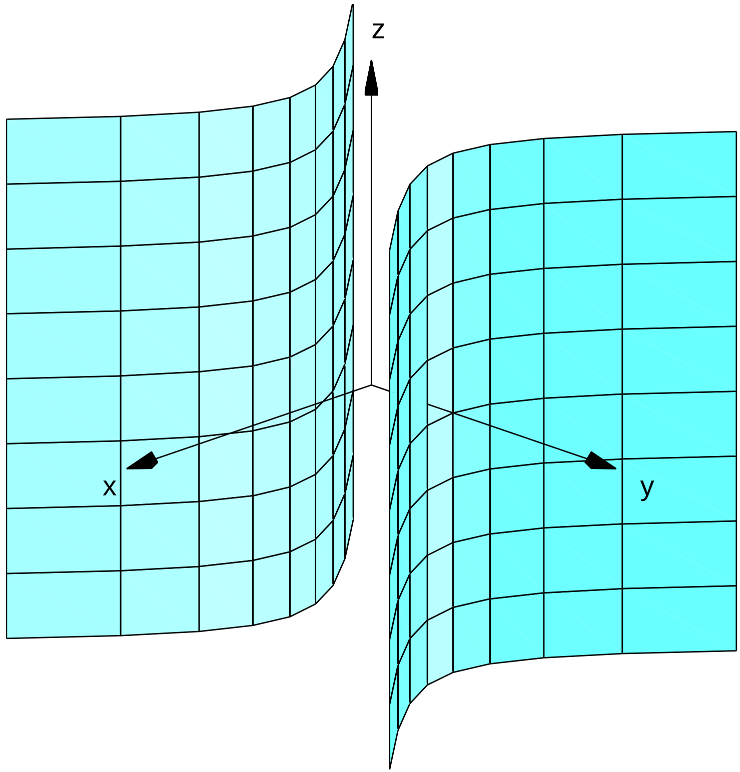


Figura 6.27: Cilindro hiperbólico de equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

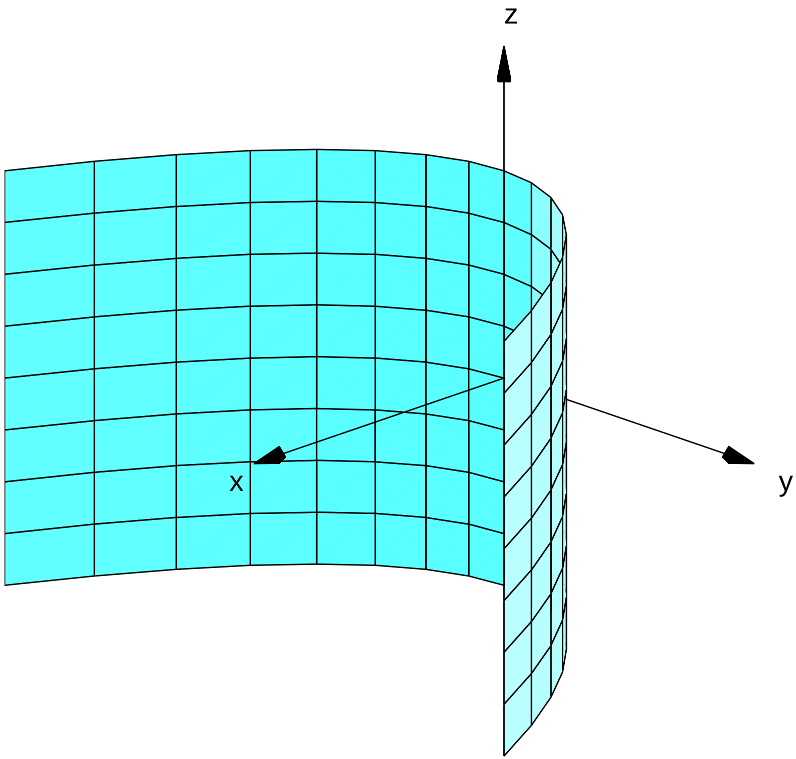


Figura 6.28: Cilindro parabólico de equação $y^2 = 4px$, $p > 0$

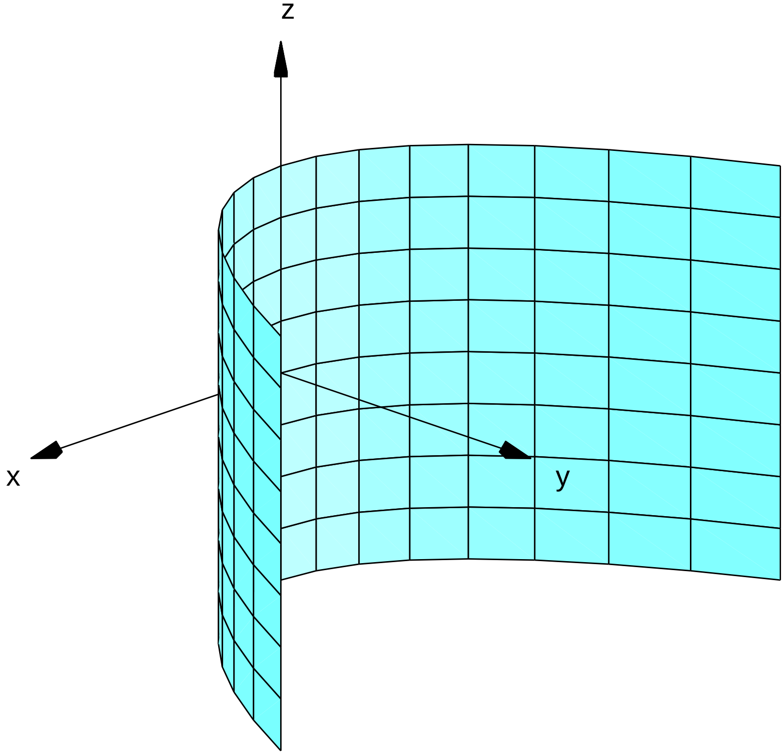


Figura 6.29: Cilindro parabólico de equação $x^2 = 4py$, $p > 0$

Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro elíptico**, se a cônica de equação $f(x, y) = 0$ é uma elipse. Por exemplo, a equação $x^2 + 2y^2 = 1$ representa uma elipse no plano, enquanto representa um cilindro elíptico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro hiperbólico**, se a cônica de equação $f(x, y) = 0$ é uma hipérbole. Por exemplo, a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ representa uma hipérbole no plano, enquanto representa um cilindro hiperbólico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro parabólico**, se a cônica de equação $f(x, y) = 0$ é uma parábola. Por exemplo, a equação $x^2 = 4y$ representa uma parábola no plano, enquanto representa um cilindro parabólico no espaço.

A interseção do plano $z = k$ com o cilindro é a cônica que o originou, chamada **diretriz do cilindro**:

$$f(x, y) = 0, \quad z = k.$$

Se a equação $f(x, k) = 0$ tem m soluções ($m = 0, 1$ ou 2), então o plano $y = k$ intercepta a superfície segundo m retas

$$f(x, y) = 0, \quad y = k.$$

Considerações semelhantes são válidas para a interseção com o plano $x = k$.

As equações

$$g(x, z) = 0 \quad \text{e} \quad h(y, z) = 0$$

também representam cilindros quádricos desde que $g(x, z) = 0$ e $h(y, z) = 0$ sejam equações de cônicas nos planos xz e yz, respectivamente.

Exercícios Numéricos (respostas na página 616)

6.1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$

(b) $x^2 + y + z^2 = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

(d) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

6.1.2. Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?

6.1.3. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas $r : (x, y, z) = t(1, 0, 0)$ e $s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1)$. Que lugar geométrico é este?

6.1.4. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6. Que lugar geométrico é este?

6.1.5. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que o módulo da diferença entre as as distâncias de $P = (x, y, z)$ aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 3. Que lugar geométrico é este?

6.2 Superfícies Cilíndricas, Cônicas e de Revolução

6.2.1 Superfícies Cilíndricas

Uma **superfície cilíndrica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta, chamada **geratriz**, se move paralelamente passando por uma curva fixa, chamada **diretriz**.

Suponhamos que a curva diretriz da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ esteja no plano xy e tenha equação

$$f(x,y)=0 \tag{6.8}$$

e que as retas geratrizes sejam paralelas a um vetor que não é paralelo ao plano xy, digamos $V=(a,b,1)$. Seja $P=(x,y,z)$ um ponto qualquer sobre $\mathcal{S}$ e $P'=(x',y',0)$ um ponto do plano xy que está na reta geratriz que passa por P. O ponto (x,y,z) pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P'P}$ é paralelo a V e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{P'P}=\lambda V \quad \text{e} \quad f(x',y')=0,$$

que é equivalente a

$$(x-x',y-y',z)=\lambda(a,b,1) \quad \text{e} \quad f(x',y')=0.$$

Destas equações obtemos que $\lambda=z$, $x'=x-az$ e $y'=y-bz$. Assim a equação da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano xy com equação (6.8) e retas geratrizes paralelas ao vetor $V=(a,b,1)$ é

$$f(x-az,y-bz)=0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos coordenados yz e xz.

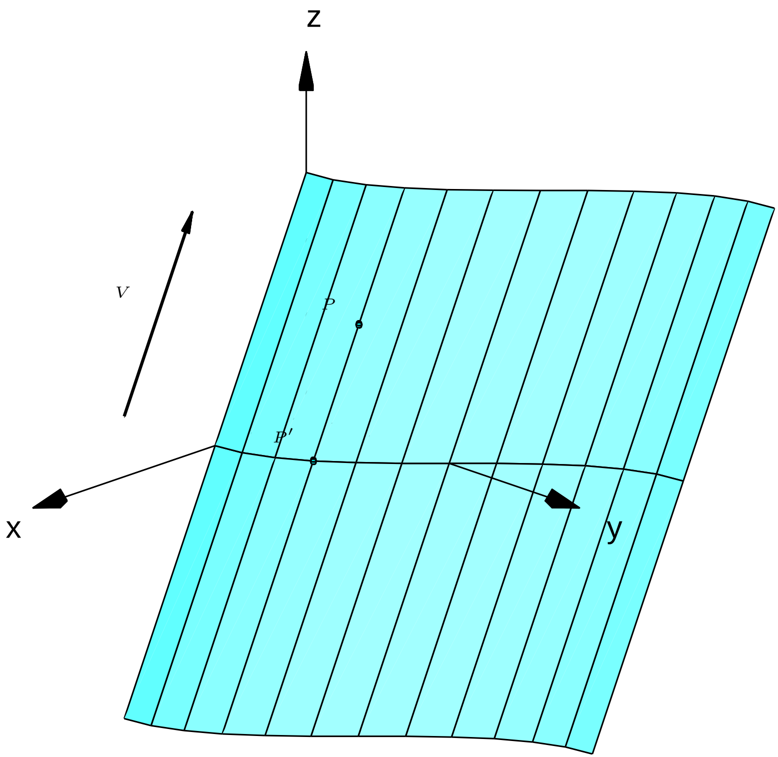


Figura 6.30: Superfície cilíndrica

Proposição 6.1. *Considere uma superfície cilíndrica.*

(a) *Se a sua curva diretriz está no plano* xy *com equação*

$$f(x, y) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a, b, 1)$*, então a sua equação é*

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

(b) *Se a sua curva diretriz está no plano* yz *com equação*

$$f(y, z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (1, b, c)$*, então a sua equação é*

$$f(y - bx, z - cx) = 0.$$

(c) *Se a sua curva diretriz está no plano* xz *com equação*

$$f(x, z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a, 1, c)$*, então a sua equação é*

$$f(x - ay, z - cy) = 0.$$

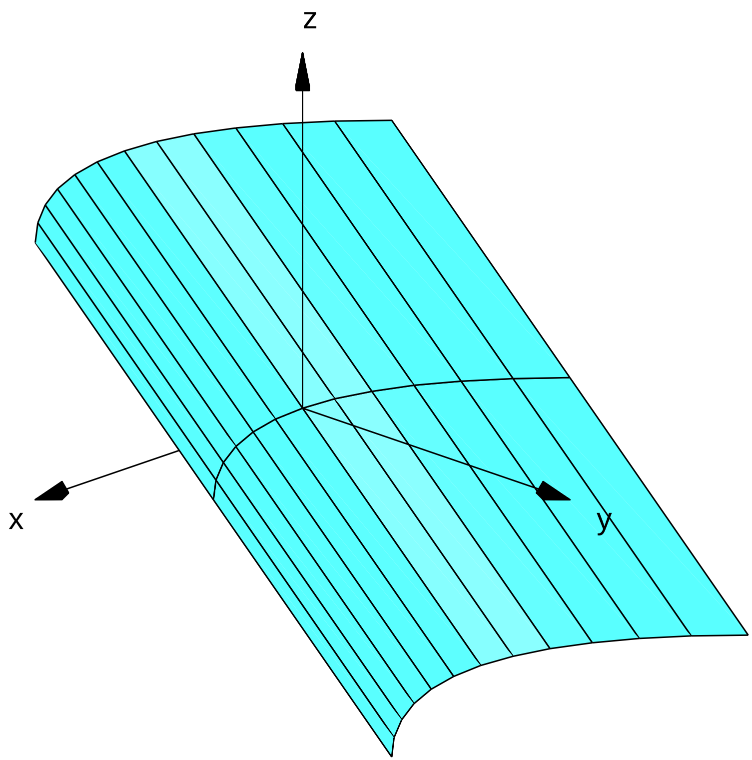


Figura 6.31: Superfície cilíndrica com diretrizes paralelas ao vetor $W = (1, 2, 3)$ e curva geratriz $x^2 - 4y = 0$, $z = 0$

Exemplo 6.1. Vamos determinar a equação da superfície cilíndrica que tem como curva diretriz no plano xy a parábola de equação $x^2 - 4y = 0$ e retas diretrizes paralelas ao vetor $W = (1, -2, 3)$. Para obtermos um vetor que tem a 3ª componente igual a 1 multiplicamos o vetor W por $1/3$ obtendo o vetor $V = (1/3, -2/3, 1)$ que também é paralelo às retas geratrizes. A equação da superfície é então

$$(x - z/3)^2 - 4(y + 2y/3) = 0.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cilíndrica se puder ser escrita na forma

$$f(x - az, y - bz) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y - bx, z - cx) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x - ay, z - cy) = 0.$$

Exemplo 6.2. Vamos mostrar que a superfície de equação

$$-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$$

é uma superfície cilíndrica. Fazendo $z = 0$ obtemos a curva candidata a diretriz no plano xy

$$-3x^2 + 3y^2 = 27$$

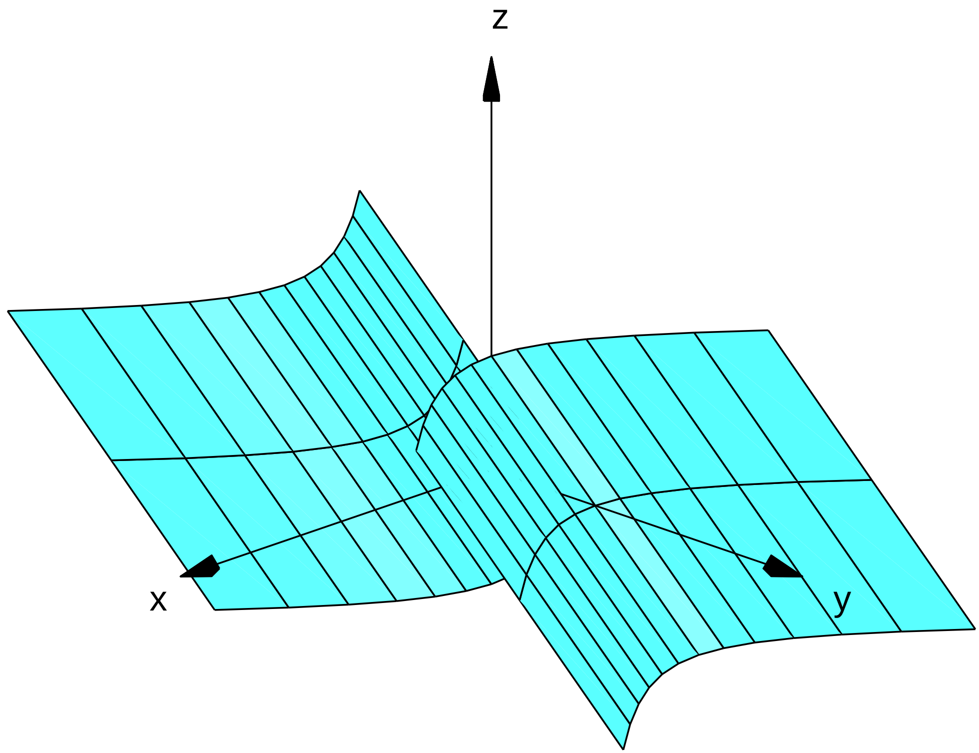


Figura 6.32: Superfície cilíndrica de equação $-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$

Agora, substituindo-se x por $x-\alpha z$ e y por $y-\beta z$ na equação da candidata a curva diretriz obtemos

$$-3(x-\alpha z)^2+3(y-\beta z)^2=-3x^2+3y^2+6\alpha xz-6\beta yz+(-3\alpha^2+3\beta^2)z^2=27.$$

Comparando-se com a equação da superfície obtemos que

$$\alpha=1/3 \quad \text{e} \quad \beta=-2/3$$

Portanto a superfície é cilíndrica com retas geratrizes paralelas ao vetor $V=(1/3,1,-2/3)$ e com curva diretriz $-3x^2+3y^2=27$.

6.2.2 Superfícies Cônicas

Uma **superfície cônica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa, chamada **diretriz**, e por um ponto fixo, chamado **vértice**, não situado no plano da geratriz.

Suponhamos que a curva diretriz da superfície cônica $\mathcal{S}$ esteja no plano $z=c$ e tenha equação

$$f(x,y)=0 \tag{6.9}$$

e que o vértice esteja na origem $O=(0,0,0)$. Seja $P=(x,y,z)$ uma ponto qualquer de $\mathcal{S}$ e $P'=(x',y',c)$ o ponto da curva diretriz situado na reta que une P à origem. O ponto P pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é paralelo a $\overrightarrow{OP'}$ e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\,\overrightarrow{OP'} \quad \text{e} \quad f(x',y')=0,$$

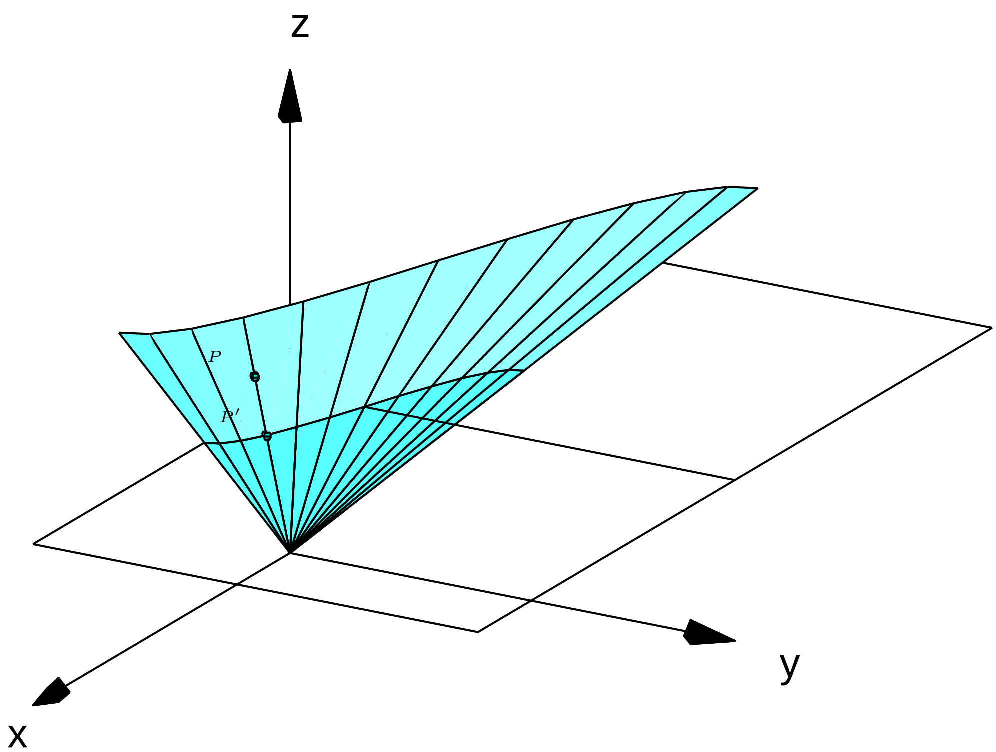


Figura 6.33: Superfície cônica

que é equivalente a
$$(x, y, z) = \lambda(x', y', c) \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0.$$
Destas equações obtemos que $\lambda = z/c$, $x' = cx/z$ e $y' = cy/z$. Assim a equação da superfície cônica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano $z = c$ com equação (6.9) e vértice na origem é
$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos $y = b$ e $x = a$.

Proposição 6.2. *Considere uma superfície cônica.*

(a) Se a sua curva diretriz está no plano $z = c$ *com equação*

$$f(x, y) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

(b) Se a sua curva diretriz está no plano $x = a$ *com equação*

$$f(y, z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{ay}{x}, \frac{az}{x}) = 0.$$

(c) Se a sua curva diretriz está no plano $y = b$ *com equação*

$$f(x, z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{bx}{y}, \frac{bz}{y}) = 0.$$

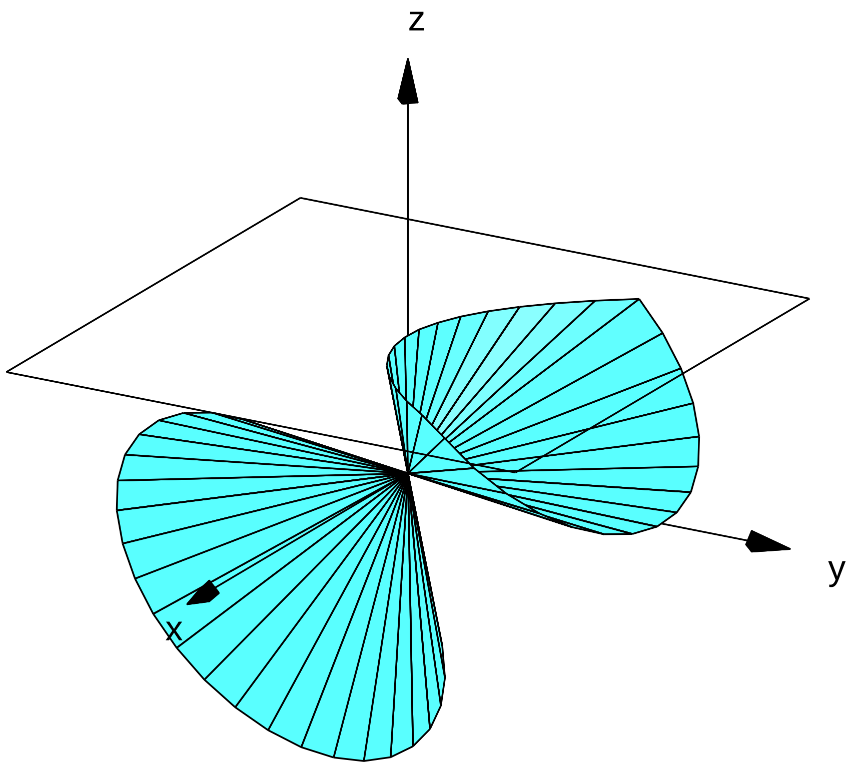


Figura 6.34: Superfície cônica cuja curva diretriz é $x^2 - 2y = 0$, $z = 1$.

Exemplo 6.3. Considere a parábola situada no plano $z = 1$ de equação

$$x^2 = 2y.$$

A equação da superfície cônica cuja curva diretriz é esta parábola e com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ é obtida trocando-se x por x/z e y por y/z na equação acima. Ou seja,

$$(x/z)^2 = 2(y/z).$$

ou

$$x^2 = 2yz.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ se sempre que um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pertence a ela, então a reta que passa pela origem e por P está contida na superfície. Ou seja, se um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisfaz a equação da superfície, então o ponto $P' = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também satisfaz, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

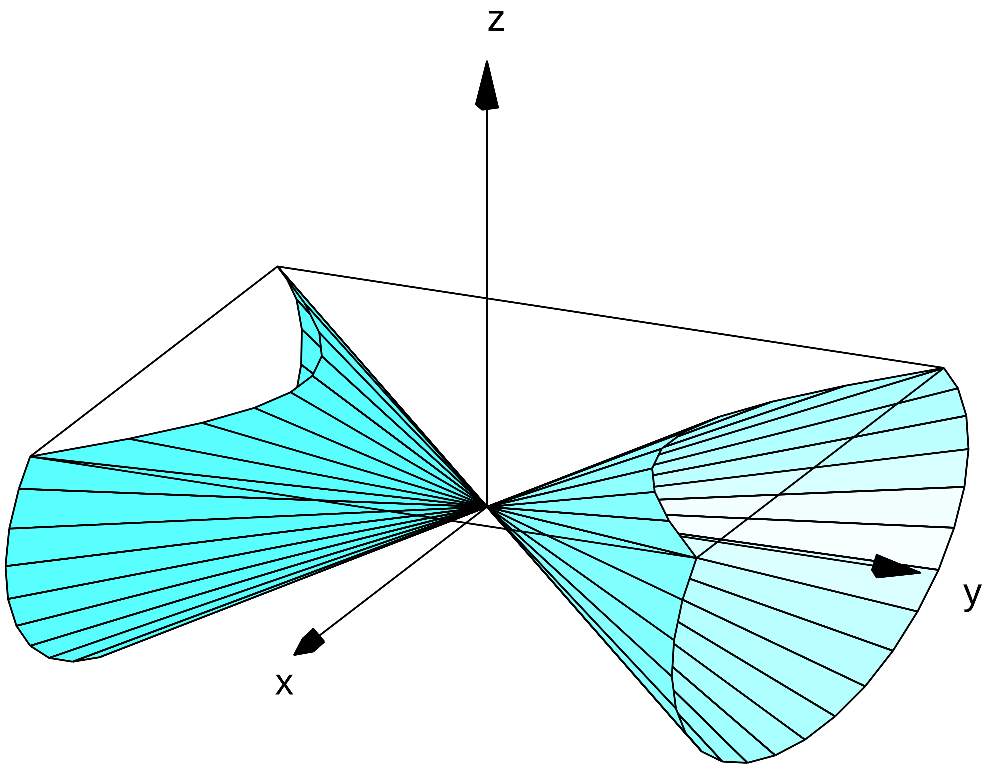


Figura 6.35: Superfície cônica de equação $x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.

Exemplo 6.4. A superfície de equação

$$x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$, pois se (x, y, z) satisfaz a equação acima, então também $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Fazendo $z = 1$ obtemos a curva diretriz no plano $z = 1$ de equação

$$x^2 - y^2 + 1 = 0,$$

que é uma hipérbole.

6.2.3 Superfícies de Revolução

Uma **superfície de revolução** é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada **geratriz**, em torno de uma reta fixa, chamada **eixo (de revolução)**, no plano da referida curva. Cada ponto em cima da geratriz descreve uma circunferência em torno do eixo. Esta circunferência é chamada **paralelo** da superfície e cada posição da curva geratriz é chamada **seção meridiana**.

Se o eixo de revolução é o eixo z e uma curva geratriz que está situada no plano yz tem equação

$$f(y,z) = 0, \tag{6.10}$$

então o paralelo que tem altura igual a z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r,z) ou $(-r,z)$ satisfaz a equação (6.10), pois o paralelo intercepta o plano yz nos pontos $P' = (0,r,z)$ e $P'' = (0,-r,z)$. Assim o ponto $P = (x,y,z)$ satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \tag{6.11}$$

Se uma curva geratriz que está situada no plano xz tem equação

$$f(x,z) = 0, \tag{6.12}$$

então o paralelo que tem altura igual a z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r,z) ou $(-r,z)$ satisfaz a equação (6.12), pois o paralelo intercepta o plano xz nos pontos $(r,0,z)$ e $(-r,0,z)$. Assim o ponto (x,y,z) satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \tag{6.13}$$

Resultados análogos são obtidos quando o eixo de revolução é o eixo x e o eixo y.

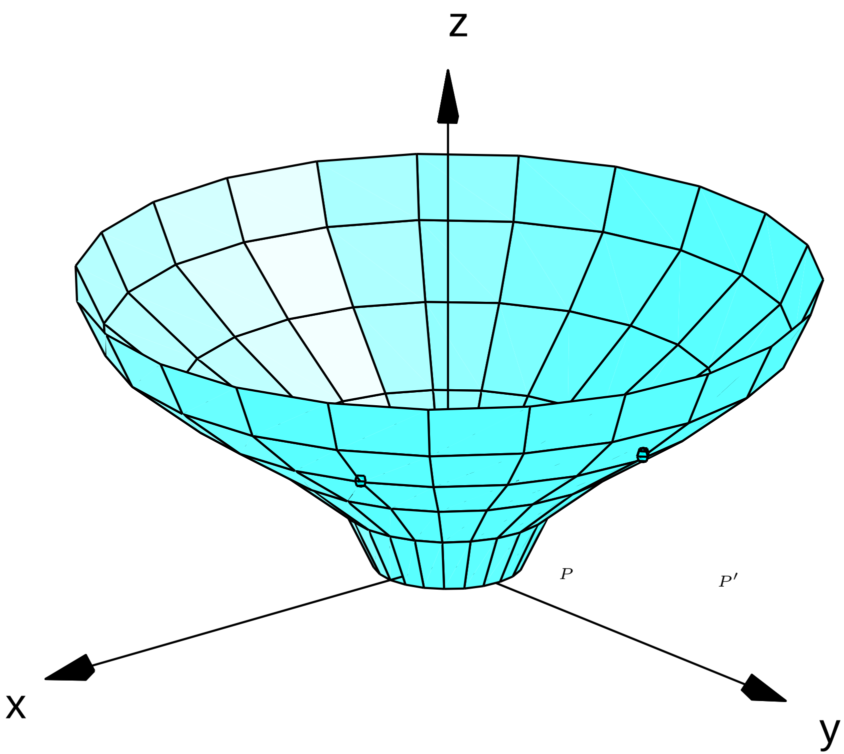


Figura 6.36: Superfície de revolução em torno do eixo z

Proposição 6.3. *Considere uma superfície de revolução.*

(a) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* x *e a curva geratriz está situada no plano* xz *com equação* $f(x, z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

e se a curva geratriz está situada no semiplano xy *com equação* $f(x, y) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

(b) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* y *e a curva geratriz está situada no plano* yz *com equação* $f(y, z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

e se a curva geratriz está situada no plano xy *com equação* $f(x, y) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$$

(c) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* z *e a curva geratriz está situada no plano* yz *com equação* $f(y, z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

e se a curva geratriz está situada no plano xz *com equação* $f(x, z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Exemplo 6.5. (a) Considere a elipse situada no plano xz de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta elipse em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um elipsóide.

(b) Considere a hipérbole situada no plano xz de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

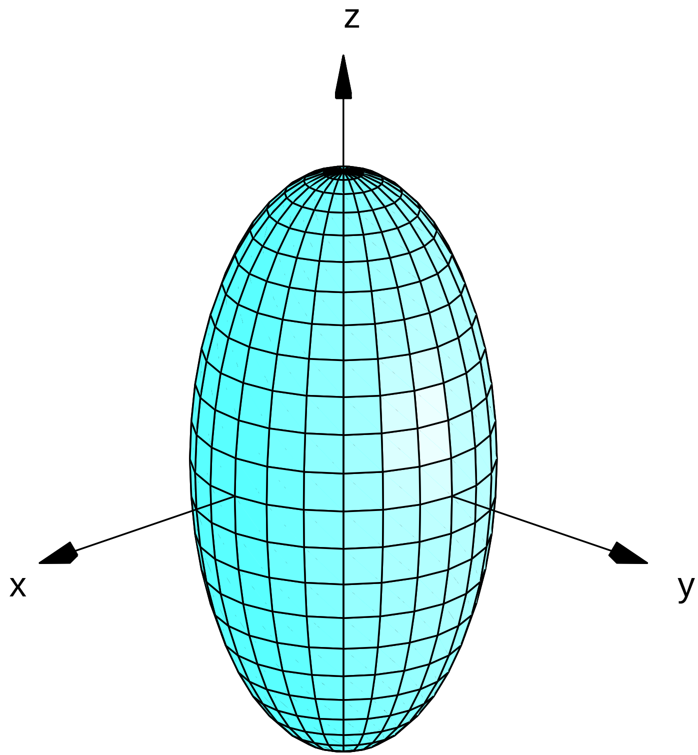


Figura 6.37: Elipsóide de revolução em torno do eixo z

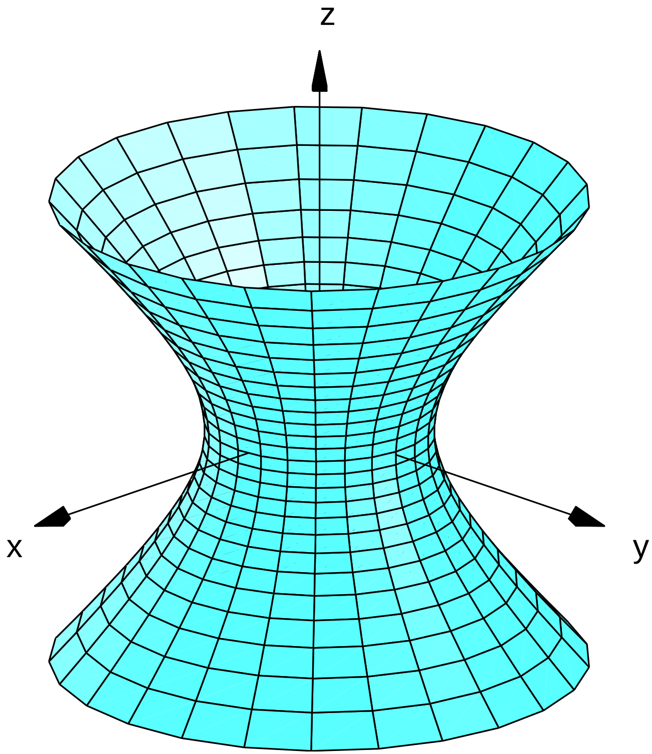


Figura 6.38: Hiperbolóide de uma folha de revolução em torno do eixo z

(c) Considere a hipérbole situada no plano xy de equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo y é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperbolóide de duas folhas.

(d) Considere a parábola situada no plano xz de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2}$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta parábola em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

que é a equação de um parabolóide elíptico.

(e) Considere a reta situada no plano xz de equação

$$z = \frac{x}{a}.$$

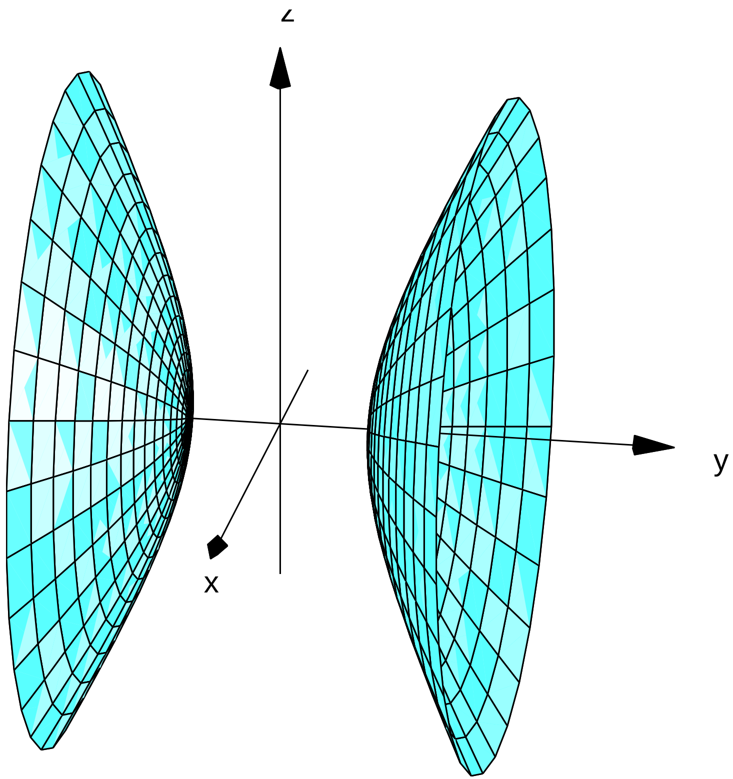


Figura 6.39: Hiperbolóide de duas folhas de revolução em torno do eixo y

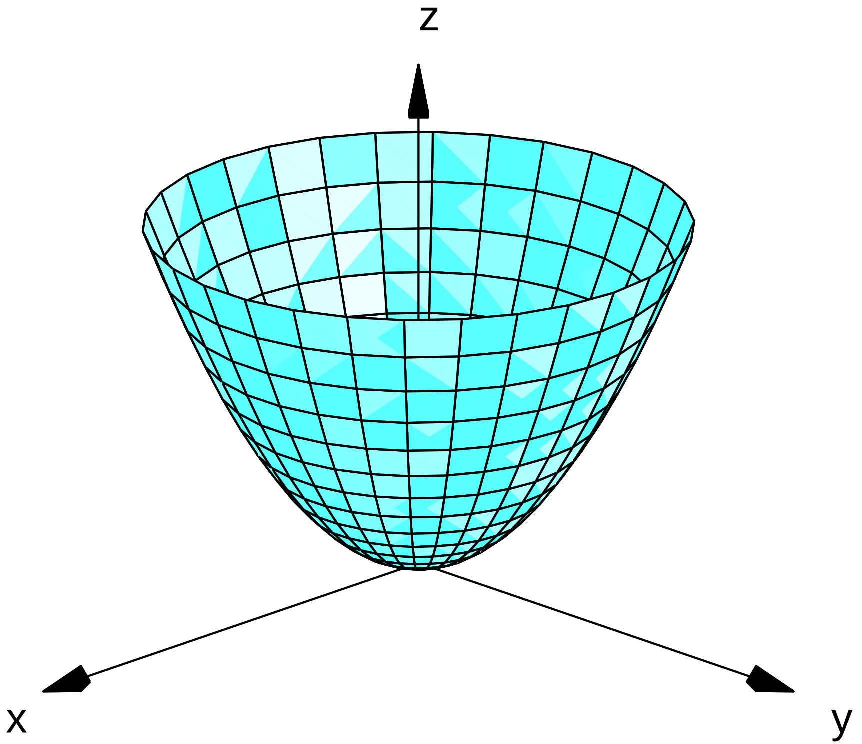


Figura 6.40: Parabolóide elíptico de revolução em torno do eixo z

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta reta em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{\pm\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

que é equivalente à equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

que é a equação de um cone circular.

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x,y,z) = 0$$

é uma superfície de revolução em torno de um dos eixos coordenados se as intercessões da superfície com planos perpendiculares ao referido eixo são circunferências com centros no referido eixo.

Exemplo 6.6. A superfície de equação

$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$$

é de uma superfície de revolução, pois fazendo $z = k$ obtemos a equação de uma circunferência

$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi k) - 3/2)^2$$

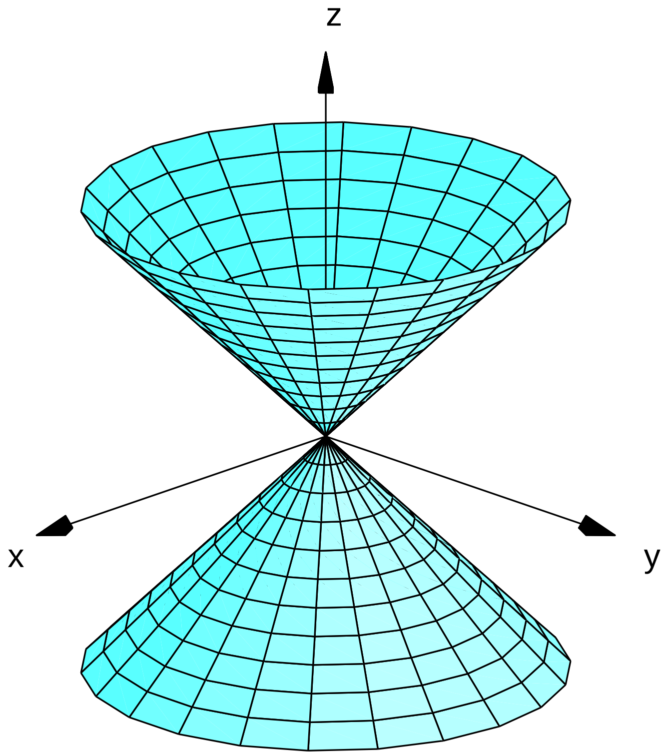


Figura 6.41: Cone elíptico de revolução em torno do eixo z

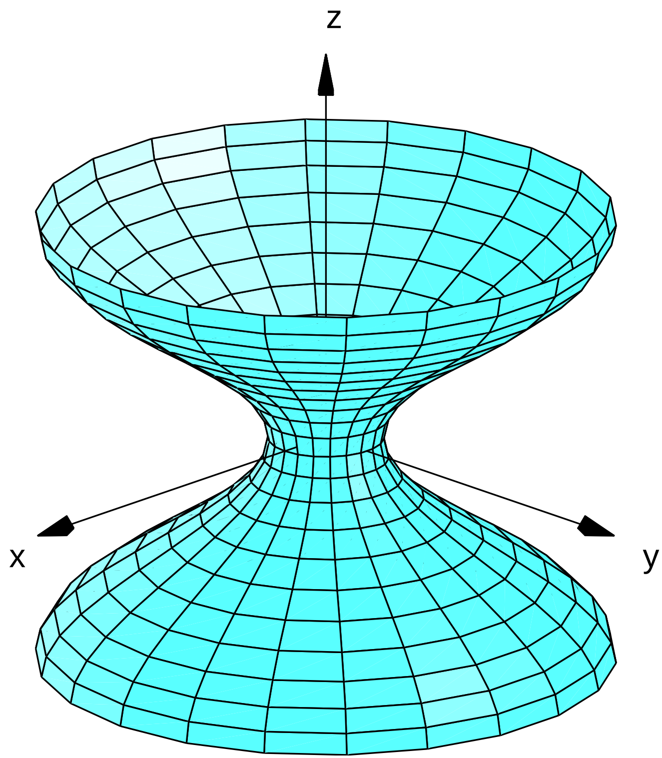


Figura 6.42: Superfície de revolução em torno do eixo z de equação $x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$

Exemplo 6.7. (a) Um elipsóide que tem dois dos seus parâmetros iguais é um elipsóide de revolução. Por exemplo,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

são equações de elipsóides de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

(b) O hiperbolóide de uma folha que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal positivo é um hiperbolóide uma folha de revolução. Por exemplo,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

são equações de hiperbolóides de uma folha de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

(c) O hiperbolóide de duas folhas que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal negativo é um hiperbolóide duas folhas de revolução. Por exemplo,

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

são equações de hiperbolóides de duas folhas de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

(d) O cone circular de equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

pode ser obtido pela rotação da reta situada no plano xz de equação $z = \frac{x}{a}$ em torno do eixo z.

Exercícios Numéricos

6.2.1. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica

(a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $V = (1, -1, 1)$

(b) $x^2+z^2 = 1$, $y = 0$ e $V = (2, 1, -1)$

(c) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $V = (0, 2, -1)$

(d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$

6.2.2. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes

(a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$

(b) $x^2 + y + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$

(c) $17x^2+2y^2+z^2-8xy-6xz-2 = 0$

(d) $xz + 2yz - 1 = 0$

6.2.3. Dadas as equações da curva diretriz determine a equação da superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0, 0, 0)$.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2$

(b) $xz = 1$ e $y = 1$

(c) $y = x^2$ e $z = 2$

(d) $x^2 - 4z^2 = 4$ e $y = 3$

6.2.4. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ e determine a equação de uma curva diretriz

(a) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$

(b) $4z^3 - x^2y = 0$

(c) $8y^4 - yz^3 = 0$

(d) $xy + xz + yz = 0$

6.2.5. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.

(a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y

(b) $x^2 - 2z^2 + 4z = 6$ e $y = 0$ em torno do eixo x

(c) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z

(d) $z = e^x$ e $y = 0$ em torno do eixo z

6.2.6. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação de uma curva geratriz

(a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$

(b) $x^2 + z^2 = 4$

(c) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$

(d) $x^2y^2 + x^2z^2 = 1$

Exercícios Teóricos

6.2.7. Mostre que conjunto dos pontos do espaço que satisfazem uma equação da forma

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y, z) = 0$$

representa uma superfície cilíndrica que tem retas geratrizes paralelas ao eixo cuja variável não aparece na equação. Equação esta que é também a equação da curva diretriz no plano coordenado correspondente às variáveis que aparecem na equação.

6.2.8. Mostre que a equação de uma superfície cônica com vértice num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e curva diretriz situada no plano $z = c$ com equação $f(x, y) = 0$ é

$$f\left(x_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(x - x_0), y_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(y - y_0)\right) = 0.$$

6.3 Coordenadas Cilíndricas Esféricas e Equações Paramétricas

6.3.1 Coordenadas Cilíndricas

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto no espaço é localizado em relação a três retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas cilíndricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo z e o eixo x do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo z. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano xy. Sejam (r, θ) as coordenadas polares de P' no plano xy. As coordenadas cilíndricas do ponto P são as coordenadas polares de P' juntamente com a terceira coordenada retangular, z, de P e são escritas na forma (r, θ, z).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas.

Proposição 6.4. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano xy coincidem com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas no plano xy, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

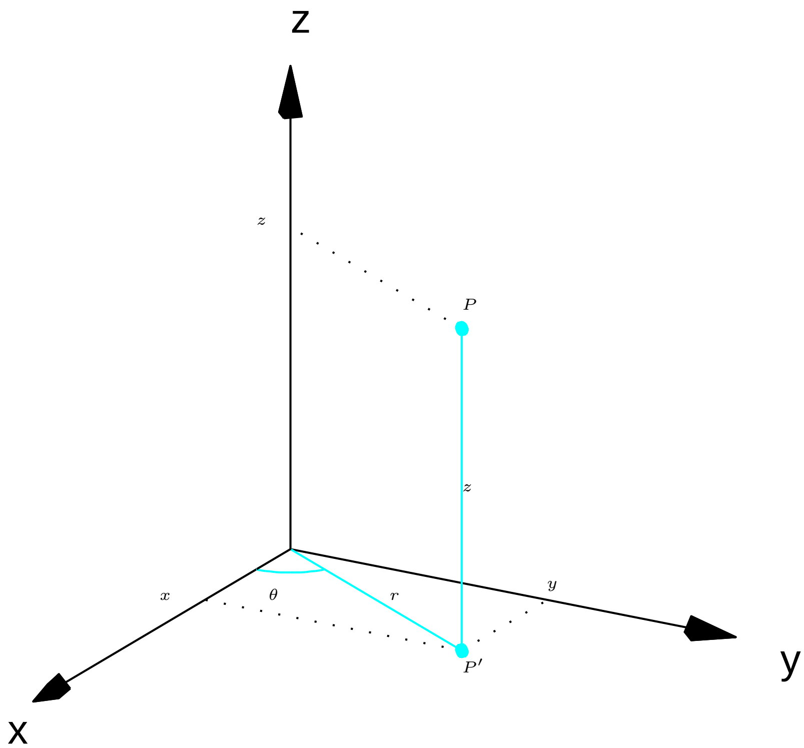


Figura 6.43: Coordenadas cilíndricas e cartesianas de um ponto P no espaço

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{se } x^2+y^2 \neq 0.$$

Exemplo 6.8. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r\cos\theta$ e y por $\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 = a^2 z.$$

Exemplo 6.9. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do parabolóide hiperbólico de equação

$$x^2 - y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r\cos\theta$ e y por $\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 \cos 2\theta = a^2 z.$$

Exemplo 6.10. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é

$$r = a \operatorname{sen}\theta.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por r obtemos

$$r^2 = ar \operatorname{sen}\theta.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r \operatorname{sen}\theta = y$, então obtemos

$$x^2 + y^2 = ay,$$

que é a equação de um cilindro gerado pela circunferência no plano xy de equação em coordenadas polares é $r = a\operatorname{sen}\theta$, ou seja, uma circunferência com raio $a/2$ e centro no ponto cujas coordenadas cartesianas são $(0, a/2)$.

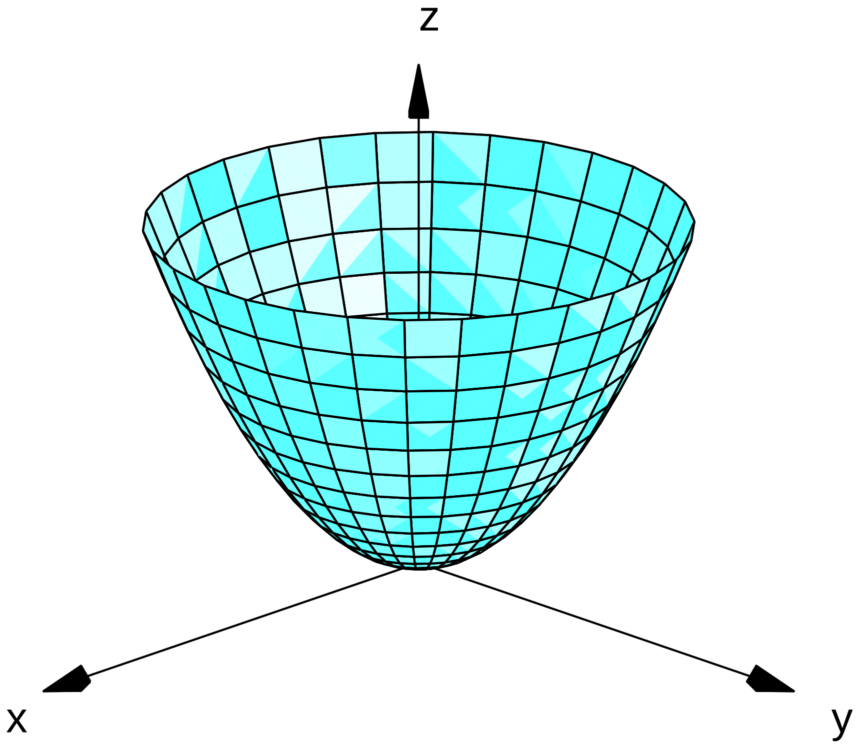


Figura 6.44: Parabolóide elíptico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 = a^2 z$

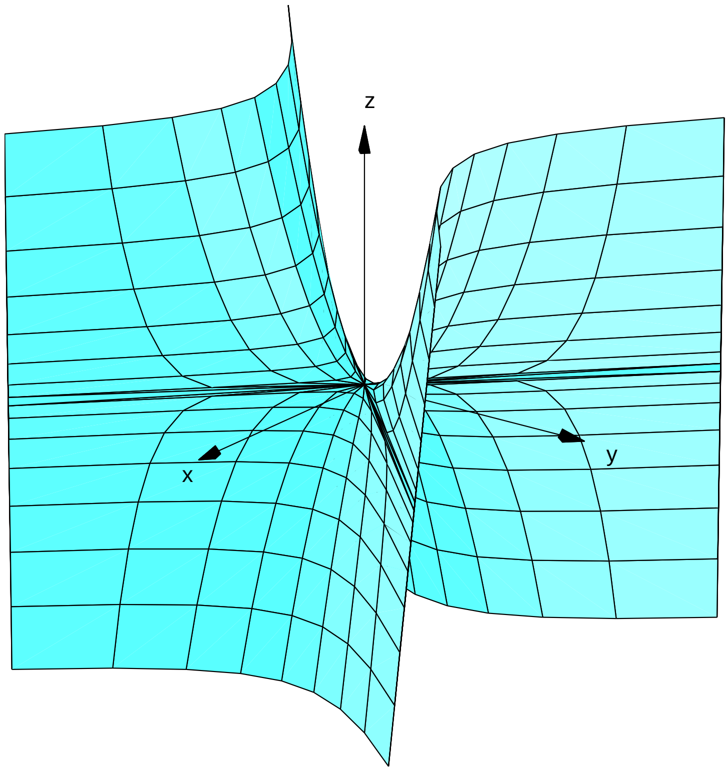


Figura 6.45: Parabolóide hiperbólico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 \cos 2\theta = a^2 z$

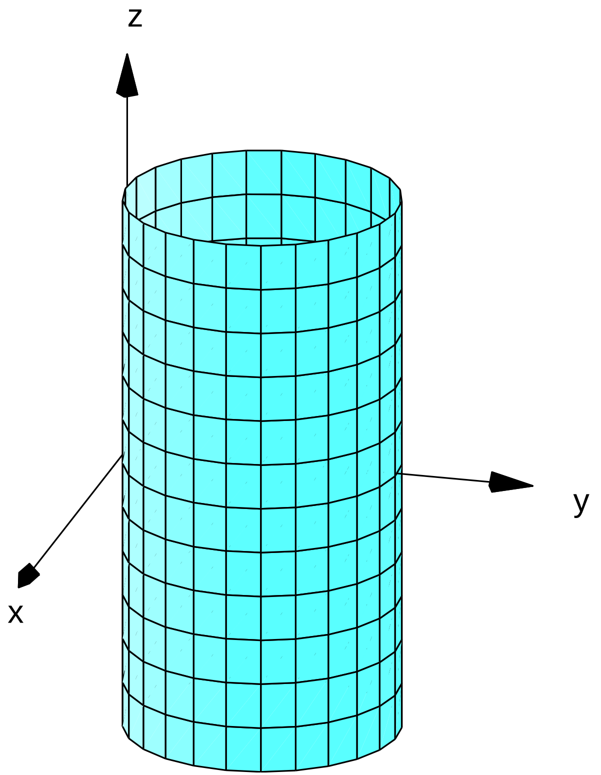


Figura 6.46: Cilindro circular de equação em coordenadas cilíndricas $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$

6.3.2 Coordenadas Esféricas

Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas esféricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo z e o eixo x do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas esféricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo z. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano xy. Seja θ a segunda coordenada polar de P' no plano xy. As coordenadas esféricas do ponto P são a distância de P à origem, $r = \operatorname{dist}(P, O)$, o ângulo, ϕ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e a segunda coordenada polar de P', θ. As coordenadas esféricas de um ponto P são escritas na forma (r, ϕ, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas.

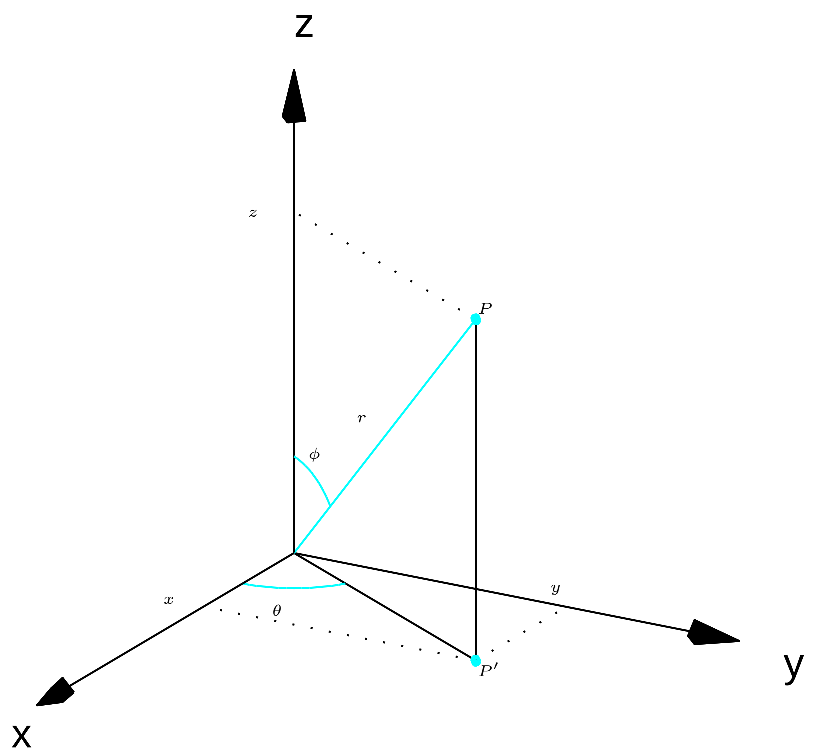


Figura 6.47: Coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto P no espaço

Proposição 6.5. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano xy coincidem com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas no plano xy, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas esféricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \textit{e} \quad z = r\cos\phi$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \tan\phi = \begin{cases} y/x, & \textit{se } x \neq 0 \\ \pi/2, & \textit{se } x = 0 \end{cases},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \textit{se } x^2+y^2 \neq 0.$$

Exemplo 6.11. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do parabolóide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y por $r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e z por $r\cos\phi$ obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2 \cos\phi.$$

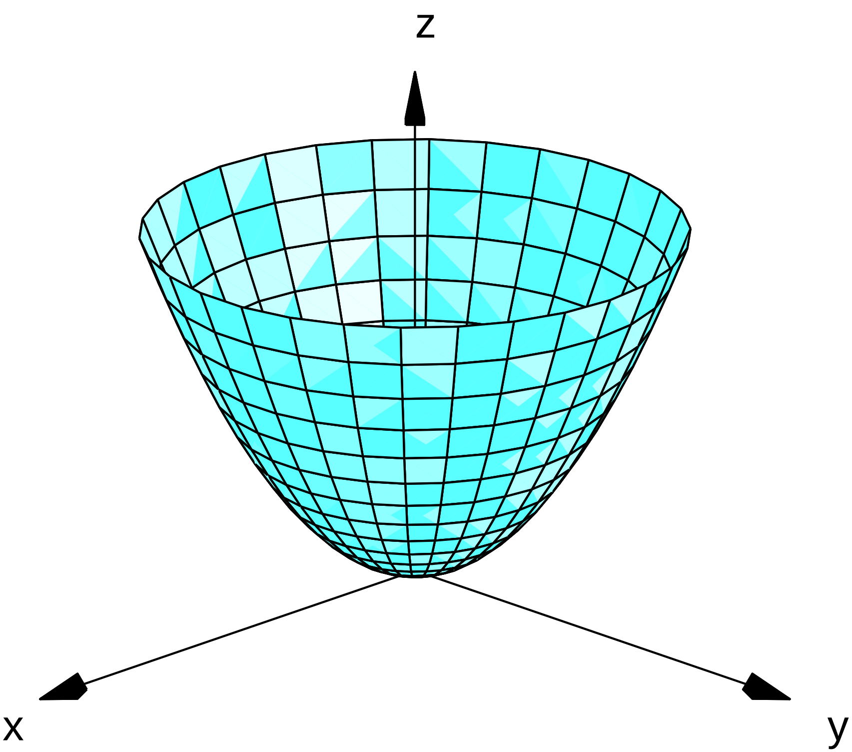


Figura 6.48: Parabolóide elíptico de equação em coordenadas esféricas $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi = a^2 \cos \phi$

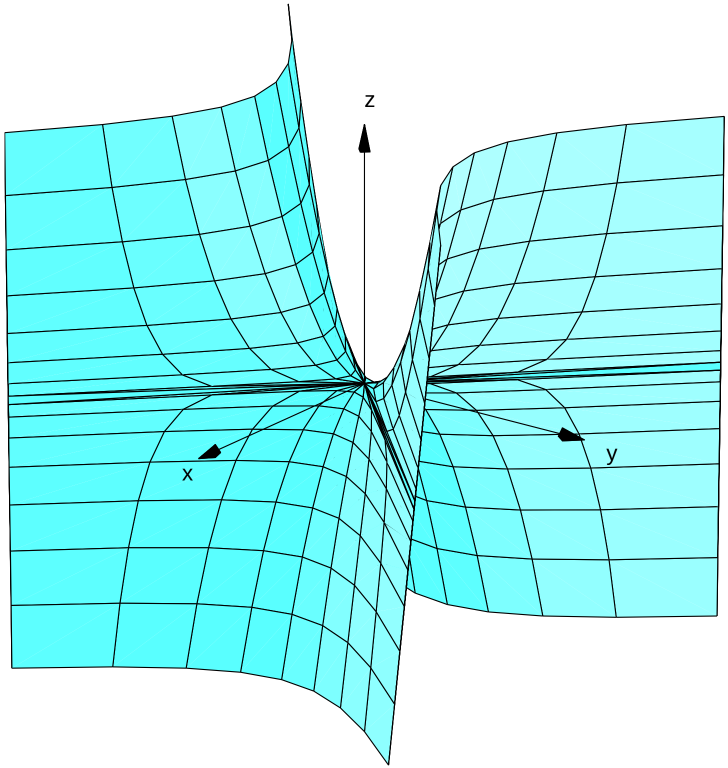


Figura 6.49: Parabolóide hiperbólico de equação em coordenadas esféricas $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta = a^2 \cos \phi$

Exemplo 6.12. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do parabolóide hiperbólico de equação

$$x^2 - y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y por $r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e z por $r\cos\phi$ obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos 2\theta = a^2 \cos\phi.$$

Exemplo 6.13. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é

$$r \operatorname{sen}\phi = a.$$

Elevando-se ao quadrado a equação acima obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2.$$

Substituindo-se $\operatorname{sen}^2\phi$ por $1 - \cos^2\phi$ obtemos

$$r^2 - r^2\cos^2\phi = a^2.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r\cos\phi = z$, então obtemos

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

que é a equação de um cilindro circular.

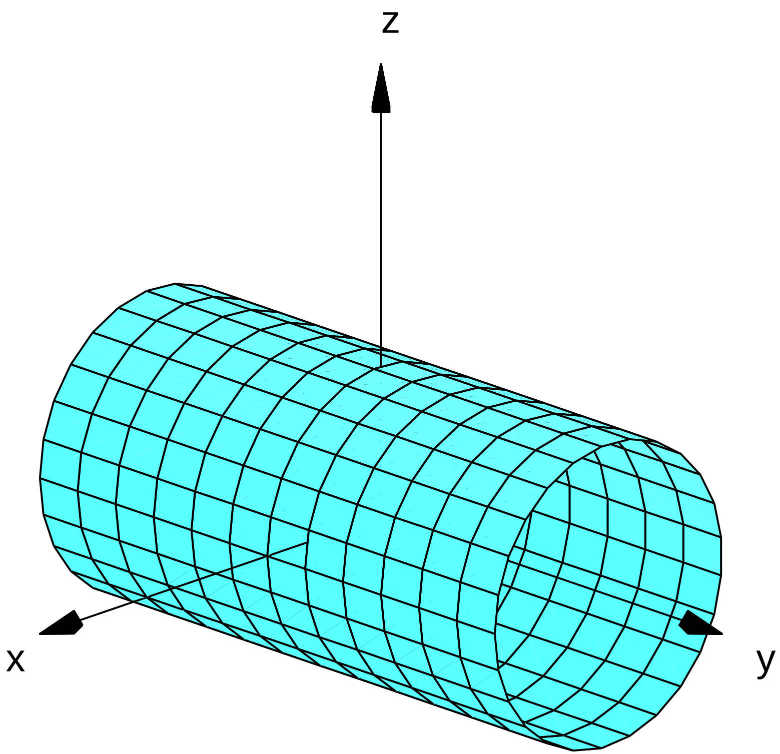


Figura 6.50: Cilindro circular de equação em coordenadas esféricas $r \operatorname{sen} \phi = a$

6.3.3 Equações Paramétricas de Superfícies

Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6.14}$$

a equação de uma superfície $\mathcal{S}$ em coordenadas retangulares. Sejam x, y e y funções de um par de variáveis (s, t) numa região, $\mathcal{R}$, do plano, ou seja,

$$x = f(s,t), \quad y = g(s,t) \quad \text{e} \quad z = h(s,t), \quad \text{para todo } (s,t) \in \mathcal{R}. \tag{6.15}$$

Se para quaisquer valores do par de variáveis (s, t) numa região, $\mathcal{R}$, do plano, os valores de x, y e z determinados pelas equações (6.15) satisfazem (6.14), então as equações (6.15) são chamadas **equações paramétricas da superfície** $\mathcal{S}$ e as variáveis independentes s e t são chamadas **parâmetros**. Dizemos também que as equações (6.15) formam uma **representação paramétrica da superfície** $\mathcal{S}$.

Exemplo 6.14. Seja a um número real positivo fixo. A esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{6.16}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = a \cos s \tag{6.17}$$

para todo $s \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (6.17) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 s \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 s (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + a^2 \cos^2 s = a^2. \end{aligned}$$

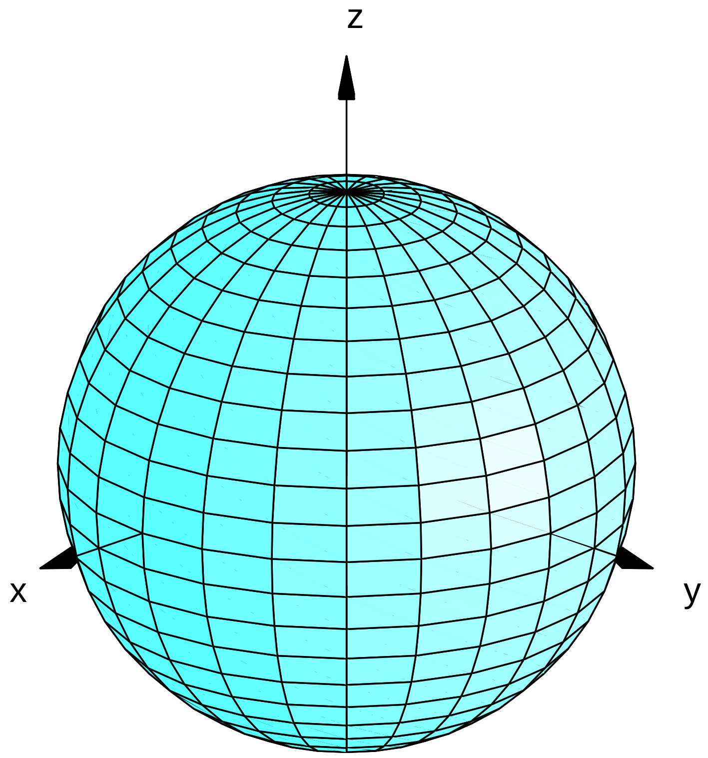


Figura 6.51: Esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

A esfera definida por (6.16) pode também ser representada parametricamente por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = \sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{6.18}$$

para todo par (s, t) pertencente ao círculo de raio a. Ou ainda por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{6.19}$$

para todo par (s, t) pertencente ao círculo de raio a. Apenas que com (6.18) obtemos somente a parte de cima da esfera e com (6.19) obtemos somente a parte de baixo.

Exemplo 6.15. O elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.20}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \cos s \tag{6.21}$$

para todo $s \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a terceira equação em (6.21) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 s \\ &= \operatorname{sen}^2 s (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + \cos^2 s = 1. \end{aligned}$$

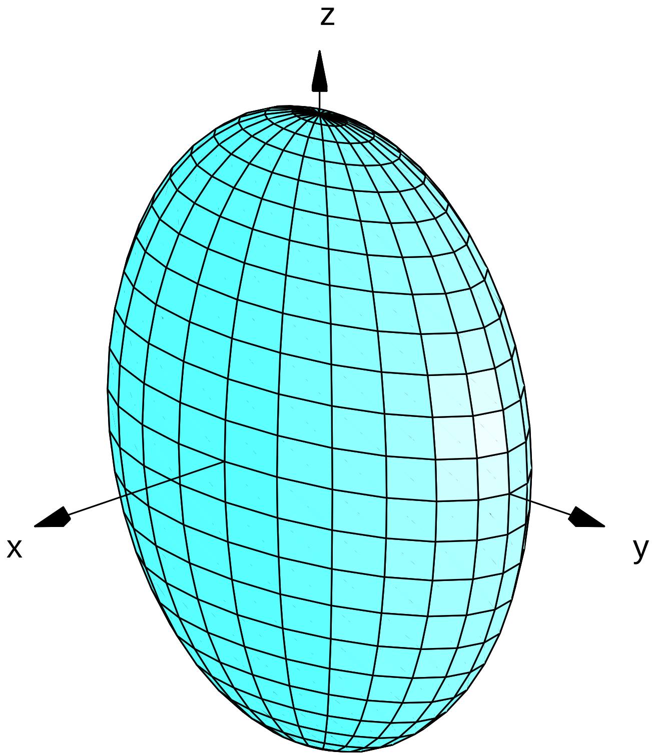


Figura 6.52: Elipsóide

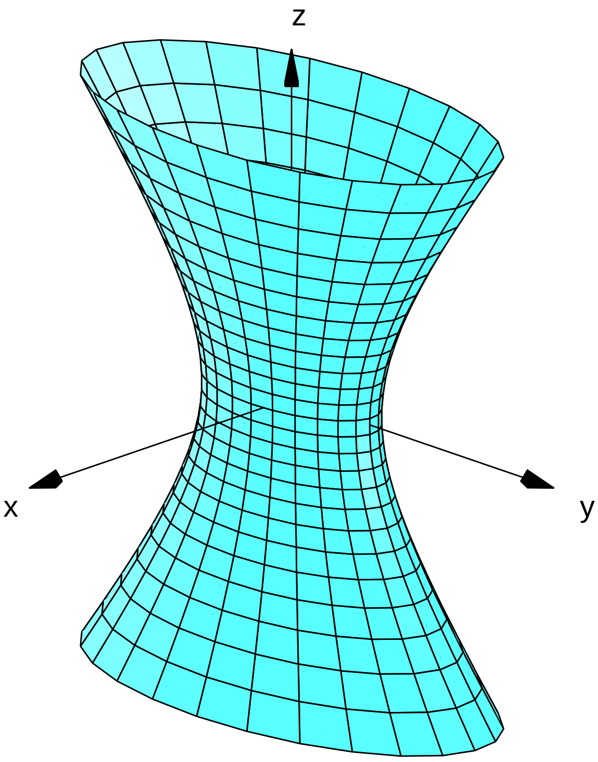


Figura 6.53: Hiperbolóide de uma folha

Exemplo 6.16. O hiperbolóide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.22}$$

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = a \sec s \cos t, \quad y = b \sec s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \tan s, \tag{6.23}$$

para todo $s \in [0, 2\pi]$, $s \neq \pi/2, 3\pi/2$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.23), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.23), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (6.23) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \sec^2 s \cos^2 t + \sec^2 s \operatorname{sen}^2 t - \tan^2 s \\ &= \sec^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \tan^2 s = 1. \end{aligned}$$

Usando as funções hiperbólicas, o hiperbolóide de uma folha definido por (6.22) pode, também, ser representado parametricamente, por

$$x = a \cosh s \cos t, \quad y = b \cosh s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \operatorname{senh} s, \tag{6.24}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.24), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.24), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (6.24) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \cosh^2 s \, \cos^2 t + \cosh^2 s \, \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{senh}^2 s \\ &= \cosh^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{senh}^2 s = 1. \end{aligned}$$

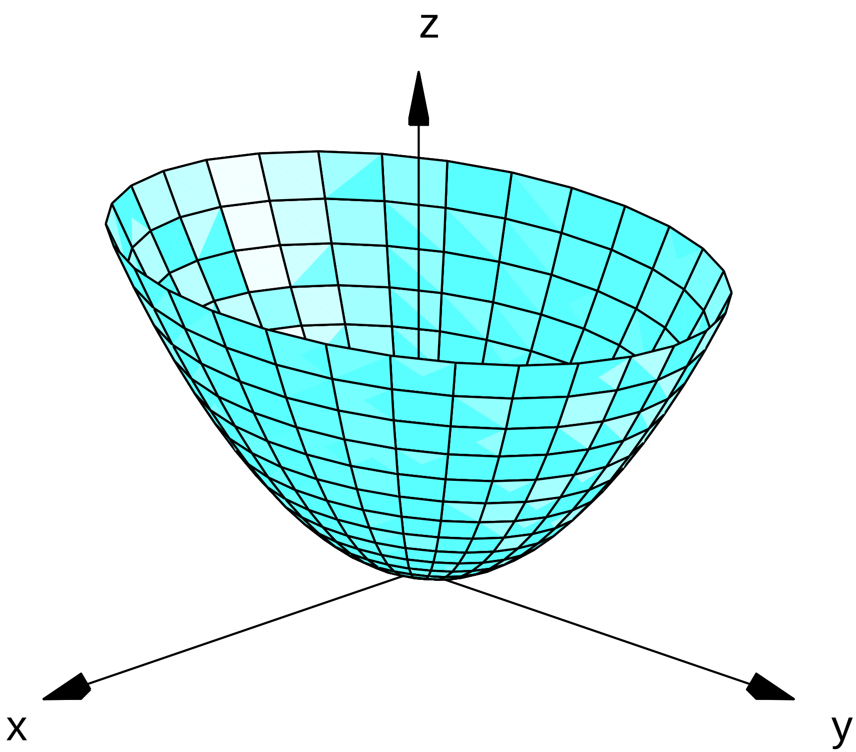


Figura 6.54: Parabolóide elíptico

Exemplo 6.17. O parabolóide elíptico de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{6.25}$$

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = as\cos t, \quad y = bs\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = s^2, \tag{6.26}$$

para todo $s \in [0, +\infty)$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.26), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.26), somando os resultados e subtraindo da terceira equação em (6.26) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z &= s^2\cos^2 t + s^2\,\mathrm{sen}^2\,t - s^2 \\ &= s^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t) - s^2 = 0. \end{aligned}$$

6.3.4 Equações Paramétricas de Curvas no Espaço

Já estudamos a representação paramétrica de uma curva no plano. Este conceito pode ser estendido a curvas no espaço. Sejam x, y e z funções de uma variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{e} \quad z = h(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{6.27}$$

Quando t assume todos os valores em $\mathcal{I}$, o ponto $P(t) = (f(t), g(t), g(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ descreve uma curva $\mathcal{C}$ no espaço. As equações (6.27) são chamadas **equações paramétricas** de $\mathcal{C}$.

A representação paramétrica de curvas no espaço também tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador. Já vimos um exemplo de representação paramétrica de curvas no espaço quando estudamos a reta no espaço.

Exemplo 6.18. Considere a curva parametrizada por

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{e} \quad z = c\,t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos eliminar t nas duas primeiras equações. Para isso elevamos ao quadrado as duas primeiras equações, dividimos a primeira por a^2, a segunda por b^2 e somamos obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto a curva está contida em um cilindro elíptico. Esta curva é chamada **hélice**.

Exemplo 6.19. Vamos determinar uma parametrização para a curva obtida da interseção do cone de equação $x^2 + y^2 = z^2$ com o plano $y - z = \sqrt{2}$. Uma parametrização para o cone é

$$x = s\cos t, \quad y = s\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{e} \quad z = s.$$

Vamos usar a equação do plano para eliminar s na parametrização do cone. Substituindo-se a parametrização do cone na equação do plano obtemos

$$s\,\mathrm{sen}\, t - s = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sen}\, t - 1}.$$

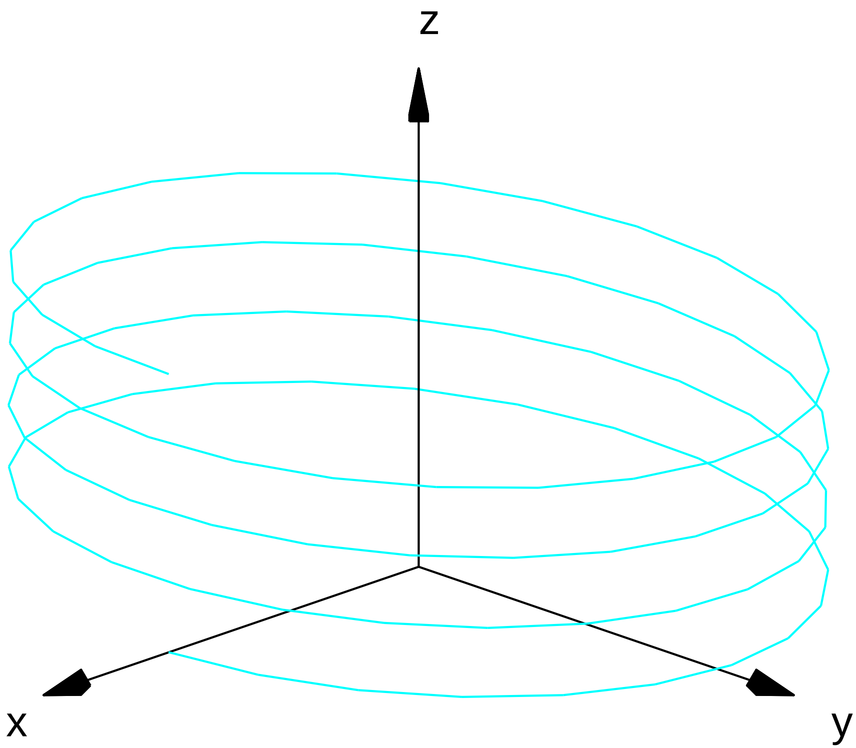


Figura 6.55: Hélice

Portanto,

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos t}{\operatorname{sen} t - 1}, \quad y = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t - 1} \quad \text{e} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} t - 1}$$

é uma parametrização para a curva.

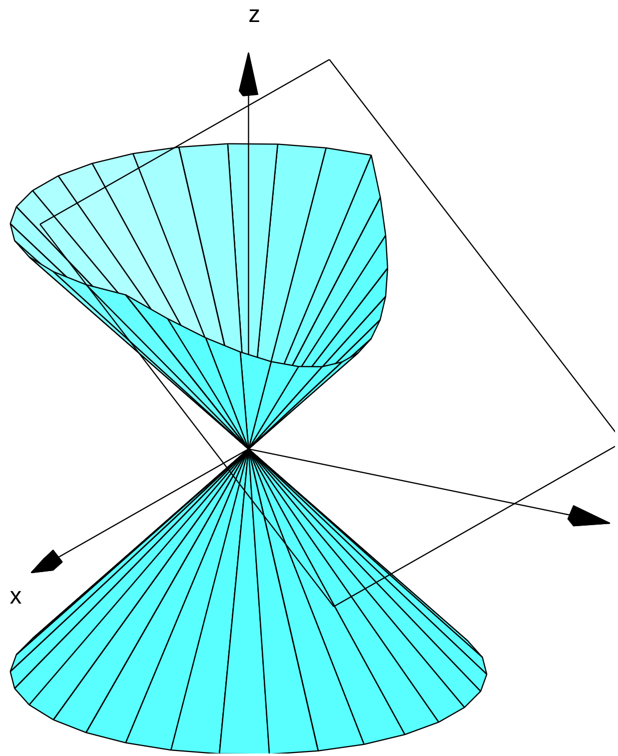


Figura 6.56: Curva obtida pelo corte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ pelo plano $y - z = \sqrt{2}$

Exercícios Numéricos

6.3.1. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

(b) $x^2 - y^2 = 9$

(c) $x^2 - y^2 = 3z^2$

(d) $x^2 + y^2 = z^2$

6.3.2. Encontre uma equação em coordenadas esféricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$

(b) $x^2 + y^2 = z^2$

(c) $x^2 + y^2 = 9$

(d) $x^2 + y^2 = 2z$

6.3.3. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada

(a) $r = 4$

(b) $r = 3\cos\theta$

(c) $r^2\cos 2\theta = z^3$

(d) $z^2 \operatorname{sen}\theta = r^3$

6.3.4. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada

(a) $\phi = \pi/4$

(b) $r = 9\sec\phi$

(c) $r = 2\tan\theta$

(d) $r = 6\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 3\cos\phi$

6.3.5. Determine representações paramétricas para as seguintes superfícies:

(a) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(b) $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

(c) $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

(d) $f(x, y) = 0$

6.3.6. Mostre que a cúbica retorcida

$$x = t, \quad y = t^2 \quad \text{e} \quad z = t^3$$

está contida no cilindro de equação $y = x^2$.

6.3.7. Mostre que a hélice cônica

$$x = t\cos t, \quad y = t\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = t$$

está contida no cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$.

6.3.8. Determine uma parametrização para a curva obtida da interseção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$

Capítulo 7

Mudança de Coordenadas

7.1 Rotação e Translação

Se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ também são (x, y, z) e então podemos escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, y, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\end{aligned}$$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ou seja, as coordenadas de um ponto P são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores

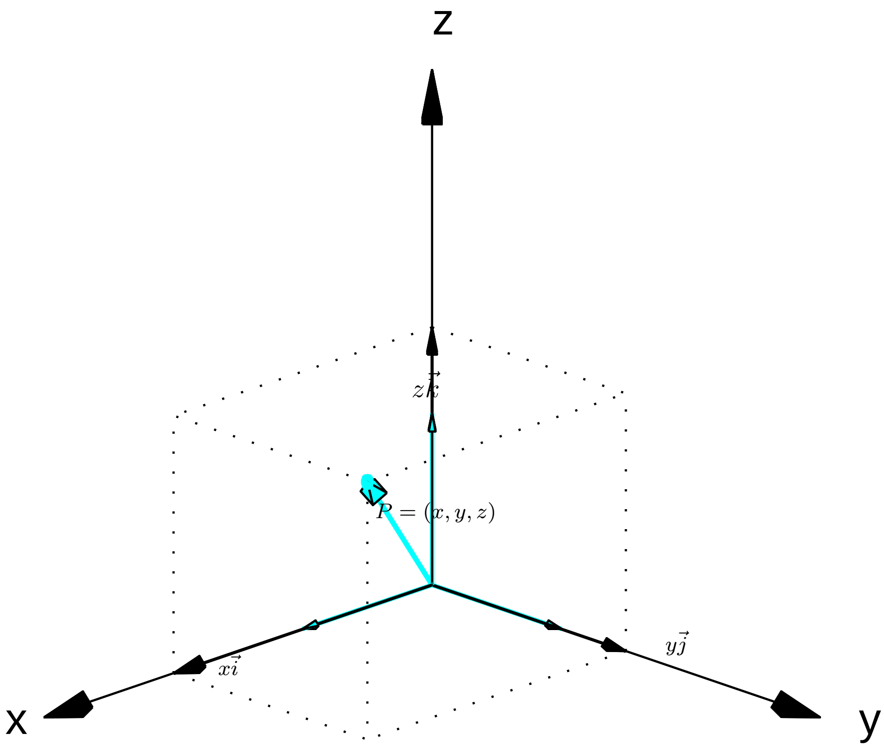


Figura 7.1: $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

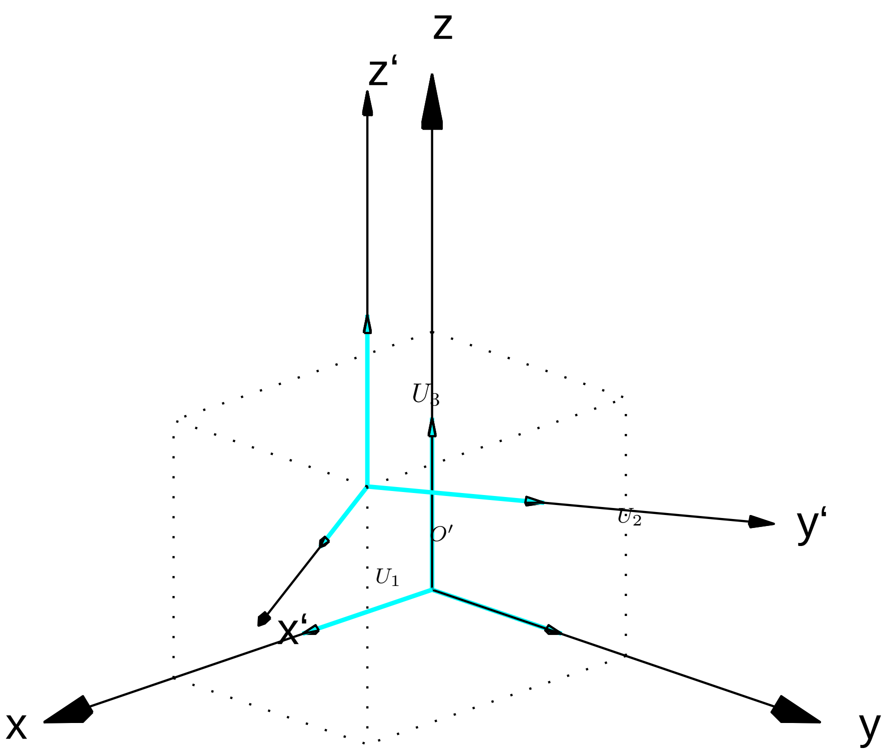


Figura 7.2: Dois sistemas de coordenadas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

canônicos. Assim, o ponto $O = (0,0,0)$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ determinam um sistema de coordenadas ortogonal, $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo **sistema de coordenadas ortogonal** determinado por uma origem O' e por vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e mutuamente ortogonais.* Por exemplo, se $O' = (2, 3/2, 3/2)$, $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $U_3 = (0,0,1) = \vec{k}$, então $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto O', cujos eixos x', y' e z' são retas que passam por O' orientadas com os sentidos e direções de U_1, U_2 e U_3, respectivamente.

As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores U_1, U_2 e U_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, então $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

*Em geral, um sistema de coordenadas (**não** necessariamente ortogonal) é definido por um ponto O' e três vetores V_1, V_2 e V_3 não coplanares (não necessariamente ortogonais e unitários) (veja o Exercício 7.1.6 na página 491).

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1\, U_2\, U_3\,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1\; U_2\; U_3\,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mas, como U_1, U_2 e U_3 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1\; U_2\; U_3\,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 & U_1^tU_3 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 & U_2^tU_3 \\ U_3^tU_1 & U_3^tU_2 & U_3^tU_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1\, U_2\, U_3\,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2,U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^t[P]_{\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2\}$, em que U_1 e U_2 são vetores unitários e ortogonais, é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear de U_1 e U_2, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar, também no plano, inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, então $x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Novamente, como U_1 e U_2 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1 \; U_2 \,] = \begin{bmatrix} U_1^tU_1 & U_1^tU_2 \\ U_2^tU_1 & U_2^tU_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1 \, U_2 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ estão bem definidas, ou seja, x' e y' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^t[P]_{\{O,E_1,E_2\}},$$

em que $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$. Observe que, tanto no caso do plano quanto no caso do espaço, a matriz Q satisfaz, $Q^{-1} = Q^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**.

Exemplo 7.1. Considere o sistema de coordenadas no plano em que $O' = O$ e $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Se $P = (2, 4)$, vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (2, 4)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' = 2 \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' = 4 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \,]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como

$$Q^tQ = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = I_2,$$

então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.2. Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (x, y)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear nas variáveis x' e y'

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\, U_1 \ U_2 \,]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como $Q^tQ = I_2$, então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}\,x + y)/2 \\ (-x + \sqrt{3}\,y)/2 \end{bmatrix}.$$

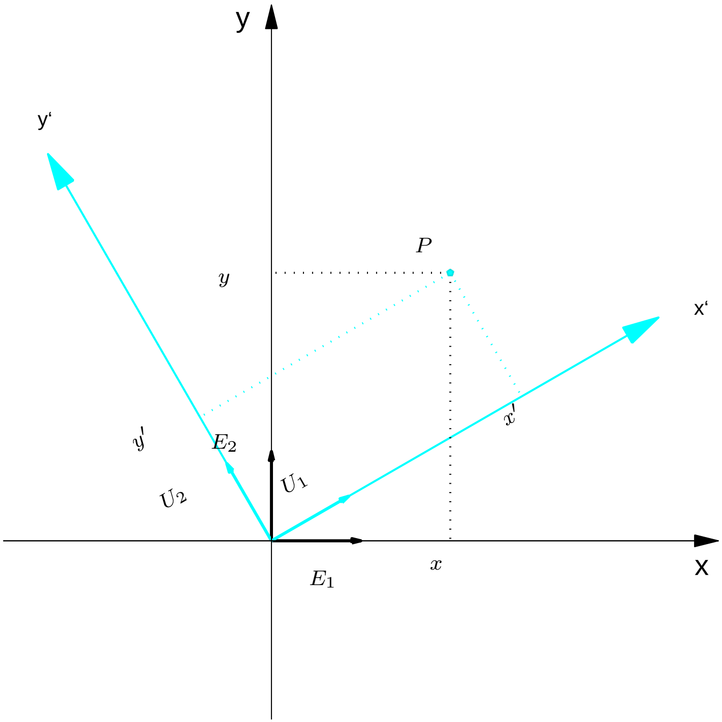


Figura 7.3: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas

Exemplo 7.3. Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' & + & \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' & - & \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{array} \right. ,$$

ou equivalentemente

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right]$$

entre as coordenadas $\left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right]$ de um ponto P em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ e as coordenadas de P, $\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$, em relação ao sistema de coordenadas original $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$. Queremos determinar quais são os vetores U_1 e U_2.

Os vetores U_1 e U_2 da nova base possuem coordenadas $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]$ e $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]$, respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas, $\{O, U_1, U_2\}$. Pois, $U_1 = 1\,U_1 + 0\,U_2$ e $U_2 = 0\,U_1 + 1\,U_2$. Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original, $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right] \\ U_2 & = & \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right] \end{array}$$

Ou seja, U_1 e U_2 são as colunas da matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

7.1.1 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ seja obtido do sistema original $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$ por uma rotação de um ângulo θ. Observando a Figura 7.4, obtemos

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ U_2 & = & (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{array}$$

seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}\,.$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\cos\theta)x' & - & (\operatorname{sen}\theta)y' = x \\ (\operatorname{sen}\theta)x' & + & (\cos\theta)y' = y \end{array} \right. \tag{7.1}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta^{-1} P = R_\theta^t P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

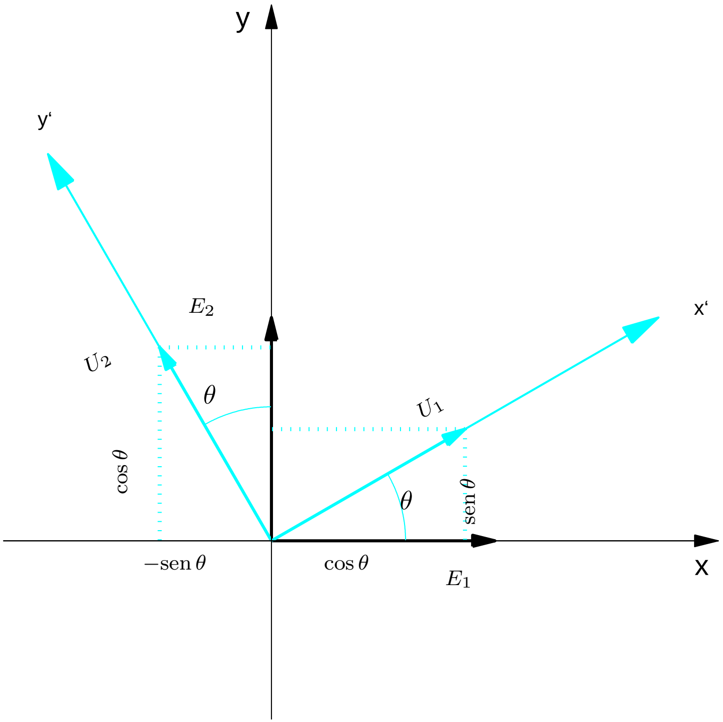


Figura 7.4: Rotação de um ângulo θ

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/6$ em relação ao sistema original.

A matriz R_θ é chamada **matriz de rotação**.

7.1.2 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que $O' \neq O$, ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.

Observando a Figura 7.5, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \, . \tag{7.2}$$

Assim, se $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$, então

$$\overrightarrow{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k)$$

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O', E_1, E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

O eixo x' tem equação $y' = 0$, ou seja, $y = k$ e o eixo y', $x' = 0$, ou seja, $x = h$.

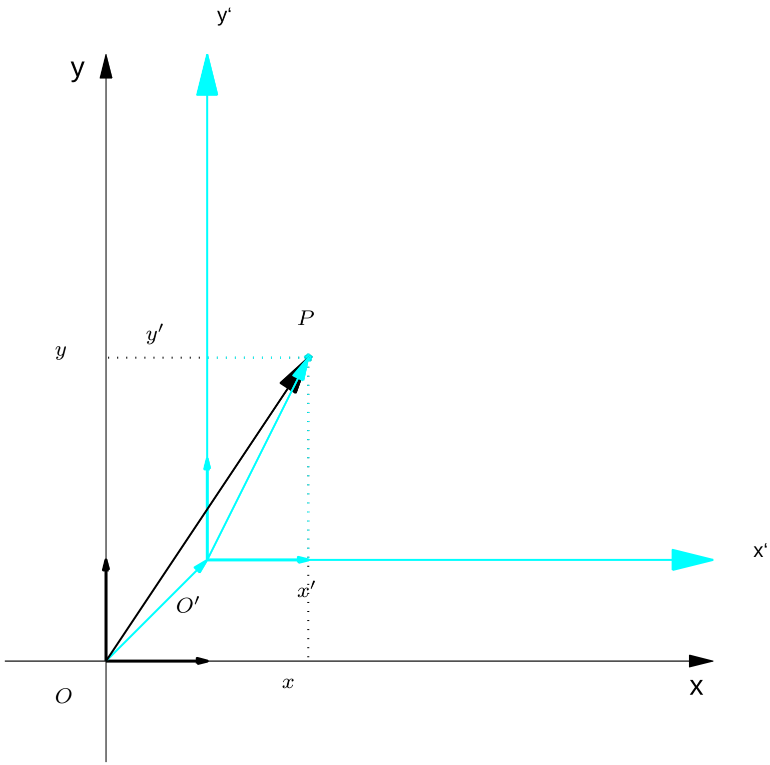


Figura 7.5: Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação)

Exercícios Numéricos (respostas na página 624)

7.1.1. Encontre as coordenadas do ponto P com relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ e $P = (1, 3)$;

(b) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ e $P = (2, -1, 2)$;

7.1.2. Encontre o ponto P, se as coordenadas de P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, $[P]_{\mathcal{S}}$, são:

(a) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$.

(b) $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$;

7.1.3. Sejam $[P]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$. Suponha que temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Quais são os vetores U_1, U_2 e U_3?

7.1.4. Determine qual a rotação do plano em que as coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ são $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios Teóricos

7.1.5. Mostre que $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$.

7.1.6. Definimos coordenadas de pontos no espaço em relação a um sistema de coordenadas por um ponto O' e três vetores não coplanares V_1, V_2 e V_3 da mesma forma como fizemos quando os vetores são unitários e mutuamente ortogonais. As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores V_1, V_2 e V_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'V_1 + y'V_2 + z'V_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', V_1, V_2, V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Assim, se $\overrightarrow{O'P} = (x, y, z)$, então $x'V_1 + y'V_2 + z'V_3 = \overrightarrow{O'P}$ pode ser escrito como

$$[\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz $Q = [\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,]$ é invertível.

(b) Mostre que as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1}[P]_{\{O',\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

7.2 Identificação de Cônicas

Vamos determinar um ângulo θ tal que uma rotação de θ elimina o termo xy na equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.4}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0. \tag{7.5}$$

Ou seja, fazendo a mudança de coordenadas em (7.4) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

para um ângulo θ adequado, obtemos a equação (7.5).

A equação (7.4) pode ser escrita na forma

$$X^t A X + K\,X + f = 0, \tag{7.7}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (7.6) (ou seja, $X = R_\theta X'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$) em (7.7) obtemos a equação

$$X'^t B X' + K'\,X' + f = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = R_\theta^t A R_\theta$ e $K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = K R_\theta$. Agora, como a inversa de R_θ é R_θ^t, então a matriz identidade $I_2 = R_\theta^t R_\theta$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda I_2) = \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda R_\theta^t R_\theta) \\ &= \det(R_\theta^t (A - \lambda I_2) R_\theta) = \det(R_\theta^t)\det(A - \lambda I_2)\det(R_\theta) = \det(A - \lambda I_2). \end{aligned}$$

Assim, escolhido θ de forma que $b' = 0$,[†] obtemos que

$$\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - a')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes a' e c' são as raízes da equação de 2^{o} grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{7.8}$$

Vamos, agora, determinar o ângulo θ. Observe que a matriz R_θ é tal que

$$B = R_\theta^t A R_\theta.$$

Multiplicando-se à esquerda pela matriz R_θ, obtemos

$$R_\theta B = A R_\theta.$$

Por um lado,

$$AR_\theta = A \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left[A \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \; A \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right],$$

por outro lado

$$R_\theta B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \left[a' \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \; c' \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right]$$

[†]Deixamos como exercício a verificação de que sempre existe um ângulo θ tal que a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$ é tal que $b' = 0$

Como $R_\theta B = AR_\theta$, então segue das das duas últimas equações acima que $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ é tal que

$$AU_1 = a'U_1$$

Mas, esta equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a'I_2U_1$$

ou

$$(A - a'I_2)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - a'I_2)X = \bar{0}$$

e $U_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ é obtido de U_1 trocando-se as componentes de posição e depois o sinal da 1ª componente.

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$, em que $R_\theta = [\ U_1\ U_2\ ]$, a equação (7.4) se transforma em (7.5). Os vetores U_1 e U_2 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'` e `y'`.

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

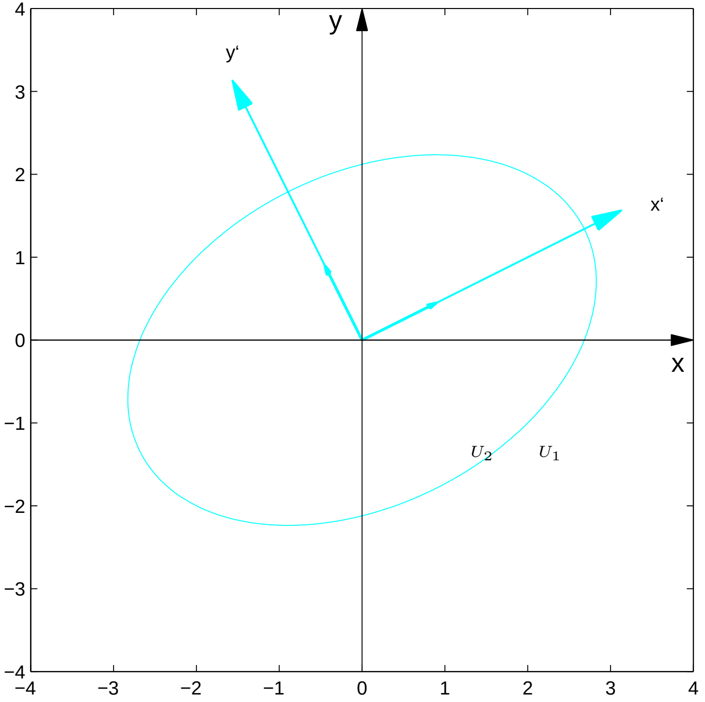


Figura 7.6: Elipse do Exemplo 7.4

Teorema 7.1. *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{7.9}$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, *sendo* a, b *e* c *não simultaneamente nulos. Então por uma rotação do sistema de coordenadas, ou seja, por um mudança de coordenadas da forma*

$$X = R_\theta X',$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e* $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ *a equação (7.9) pode sempre ser transformada em*

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

em que a', c' *são raízes de*

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ *é uma solução de norma igual a* 1 *do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} a - a' & b/2 \\ b/2 & c - a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.4. Vamos eliminar o termo xy na equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0 \tag{7.10}$$

através de uma rotação. Esta equação pode ser escrita da forma

$$X^t AX - 36 = 0,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Pelo que vimos, a' e c' são as raízes da equação

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Assim, podemos tomar $a' = 4$ e $c' = 9$. Para determinarmos os vetores U_1 e U_2 e por conseguinte o ângulo θ temos que resolver o sistema linear

$$(A - 4I_2)X = \bar{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem solução geral

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 & = & (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{array}$$

para caracterizar os novos eixos. Portanto a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (7.10) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36,$$

que é a equação de uma elipse.

Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos traçar os eixos x' e y'. O eixo x' passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido do vetor U_1 e o eixo y' passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido que U_2 (Figura 7.6).

Exemplo 7.5. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0. \tag{7.11}$$

Vamos eliminar o termo xy através de uma rotação. Os coeficientes a, b e c são os mesmos do exemplo anterior. Pelo exemplo anterior, $a' = 4$ e $c' = 9$ e os vetores U_1 e U_2 que dão a direção e o sentido dos novos eixos são dados por

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

O coeficiente $f' = f$ e os coeficientes d' e e' são dados por

$$K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = KR_\theta = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}.$$

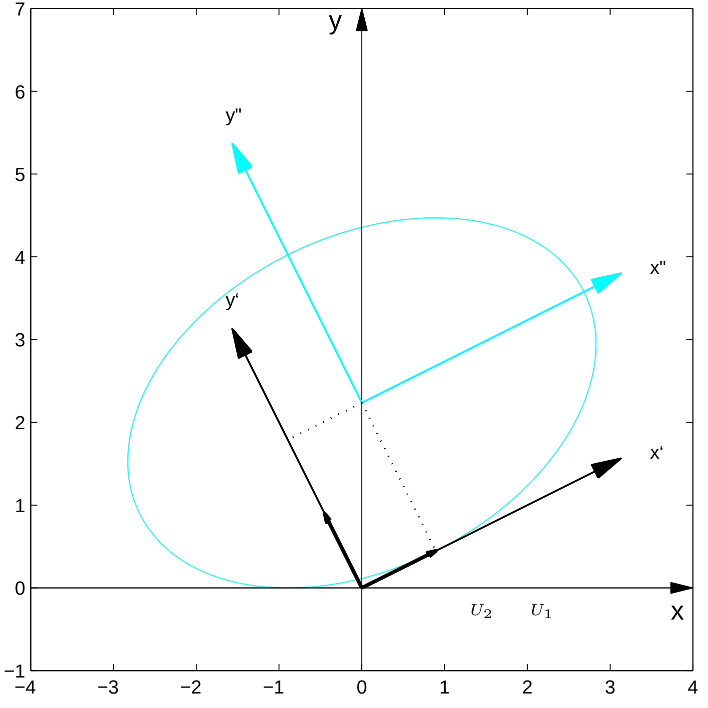


Figura 7.7: Elipse do Exemplo 7.5

Portanto a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (7.11) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0.$$

Ou ainda,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4[(x'^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[(y'^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 = 0$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 - 36 = 0.$$

Fazendo mais uma mudança de variáveis

$$x'' = x' - 1 \text{ e} \tag{7.12}$$

$$y'' = y' - 2 \tag{7.13}$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na Figura 7.7. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos x'' e y'', que por sua vez são translações dos eixos x' e y'. O eixo x' tem a direção e o sentido do vetor U_1. O eixo y' tem a direção e o sentido do vetor U_2. O eixo x'' tem equação $y'' = 0$. Usando a equação (7.12) obtemos $y' = 2$. O eixo y'' tem equação $x'' = 0$. Usando a equação (7.13) obtemos $x' = 1$.

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em duas variáveis.

Teorema 7.2. *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

(a) *O produto $a'c' = ac - b^2/4$.*

(b) *Se $a'c' > 0$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.*

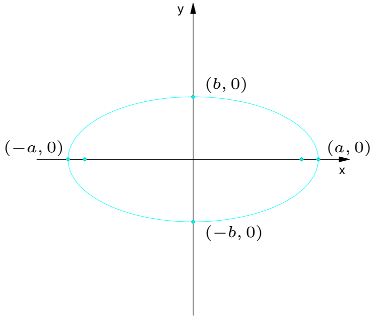
(c) *Se $a'c' < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.*

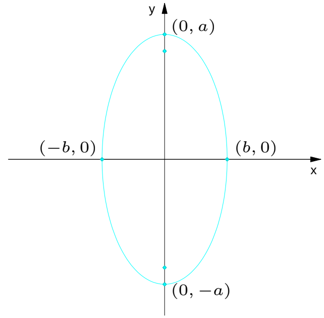
(d) *Se $a'c' = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > b$$

Elipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \ a > b$$

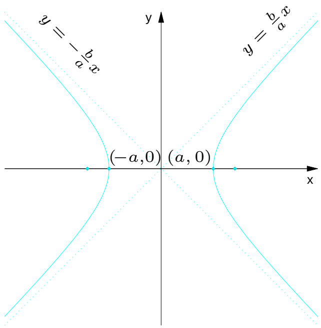


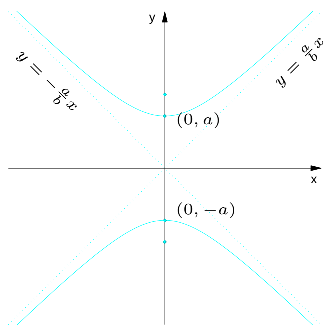


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$





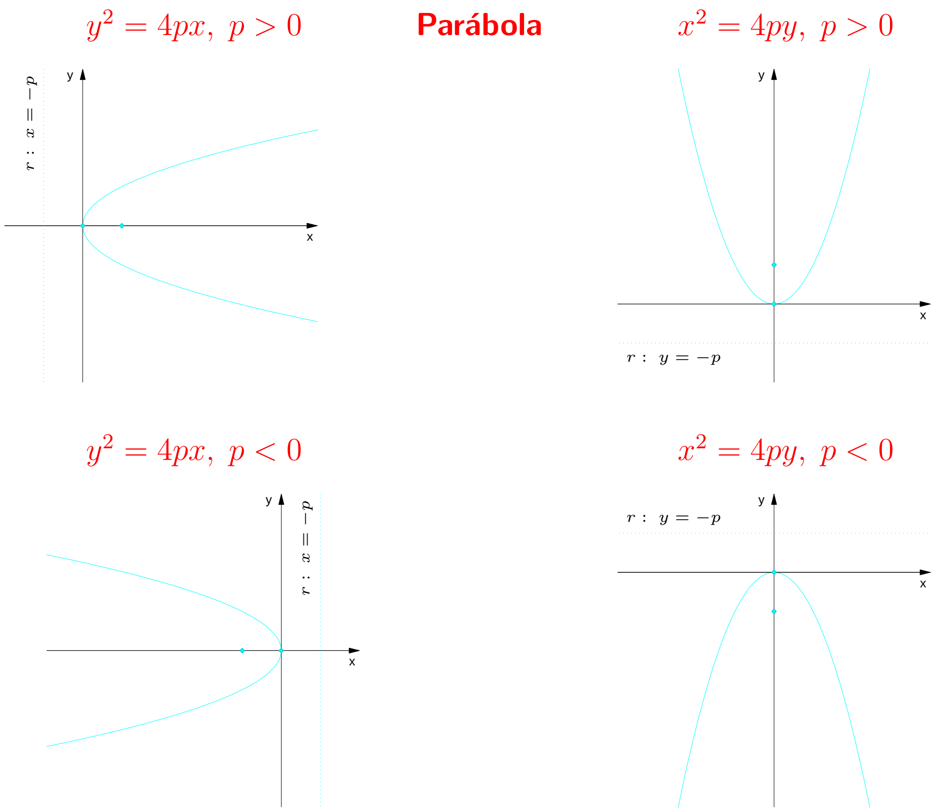


Figura 7.8: Cônicas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos (respostas na página 627)

Identifique a cônica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

7.2.1. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

7.2.2. $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$;

7.2.3. $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$;

7.2.4. $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0$;

7.2.5. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;

7.2.6. $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$;

7.2.7. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$;

7.2.8. $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$;

7.2.9. $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y = 5$;

7.2.10. $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$;

7.2.11. $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$;

Exercícios usando o Matlab®

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y],[a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y` por `a,b`, respectivamente.

`>> elipse(a,b)` desenha a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> elipse(a,b,[U1 U2])` desenha a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipse(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a elipse $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbx(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperby(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabx(p)` desenha a parábola $y^2 = 4px$.

`>> parabx(p,[U1 U2])` desenha a parábola $y'^2 = 4px'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabx(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $y''^2 = 4px''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

`>> paraby(p)` desenha a parábola $x^2 = 4py$.

`>> paraby(p,[U1 U2])` desenha a parábola $x'^2 = 4py'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> paraby(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $x''^2 = 4py''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

7.2.12. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

7.2.13. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$, em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $p(\lambda)$ tem somente raízes reais.

(b) Mostre que se $b \neq 0$, então as raízes são distintas, ou seja, $a' \neq c'$.

(c) Sejam a' e c' raízes distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A - a'I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A - c'I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $a'X_1 \cdot X_2 = c'X_1 \cdot X_2$)

(d) Mostre que se $X = (x, y)$ é ortogonal a $V = (v_1, v_2)$ com $||X|| = ||V||$, então $X = (-v_2, v_1)$ ou $X = (v_2, -v_1)$.

(e) Mostre que sempre existe um ângulo θ tal que $R_\theta^t A R_\theta = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix}$ e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (7.4) em (7.5 na página 493.

7.2.14. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $a'c' = ac - b^2/4 = p(0) = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(b) Mostre que se $a'c' > 0$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

(c) Mostre que se $a'c' < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.

(d) Mostre que se $a'c' = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

7.3 Identificação de Quádricas

Vamos determinar uma mudança de coordenadas que elimina os termos xy, xz e yz na equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{7.14}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0. \tag{7.15}$$

Ou seja, fazendo uma mudança de coordenadas em (7.14) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{7.16}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, para vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e ortogonais, escolhidos adequadamente, obtemos a equação (7.15).

A equação (7.14) pode ser escrita na forma

$$X^t A X + K\, X + j = 0, \tag{7.17}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$, $K = [\, g \quad h \quad i \,]$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (7.16) (ou seja, $X = QX'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$) em (7.17) obtemos a equação

$$X'^t B X' + K'\, X' + j = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & d'/2 & e'/2 \\ d'/2 & b' & f'/2 \\ e'/2 & f'/2 & c' \end{bmatrix} = Q^t A Q$ e $K' = \begin{bmatrix} g' & h' & i' \end{bmatrix} = KQ$. Agora, como a inversa de Q é Q^t, então a matriz identidade $I_2 = Q^t Q$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_3) &= \det(Q^t A Q - \lambda I_3) = \det(Q^t A Q - \lambda Q^t Q) \\ &= \det(Q^t (A - \lambda I_3) Q) = \det(Q^t) \det(A - \lambda I_3) \det(Q) = \det(A - \lambda I_3). \end{aligned}$$

Assim, escolhida a matriz Q de forma que $d' = e' = f' = 0$,[‡] obtemos que

$$\det(A - \lambda I_3) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - a')(\lambda - b')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes a', b' e c' são as raízes da equação de 2^{o} grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{7.18}$$

Vamos, agora, determinar a matriz Q. Observe que a matriz Q é tal que

$$B = Q^t A Q.$$

[‡]Pode-se mostrar que sempre existe uma matriz Q tal que a mudança de coordenadas dada por $X' = QX$ é tal que $d' = e' = f' = 0$. Deixamos como exercício a prova da existência de uma tal matriz Q no caso em que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ tem três raízes reais distintas. A demonstração do caso geral pode ser encontrada por exemplo em [19].

Multiplicando-se à esquerda pela matriz Q, obtemos

$$QB = AQ.$$

Por um lado,

$$AQ = A\,[\,U_1\ U_2\ U_3\,] = [\,AU_1\ AU_2\ AU_3\,]\,,$$

por outro lado

$$QB = [\,U_1\ U_2\ U_3\,]\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = [\,a'U_1\ b'U_2\ c'U_3\,]$$

Assim, U_1, U_2 e U_3 satisfazem as equações

$$AU_1 = a'U_1, \quad AU_2 = b'U_2 \quad \text{e} \quad AU_3 = c'U_3.$$

A 1ª equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a'I_3U_1$$

ou

$$(A - a'I_3)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - a'I_3)X = \bar{0}.$$

Analogamente, U_2 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - b'I_3)X = \bar{0},$$

que seja ortogonal a U_1. Análogo também é o caso do terceiro vetor U_3. Mas como já temos dois vetores ortogonais U_1 e U_2, então U_3 pode ser tomado igual ao produto vetorial de U_1 por U_2,

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\ U_1\ U_2\ U_3\ ]$, a equação (7.14) se transforma na equação (7.15). Os vetores U_1, U_2 e U_3 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'`, `y'` e `z'`.

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

Teorema 7.3. *Considere a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{7.19}$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, *sendo* a, b, c, d, e *e* f *não simultaneamente nulos. Então por uma mudança de coordenadas tal que*

$$X = QX',$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *e* $Q = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$ *a equação (7.19) pode sempre ser transformada em*

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0,$$

em que a', b', c' *são raízes de*

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, U_1 *é uma solução de norma igual a* 1 *do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} a - a' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - a' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

U_2 é uma solução de norma igual a 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-b' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-b' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

Exemplo 7.6. Considere a quádrica de equação

$$x^2 = 2yz \tag{7.20}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t A X = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As raízes de

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

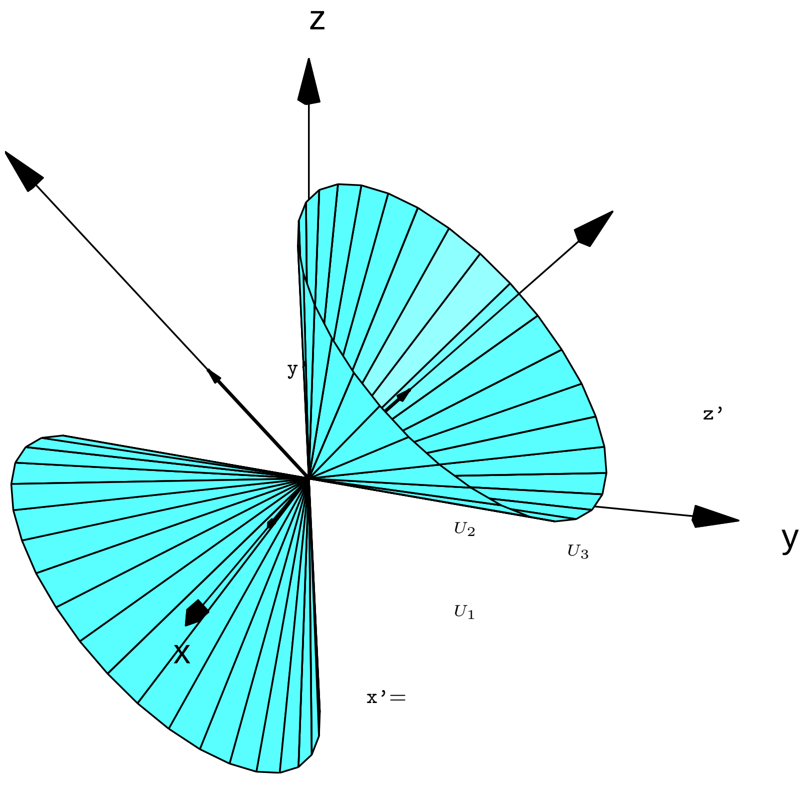


Figura 7.9: Cone circular do Exemplo 7.6

são $a' = b' = 1$ e $c' = -1$.

A forma escalonada reduzida de

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral de $(A - I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, -\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(\alpha, -\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (1, 0, 0)$ e $V_2 = (0, -1, 1)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - I_3)X = \bar{0}$. Os vetores V_1 e V_2 já são ortogonais e assim podemos tomar

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = V_1 = (1, 0, 0) \\ U_2 &= \left(\frac{1}{||V_2||}\right) V_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ U_3 &= U_1 \times U_2 = \left(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, a equação (7.20) se transforma em

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0,$$

ou

$$x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

que é a equação de um cone circular no novo sistema de coordenadas.

Exemplo 7.7. Considere a quádrica de equação

$$7x^2 + 10y^2 + 7z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 6 = 0. \tag{7.21}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t AX - 6 = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

As raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (7-\lambda)^2(10-\lambda) + 8 - (10-\lambda) - 8(7-\lambda) \\ &= (10-\lambda)[(7-\lambda)^2 - 1] - 8(6-\lambda) \\ &= (10-\lambda)(6-\lambda)(8-\lambda) - 8(6-\lambda) = (6-\lambda)^2(12-\lambda) \end{aligned}$$

são $a' = b' = 6$ e $c' = 12$.

A forma escalonada reduzida de

$$A - 6I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha + 2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(-\alpha+2\beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(2, 1, 0)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (-1, 0, 1)$ e $V_2 = (2, 1, 0)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$. O vetor

$$W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{V_1} V_2 = (1, 1, 1)$$

é ortogonal a V_1 e assim podemos tomar

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ U_2 &= \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \\ U_3 &= U_1 \times U_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Portanto com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\ U_1\ U_2\ U_3\ ]$, a equação (7.21) se transforma em

$$6x'^2 + 6y'^2 + 12z'^2 = 6 \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{1/2} = 1,$$

que é a equação de um elipsóide de revolução no novo sistema de coordenadas.

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em três variáveis.

Teorema 7.4. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Sejam a', b' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

(a) *Se a', b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio.*

(b) *Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperbolóide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.*

(c) *Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um parabolóide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.*

(d) *Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.*

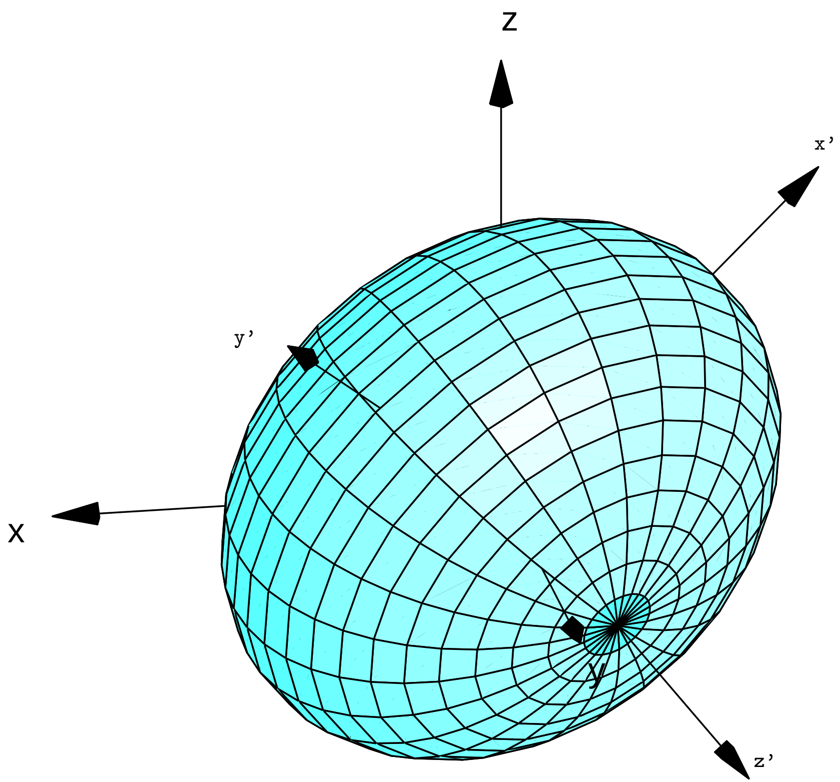


Figura 7.10: Elipsóide de revolução do Exemplo 7.7

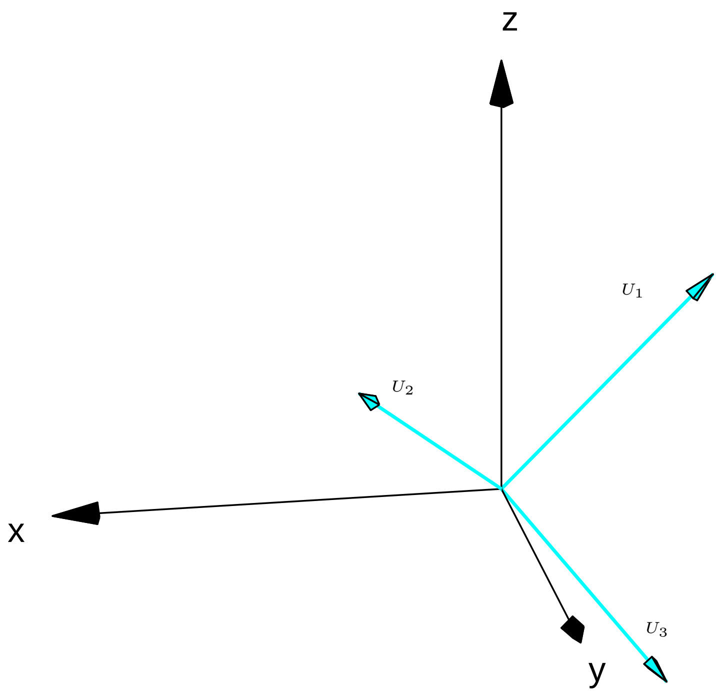
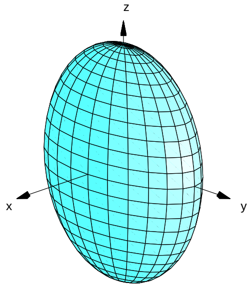


Figura 7.11: Novo sistema de coordenadas do Exemplo 7.7

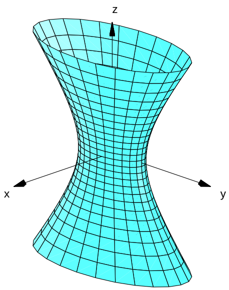
Elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



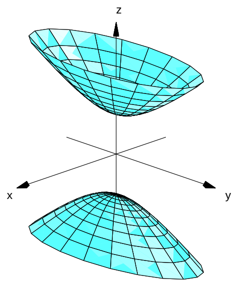
Hiperbolóide de Uma Folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



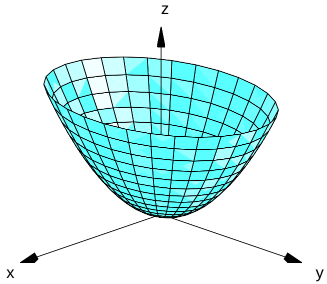
Hiperbolóide de Duas Folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



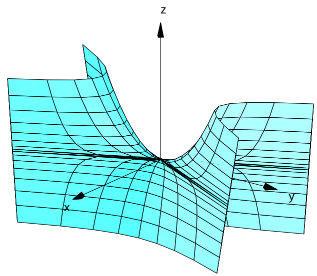
Parabolóide Elíptico

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ c > 0$$



Parabolóide Hiperbólico

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ c < 0$$



Cone Elíptico

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

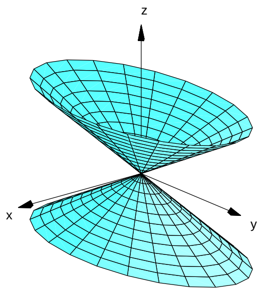


Figura 7.12: Algumas Quádricas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos (respostas na página 660)

Identifique a quádrica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

7.3.1. $2x^2 + 30y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$;

7.3.2. $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$;

7.3.3. $2xy + z = 0$;

7.3.4. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = 9$;

7.3.5. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$;

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y;z],[a;b;c])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y,z` por `a,b,c`, respectivamente.

`>> elipso(a,b,c)` desenha o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o elipsóide $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o elipsóide $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1x(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> hiperbo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $-\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1y(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1z(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2x(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> hiperbo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2y(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2z(a,b,c)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperbolóide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1x(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

`>> parabo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $ax' = \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $ax'' = \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1y(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $by' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $by'' = \frac{x''^2}{a^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1z(a,b,c)` desenha o parabolóide elíptico $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide elíptico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide elíptico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2x(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $ax' = \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $ax'' = \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2y(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $by' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $by'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2z(a,b,c)` desenha o parabolóide hiperbólico $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o parabolóide hiperbólico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o parabolóide hiperbólico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

7.3.6. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**.

Exercícios Teóricos

7.3.7. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Sejam α e β raízes reais distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A-\alpha I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A - \beta I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $\alpha X_1 \cdot X_2 = \beta X_1 \cdot X_2$)

(b) Mostre que se $p(\lambda)$ tem raízes reais distintas, então sempre existe uma matriz Q tal que

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}$$

e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (7.14) em (7.15 na página 509.

7.3.8. Mostre que a superfície cônica cuja geratriz é uma parábola $y^2 = 4px$ em um plano $z = k$ é um cone elíptico.

7.3.9. Mostre que a interseção de um plano $by + cz + d = 0$, em que $b^2 + c^2 = 1$, com o cone $x^2 + y^2 = z^2$ é uma cônica que pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. (Sugestão: mude para um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ tal que $U_1 = \vec{i} = (1,0,0)$, $U_2 = (0, b, c)$ e $U_3 = (0, -c, b)$)

7.3.10. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Sejam a', b' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

Mostre que

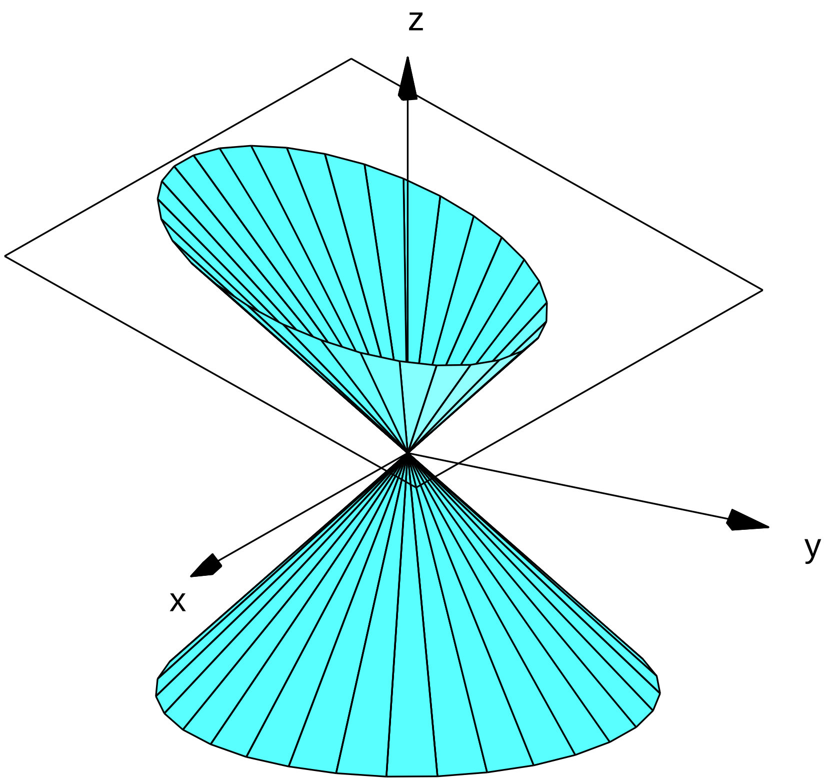


Figura 7.13: Elipse obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

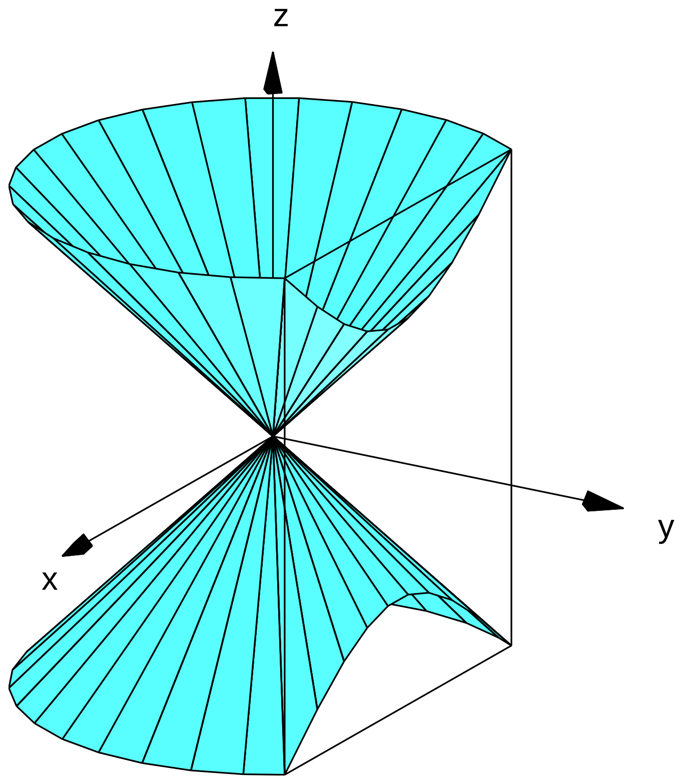


Figura 7.14: Hipérbole obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

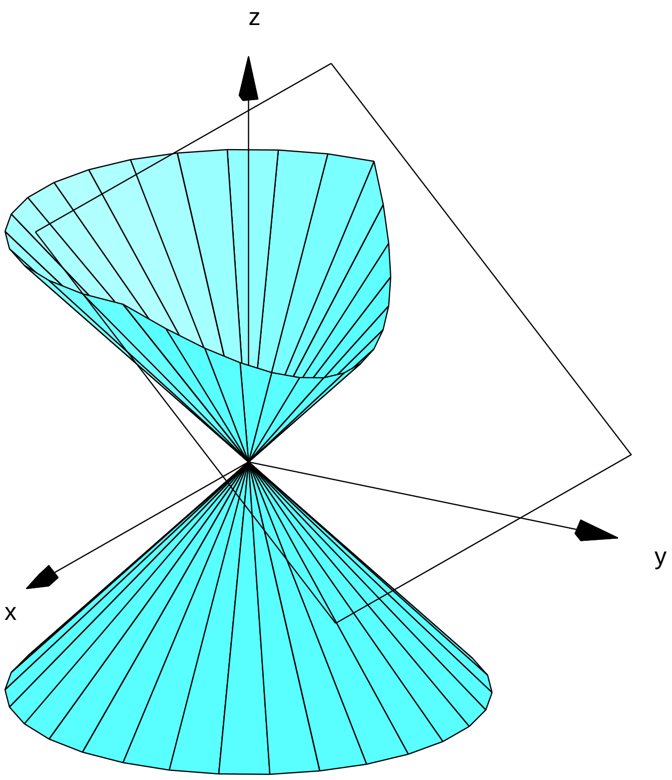


Figura 7.15: Parábola obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

(a) Se a', b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsóide, um ponto ou o conjunto vazio.

(b) Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperbolóide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.

(c) Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um parabolóide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.

(d) Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.

Respostas dos Exercícios

1.1. Matrizes (página 16)

1.1.1.
```
>> A=[2,0;6,7]; B=[0,4;2,-8]; C=[-6,9,-7;7,-3,-2];
>> D=[-6,4,0;1,1,4;-6,0,6]; E=[6,9,-9;-1,0,-4;-6,0,-1];
>> A*B-B*A
   -24   -20
    58    24
>> 2*C-D
??? Error using ==> - Matrix dimensions must agree.
>> 2*D-3*E
   -30   -19    27
     5     2    20
     6     0    15
>> D*(D-E)
```

```
 80     34    -22
-10     -4     45
 72     30    -12
```

No item (c) foram usadas as propriedades (l) e (n) do Teorema 1.1 na página 10 e no item (d) foi usada a propriedade (i).

1.1.2. $A(B+C) = AB + AC$, $B^tA^t = (AB)^t$, $C^tA^t = (AC)^t$, $(ABA)C = (AB)(AC)$.

1.1.3. (a)
```
>> A=[-3,2,1;1,2,-1];B=[2,-1;2,0;0,3];
>> C=[-2,1,-1;0,1,1;-1,0,1];
>> syms d1 d2 d3
>> D=diag([d1,d2,d3]);
>> E1=[1;0;0];E2=[0;1;0];E3=[0;0;1];
>> B*A
    -7      2      3
    -6      4      2
     3      6     -3
>> A*B
    -2      6
     6     -4
```

(b)
```
>> [A*E1-A(:,1),A*E2-A(:,2),A*E3-A(:,3)]
     0      0      0
     0      0      0
>> E1.'*B-B(1,:)
     0      0
```

```
>> E2.'*B-B(2,:)
     0     0
>> E3.'*B-B(3,:)
     0     0
```

(c)
```
>> C1=C(:,1);C2=C(:,2);C3=C(:,3);
>> C*D-[d1*C1,d2*C2,d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

(d)
```
>> C1=C(1,:);C2=C(2,:);C3=C(3,:);
>> D*C-[d1*C1;d2*C2;d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

(e)
```
>> B1=B(:,1);B2=B(:,2);
>> A*B-A*[B1,B2]
     0     0
     0     0
```

(f)
```
>> A1=A(1,:);A2=A(2,:);
>> A*B-[A1;A2]*B
     0     0
     0     0
```

1.1.4.
```
>> syms x y z
>> A=[1,-3,0;0,4,-2]; X=[x;y;z];
```

```
>> A*X
[   x-3*y]
[ 4*y-2*z]
>> x*A(:,1)+y*A(:,2)+z*A(:,3)
[   x-3*y]
[ 4*y-2*z]
```

1.1.5.
```
>> syms x
>> A=[x,4,-2]; B=[2,-3,5];
>> solve(A*B.')
11
```

1.1.6.
```
>> syms y
>> A=[1,1/y;y,1];
>> A^2-2*A
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

1.1.7.
```
>> syms x y z w
>> X=[x,y;z,w]; M=[0,1;-1,0];
>> X*M-M*X
[ -y-z,  x-w]
[  x-w,  z+y]
>> syms a b c d
>> A=[x,y;-y,x]; B=[a,b;-b,a];
>> A*B-B*A
```

```
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

1.1.8. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

```
>> syms x y z w
>> syms a b c d
>> A=[x,0;0,y];B=[a,b;c,d];
>> A*B
[ x*a, x*b]
[ y*c, y*d]
>> B*A
[ x*a, b*y]
[ c*x, y*d]
```

Como $yb = xb$, para todo b, em particular para $b = 1$, obtemos que $y = x$. Assim, a matriz A que além de ser diagonal tem os elementos da diagonal iguais.

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

```
>> A=[x,y;z,w];B=[a,b;c,d];
>> A*B
[ x*a+y*c, x*b+y*d]
[ z*a+w*c, z*b+w*d]
>> B*A
[ x*a+z*b, a*y+b*w]
[ c*x+d*z, y*c+w*d]
```

Comparando os elementos de posição 1,1 obtemos que $cy = bz$, para todos os valores de b e c. Em particular para $b = 0$ e $c = 1$, obtemos que $y = 0$ e para $b = 1$ e $c = 0$, obtemos que $z = 0$. Ou seja, a matriz A tem que ser diagonal. Assim, pelo ítem anterior temos que a matriz A tem que ser diagonal com os elementos da diagonal iguais.

1.1.9. (a)
```
>> A=[1,1/2;0,1/3]
A =
    1.0000    0.5000
         0    0.3333
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
    1.0000    0.6667
         0    0.1111
ans =
    1.0000    0.7222
         0    0.0370
ans =
    1.0000    0.7407
         0    0.0123
ans =
    1.0000    0.7469
         0    0.0041
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
    1.0000    0.7490
         0    0.0014
```

```
ans =
    1.0000    0.7497
         0    0.0005
ans =
    1.0000    0.7499
         0    0.0002
ans =
    1.0000    0.7500
         0    0.0001
```

A seqüência parece estar convergindo para a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)
```
>> A=[1/2,1/3;0,-1/5]
A =
    0.5000    0.3333
         0   -0.2000
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
    0.2500    0.1000
         0    0.0400
ans =
    0.1250    0.0633
         0   -0.0080
ans =
    0.0625    0.0290
         0    0.0016
```

```
ans =
    0.0312    0.0150
         0   -0.0003
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
    0.0156    0.0074
         0    0.0001
ans =
    0.0078    0.0037
         0    0.0000
ans =
    0.0039    0.0019
         0    0.0000
ans =
    0.0020    0.0009
         0    0.0000
```

A seqüência parece estar convergindo para a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.1.10. (a)

```
>> A=[0,0,1;1,0,0;0,1,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 0, 1]
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
>> A^2
[ 0, 1, 0]
```

```
[ 0, 0, 1]
[ 1, 0, 0]
>> A^3
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
```

Para $k = 3$, $A^k = I_3$.

(b)
```
>> A=[0,1,0,0;-1,0,0,0;0,0,0,1;...
0,0,1,0];
>> A=sym(A)
[  0,  1,  0,  0]
[ -1,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  1]
[  0,  0,  1,  0]
>> A^2
[ -1,  0,  0,  0]
[  0, -1,  0,  0]
[  0,  0,  1,  0]
[  0,  0,  0,  1]
>> A^3
[  0, -1,  0,  0]
[  1,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  1]
[  0,  0,  1,  0]
>> A^4
```

```
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

Para $k = 4$, $A^k = I_4$.

(c)
```
>> A=[0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^2
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^3
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^4
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

```
[ 0, 0, 0, 0]
```

Para $k = 4$, $A^k = \bar{0}$.

1.1.11. Concluímos que é muito raro encontrar matrizes cujo produto comute.

1.1.12. Concluímos que matrizes diagonais em geral comutam. Pode-se mostrar que elas sempre comutam (Exercício 27 na página 28).

1.1.13. Se a matriz `A` for diagonal, então o produto comuta, se os elementos da diagonal de `A` são iguais. (ver Exercício 16 na página 24). A probabilidade de um tal par de matrizes comute é aproximadamente igual a probabilidade de que a primeira matriz tenha os elementos da sua diagonal iguais, ou seja, $11/11^3 = 1/11^2 \approx 1\%$.

1.2. Sistemas Lineares (página 58)

1.2.1. As matrizes que estão na forma reduzida escalonada são A e C.

1.2.2. (a) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 7\alpha \\ 2 - 3\alpha \\ -5 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3\alpha + 6\beta \\ \beta \\ 7 - 4\alpha \\ 8 - 5\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(c) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(d) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+8\alpha-7\beta \\ \beta \\ 5-6\alpha \\ 9-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

1.2.3. (a)
```
>> A=[1,1,2,8;-1,-2,3,1;3,-7,4,10];
>> escalona(A)
eliminação 1:
1*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   1,   2,   8]
[   0,  -1,   5,   9]
[   0, -10,  -2, -14]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[   1,   1,   2,   8]
[   0,   1,  -5,  -9]
[   0, -10,  -2, -14]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
10*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

```
[    1,    0,    7,   17]
[    0,    1,   -5,   -9]
[    0,    0,  -52, -104]
eliminação 3:
-1/52*linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  7, 17]
[  0,  1, -5, -9]
[  0,  0,  1,  2]
-7*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
5*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 3]
[ 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 2]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b)

```
>> A=[2,2,2,0;-2,5,2,1;8,1,4,-1];
>> escalona(A)
eliminação 1:
1/2*linha 1 ==> linha 1
[  1,  1,  1,  0]
[ -2,  5,  2,  1]
[  8,  1,  4, -1]
2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-8*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
```

```
[  1,  1,  1,  0]
[  0,  7,  4,  1]
[  0, -7, -4, -1]
eliminação 2:
1/7*linha 2 ==> linha 2
[   1,   1,   1,   0]
[   0,   1, 4/7, 1/7]
[   0,  -7,  -4,  -1]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  3/7, -1/7]
[    0,    1,  4/7,  1/7]
[    0,    0,    0,    0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c)
```
>> A=[0,-2,3,1;3,6,-3,-2;6,6,3,5]
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  3,  6, -3, -2]
[  0, -2,  3,  1]
[  6,  6,  3,  5]
1/3*linha 1 ==> linha 1
[    1,    2,   -1, -2/3]
```

```
[    0,   -2,    3,    1]
[    6,    6,    3,    5]
-6*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    2,   -1, -2/3]
[    0,   -2,    3,    1]
[    0,   -6,    9,    9]
eliminação 2:
-1/2*linha 2 ==> linha 2
[    1,    2,   -1, -2/3]
[    0,    1, -3/2, -1/2]
[    0,   -6,    9,    9]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
6*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,    2,  1/3]
[    0,    1, -3/2, -1/2]
[    0,    0,    0,    6]
```

O sistema **não** tem solução!

1.2.4.
```
>> A=[1,-2,1;2,-5,1;3,-7,2];
>> B1=[1;-2;-1];B2=[2;-1;2];
>> escalona([A,B1,B2])
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  0, -1, -1, -4, -5]
```

```
[  0, -1, -1, -4, -4]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0, -1, -1, -4, -4]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  3,  9, 12]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0,  0,  0,  0,  1]
```

(a) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 3\alpha \\ 4 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) O sistema **não** tem solução!

1.2.5. (a)

```
>> A=[1,0,5;1,1,1;0,1,-4];
>> B=A+4*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 5, 1, 0]
[ 5, 0, 5, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
(-5)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
```

```
[    1,    5,    1,    0]
[    0,  -25,    0,    0]
[    0,    1,    0,    0]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[    1,    5,    1,    0]
[    0,    1,    0,    0]
[    0,  -25,    0,    0]
(-5)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(25)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b)
```
>> B=A-2*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
(-1)*linha 1 ==> linha 1
[   1,   0,  -5,   0]
[   1,  -1,   1,   0]
[   0,   1,  -6,   0]
(-1)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   0,  -5,   0]
```

```
[  0, -1,  6,  0]
[  0,  1, -6,  0]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0,  1, -6,  0]
(-1)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0,  0,  0,  0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 6\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.2.6. (a)

```
>> syms a
>> A=[1,2,-3,4;3,-1,5,2;4,1,a^2-14,a+2];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-3*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      2,     -3,      4]
[      0,     -7,     14,    -10]
[      0,     -7, a^2-2,   a-14]
eliminação 2:
-1/7*linha 2 ==> linha 2
```

```
[      1,      2,     -3,      4]
[      0,      1,     -2,   10/7]
[      0,     -7, a^2-2,   a-14]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$$

i. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Neste caso, $a = 4$;

ii. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = -4$;

iii. Se $a^2 - 16 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm 4$;

(b)
```
>> A=[1,1,1,2;2,3,2,5;2,3,a^2-1,a+1];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      1,      1,      2]
[      0,      1,      0,      1]
[      0,      1, a^2-3,    a-3]
eliminação 2:
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{array}\right]$$

i. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Este caso não pode ocorrer;

ii. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = \pm\sqrt{3}$;

iii. Se $a^2 - 3 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm\sqrt{3}$;

1.2.7.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{kg de X} \\ \text{kg de Y} \\ \text{kg de Z} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{gramas de A} \\ \text{gramas de B} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{array}\right]$$

```
>> A=[2,1,3,1900;1,3,5,2400;3,2,4,2900];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[    1,    3,    5, 2400]
```

```
[    2,    1,    3, 1900]
[    3,    2,    4, 2900]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[     1,     3,     5,  2400]
[     0,    -5,    -7, -2900]
[     0,    -7,   -11, -4300]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[     1,     3,     5,  2400]
[     0,     1,   7/5,   580]
[     0,    -7,   -11, -4300]
(-3)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(7)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  4/5,  660]
[    0,    1,  7/5,  580]
[    0,    0, -6/5, -240]
eliminação 3:
(-5/6)*linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, 4/5, 660]
[   0,   1, 7/5, 580]
[   0,   0,   1, 200]
(-4/5)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(-7/5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   0,   0, 500]
```

```
[    0,    1,    0, 300]
[    0,    0,    1, 200]
```

Foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

1.2.8. Substituindo os pontos na função obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & d & = & 10 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 7 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & -11 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & -14 \end{array}\right. .$$

Substituindo $d = 10$ nas outras equações e escalonando a matriz aumentada do sistema correspondente:

```
>> escalona([1,1,1,-3;27,9,3,-21;64,16,4,-24])
eliminação 1:
-27*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-64*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    1,    1,  -3]
[    0, -18, -24,  60]
[    0, -48, -60, 168]
eliminação 2:
-1/18*linha 2 ==> linha 2
[      1,      1,      1,     -3]
[      0,      1,   4/3, -10/3]
[      0,    -48,    -60,    168]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
```

```
48*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[     1,      0,   -1/3,    1/3]
[     0,      1,    4/3, -10/3]
[     0,      0,      4,      8]
eliminação 3:
1/4*linha 3 ==> linha 3
[     1,      0,   -1/3,    1/3]
[     0,      1,    4/3, -10/3]
[     0,      0,      1,      2]
1/3*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-4/3*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[  1,   0,   0,   1]
[  0,   1,   0, -6]
[  0,   0,   1,   2]
```

Assim, os coeficientes são $a = 1, b = -6, c = 2$ e $d = 10$ e o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

1.2.9. Substituindo os pontos na equação do círculo obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2a & + & 7b & + & c & = & -[(-2)^2+7^2] & = & -53 \\ -4a & + & 5b & + & c & = & -[(-4)^2+5^2] & = & -41 \\ 4a & - & 3b & + & c & = & -[4^2+3^2] & = & -25 \end{array}\right. .$$

```
>> A=[-2,7,1,-53;-4,5,1,-41;4,-3,1,-25];
>> escalona(A)
eliminação 1:
```

```
-1/2*linha 1 ==> linha 1
[    1, -7/2, -1/2, 53/2]
[   -4,    5,    1,  -41]
[    4,   -3,    1,  -25]
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1, -7/2, -1/2, 53/2]
[    0,   -9,   -1,   65]
[    0,   11,    3, -131]
eliminação 2:
-1/9*linha 2 ==> linha 2
[     1,  -7/2,  -1/2,  53/2]
[     0,     1,   1/9, -65/9]
[     0,    11,     3,  -131]
7/2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-11*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[      1,       0,   -1/9,   11/9]
[      0,       1,    1/9,  -65/9]
[      0,       0,   16/9, -464/9]
eliminação 3:
9/16*linha 3 ==> linha 3
[     1,     0,  -1/9,  11/9]
[     0,     1,   1/9, -65/9]
[     0,     0,     1,   -29]
1/9*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
```

```
-1/9*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   0,   0,  -2]
[   0,   1,   0,  -4]
[   0,   0,   1, -29]
```

Os coeficientes são $a = -2, b = -4$ e $c = -29$ e a equação do círculo é $x^2+y^2-2x-4y-29 = 0$.

1.2.10. (a)
```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,5,b1;4,-5,8,b2;-3,3,-3,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2,   5,      b1]
[ 0,  3, -12, b2-4*b1]
[ 0, -3,  12, b3+3*b1]
eliminação 2:
1/3*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2,  5,             b1]
[ 0,  1, -4, 1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, -3, 12,        b3+3*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -3, -5/3*b1+2/3*b2]
[ 0, 1, -4,  1/3*b2-4/3*b1]
```

```
[ 0, 0,  0,       b3-b1+b2]
```

O sistema é consistente se, e somente se, $b_3 - b_1 + b_2 = 0$.

(b)
```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,-1,b1;-4,5,2,b2;-4,7,4,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, -1,      b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[ 1, -2, -1,      b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
-1*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, -1,       b1]
[ 0,  1,  0, -b3-4*b1]
[ 0, -3, -2,  b2+4*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1,   -7*b1-2*b3]
[ 0, 1,  0,     -b3-4*b1]
[ 0, 0, -2, b2-8*b1-3*b3]
```

O sistema é consistente para todos os valores reais de b_1, b_2 e b_3.

1.2.11.
```
>> A=[0,1,7,8;1,3,3,8;-2,-5,1,-8];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  1,  3,  3,  8]
[  0,  1,  7,  8]
[ -2, -5,  1, -8]
2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 3, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
eliminação 2:
-3*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, -18, -16]
[   0,   1,   7,   8]
[   0,   0,   0,   0]
>> I=eye(3);E=oe(-1,2,3,I),...
F=oe(-3,2,1,I),G=oe(2,1,3,I),H=oe(I,1,2)
E =[  1,  0,  0]F =[  1, -3,  0]
   [  0,  1,  0]   [  0,  1,  0]
   [  0, -1,  1]   [  0,  0,  1]
G =[ 1, 0, 0]H =[ 0, 1, 0]
   [ 0, 1, 0]   [ 1, 0, 0]
```

```
   [ 2, 0, 1]   [ 0, 0, 1]
>> E*F*G*H*A
[   1,   0, -18, -16]
[   0,   1,   7,   8]
[   0,   0,   0,   0]
```

1.2.12. (a)
```
>> A=[1,2,0,-3,1,0,2;1,2,1,-3,1,2,3;...
1,2,0,-3,2,1,4;3,6,1,-9,4,3,9]
>> escalona(A)
[  1,  2,  0, -3,  0, -1,  0]
[  0,  0,  1,  0,  0,  2,  1]
[  0,  0,  0,  0,  1,  1,  2]
[  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0]
```

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1+2x_2 & & -3x_4 & & & - & x_6 & = & 0 \\ & x_3 & & & & + & 2x_6 & = & 1 \\ & & & & x_5 & + & x_6 & = & 2 \end{array}\right.$$

$X = [\alpha + 3\beta - 2\gamma \quad \gamma \quad 1-2\alpha \quad \beta \quad 2-\alpha \quad \alpha]^t$,
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(b)
```
>> A=[1,3,-2,0,2,0,0;2,6,-5,-2,4,-3,-1;...
0,0,5,10,0,15,5;2,6,0,8,4,18,6]
>> escalona(A)
[    1,    3,    0,    4,    2,    0,    0]
[    0,    0,    1,    2,    0,    0,    0]
[    0,    0,    0,    0,    0,    1,  1/3]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0]
```

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 + 3x_2 & & + 4x_4 & + & 2x_5 & & = 0 \\ & x_3 & + 2x_4 & & & & = 0 \\ & & & & & x_6 & = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$
$X = [-2\alpha - 4\beta - 3\gamma \quad \gamma \quad -2\beta \quad \beta \quad \alpha \quad 1/3]^t$,
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

1.2.13.
```
>> syms a, B=[4,3,1,6]';
>> A=[1,1,1,1;1,3,-2,a;
2,2*a-2,-a-2,3*a-1;3,a+2,-3,2*a+1]
>> escalona([A,B])
[ 1,  0,  0,  0, (4*a-11)/(a-5)]
[ 0,  1,  0,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  1,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  0,  1,        -1/(a-5)]
>> solve(-3/2*a+5/4+1/4*a^2,a)
ans = [ 1][ 5]
```
Se $a \neq 1$ e $a \neq 5$, então $X = [\frac{4a-11}{a-5} \; \frac{-4}{a-5} \; \frac{-4}{a-5} \; \frac{-1}{a-5}]^t$.

```
>> C=subs(A,a,1)
>> escalona([C,B])
[ 1, 0, 0, 1, 2]
[ 0, 1, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se $a = 1$, então $X = [2 - \alpha, 1, 1, \alpha]^t \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

```
>> D=subs(A,a,5)
>> escalona([D,B])
[    1,    0,  5/2,   -1,    0]
[    0,    1, -3/2,    2,    0]
[    0,    0,    0,    0,    1]
[    0,    0,    0,    0,    0]
```

Se $a = 5$, então o sistema não tem solução.

1.2.14. (a)

```
>> A=[1,2,3,1,8;1,3,0,1,7;1,0,2,1,3];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 0, 0, 2]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
```

$$\{(1-\alpha, 2, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(b)

```
>> A=[1,1,3,-3,0;0,2,1,-3,3;1,0,2,-1,-1];
>> escalona(A)
[  1,  0,  0,  1,  1]
[  0,  1,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1, -1, -1]
```

$$\{(1-\alpha, 2+\alpha, -1+\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c)

```
>> A=[1,2,3,0;1,1,1,0;1,1,2,0;1,3,3,0];
```

```
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

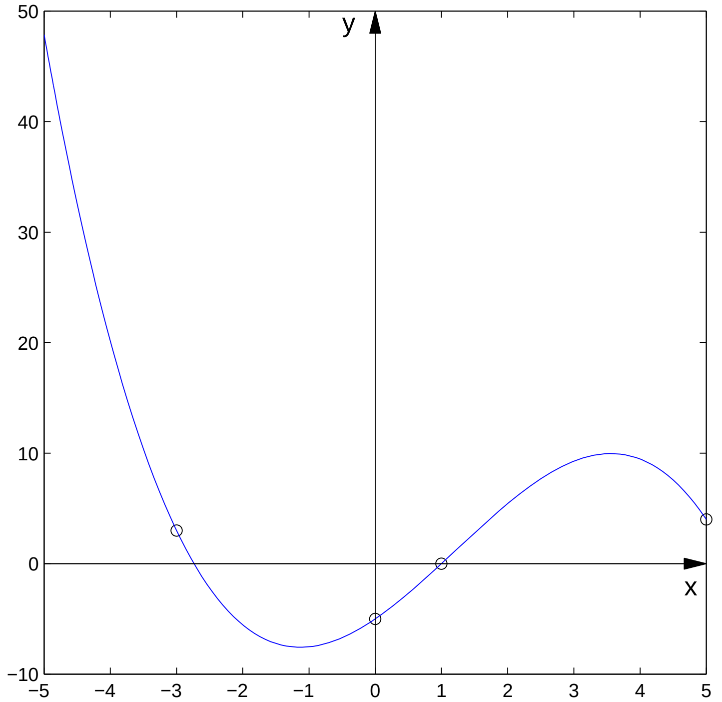
$$\{(0,0,0)\}$$

1.2.15.
```
>> P=randi(4,2)
P =  5     4
    -3     3
     1     0
     0    -5
>> A=matvand(P(:,1),3),B=P(:,2)
A =125    25     5     1
   -27     9    -3     1
     1     1     1     1
     0     0     0     1
B =  4
     3
     0
    -5
>> R=escalona([A,B])
R  = [ 1,  0,  0,  0, -163/480]
     [ 0,  1,  0,  0,    99/80]
     [ 0,  0,  1,  0, 1969/480]
```

```
    [ 0,  0,  0,  1,      -5]

>> p=poly2sym(R(:,5),x)
p = -163/480*x^3+99/80*x^2+1969/480*x-5
>> clf,po(P),syms x,plotf1(p,[-5,5])
>> eixos
```

Pode não ser possível encontrar o polinômio, se mais de um ponto tiver a mesma abscissa x_i.

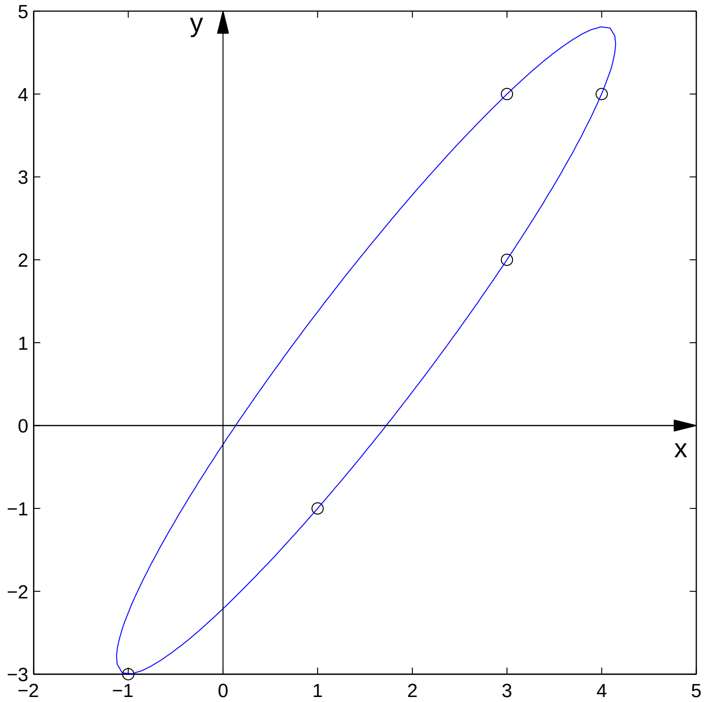


Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

1.2.16.
```
>> P=randi(5,2)
P =   3     2
     -1    -3
```

```
     1     -1
     3      4
     4      4
>> A=matvand(P,2)
A =  9      6      4      3      2      1
     1      3      9     -1     -3      1
     1     -1      1      1     -1      1
     9     12     16      3      4      1
    16     16     16      4      4      1
>> R=escalona([A,zeros(5,1)])
R   = [1,      0,      0,      0,      0, -35/8,      0]
      [0,      1,      0,      0,      0,  45/8,      0]
      [0,      0,      1,      0,      0,    -2,      0]
      [0,      0,      0,      1,      0,  65/8,      0]
      [0,      0,      0,      0,      1, -39/8,      0]

>> p=poly2sym2([-R(:,6);1],x,y)
p =35/8*x^2-45/8*x*y-65/8*x+1+2*y^2+39/8*y
>> clf,po(P),syms x y,
>> plotci(p,[-5,5],[-5,5])
>> eixos
```



Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

2.1. Matriz Inversa (página 97)

2.1.1. A matriz é singular, pois o sistema homogêneo tem solução não trivial (Teorema 2.8 na página 90).

2.1.2. (a)
```
>> A=[1,2,3;1,1,2;0,1,2];
>> B=[A,eye(3)];
>> escalona(B)
[1, 0, 0, 0, 1,-1]
[0, 1, 0, 2,-2,-1]
[0, 0, 1,-1, 1, 1]
```

(b)
```
[1, 0, 0, 3, 2,-4]
[0, 1, 0,-1, 0, 1]
[0, 0, 1, 0,-1, 1]
```

(c)
```
[1,  0,  0,   0, 7/3,-1/3,-1/3,-2/3]
[0,  1,  0,   0, 4/9,-1/9,-4/9, 1/9]
[0,  0,  1,   0,-1/9,-2/9, 1/9, 2/9]
[0,  0,  0,   1,-5/3, 2/3, 2/3, 1/3]
```

(d)
```
[1, 0,  0,  1, -1,   0]
[0, 1,  0,3/2,1/2,-3/2]
[0, 0,  1, -1,  0,   1]
```

(e)
```
[ 1  0  1   1  0  -2 ]
[ 0  1  1   0  0   1 ]
[ 0  0  0  -1  1   1 ]
```

```
Continua ? (s/n) n
```

(f)
```
[1, 0,  0,1/4, 5/4,-3/4, 1/2, 0]
[0, 1,  0,1/2,-1/2, 1/2,   0, 0]
[0, 0,  1,1/4, 1/4, 1/4,-1/2, 0]
[0, 0,  0,  0,  -2,  -1,  -2, 1]

Continua ? (s/n) n
```

2.1.3.
```
>> syms a
>> A=[1,1,0;1,0,0;1,2,a];
>> escalona(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
Continua ?  (s/n) n
```

Para valores de a diferentes de zero a matriz A tem inversa.

2.1.4.
```
>> invA=[3,2;1,3]; invB=[2,5;3,-2];
>> invAB=invB*invA
invAB =     11           19
             7            0
```

2.1.5.
```
>> invA=[2,3;4,1]; B=[5;3];
>> X=invA*B
X =     19
```

23

2.2. Determinantes (página 134)

2.2.1. $\det(A^2) = 9$; $\det(A^3) = -27$; $\det(A^{-1}) = -1/3$; $\det(A^t) = -3$.

2.2.2. $\det(A^t B^{-1}) = \det(A)/\det(B) = -2/3$.

2.2.3. (a) $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{bmatrix} =$

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} = \det(A) + 0 = 3$

(b) $\det\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$

$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$
$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -2\det(A) = -6$$

2.2.4. (a)
```
>> A=[1,-2,3,1;5,-9,6,3;-1,2,-6,-2;2,8,6,1];
>> detopelp(A)
[  1, -2,  3,  1]
[  5, -9,  6,  3]
[ -1,  2, -6, -2]
[  2,  8,  6,  1]
eliminação 1:
-5*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
1*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
-2*linha 1 + linha 4 ==> linha 4
[  1, -2,  3,  1]
[  0,  1, -9, -2]
[  0,  0, -3, -1]
[  0, 12,  0, -1]
eliminação 2:
-12*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[   1,   -2,    3,    1]
[   0,    1,   -9,   -2]
[   0,    0,   -3,   -1]
```

```
[   0,   0, 108,  23]
eliminação 3:
-1/3*linha 3 ==> linha 3
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0, 108,  23]
det(A) = -3*det(A)
-108*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0,   0, -13]
ans = 39
```

(b)
```
>> A=[2,1,3,1;1,0,1,1;0,2,1,0;0,1,2,3];
>> detopelp(A)
[ 2, 1, 3, 1]
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 0, 1, 1]
[ 2, 1, 3, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
```

```
[ 0, 1, 2, 3]
det(A) = (-1)*det(A)
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  2,  1,  0]
[  0,  1,  2,  3]
eliminação 2:
-2*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
-1*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1,  4]
eliminação 3:
-1*linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
[  0,  0,  1,  4]
det(A) = (-1)*(-1)*det(A)
-1*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
```

```
[  0,  0,  0,  6]
ans = 6
```

2.2.5. (a)
```
>> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> p=det(A-x*eye(3))
p =-x^3
>> solve(p)
[0][0][0]
```

(b) `p =(1-x)*(3-x)*(-2-x)  [ 1][ 3][-2]`

(c) `p =(2-x)*(4-5*x+x^2)  [2][4][1]`

(d) `p =-8-2*x+5*x^2-x^3  [ 2][ 4][-1]`

2.2.6. (a)
```
>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3);
>> p=det(B)
p =(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2][-1][ 3]
```

(b) `p =(2-x)^2*(1-x)  [2][2][1]`

(c) `p =(1-x)*(2-x)*(-1-x)*(3-x)  [ 1][ 2][-1][ 3]`

(d) `p =(2-x)^2*(1-x)^2  [2][2][1][1]`

2.2.7. (a)
```
>> Bm1=subs(B,x,-1);
>> escalona(Bm1)
```

```
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
>> B2=subs(B,x,2);
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0,   0]
```

$$\mathbb{W}_{2} = \{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
>> B3=subs(B,x,3);
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_3 = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} |\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(b)
```
[1, 3, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{ \begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(c)
```
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{ \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
[1, 0, 0, 29/3]
[0, 1, 0,  7/3]
[0, 0, 1,    3]
[0, 0, 0,    0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{ \begin{bmatrix} -29\alpha & -7\alpha & -9\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
[1, 0, -9/4, 0]
[0, 1, -3/4, 0]
[0, 0,    0, 1]
[0, 0,    0, 0]
```

$\mathbb{W}_3 = \{ \begin{bmatrix} 9\alpha & 3\alpha & 4\alpha & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$.

(d)
```
[1, 0, -3, 0]
[0, 1,  3, 0]
[0, 0,  0, 1]
[0, 0,  0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{ \begin{bmatrix} 3\alpha & -3\alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

2.2.8. Concluimos que é muito raro encontrar matrizes invertíveis.

2.2.9.
```
>> menc=lerarq('menc1'); key=lerarq('key');
>> y=char2num(menc); M=char2num(key);
>> N=escalona([M,eye(5)])
[ 37, 12, 12,  4, 93,  1,  0,  0,  0,  0]
[  0,  4,  0,  1,  0,  0,  1,  0,  0,  0]
[  3,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0,  0]
[  9,  3,  3,  1,  0,  0,  0,  0,  1,  0]
[ 18,  6,  6,  2,  1,  0,  0,  0,  0,  1]
N =[1,0,0,0,0, 1, 0,  0, 182, -93]
   [0,1,0,0,0, 0, 1,  3,  -1,   0]
   [0,0,1,0,0,-3, 0,  1,-546, 279]
   [0,0,0,1,0, 0,-3,-12,   4,   0]
   [0,0,0,0,1, 0, 0,  0,  -2,   1]
>> N=N(:,6:10)
N =
[    1,    0,    0,  182,  -93]
```

```
[     0,     1,     3,    -1,     0]
[    -3,     0,     1,  -546,   279]
[     0,    -3,   -12,     4,     0]
[     0,     0,     0,    -2,     1]
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Desejo boa sorte a todos que estudam Álgebra Linear !
>> menc=lerarq('menc2');
>> y=char2num(menc);
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Buda tinha este nome por que vivia setado!
```

Deve ser uma matriz com entradas entre 0 e 158 com determinante igual a ± 1, para que exista inversa e a sua inversa seja uma matriz com entradas inteiras.

3.1. Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar (página 172)

3.1.1. A equação $3X - 2V = 15(X - U)$ é equivalente a $3X - 2V = 15X - 15U$. Somando-se $-15X + 2V$ obtemos $-15X + 3X = 2V - 15U$ ou $-12X = 2V - 15U$ multiplicando-se por $-\frac{1}{12}$ obtemos
$X = \frac{5}{4}U - \frac{1}{6}V$.

3.1.2. Multiplicando-se a segunda equação por 2 e somando-se a primeira, obtemos $12X = 3U + 2V$ ou $X = \frac{1}{4}U + \frac{1}{6}V$. Substituindo-se X na primeira equação obtemos, $\frac{3}{2}U + V - 2Y = U$ ou $2Y = \frac{1}{2}U + V$ ou $Y = \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}V$.

3.1.3.
```
>> OP=[  2,   3, -5]; V=[  3,   0, -3];
>> OQ=OP+V
OQ =       5       3      -8
```
As coordenadas da extremidade do segmento orientado são $(5, 3, -8)$.

3.1.4.
```
>> OP=[1,0,3]; OM=[1,2,-1];
>> MP=OP-OM;  OPlinha=OM-MP
OPlinha =       1       4      -5
```
As coordenadas de P' são $(1, 4, -5)$.

3.1.5. (a)
```
>> OA=[5,1,-3];OB=[0,3,4];OC=[0,3,-5];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =      -5       2       7
AC =      -5       2      -2
```
Os pontos não são colineares, pois $\overrightarrow{AC} \neq \lambda \overrightarrow{AB}$.

(b)
```
>> OA=[-1,1,3];OB=[4,2,-3];OC=[14,4,-15];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =       5       1      -6
AC =      15       3     -18
```
Os pontos são colineares, pois $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

3.1.6.
```
>> OA=[1,-2,-3];OB=[-5,2,-1];OC=[4,0,-1];
>> DC=OB-OA, OD=OC-DC
DC =      -6       4       2
OD =      10      -4      -3
```
O ponto é $D = (10, -4, -3)$.

3.1.7. (a) A equação $xV + yW = U$ é equivalente ao sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} 9x & - & y & = & -4 \\ -12x & + & 7y & = & -6 \\ -6x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$, cuja matriz aumentada é a matriz que tem colunas V, W e U.

```
>> V=[9,-12,-6];W=[-1,7,1];U=[-4,-6,2];
>> escalona([V;W;U]')
[     1,     0, -2/3]
[     0,     1,   -2]
[     0,     0,    0]
```
Assim, $U = -2/3V - 2W$.

(b)
```
>> V=[5,4,-3];W=[2,1,1];U=[-3,-4,1];
>> escalona([V;W;U]')
[      1,      0,  -5/3]
```

```
[       0,       1,    8/3]
[       0,       0,  -20/3]
```

Assim, U não é combinação linear de V e W.

3.2. Produtos de Vetores (página 211)

3.2.1.
```
>> V=[1,2,-3]; W=[2,1,-2];
>> Va=(V+W)/no(V+W), Vb=(V-W)/no(V-W),...
>> Vc=(2*V-3*W)/no(2*V-3*W)
```

$$Va = \left[\ \tfrac{3}{43}\sqrt{43} \quad \tfrac{3}{43}\sqrt{43} \quad -\tfrac{5}{43}\sqrt{43}\ \right]$$
$$Vb = \left[\ -\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\ \right]$$
$$Vc = \left[\ -\tfrac{4}{17}\sqrt{17} \quad \tfrac{1}{17}\sqrt{17} \quad 0\ \right]$$

3.2.2.
```
>> syms x
>> V=[x,3,4];W=[3,1,2];
>> solve(pe(V,W))
-11/3
```

Para $x = -11/3$, V e W são perpendiculares.

3.2.3.
```
>> V=[x,2,4];W=[x,-2,3];
>> pe(V,W)
x^2+8
```

A equação $x^2 + 8$ não tem solução real.

3.2.4.
```
>> Va=[2,1,0];Wa=[0,1,-1];Vb=[1,1,1];
>> Wb=[0,-2,-2];Vc=[3,3,0];Wc=[2,1,-2];
>> cosVaWa=pe(Va,Wa)/(no(Va)*no(Wa)),...
```

```
>> cosVbWb=pe(Vb,Wb)/(no(Vb)*no(Wb)),...
>> cosVcWc=pe(Vc,Wc)/(no(Vc)*no(Wc))
```

cosVaWa=$\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2}$, cosVbWb=$-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$, cosVcWc=$\frac{1}{2}\sqrt{2}$. O ângulo entre Va e Wa é $\arccos(\sqrt{10}/10)$ entre Vb e Wb é $\arccos(-\sqrt{6}/3)$ e entre Vc e Wc é $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

3.2.5.

```
>> W=[-1,-3,2]; V=[0,1,3];
>> W1=(pe(W,V)/pe(V,V))*V, W2=W-W1
W1 =      0          3/10          9/10
W2 =     -1        -33/10         11/10
```

3.2.6.

```
>> V=[2,2,1]; W=[6,2,-3];
>> X=V/no(V)+W/no(W), U=X/no(X)
X=[32/21, 20/21, -2/21]
```

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{16}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} & \frac{10}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} & -\frac{1}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} \end{array}\right]$$

3.2.7.

```
>> A=[2,2,1];B=[3,1,2];C=[2,3,0];D=[2,3,2];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =   1          -1           1
      0           1          -1
      0           1           1     detM=2
>> A=[2,0,2];B=[3,2,0];C=[0,2,1];D=[10,-2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =   1           2          -2
     -2           2          -1
      8          -2          -1     detM=0
```

No item (a) os pontos **não** são coplanares e no item (b) eles são coplanares.

3.2.8.
```
>> A=[2,1,6];B=[4,1,3];C=[1,3,2];D=[1,2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =    2              0             -3
      -1              2             -4
      -1              1             -5 detM=-15
```
O volume do paralelepípedo é 15 unids. de vol.

3.2.9.
```
>> A=[1,0,1];B=[2,1,3];C=[3,2,4];
>> V=pv(A-B,C-B), norma=no(V)
AD =      1             -1              0
```
norma=$\sqrt{2}$

A área do paralelogramo é $\sqrt{2}$ unidades de área.

3.2.10.
```
>> A=[1,2,1];B=[3,0,4];C=[5,1,3];
>> V=pv(B-A,C-A), norma=no(V)
AD =     -1              8              6
```
norma=$\sqrt{101}$

A área do triângulo é $\sqrt{101}/2$ unidades de área.

3.2.11.
```
>> syms x y z
>> X=[x,y,z]; V=[1,0,1]; W=[2,2,-2];
>> expr1=pv(X,V)-W, expr2=pe(X,X)-6
expr1 = [   y-2, z-x-2,  -y+2]
expr2 = x^2+y^2+z^2-6
>> S=solve(expr1(1),expr1(2),expr1(3),expr2)
S = x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
```

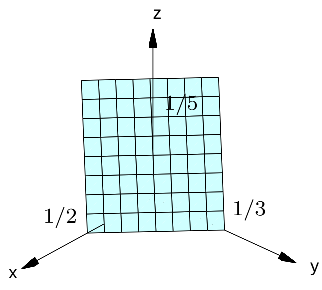
```
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][ -1] ans =[ 2][ 2] ans =[ 1][ 1]
```
Logo, $X = (-1, 2, 1)$.

3.2.12.
```
>> X=[x,y,z]; V=[1,1,0]; W=[-1,0,1]; U=[0,1,0];
>> expr1=pe(X,V), expr2=pe(X,W),...
>> expr3=pe(X,X)-3, expr4=pe(X,U)
expr1=x+y,expr2=z-x,expr3=x^2+y^2+z^2-3,expr4=y
>> solve(expr1,expr2,expr3)
S =  x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][  1] ans =[  1][ -1] ans =[ -1][  1]
```
Como y tem que ser maior que zero, $X = (-1, 1, -1)$.

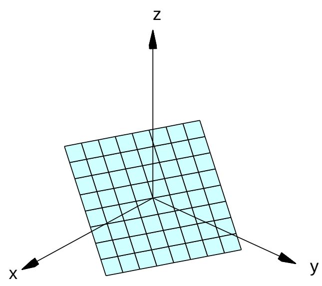
3.2.13.
```
>> A=[3,0,2];B=[4,3,0];C=[8,1,-1];
>> pe(B-A,C-A), pe(A-B,C-B), pe(A-C,B-C)
14,0,21
```
Portanto o ângulo reto está no vértice B.

4.1. Equações de Retas e Planos (página 259)

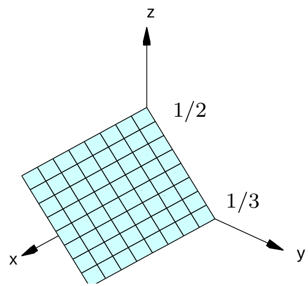
4.1.1.



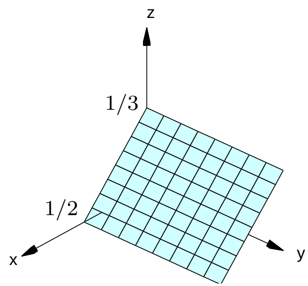
(a)



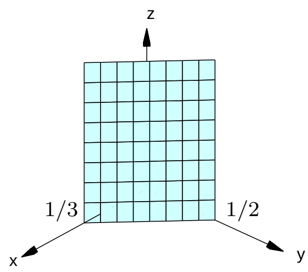
(b)



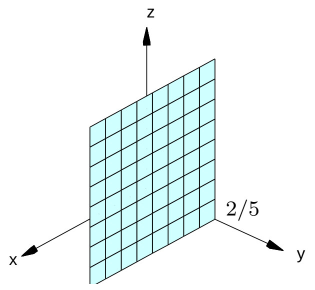
(c)



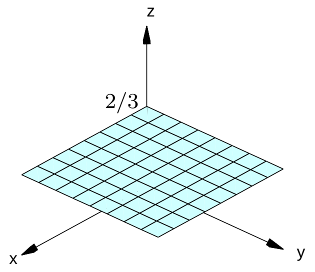
(d)



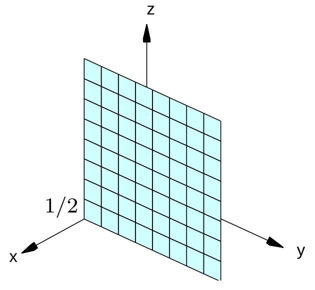
(e)



(f)

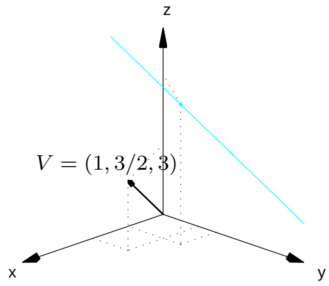


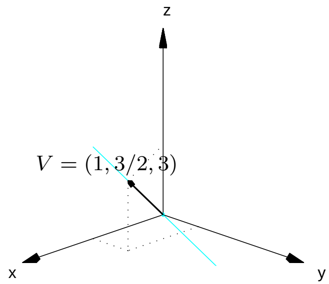
(g)

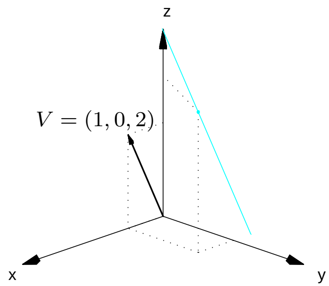


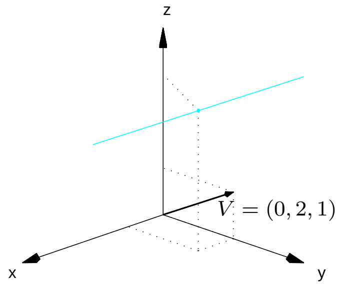
(h)

4.1.2.

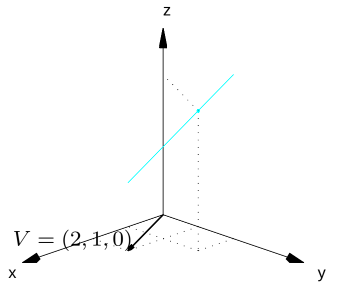
(a)


(b)


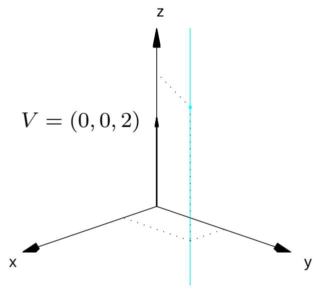
(c)




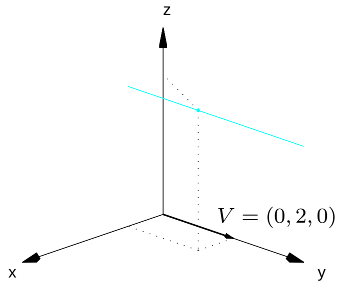
(d)

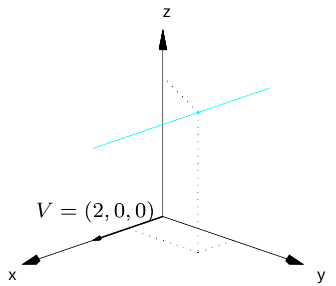


(e)



(f)

(g) 

(h) 

4.1.3. Como o novo plano é paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$, então o vetor $N = (2, -1, 5)$ é também vetor normal do plano procurado. Assim, a equação dele é $2x - y + 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (1, -2, 1)$ na equação do plano:

```
>> syms x y z d
>> expr=2*x-y+5*z+d
expr = 2*x-y+5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[1,-2,1])
ans = 9+d
```

Assim a equação do plano é $2x - y + 5z - 9 = 0$.

4.1.4. Os vetores normais dos outros planos, $N_1 = (1, 2, -3)$ e $N_2 = (2, -1, 4)$, são paralelos a ao plano procurado π. Assim o produto vetorial $N_1 \times N_2$ é um vetor normal a π.

```
>> N1=[1,2,-3];N2=[2,-1,4];
>> N=pv(N1,N2)
N = 5    -10     -5
```

Assim, a equação de π é $5x - 10y - 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (2, 1, 0)$ na equação do plano:

```
>> expr=5*x-10*y-5*z+d
expr = 5*x-10*y-5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[2,1,0])
ans = d
```

Assim, a equação do plano π é $5x - 10y - 5z = 0$.

4.1.5. Como o plano procurado passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y - z = 0$, então os vetores $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$ e o vetor normal do plano $y - z = 0$, $N_1 = (0, 1, -1)$ são paralelos ao plano procurado π. Assim o produto vetorial $\overrightarrow{PQ} \times N_1$ é um vetor normal a π.

```
>> PQ=[0,0,1];N1=[0,1,-1];
>> N=pv(PQ,N1)
N = -1      0      0
```

Assim, a equação de π é $-x + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (1, 0, 0)$ na equação do plano, obtendo que a equação de π é $-x + 1 = 0$.

4.1.6. A equação da reta é $(x, y, z) = (t, 2t, t)$. Substituindo-se o ponto da reta na equação do plano obtemos o valor de t

```
>> V=[1,2,1];
>> syms t
>> t=solve(2*t+2*t+t-5)
t = 1
```

Substituindo-se este valor de t nas equações paramétricas da reta obtemos o ponto $P = (1, 2, 1)$.

4.1.7. Um ponto da reta r é da forma $P_r = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$ e um ponto da reta s é da forma $P_s = (1 + 2s, 3 + s, 1)$. As retas se cortam se existem t e s tais que $P_r = P_s$, ou seja, se o sistema seguinte tem solução

$$\left\{\begin{array}{ccc} 9t & = & 1 + 2s \\ 1 + 6t & = & 3 + s \\ -2 + 3t & = & 1 \end{array}\right.$$

```
>> escalona([9,-2,1;6,-1,2;3,0,3])
[  9, -2,  1]
[  6, -1,  2]
[  3,  0,  3]
eliminação 1:
```

```
(1/9)*linha 1 ==> linha 1
[    1, -2/9,  1/9]
[    6,   -1,    2]
[    3,    0,    3]
(-6)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1, -2/9,  1/9]
[    0,  1/3,  4/3]
[    0,  2/3,  8/3]
eliminação 2:
(3)*linha 2 ==> linha 2
[    1, -2/9,  1/9]
[    0,    1,    4]
[    0,  2/3,  8/3]
(2/9)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-2/3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 4]
[ 0, 0, 0]
```

A solução do sistema é $t = 1$ e $s = 4$. Substituindo-se ou $t = 1$ na equação da reta r ou $s = 4$ na equação da reta s obtemos o ponto da interseção $P = (9, 7, 1)$.

4.1.8. Os vetores diretores das retas, $V_1 = (2, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 1, 1)$, são paralelos ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $V_1 \times V_2$ é um vetor normal a π.

```
>> V1=[2,2,1]; V2=[1,1,1]; P1=[2,0,0];
```

```
>> N=pv(V1,V2)
N =   1     -1      0
```

Assim, a equação de π é $x - y + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P_1 = (2, 2, 1)$ da reta r na equação do plano:

```
>> expr=x-y+d
expr =x-y+d
>> subst(expr,[x,y,z],P1)
ans =2+d
```

Assim, a equação do plano π é $x - y - 2 = 0$.

4.1.9. (a) Substituindo-se o ponto $P = (4, 1, -1)$ nas equações da reta r obtemos valores diferentes de t:

```
>> solve('4=2+t'), solve('1=4-t'),...
>> solve('-1=1+2*t')
ans = 2 ans = 3 ans = -1
```

Logo não existe um valor de t tal que $P = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$.

(b) O ponto $Q = (2, 4, 1)$ é um ponto do plano π procurado. Assim, π é paralelo aos vetores $\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, 2)$ e o vetor diretor da reta r, $V = (1, -1, 2)$. Logo, o produto vetorial $\overrightarrow{PQ} \times V$ é um vetor normal ao plano π:

```
>> P=[4,1,-1]; Q=[2,4,1]; V=[1,-1,2];
```

```
>> PQ=Q-P
PQ = [-2, 3, 2]
>> N=pv(PQ,V)
N =  8     6    -1
expr = 8*x-39+6*y-z
```

Substituindo-se o ponto P ou o ponto Q na equação de π obtemos que a equação do plano π é $8x + 6y - z - 39 = 0$.

4.1.10. O vetor $N = (-1, 1, 1)$ é normal ao plano. A equação do plano é então $-x + y + z + d = 0$. Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2 e resolvendo o sistema resultante, obtemos $x = 0$ e $y = 1$. Portanto, o ponto $P = (0, 1, 0)$ pertence a π_1 e a π_2. Substituindo-se o ponto P na equação do plano $-x + y + z + d = 0$ obtemos que a equação procurada é $x - y + z + 1 = 0$.

4.1.11. (a)
```
>> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V =     -8     -5     -6
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-8, -5, -6)$.

(b)
```
>>  N1=[2,-1,4]; N2=[4,-2,8]; V=pv(N1,N2)
V =     0      0      0
```
Os planos são paralelos.

(c)
```
>>  N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V =     -1     -1      1
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-1, -1, 1)$.

4.1.12. O vetor normal ao plano é um vetor diretor da reta procurada. Assim as equações paramétricas de r são $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 1 + 2t)$.

4.1.13. O vetor diretor da reta procurada é ortogonal ao mesmo tempo aos vetores normais dos dois planos, portanto o produto vetorial deles é um vetor diretor da reta procurada.

```
>> pv([2,3,1],[1,-1,1])
      4            -1             -5
```

$(x, y, z) = (1 + 4t, -t, 1 - 5t)$.

4.1.14.
```
>> escalona([1,1,-1,0;2,-1,3,1])
 1       0       2/3        1/3
 0       1      -5/3       -1/3
```

A reta interseção dos planos é $(x, y, z) = (1/3 - 2/3t, -1/3 + 5/3t, t)$. O vetor diretor $V = (-2/3, 5/3, 1)$ desta reta é paralelo ao plano procurado. O ponto $P = (1/3, -1/3, 0)$ é um ponto da reta e é também portanto um ponto do plano procurado π. O vetor $\overrightarrow{AP}$ é também um vetor paralelo a π. Assim o produto vetorial $\overrightarrow{AP} \times V$ é um vetor normal a π.

```
>> A=[1,0,-1]; P=[1/3,-1/3,0];
>> V=[-2/3,5/3,1];
>> AP=P-A
AP = [-2/3, -1/3, 1]
>> N=pv(AP,V)
N = [   -2,     0, -4/3]
```

Substituindo-se o ponto A ou o ponto P na equação $-2x - 4/3z + d = 0$ obtemos a equação do plano $6x + 4z - 2 = 0$.

4.1.15.
```
>> syms t s
>> A=[0,1,0];B=[1,1,0];C=[-3,1,-4];D=[-1,2,-7];
>> BA=B-A, CD=D-C,
BA =  1      0      0
CD =  2      1     -3
```

$P_r = (t, 1, 0)$ é um ponto qualquer da reta r e $P_s = (-3 + 2s, 1 + s, -4 - 3s)$ é um ponto qualquer da reta s. Precisamos encontrar pontos P_r e P_s tais que $\overrightarrow{P_sP_r} = \alpha V$, ou seja, precisamos encontrar t e s tais que $(t - 2s + 3, -s, 3s + 4) = (\alpha, -5\alpha, -\alpha)$.

```
>> escalona([1,-2,-1,-3;0,-1,5,0;0,3,1,-4])
[  1, -2, -1, -3]
[  0, -1,  5,  0]
[  0,  3,  1, -4]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[  1, -2, -1, -3]
[  0,  1, -5,  0]
[  0,  3,  1, -4]
(2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, -11,  -3]
[   0,   1,  -5,   0]
```

```
[   0,   0,  16,  -4]
eliminação 3:
(1/16)*linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  -11,   -3]
[    0,    1,   -5,    0]
[    0,    0,    1, -1/4]
(11)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[     1,      0,      0, -23/4]
[     0,      1,      0,  -5/4]
[     0,      0,      1,  -1/4]
Pr0 = [-23/4, 1, 0]
Ps0 = [-11/2, -1/4, -1/4]
V = [1/4, -5/4, -1/4]
```

Encontramos que $t = -23/4$, $s = -5/4$ e $\alpha = -1/4$. Substituindo-se ou $t = -23/4$ em $P_r = (t, 1, 0)$ obtemos que a equação da reta é $(x, y, z) = (-23/4 + t, 1 - 5t, -t)$.

4.1.16. (a)
```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,2,-1]; V=pv(N1,N2)
    V = -1     3     5
```
Os planos se interceptam segundo uma reta que tem vetor diretor $V = (-1, 3, 5)$.

(b)
```
>> escalona([2,-1,1,0;1,2,-1,1])
[  2, -1,  1,  0]
[  1,  2, -1,  1]
eliminação 1:
```

```
linha 2 <==> linha 1
[  1,  2, -1,  1]
[  2, -1,  1,  0]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  2, -1,  1]
[  0, -5,  3, -2]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[    1,    2,   -1,    1]
[    0,    1, -3/5,  2/5]
(-2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
[    1,    0,  1/5,  1/5]
[    0,    1, -3/5,  2/5]
```

Um ponto qualquer da reta r é $P_r = (1/5 - t, 2/5 + 3t, 5t)$. Vamos determinar o valor de t tal que $\overrightarrow{AP_r}$ seja perpendicular ao vetor diretor da reta r.

```
>> syms t
>> Pr=[1/5-t,2/5+3*t,5*t];A=[1,0,1];
>> APr=Pr-A
APr = [  -4/5-t, 2/5+3*t,   5*t-1]
>> expr=pe(APr,[-1,3,5])
expr = -3+35*t
>> t=solve(expr)
t = 3/35
```

Substituindo-se $t = 3/35$ em $\overrightarrow{AP_r} = (-4/5-t, 2/5+3t, 5t-1)$, obtemos o vetor diretor da reta procurada e assim a equação da reta é $(x, y, z) = (1-(31/35)t, (23/35)t, 1-(4/7)t)$.

4.2. Ângulos e Distâncias (página 288)

4.2.1.
```
>> V=[1,3,2];W=[2,-1,1];U=[1,-2,0];
>> N=pv(W,U), projecao=(pe(V,N)/pe(N,N))*N
N = 2    1    -3  projecao = -1/7  -1/14   3/14
```

4.2.2.
```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,-2,1];
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
costh =  5/6
>> acos(5/6)*180/pi
ans = 33.5573
```
O ângulo é $\arccos(5/6) \approx 33,5^{\text{o}}$.

4.2.3.
```
>> A=[1,1,1];B=[1,0,1];C=[1,1,0];
>> P=[0,0,1];Q=[0,0,0];V=[1,1,0];
>> N1=pv(B-A,C-A), N2=pv(Q-P,V),...
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
N1 = 1      0      0,  N2 = 1    -1      0,
costh = 1/2*2^(1/2)
```
O ângulo é $\arccos(\sqrt{2}/2) = 45^{\text{o}}$.

4.2.4. O vetor diretor da reta procurada $V = (a, b, c)$ faz ângulo de 45^{o} com o vetor $\vec{i}$ e 60^{o} com o vetor $\vec{j}$. Podemos fixar arbitrariamente a norma do vetor V. Por exemplo, podemos tomar o vetor V com norma igual a 1.

```
>> syms a b c
>> P=[1,-2,3]; I=[1,0,0]; J=[0,1,0]; V=[a,b,c];
>> exp1=abs(pe(V,I))-cos(pi/4)
exp1 = abs(a)-1/2*2^(1/2)
>> exp2=abs(pe(V,J))-cos(pi/3)
exp2 = abs(b)-1/2
>> exp3=no(V)-1
exp3 = (a^2+b^2+c^2)^(1/2)-1
>> S=solve(exp1,exp2,exp3)
>> [S.a, S.b, S.c]
[  1/2*2^(1/2),          1/2,           1/2]
[  1/2*2^(1/2),          1/2,          -1/2]
[ -1/2*2^(1/2),          1/2,           1/2]
[ -1/2*2^(1/2),          1/2,          -1/2]
[  1/2*2^(1/2),         -1/2,           1/2]
[  1/2*2^(1/2),         -1/2,          -1/2]
[ -1/2*2^(1/2),         -1/2,           1/2]
[ -1/2*2^(1/2),         -1/2,          -1/2]
```

Existem, aparentemente, oito retas que passam pelo ponto $P = (1, -2, 3)$ e fazem ângulo de 45^o com o eixo x e 60^o com o eixo y. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\pm\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$. Na verdade existem quatro retas (distintas), pois um vetor diretor e o seu simétrico determinam a mesma reta. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$.

4.2.5.

```
>> syms t, A=[1,1,0]; V=[0,1,-1]; Pr=[0,t,-t];
>> PrA=A-Pr, expr1=pe(PrA,V)
PrA = [1, 1-t, t] expr1 = 1-2*t
```

```
expr2 = 2*(1-t+t^2)^(1/2)
>> expr2=no(PrA)*no(V)
>> solve((expr1/expr2)^2-1/4)
[0][1]
>> B=subs(Pr,t,0), C=subs(Pr,t,1)
B = [0, 0, 0]  C = [0, 1, -1]
```

4.2.6.
```
>> A=[1,0,0]; B=[0,1,0]; C=[1,0,1]; O=[0,0,0];
>> N=B-A; dist=abs(pe(N,C-O))/no(N)
dist =1/2^(1/2)
```

4.2.7. (a)
```
>> syms t s
>> A=[1,0,0]; B=[0,2,0]; V2=[1,2,3]; P2=[2,3,4];
>> Pr1=A+t*(B-A), Pr2=P2+s*V2
Pr1 = [1-t, 2*t, 0]  Pr2 = [2+s, 3+2*s, 4+3*s]
```

$P_{r_2} = (1-t, 2t, 0)$ é um ponto qualquer da reta r_1 e $P_{r_2} = (2+s, 3+2s, 4+3s)$ é um ponto qualquer da reta r_2. Devemos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular aos vetores diretores de r_1 e de r_2.

```
>> Pr1Pr2=Pr2-Pr1
Pr1Pr2 = [1+s+t, 3+2*s-2*t, 4+3*s]
>> expr1=pe(Pr1Pr2,B-A), expr2=pe(Pr1Pr2,V2)
expr1 = 5+3*s-5*t  expr2 = 19+14*s-3*t
>> S=solve('5+3*s-5*t','19+14*s-3*t')
>> S.t, S.s
t = 13/61, s = -80/61
```

```
>> Pr10=subs(Pr1,t,13/61), Pr20=subs(Pr2,s,-80/61)
Pr10 = [48/61, 26/61, 0]  Pr20 = [42/61, 23/61, 4/61]
>> V=Pr20-Pr10, expr=Pr10+t*V
V = [-6/61, -3/61, 4/61]
expr = [48/61-6/61*t, 26/61-3/61*t, 4/61*t]
```

A equação da reta é $(x, y, z) = (48/61 - (6/61)t, 26/61 - (3/61)t, (4/61)t)$.

(b) A distância entre r_1 e r_2 é igual a norma do vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-6/61, -3/61, 4/61)$ que é igual a $1/\sqrt{61}$.

4.2.8.

```
>> A=[0,2,1]; Pr=[t,2-t,-2+2*t];
>> APr=Pr-A, dist=no(APr)
APr = [t, -t, -3+2*t]
dist = 3^(1/2)*(2*t^2+3-4*t)^(1/2)
>> solve(dist^2-3)
[1][1]
>> P=subs(Pr,t,1)
P = [1, 1, 0]
```

A distância de A até a reta r é igual a $\sqrt{3}$.

4.2.9.

```
>> syms t
>> A=[1,1,1]; B=[0,0,1]; Pr=[1+t,t,t];
>> APr=Pr-A, BPr=Pr-B
APr = [t, -1+t, -1+t] BPr = [1+t, t, -1+t]
>> dist1q=pe(APr,APr), dist2q=pe(BPr,BPr)
dist1q = 3*t^2+2-4*t  dist2q = 2+3*t^2
>> solve(dist1q-dist2q)
```

```
t=0
>> subs(Pr,t,0)
[1, 0, 0]
```

O ponto $P = (1, 0, 0)$ é eqüidistantes de A e B.

4.2.10.
```
>> A=[1,-1,2]; B=[4,3,1]; X=[x,y,z];
>> AX=X-A, BX=X-B,
AX = [x-1, y+1, z-2] BX = [x-4, y-3, z-1]
>> dist1q=pe(AX,AX), dist2q=pe(BX,BX)
dist1q = x^2-2*x+6+y^2+2*y+z^2-4*z
dist2q = x^2-8*x+26+y^2-6*y+z^2-2*z
>> expr=dist1q-dist2q
expr = 6*x-20+8*y-2*z
```

A equação do lugar geométrico é $6x+8y-2z-20=0$. Este plano passa pelo ponto médio de AB, pois o ponto médio de AB é $M = \overrightarrow{OM} = 1/2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (Exercício 1.14 na página 175) satisfaz a equação do plano. O plano é perpendicular ao segmento AB, pois $N = (6, 8, -2)$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} = (3, 4, -1)$.

4.2.11.
```
>> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
>> pv(V1,V2)
ans =   0     0     0
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M =[  x,  y,  z]
   [  1,  2, -3]
```

```
[  0,  1,  2] expr = 7*x-2*y+z
```

Como o produto vetorial de V_1 e V_2 (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores V_1 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim, $7x - 2y + z = 0$ é a equação do plano.

4.2.12.

```
>> syms x y z d
>> expr1=2*x+2*y+2*z+d;
>> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];
>> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)
```

expr2 $= 1/6\ |6 + d|\ \sqrt{3}$

```
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [   0][ -12]
```

Os planos $2x + 2y + 2z = 0$ e $2x + 2y + 2z - 12 = 0$ satisfazem as condições do exercício.

4.2.13.

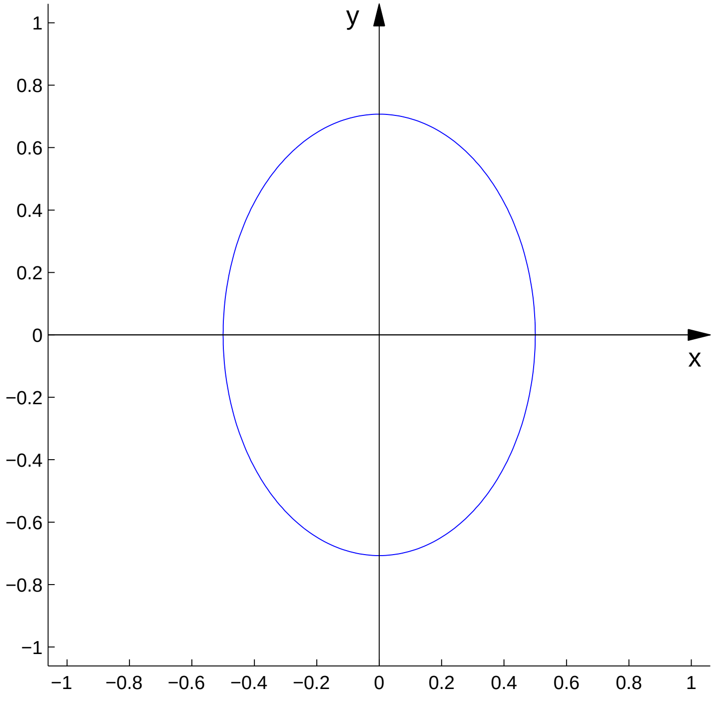
```
>> N2=[1,-2,2];N3=[3,-5,7];
>> V=pv(N2,N3)
V =    -4    -1     1
>> syms a b c, N=[a,b,c];
>> expr1=pe(N,V)
expr1 = -4*a-b+c
>> expr2=no(N)-1
expr2 = (a^2+b^2+c^2)^(1/2)-1
>> expr3=abs(pe(N,N1)/no(N1))-cos(pi/3)
expr3 = 1/2*2^(1/2)*abs(a+c)-1/2
>> S=solve(expr1,expr2,expr3,'a,b,c')
```

```
>> S.a,S.b,S.c
a =               b =                c =
[             0][    1/2*2^(1/2)][   1/2*2^(1/2)]
[  2/9*2^(1/2)][ -11/18*2^(1/2)][  5/18*2^(1/2)]
[             0][   -1/2*2^(1/2)][  -1/2*2^(1/2)]
[ -2/9*2^(1/2)][  11/18*2^(1/2)][ -5/18*2^(1/2)]
```

Os planos $y + z = 0$ e $4x - 11y + 5z = 0$ satisfazem as condições do exercício

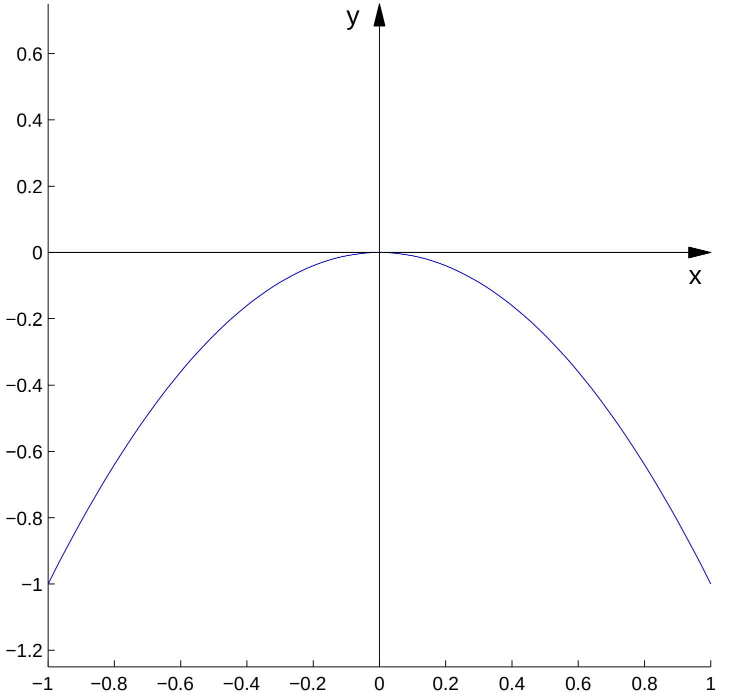
5.1. Cônicas não Degeneradas (página 334)

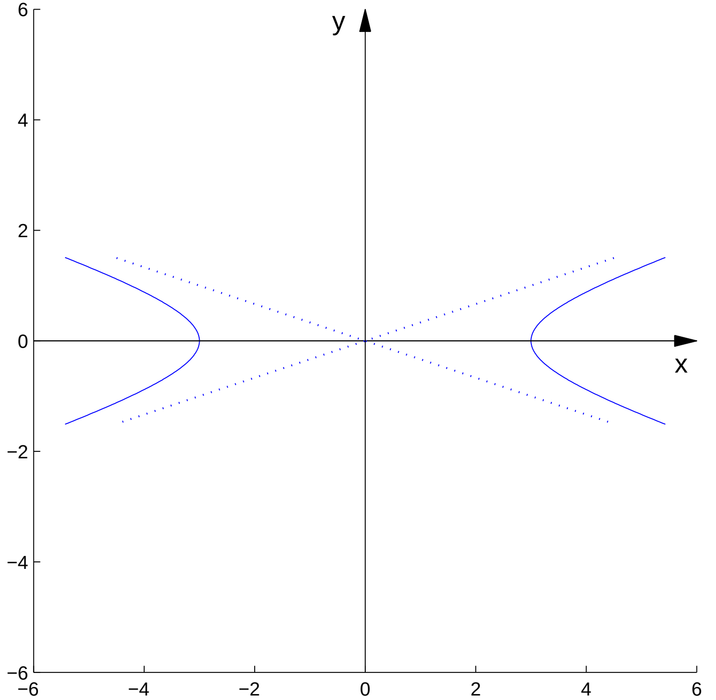
5.1.1. (a) $4x^2 + 2y^2 = 1$ pode ser reescrita como $\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/2} = 1$, que é a equação de uma elipse com focos em $(0, \pm c)$, em que $c = \sqrt{1/4 + 1/2} = \sqrt{3}/2$.


y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(b) $x^2 + y = 0$ pode ser reescrita como $y = -x^2$, que é a equação de uma parábola com foco em $(0, -1/4)$ e reta diretriz $y = 1/4$.

(c) Dividindo $x^2 - 9y^2 = 9$ por 9 obtemos $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$, que é a equação de uma hipérbole com focos em $(\pm c, 0)$, em que $c = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.


y
x
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



y
x
6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6

5.1.2. (a) $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=6$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=6-\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$-2x+11=3\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$5x^2+9y^2-10x-36y-4=0.$$

(b) $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=4$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=4-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$4-(x+y)=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$3x^2+3y^2-2xy-16=0.$$

5.1.3. (a) $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\pm 3$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=\pm 3+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$5y - 12 = \pm 3\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$16y^2 - 9x^2 + 54x - 48y - 81 = 0.$$

(b) $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \pm 2$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \pm 2 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(x+y) - 1 = \pm\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$2xy - 1 = 0.$$

5.1.4. (a) $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2|$. Elevando ao quadrado e simplificando obtemos

$$x^2 - 4y = 0$$

(b) $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$. Elevando ao quadrado e simplificando obtemos

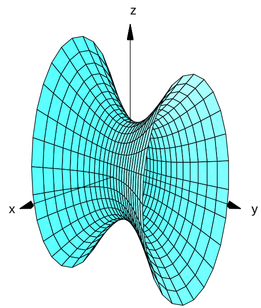
$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

6.1. Quádricas (página 417)

6.1.1. (a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/2} + z^2 = 1,$$

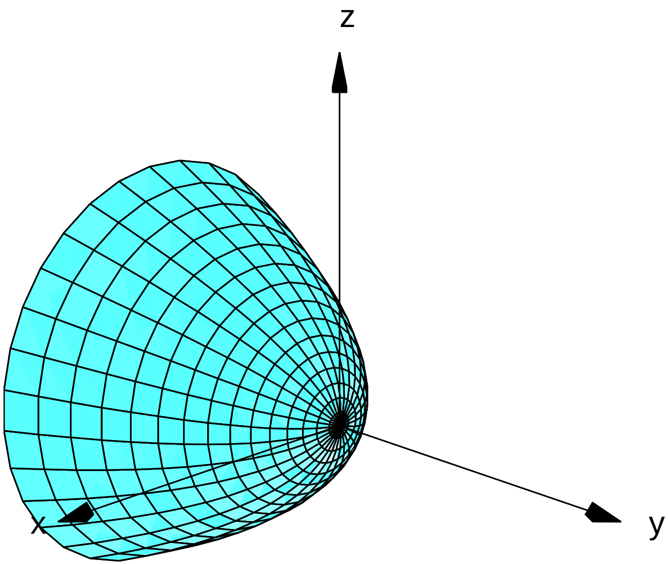
que é um hiperbolóide de uma folha.


z
x
y

(b) $x^2 + y + z^2 = 0$ pode ser reescrita como

$$y = -(x^2 + z^2),$$

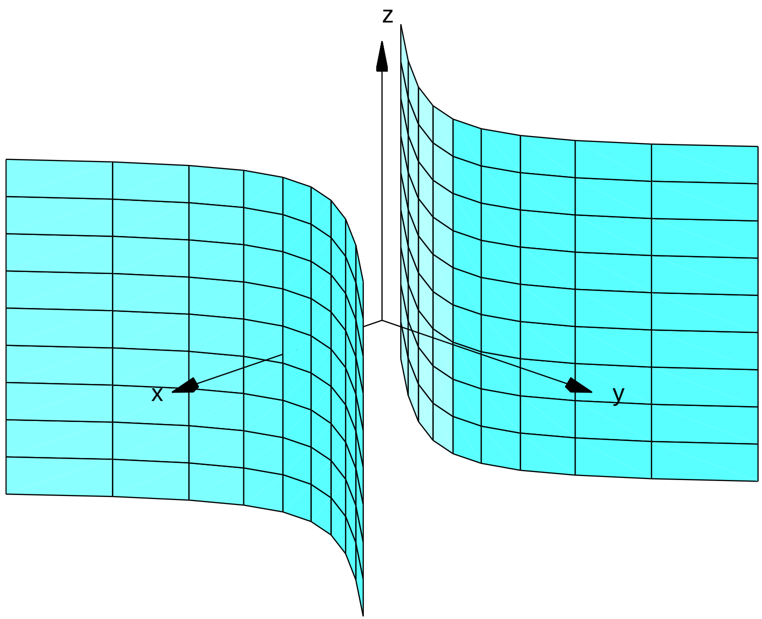
que é a equação de um parabolóide eliptico.


z
x
y

(c) Dividindo $x^2 - 9y^2 = 9$ por 9, obtemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

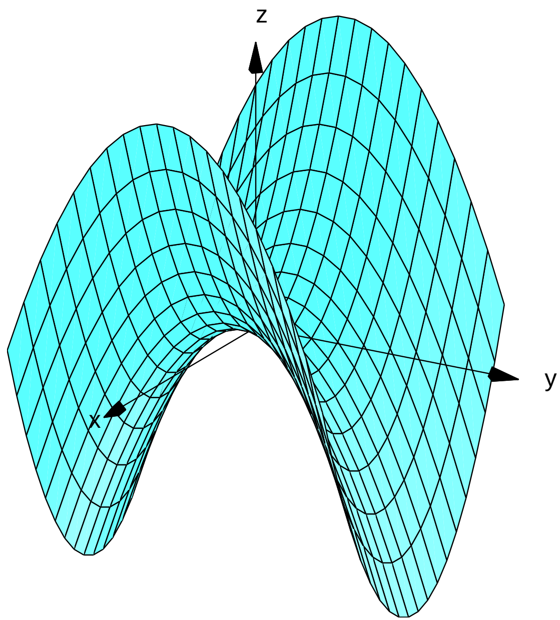
que é a equação de um cilindro quádrico.


z
x
y

(d) Dividindo $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$ por 36 obtemos

$$z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4},$$

que é a equação de parabolóide hiperbólico.


z
y
x

7.1. Rotação e Translação (página 490)

7.1.1. (a)
```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> p=[1,3];
>> A=[v1;v2;p].'
>> escalona(A)
[1,          0,  -2^(1/2)]
[0,          1, 2*2^(1/2)]
```
Assim, as coordenadas de P em relação ao sistema $\mathcal{S}$ são:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(b)
```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0]);
>> v2=sym([0,0,1]);
>> v3=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2),0]);
>> p=[2,-1,2]; A=[v1;v2;v3;p].';
>> escalona(A)
[ 1,           0,            0, 3/2*2^(1/2)]
[ 0,           1,            0,           2]
[ 0,           0,            1, 1/2*2^(1/2)]
```
Assim, as coordenadas de P em relação ao sistema $\mathcal{S}$ são:

$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

7.1.2. (a)
```
>> v1=sym([-1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=2*v1+v2
```
$$\left[\begin{array}{cc} -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 \end{array}\right]$$

(b)
```
>> v1=sym([0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1,0,0]);
>> v3=sym([0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=-v1+v2+2*v3
v =        3              1              3
```
$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 \end{array}\right]$$

7.1.3. As coordenadas de U_1, U_2 e U_3 em relação ao sistema $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Assim, $U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ e $U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

7.1.4.
```
>> p=sym([sqrt(3),1]).'; pr=sym([sqrt(3),-1]).';
>> A=[cos(th),-sin(th);sin(th),cos(th)];
>> expr=A*pr-p
```

```
expr = [ cos(th)*3^(1/2)+sin(th)-3^(1/2)]
       [       sin(th)*3^(1/2)-cos(th)-1]
>> solve(expr(1,1),expr(2,1),th)
ans = 1/3*pi
```

A rotação é de $\pi/3$.

7.2. Identificação de Cônicas (página 505)

(a)
```
>> a=sym(9);b=sym(-4);c=sym(6);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> syms x
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 50-15*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  5][ 10]
>> a1=5;c1=10;
>> escalona(A-5*eye(2))
[  4, -2]
[ -2,  1]
ans =
[    1, -1/2]
[    0,    0]
```
A solução geral de $(A - 5I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(5),-2/sqrt(5);...
2/sqrt(5),1/sqrt(5)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

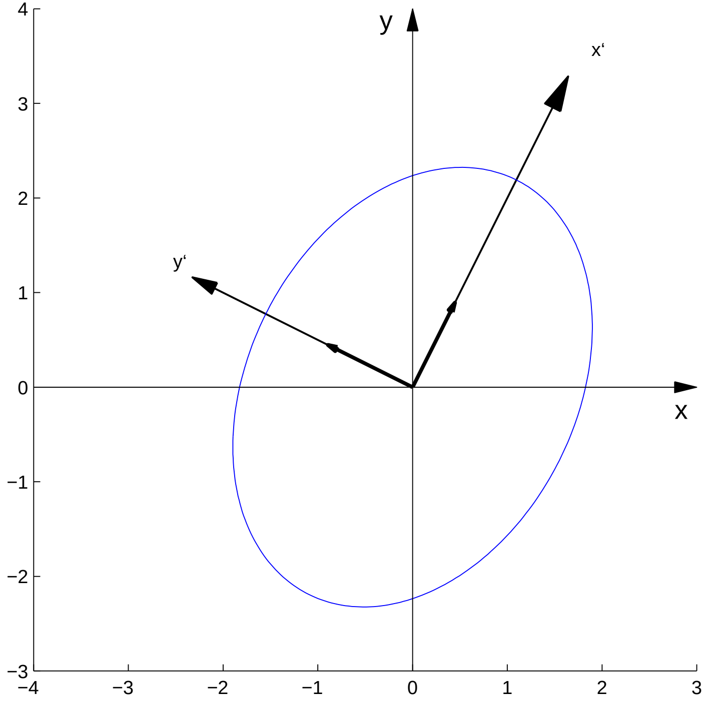
```
>> syms x1 y1
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2-30
```

$$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 30$$

```
>> expr=expr/30
```

$${x_1}^2/6 + {y_1}^2/3 - 1$$

```
>> elipse(sqrt(6),sqrt(3),P)
```



y
x‘
y‘
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

(b)
```
>> a=sym(3);b=sym(-8);c=sym(-12);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -52+9*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ -13][   4]
>> a1=-13;c1=4;
>> escalona(A+13*eye(2))
[ 16, -4]
[ -4,  1]
ans =
[     1, -1/4]
[     0,    0]
```

A solução geral de $(A+13I_2)X=\bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1=\{(\alpha,4\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha,4\alpha)||=1$ se, e somente se, $\alpha=\pm1/\sqrt{17}$, então podemos tomar os vetores $U_1=(1/\sqrt{17},4/\sqrt{17})$ e $U_2=(-4/\sqrt{17},1/\sqrt{17})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(17),-4/sqrt(17);...
4/sqrt(17),1/sqrt(17)])
```

$$P=\begin{bmatrix}\sqrt{17}/17 & -4\sqrt{17}/17\\ 4\sqrt{17}/17 & \sqrt{17}/17\end{bmatrix}$$

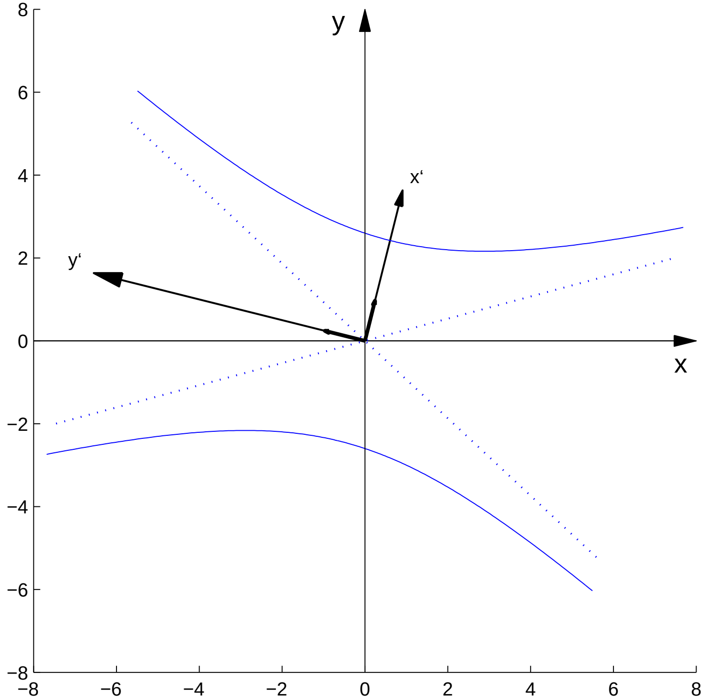
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+81
```

$$-13\,{x_1}^2 + 4\,{y_1}^2 + 81$$

```
>> expr=expr/81
```

$$-\frac{13}{81}\,{x_1}^2 + \frac{4}{81}\,{y_1}^2 + 1$$

```
>> hiperbx(9/sqrt(13),9/2,P)
```


y
x
x'
y'
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(c)
```
>> a=sym(2);b=sym(-4);c=sym(-1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -6-x+x^2
>> solve(p)
ans = [ -2][  3]
>> a1=-2;c1=3;
>> escalona(A+2*eye(2))
[  4, -2]
[ -2,  1]
ans =
[    1, -1/2]
[    0,    0]
```

A solução geral de $(A+2I_2)X=\bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(5),-2/sqrt(5);...
2/sqrt(5),1/sqrt(5)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & 1\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

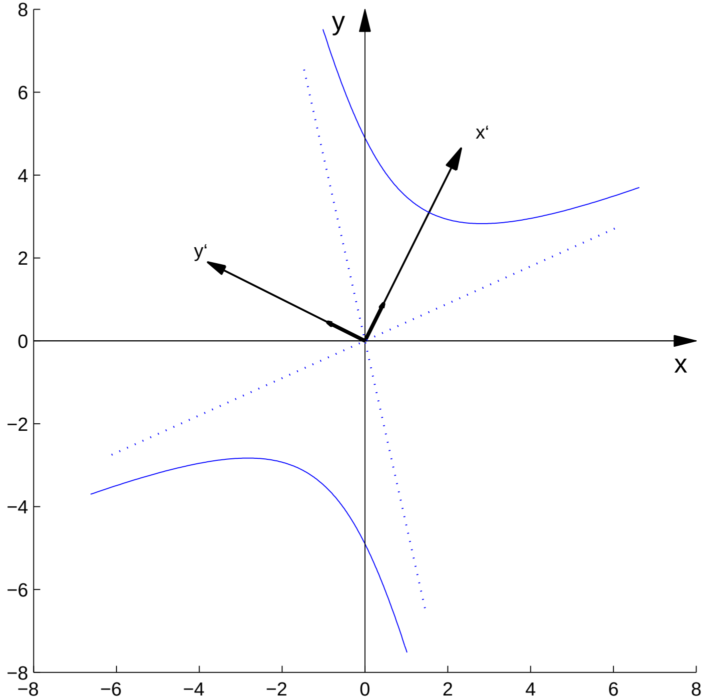
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+24
```

$$-2\,{x_1}^2 + 3\,{y_1}^2 + 24$$

```
>> expr=expr/24
```

$$-{x_1}^2/12 + {y_1}^2/8 + 1$$

```
>> hiperbx(sqrt(12),sqrt(8),P)
```



y
x
x'
y'
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(d)
```
>> a=sym(21);b=sym(6);c=sym(13);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 264-34*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ 12][ 22]
>> a1=12;c1=22;
>> escalona(A-12*eye(2))
[ 9, 3]
[ 3, 1]
ans =
[   1, 1/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $(A - 12I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ e $U_2 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(10),3/sqrt(10);...
-3/sqrt(10),1/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

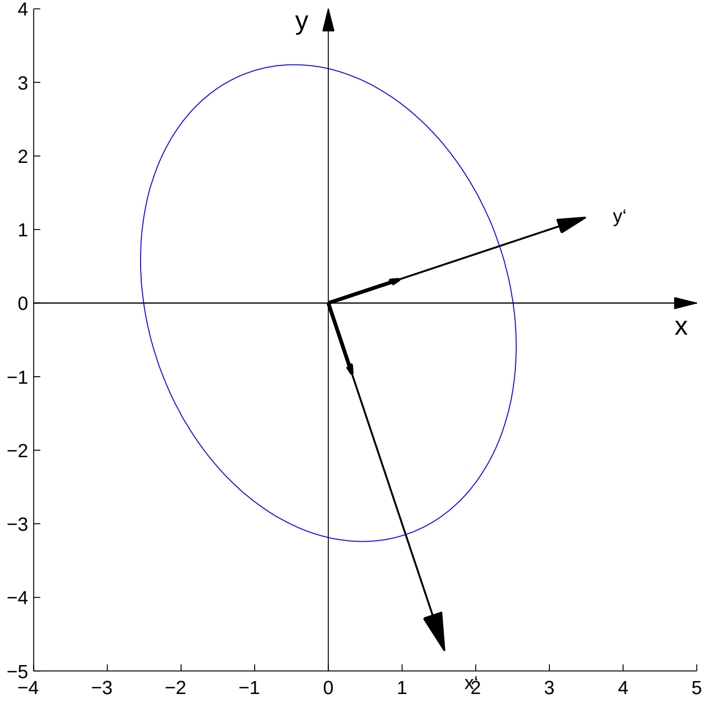
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2-132
```

$12\,{x_1}^2 + 22\,{y_1}^2 - 132$

```
>> expr=expr/132
```

${x_1}^2/11 + {y_1}^2/6 - 1$

```
>> elipse(sqrt(11),sqrt(6),P)
```



y
y'
x
x'
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

(e)
```
>> a=sym(4);b=sym(-20);c=sym(25);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -29*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 29]
>> a1=0;c1=29;
>> escalona(A)
[   4, -10]
[ -10,  25]
ans =
[    1, -5/2]
[    0,    0]
```

A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(5\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{29}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (5/\sqrt{29}, 2/\sqrt{29})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{29}, 5/\sqrt{29})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([2/sqrt(29),2/sqrt(29);...
-2/sqrt(29),5/sqrt(29)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{29}\sqrt{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29} \\ \frac{2}{29}\sqrt{29} & \frac{5}{29}\sqrt{29} \end{bmatrix}$$

```
>> e=-15;f=-6;
```

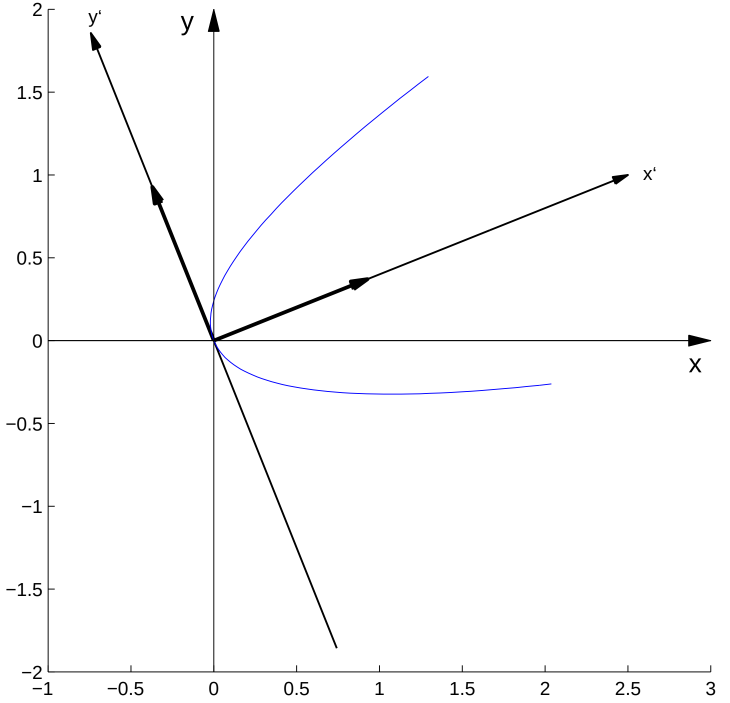
```
>> [e,f]*P
ans = [ -3*29^(1/2), 0]
>> e1=ans(1,1);f1=ans(1,2);
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1
```

$$29\, {y_1}^2 - 3\,\sqrt{29} x_1$$

```
>> expr=expr/29
```

$${y_1}^2 - \frac{3}{29}\,\sqrt{29} x_1$$

```
>> parabx(3/(4*sqrt(29)),P)
```


y'
y
x'
x
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

(f)
```
>> a=sym(9);b=sym(6);c=sym(1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -10*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 10]
>> a1=0;c1=10;
>> escalona(A)
[ 9, 3]
[ 3, 1]
ans =
[   1, 1/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ e $U_2 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(10),3/sqrt(10);...
-3/sqrt(10),1/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

```
>> e=-10*sqrt(10);f=10*sqrt(10);
```

```
>> [e,f]*P
ans = [ -40, -20]
>> e1=ans(1,1);f1=ans(1,2);
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+90
```

$$10\,{y_1}^2 - 20\,y_1 - 40\,x_1 + 90$$

```
>> syms x2 y2
>> expr=subst(expr,y1,y2+1)
```

$$10\,{y_2}^2 + 80 - 40\,x_1$$

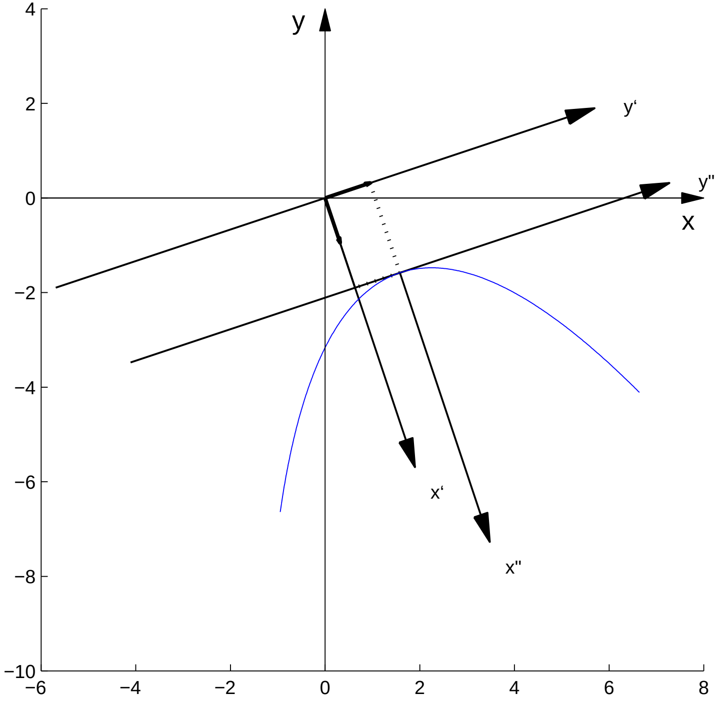
```
>> expr=subst(expr,x1,x2+2)
```

$$10\,{y_2}^2 - 40\,x_2$$

```
>> expr=expr/10
```

$${y_2}^2 - 4\,x_2$$

```
>> paraby(1,P,[2;1])
```


y
x
y‘
y"
x‘
x"
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(g)
```
>> a=sym(5);b=sym(-6);c=sym(5);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 16-10*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ 2][ 8]
>> a1=2;c1=8;
>> escalona(A-2*eye(2))
[  3, -3]
[ -3,  3]
ans =
[  1, -1]
[  0,  0]
```

A solução geral de $(A - 2I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $U_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2);...
1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> e=-30*sqrt(2);f=18*sqrt(2);
```

```
>> [e,f]*P
ans = [-12,   48 ]
>> e1=-12;f1=48;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+82
```

$$2\,{x_1}^2 + 8\,{y_1}^2 - 12\,x_1 + 48\,y_1 + 82$$

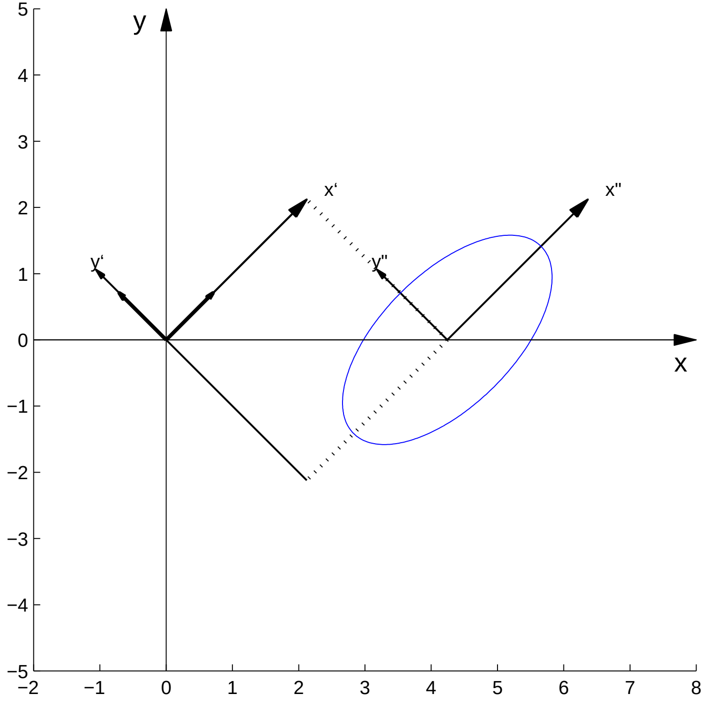
```
>> X0=[3;-3];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$2\,{x_2}^2 - 8 + 8\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr/8
```

$${x_2}^2/4 - 1 + {y_2}^2$$

```
>> elipse(2,1,P,X0)
```



y
x
x‘
y‘
x"
y"
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

(h)
```
>> a=sym(5);b=sym(12);c=sym(0);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -5*x+x^2-36
>> solve(p)
ans = [ -4][  9]
>> a1=-4;c1=9;
>> escalona(A+4*eye(2))
[ 9, 6]
[ 6, 4]
ans =
[   1, 2/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $(A + 4I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{13}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$ e $U_2 = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([2/sqrt(13),3/sqrt(13);...
-3/sqrt(13),2/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

```
>> e=-12*sqrt(13);f=0;
```

```
>> [e,f]*P
ans = [ -24, -36]
>> e1=-24;f1=-36;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1-36
```

$$-4\,{x_1}^2 + 9\,{y_1}^2 - 24\,x_1 - 36\,y_1 - 36$$

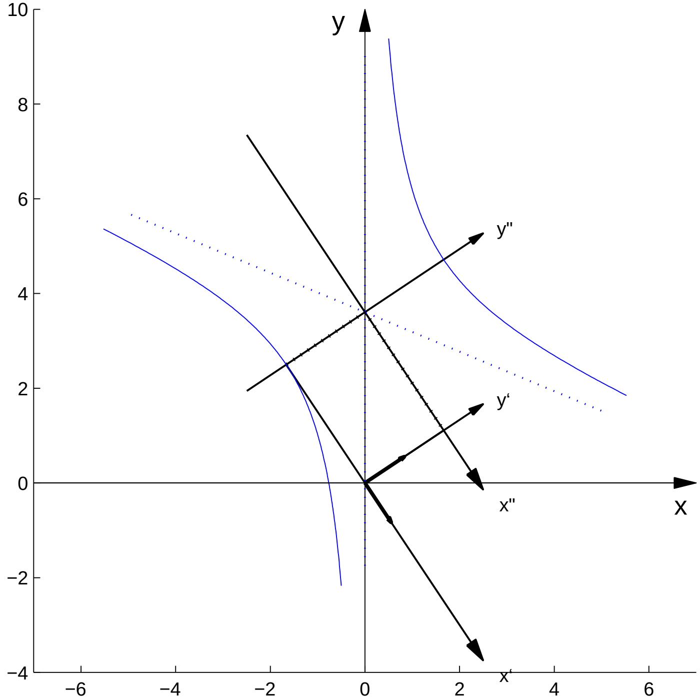
```
>> X0=[-3;2];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$-4\,{x_2}^2 - 36 + 9\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr/36
```

$$-{x_2}^2/9 - 1 + {y_2}^2/4$$

```
>> hiperby(2,3,P,X0)
```



y
x
y"
x"
y'
x'
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6

(i)
```
>> a=sym(6);b=sym(-4);c=sym(9);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 50-15*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  5][ 10]
>> a1=5;c1=10;
>> escalona(A-5*eye(2))
[  1, -2]
[ -2,  4]
ans =
[  1, -2]
[  0,  0]
```
A solução geral de $(A-5I_2)X=\bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1=\{(2\alpha,\alpha)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha,\alpha)||=1$ se, e somente se, $\alpha=\pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1=(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$ e $U_2=(-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([2/sqrt(5),-1/sqrt(5);...
1/sqrt(5),2/sqrt(5)])
```

$$P=\left[\begin{array}{cc} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{array}\right]$$

```
>> e=-4*sqrt(5);f=-18*sqrt(5);
```

```
>> [e,f]*P
ans = [ -26, -32]
>> e1=-26;f1=-32;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1-5
```

$$5\,{x_1}^2+10\,{y_1}^2-26\,x_1-32\,y_1-5$$

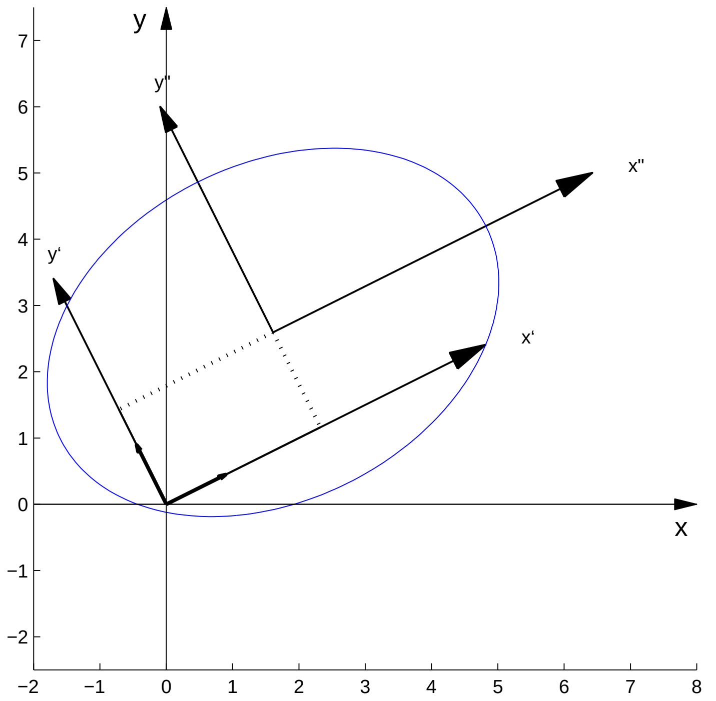
```
>> X0=[26/10;32/20];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$5\,{x_2}^2-\frac{322}{5}+10\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr*5/322
```

$$\frac{25}{322}\,{x_2}^2-1+\frac{25}{161}\,{y_2}^2$$

```
>> elipse(sqrt(322)/5,sqrt(161)/5,P,X0)
```



y
x
y"
x"
y‘
x‘
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

(j)
```
>> a=sym(1);b=sym(2*sqrt(3));c=sym(-1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -4+x^2
>> solve(p)
ans = [  2][ -2]
>> a1=2;c1=-2;
>> escalona(A-2*eye(2))
[      -1, 3^(1/2)]
[ 3^(1/2),      -3]
ans =
[        1, -3^(1/2)]
[        0,        0]
```
A solução geral de $(A - 2I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\sqrt{3}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\sqrt{3}\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/2$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([sqrt(3)/2,-1/2;...
1/2,sqrt(3)/2])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> costh=sqrt((cos2th+1)/2)
```

```
costh = 1/2*3^(1/2)
>> senth=sqrt(1-costh^2)
senth = 1/2
>> e=6;f=0;
>> [e,f]*P
ans = [ 3*3^(1/2),        -3]
>> e1=3*sqrt(3);f1=-3;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1
```

$$2\,{x_1}^2 - 2\,{y_1}^2 + 3\,\sqrt{3}x_1 - 3\,y_1$$

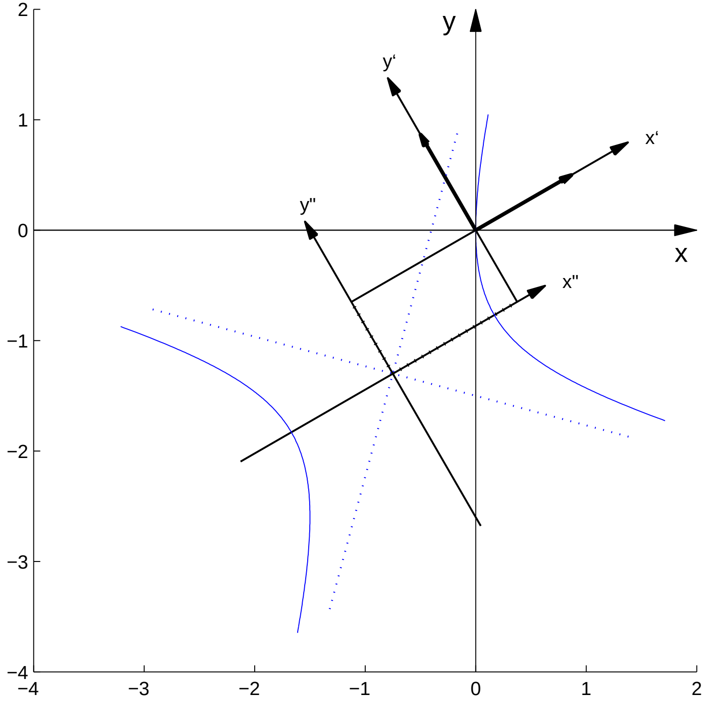
```
>> X0=[-3*3^(1/2)/4;-3/4];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$2\,{x_2}^2 - 9/4 - 2\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr*4/9
```

$$\frac{8}{9}\,{x_2}^2 - 1 - \frac{8}{9}\,{y_2}^2$$

```
>> hiperbx(3/sqrt(8),3/sqrt(8),P,X0)
```



y
y‘
x‘
y"
x"
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2

(k)
```
>> a=sym(8);b=sym(-16);c=sym(8);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -16*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 16]
>> a1=0;c1=16;
>> escalona(A)
[  8, -8]
[ -8,  8]
ans =
[  1, -1]
[  0,  0]
```

A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $U_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2);...
1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> e=33*sqrt(2);f=-31*sqrt(2);
```

```
>> [e,f]*P
ans = [ 2,  -64 ]
>> e1=2;f1=-64;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+70
```

$$16\,{y_1}^2 + 2\,x_1 - 64\,y_1 + 70$$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+2)
```

$$16\,{y_2}^2 + 6 + 2\,x_1$$

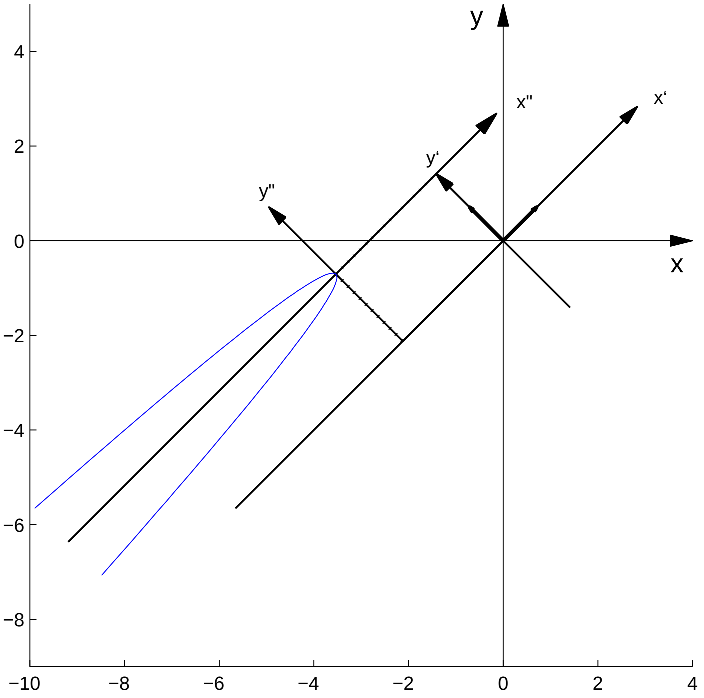
```
>> expr=subst(expr,x1,x2-3)
```

$$16\,{y_2}^2 + 2\,x_2$$

```
>> expr=expr/16
```

$${y_2}^2 + x_2/8$$

```
>> parabx(-1/32,P,[-3;2])
```



y
x
x"
x'
y'
y"
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4

7.3. Identificação de Quádricas (página 524)

7.3.1.
```
>> a=2;b=30;c=23;d=0;e=72;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> syms x
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [ -25][  30][  50]
>> a1=-25;b1=30;c1=50;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 27,  0, 36]
[  0, 55,  0]
[ 36,  0, 48]
ans =
[   1,   0, 4/3]
[   0,   1,   0]
[   0,   0,   0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-4\alpha, 0, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(-4\alpha, 0, 3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/5$, então podemos tomar $U_1 = (-4/5, 0, 3/5)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[ -28,   0,  36]
[   0,   0,   0]
```

```
[  36,    0,   -7]
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0, \alpha, 0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_2 = (0, 1, 0)$.

```
>> U1=[-4/5,0,3/5];
>> U2=[0,1,0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \end{bmatrix}$$

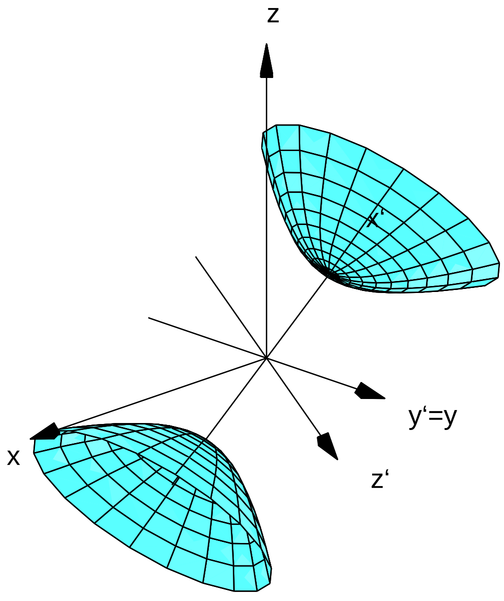
```
>> syms x1 y1 z1
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+150
```

$$-25\,{x_1}^2 + 30\,{y_1}^2 + 50\,{z_1}^2 + 150$$

```
>> expr=-expr/150
```

$$1/6\,{x_1}^2 - 1/5\,{y_1}^2 - 1/3\,{z_1}^2 - 1$$

```
>> hiperbo2x(sqrt(6),sqrt(5),sqrt(3),P)
```


z
x'
y'=y
x
z'

7.3.2.
```
>> a=144;b=100;c=81;d=0;e=-216;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [   0][ 100][ 225]
>> a1=0;b1=100;c1=225;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[  144,     0, -108]
[    0,   100,    0]
[ -108,     0,   81]
ans =
[    1,     0, -3/4]
[    0,     1,    0]
[    0,     0,    0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(3\alpha, 0, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(3\alpha, 0, 4\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/5$, então podemos tomar $U_1 = (3/5, 0, 4/5)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[   44,     0, -108]
[    0,     0,    0]
[ -108,     0,  -19]
ans =
[ 1, 0, 0]
```

```
[ 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0, \alpha, 0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_2 = (0, 1, 0)$.

```
>> U1=[3/5,0,4/5];;
>> U2=[0,1,0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

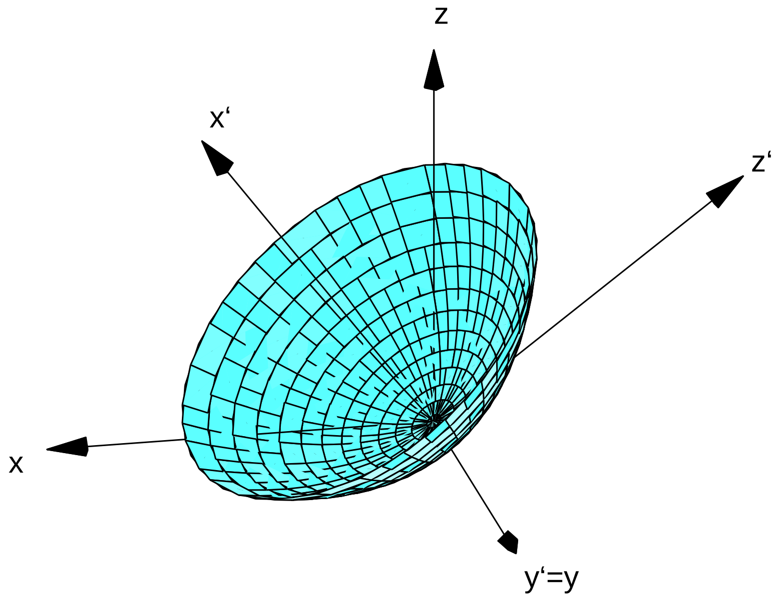
```
EDU≫ K=[-540,0,-720];
EDU≫ K*P
ans = [ -900,     0,     0]
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2-900*x1
```

$100\, {y_1}^2 + 225\, {z_1}^2 - 900\, x_1$

```
>> expr=expr/900
```

$1/9\, {y_1}^2 + 1/4\, {z_1}^2 - x_1$

```
>> parabo1x(1,3,2,P)
```


z
x'
z'
x
y'=y

7.3.3.
```
>> a=0;b=0;c=0;d=2;e=0;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [  0][  1][ -1]
>> a1=0;b1=1;c1=-1;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 0, 1, 0]
[ 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0, 0, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_1 = (0, 0, 1)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[ -1,  1,  0]
[  1, -1,  0]
[  0,  0, -1]
ans =
[  1, -1,  0]
[  0,  0,  1]
```

```
[  0,   0,   0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, \alpha, 0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar $U_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

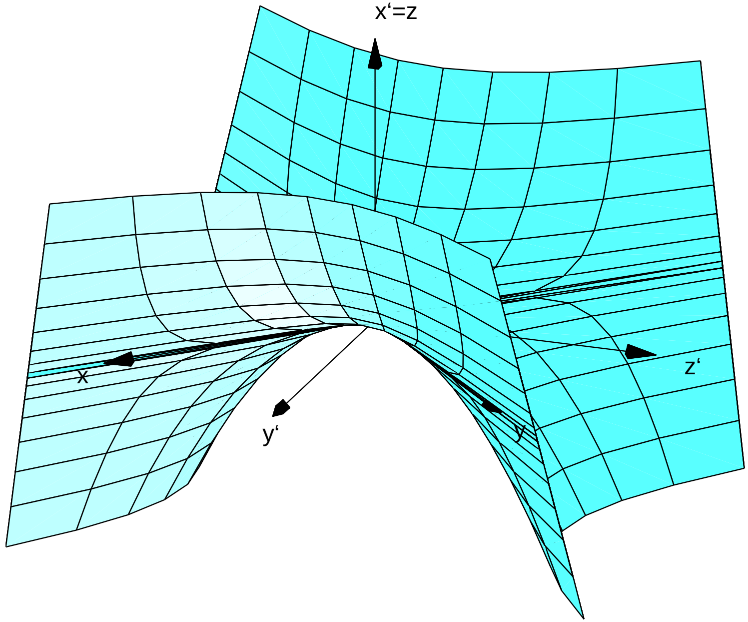
```
>> U1=[0,0,1];
>> U2=[1/sqrt(2),1/sqrt(2),0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> K=[0,0,1];
>> K*P
ans = [ 1, 0, 0]
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+x1
```

$${y_1}^2 - {z_1}^2 + x_1$$

```
>> hiperbo2x(sqrt(6),sqrt(5),sqrt(3),P)
```


x‘=z
x
y‘
y
z‘

7.3.4.
```
>> a=0;b=0;c=0;d=2;e=2;f=2;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [  2][ -1][ -1]
>> a1=-1;b1=-1;c1=2;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 1, 1, 1]
[ 1, 1, 1]
[ 1, 1, 1]
ans =
[ 1, 1, 1]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$$

Assim toda solução de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é combinação linear de $V_1 = (-1, 1, 0)$ e $V_2 = (-1, 0, 1)$. Sejam $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2$. Podemos tomar $U_1 = W_1/||W_1||$ e $U_2 = W_2/||W_2||$.

```
>> V1=[-1,1,0];V2=[-1,0,1];
>> W1=V1,W2=V2-proj(W1,V2)
W1 =[   -1,     1,     0]
```

```
W2 =[ -1/2, -1/2,     1]
>> U1=W1/no(W1),U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \left[\begin{array}{ccc} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{array}\right]$$
$$U_2 = \left[\begin{array}{ccc} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{6}/3 \end{array}\right]$$

```
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \left[\begin{array}{ccc} -\sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{3} \end{array}\right]$$

```
>> K=[-6,-6,-4];
>> K1=K*P
```

$$K_1 = [0, 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, -16\sqrt{3}]$$

```
>> g1=K1(1);h1=K1(2);i1=K1(3);
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+g1*x1+h1*y1+i1*z1-9
```

$$-{x_1}^2 - {y_1}^2 + 2\,{z_1}^2 + 2/3\,\sqrt{6}y_1 - 16/3\,\sqrt{3}z_1 - 9$$

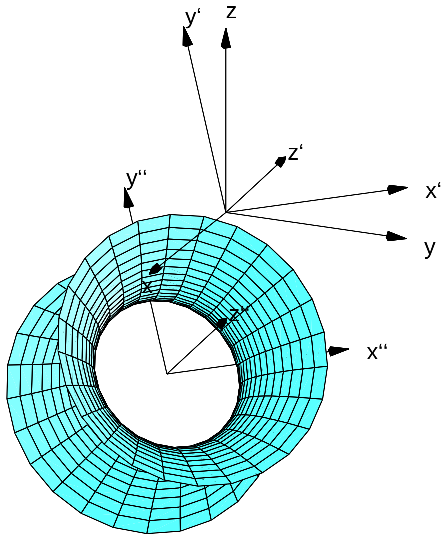
```
>> syms x2 y2 z2
>> X1=[x1;y1;z1]; X2=[x2;y2;z2];
>> X0=[g1/(2*a1);h1/(2*b1);i1/(2*c1)]
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{6}/3 \\ -4/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X1,X2-X0)
```

$$-{x_2}^2 - {y_2}^2 + 2\,{z_2}^2 + 1$$

```
>> hiperbo1z(1,1,1/sqrt(2),P,X0)
```


y‘
z
z‘
x‘
y
y‘‘
x
z‘‘
x‘‘

7.3.5.
```
>> a=7;b=7;c=10;d=-2;e=-4;f=4;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [ 12][  6][  6]
>> a1=6;b1=6;c1=12;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[  1, -1, -2]
[ -1,  1,  2]
[ -2,  2,  4]
ans =
[  1, -1, -2]
[  0,  0,  0]
[  0,  0,  0]
```

A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha + \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(2\alpha + \beta, \beta, \alpha) = \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$$

Assim toda solução de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é combinação linear de $V_1 = (2, 0, 1)$ e $V_2 = (1, 1, 0)$. Sejam $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2$. Podemos tomar $U_1 = W_1/||W_1||$ e $U_2 = W_2/||W_2||$.

```
>> V1=[2,0,1];V2=[1,1,0];
>> W1=V1,W2=V2-proj(W1,V2)
W1 =[2,0,1]
W2 =[  1/5,     1, -2/5]
>> U1=W1/no(W1),U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \left[\begin{array}{ccc} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{array}\right]$$
$$U_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{30} & \sqrt{5}/\sqrt{6} & -\sqrt{6}/(3\sqrt{5}) \end{array}\right]$$

```
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \left[\begin{array}{ccc} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -\sqrt{6}/(3\sqrt{5}) & 1/\sqrt{6} \end{array}\right]$$

```
>> K=[-12,12,60];
>> K1=K*P
```

$$K_1 = [36/\sqrt{5}, -12\sqrt{6}/\sqrt{5}, 24\sqrt{6}]$$

```
>> g1=K1(1);h1=K1(2);i1=K1(3);
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+g1*x1+h1*y1+i1*z1-24
```

$$6\,{x_1}^2 + 6\,{y_1}^2 + 12\,{z_1}^2 + \tfrac{36}{5}\,\sqrt{5}x_1 - \tfrac{12}{5}\,\sqrt{6}\sqrt{5}y_1 + 24\,\sqrt{6}z_1 - 24$$

```
>> X0=[g1/(2*a1);h1/(2*b1);i1/(2*c1)]
```

$$\left[\begin{array}{c} 3/5\,\sqrt{5} \\ -1/5\,\sqrt{6}\sqrt{5} \\ \sqrt{6} \end{array}\right]$$

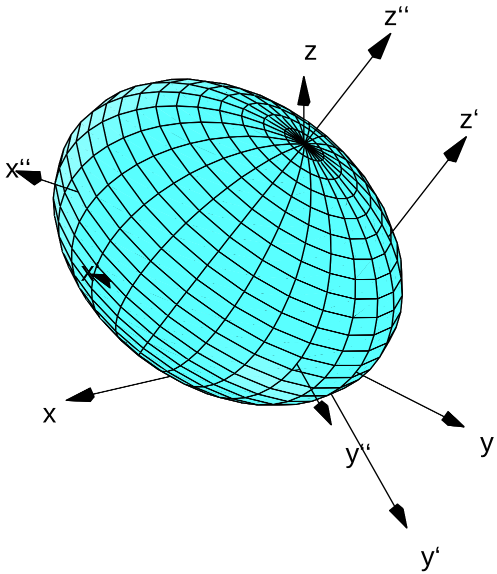
```
>> expr=subst(expr,X1,X2-X0)
```

$$6\,{x_2}^2+6\,{y_2}^2+12\,{z_2}^2-114$$

```
>> expr=expr/114
```

$$1/19\,{x_2}^2+1/19\,{y_2}^2+2/19\,{z_2}^2-1$$

```
>> elipso(sqrt(19),sqrt(19),sqrt(19/2),P,X0)
```


z‘‘
z
z‘
x‘‘
x‘
x
y‘‘
y
y‘

Bibliografia

[1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edição, 2000.

[2] Édson Durão Júdice. *Elementos de Álgebra Vetorial*. Sistema Pitágoras de Ensino, Belo Horizonte, 1976.

[3] Paulo Boulos e Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Mc Graw-Hill, São Paulo, 2a. edição, 1987.

[4] Frederico F. C., filho. *Introdução ao MATLAB*. Departamento de Ciência da Computação - UFMG, Belo Horizonte, Fevereiro de 2000.

[5] Alésio de Caroli, Carlos A. Callioli, e Miguel O. Feitosa. *Matrizes, Vetores, Geometria Analítica*. Nobel, São Paulo, 1976.

[6] Nathan M. dos Santos. *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1988.

[7] Stanley I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. Saunders College Publishing, New York, 5a. edição, 1994.

[8] David R. Hill e David E. Zitarelli. *Linear Algebra Labs with MATLAB*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[9] Bernard Kolman. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 6a. edição, 1998.

[10] David C. Lay. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1999.

[11] Charles H. Lehmann. *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1974.

[12] Louis Leithold. *Cálculo com geometria analítica, Vol. 2*. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edição, 1994.

[13] Steven J. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5a. edição, 1998.

[14] Emília Giraldes, Vitor H. Fernandes, e Maria P. M Smith. *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Mc Graw Hill, Lisboa, 1995.

[15] Elon L. Lima. *Coordenadas no Espaço*. SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[16] Elon L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[17] Mathworks Inc. *Student Edition of MATLAB Version 5 for Windows*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[18] Ben Noble e James W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1988.

[19] Reginaldo J. Santos. *Introdução à Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002.

[20] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.

[21] James Stewart. *Cálculo, Vol. 2*. Pioneira, São Paulo, 4a. edição, 2001.

[22] Israel Vainsencher. *Notas de Geometria Analítica Elementar*. Departamento de Matemática-UFPe, Recife, 2001.

Índice Alfabético