Como já vimos, as **fórmulas bem-formadas** da **Lógica de Predicados** podem conter **variáveis** e **quantificadores**. Por isso, torna-se importante identificar qual é o **escopo** de cada **quantificador** declarado em uma **fórmula bem-formada**. O **escopo** dos **quantificadores** em uma **fórmula bem-formada** define se a fórmula é **livre** ou **ligada**.

Variáveis que ocorrem em uma **fórmula bem-formada** e não estão no **escopo** de **quantificador** algum são chamadas **variáveis livres**. **Variáveis** que ocorrem em uma **fórmula bem-formada** e estão no **escopo** de algum **quantificador** são chamadas **variáveis ligadas**.

Exercício 21. Para cada uma das fórmulas abaixo, diga quais variáveis são livres e quais são ligadas. Para o P a ser entregue, faça 4 itens.

i) $\exists X\ (p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))$

ii) $\exists X\ ((p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow \exists Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y)))$

iii) $\exists X\ ((p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X))\ \hat{}\ q(Y))$

iv) $\forall X\ (\exists Z\ (p(Z)\ v\ q(X))\ v\ \forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y)))$

v) $\exists X\ (p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))$

vi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y)))))$

vii) $\forall X, \forall Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

viii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

ix) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

x) $\forall X, \forall Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xi) $\forall X, \exists Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xiii) $\forall X, \exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xiv) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xv) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xvi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xvii) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xviii) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X)\ \hat{}\ q(Y))))$

xix) $(\forall X (\forall Y (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xx) $\neg(\exists X (\forall Y (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall X \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

A **interpretação** de uma **fórmula bem-formada** na **Lógica de Predicados** exige alguns elementos a mais do que exigia a **interpretação** na **Lógica Proposicional**. Na **Lógica Proposicional**, conhecendo-se o valor verdade (**interpretação**) das fórmulas (**proposições**) atômicas, e conhecendo-se também a **tabela verdade** dos **conectivos** é possível se determinar o valor verdade (**interpretação**) de qualquer **proposição composta**.

Já na **Lógica de Predicados**, além de se conhecer a **interpretação** das **fórmulas atômicas** (**predicados atômicos**) e as **tabelas verdade** dos conectivos, é também necessário conhecer o domínio, as constantes (e suas atribuições), as variáveis (e suas atribuições), as funções (e suas atribuições), além dos predicados (e suas atribuições). Dependendo da fórmula e dos quantificadores associados a ela pode ser necessário verificar várias combinações possíveis para se poder definir a interpretação (valor verdade) de um único predicado.

Considere uma linguagem λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

Constantes: {a,b,c}
Variáveis: (X,Y,Z,W}
Símbolos Funcionais: {f/1,g/1}
Símbolos Predicados: {p/1, q/1}
Quantificadores: ∀ e ∃
Conectivos: ¬, ∧, ∨, → e ↔
Símbolos de pontuação: ( ) ,
Seja I a seguinte Interpretação:
Domínio: {1,2,3}

Atribuição a Constantes:

a	b	c
1	2	3

Atribuição a variáveis:

X	Y	Z	W
1	2	3	2

Atribuição a símbolos Funcionais:

f(1)	f(2)	f(3)	g(1)	g(2)	g(3)
1	2	3	1	2	1

Atribuição a símbolos predicados:

p(1)	p(2)	p(3)	q(1)	q(2)	q(3)
V	V	F	F	V	F

Exercício 22. Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I. Para o P a ser entregue, faça 4 itens.

i) $\exists X\ (p(X))$

ii) $\exists X\ (p(Z) \text{ v } q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$

iii) $\exists X\ ((p(Z) \text{ v } q(X)) \leftrightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y)))$

iv) $\exists X\ ((p(Z) \text{ v } q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)) \wedge q(Y))$

v) $\forall X\ (\exists Z\ (p(Z) \text{ v } q(X)) \text{ v } \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$

vi) $\exists X\ (p(Z) \text{ v } q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$

vii) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))))$

viii) $\forall X, \forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

ix) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

x) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xi) $\forall X, \forall Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xii) $\forall X, \exists Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xiii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xiv) $\forall X, \exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xv) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xvi) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xvii) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xviii) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xix) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xx) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xxi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall X\ \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$