# Lista 01 - GRAFOS

1) Grafo básico simples é um grafo sem loop e aresta paralela.

2) Sendo $n$ ($\rightarrow |V| = n$) o número de vértices do grafo e $d(v)$ o grau do vértice e $m$ ($\rightarrow |E| = m$) o número de arestas.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot m$$

3) $L_G = (1,2,3,3,4,5)$, $n = 6$, $m = ?$

Pelo Hand-shaking lema $\sum_{i=1}^{n=6} d(v_i) = 2m \Rightarrow 1+2+3+3+4+5 = 2m$

$\Rightarrow 18 = 2m \therefore \boxed{m = 9}$

4) $n = 10$ $\quad L_G = (1,1,2,3,3,3,4,6,7,9)$

$1+1+2+3+3+3+4+6+7+9 = 2m$

$\Rightarrow 39 = 2m \therefore m = 19{,}5 \therefore$ Impossível

5) Considere 1997 pessoas, cada uma conhece

a) 3 pessoas $\quad L_G = (\underbrace{3,3,\dots,3}_{1997})$ $\quad 1997 \cdot 3 = 2m \therefore m = 2995{,}5$

$n = 1997$ $\quad \therefore$ Impossível

b) 4 pessoas $\quad L_G = (\underbrace{4,4,\dots,4}_{1997})$ $\quad 1997 \cdot 4 = 2m \therefore m = 3994$ ✓

$n = 1997$

6) $V = 7$ $\quad d(v) = 3$ $\quad L_G = (\underbrace{3,3,3,\dots,3}_{7})$

$3 \cdot 7 = 2 \cdot m \therefore m = \frac{21}{2} \therefore$ Impossível pelo Hand-shaking lema

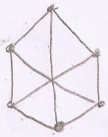
7) $L_G = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-K}, \underbrace{2,2,2,\dots,2}_{K})$ $\quad \sum_{i=1}^{n} d(v) = 2m \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} d(v_i) + \sum_{j=1}^{n-K} d(v_j) = 2 \cdot m$

$\Rightarrow -\underbrace{\sum_{i=1}^{K} d(v_i)}_{\text{par}} + \underbrace{2m}_{\text{par}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-K} d(v_j)}$

$\therefore$ par

8)

a) $d(v) = 3$ $|V| = 6$ $3 \cdot 6 = 18 = 2 \cdot m$ $\therefore m = 9$ $\therefore$ Possível



b) $|V| = 5$ $d(v) = 3$ $\Rightarrow 3 \cdot 5 = 15 = 2 \cdot m$ $\therefore$ Impossível

c) $|V| = 4$ $d(v) = 1$ $4 \cdot 1 = 2 \cdot m \Rightarrow 2$ $\therefore$ Possível

d) $|V| = 6$ $m = 4$

$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6) = 2 \cdot m$ e $d(v_i) \in \mathbb{N}$

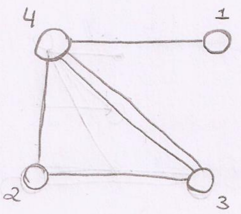
Assim não é possível reproduzir com exatidão o grafo

e) $|V| = 4$ $L_G = (1, 2, 3, 4)$ $m = 4$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \overset{?}{=} 2 \cdot m \Rightarrow 10 = 8$ $\therefore$ Impossível

f) $|V| = 4$ $L_G = (1, 2, 3, 4)$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 2 \cdot m$ $\therefore m = 5$




g) $|V| = 6$ $L_G = (1, 2, 3, 4, 5, 5)$

$\underbrace{\underbrace{1+2+3}_{6} + 4}_{10} + \underbrace{5+5}_{10} = 20 = 2 \cdot m$ $\therefore m = 10$

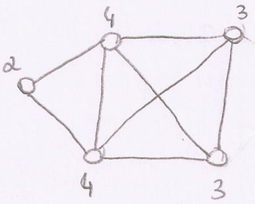
?

Possível, mas é necessário verificar o número de arestas requisitadas para desenhar.

$E = \binom{v}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \Rightarrow \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} \Rightarrow \frac{30}{2} \Rightarrow 15$

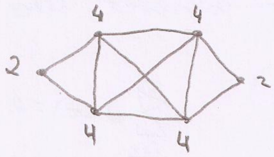
h) $|V| = 5$ $L_G = (2, 3, 3, 4, 4)$

$2 + 2*3 + 2*4 \Rightarrow 16 = 2m$ $\therefore m = 8$




i) $|V| = 5$ $L_G = (2, 2, 4, 4, 4)$

$2*2 + 3*4 \Rightarrow 16 = 2 \cdot m$ $\therefore m = 8$



9) $|V| = 17$ $L_G(5, 5, \dots, 5)$

$17 * 5 \Rightarrow 85 = 2m \therefore m = \frac{85}{2} \therefore$ Impossível

10) $|V| = n$ $L_G = (\underbrace{K, \dots, K}_{m}, \underbrace{K, \dots, K}_{h})$ $z$ = número de arestas

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{m} d(v_i) + \sum_{j=1}^{h} d(v_j) \Rightarrow m * K + h * K = 2 * z$$

$K(m+h) = 2 * z$, como $d(v_i) = d(v_j)$ e $m = h$,

$\Rightarrow K(m+h) = 2 * (K * h)$

$\Rightarrow K(m+h) = 2K * h$

$\therefore m = h$

11) $G = (V, E)$, GBS com $|V| = n$ e $|E| = m$, $t = (K+1)n - 2m$

$L_G = (\underbrace{K, K, \dots, K}_{t}, \underbrace{K+1, K+1, \dots, K+1}_{n-t})$

Pelo Hand-shaking lema:

$t * K + (K+1)(n-t) = 2m$

$\cancel{Kt} + Kn - \cancel{Kt} + n - t = 2m$

$n(K+1) - t = 2m$ $\boxtimes$

12) $|V| = n$ $m = Kn/2$ grau $= K$

$n * K = 2m$

$\therefore m = Kn/2$

13) $|V| = 12$ $m = 28$ $L_G = (\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{K}, \underbrace{4, \dots, 4}_{12-K})$

$3K + 4(12-K) = 2 \cdot 28$

$3K + 48 - 4K = 56$ $\therefore -K = 8 \therefore$ Impossível

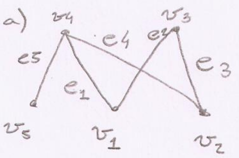
14) $|V| = 12$ $m = 28$ $L_G = (\underbrace{3, \dots, 3}_{K}, \underbrace{6, \dots, 6}_{12-K})$

$3K + 6(12-K) = 2 \cdot 28$

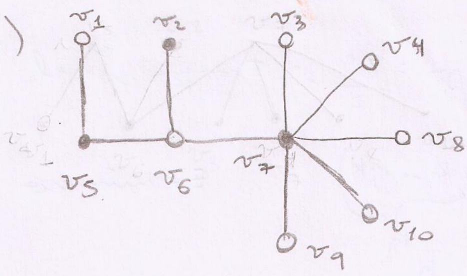
$3K + 72 - 6K = 56$ $\therefore -16 = -3K$

$\Rightarrow K = \frac{16}{3} \therefore$ Impossível

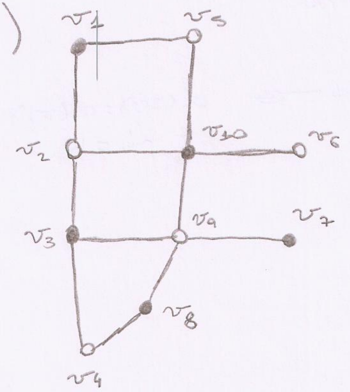
15) a)



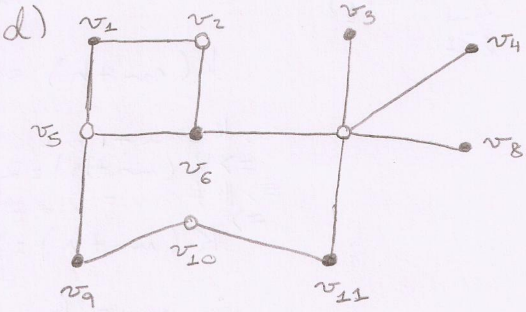

b)




c)




d)




16) Somando os elementos da linha $i$, teremos o grau da aresta $i$.

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij} = d(i)$$

17) O complemento de um grafo bipartido completo são subgrafos, um formado por vértices do subconjunto A e outro do subconjunto B.

18) Mostre G é seu complemento ambos não podem desconexos.

Usando Hand-shaking lema

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{j=1}^{n_1} d(v_j) + \sum_{K=1}^{n_2} d(v_K) = 2.m$$

$G + \overline{G} = K_n$

$v_j \in$ Vertices de $G$

$v_K \in$ Vertices de $\overline{G}$

$m = \frac{n(n-1)}{2}$ $\therefore$ se $\exists$ $v_x \notin V_G, V_{\overline{G}}$ $m < \frac{n(n-1)}{2}$, então $G$ e $\overline{G}$ não podem ser desconexos.

19) (Teorema de Ramsey) $n=6$ 3 conhecem mutuamente ou 3 não mutuamente

-- não se conhecem

— se conhecem

21) a) Sim, pois $G + \overline{G} = K_n$, logo, para ele estar conectado com todos os vértices, deve estar conectado com $n-1$ (excluindo ele mesmo).

b) $n-1$ vértices ímpares, tal que $n-1$ é par (ver ex 7).

22) $G = (V, E)$, bipartido com $v$ vértices. Mostre que $G$ tem no máximo $\frac{v^2}{4}$ arestas.

Sendo $X, Y \subset V \mid X \neq Y$, para que tenha-se o máximo de arestas, $|X| = |Y|$,
$\therefore |X| = |V|/2 = |Y|$. Logo, por ser bipartido igualmente, $L_G = (\underbrace{n, n, \ldots, n}_{X}, \underbrace{m, m, \ldots, m}_{Y})$
e $n = m$, então $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E| \Rightarrow$

$$|X| \cdot n + |Y| \cdot m = 2|E| \Rightarrow |X| \cdot n + |Y| \cdot n \Rightarrow 2|E| \Rightarrow$$

$$\frac{v}{2} \cdot n + \frac{v}{2} \cdot n = 2|E| \Rightarrow \cancel{2} \frac{vn}{2} = \cancel{2}|E|$$

Além disso, $n = \frac{v}{2}$, já que deve estar conectado com todos os vértices do outro sub-conjunto.

$$\therefore |E| = \frac{v}{2} \cdot n \Rightarrow \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{4} \quad \square$$

20) Base: $n=2$ $L_G = (v_1, v_2)$
$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot |E|$

i) Conexo $\rightarrow v_1 = v_2 = 1$
ii) Desconexo $\rightarrow v_1 = v_2 = 0$

Hipótese $n = K+1$, $n > 2$;
$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot |E|$, como $n > 2$, então $2|E| = \sum_{i=1}^{n-2} d(v_i) + \sum_{j=1}^{2} d(v_j)$

$\therefore$ Pela base, existe ao menos dois vértices com a mesma lista de graus