Capítulo 1

Sistemas Lineares e Escalonamento

Antes de iniciarmos nos assuntos geométricos da Geometria Analítica, vamos recordar algumas técnicas sobre escalonamento de matrizes com aplicações na solução de sistemas lineares.

Na Geometria Analítica, veremos entre outras aplicações, que retas no plano podem ser definidas por equações lineares a 2 variáveis (da forma $ax + by + c = 0$ onde x e y são as variáveis e a , b e c constantes), que planos podem ser definidas por equações lineares a 3 variáveis (da forma $ax+by+cz+d = 0$ onde x, y e z são as variáveis e a , b, c e d constantes), que uma reta no espaço pode ser dada como intersecção de dois planos e portanto, como solução de um sistema de duas equações a 3 variáveis (na forma $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$).

Assim, uma boa compreensão de sistemas lineares e escalonamento vem de auxílio à boa condução dos estudos futuros.

Começaremos com um exemplo:

$$(*) \begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ & & 3y & + & 2z & = & 9 \end{cases}$$

Este sistema é um sistema de 3 equações lineares a 3 variáveis. Geometricamente, cada equação pode ser interpretada como um plano do espaço. Uma solução deste sistema é uma terna $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ de números reais, que satisfaz simultaneamente as 3 equações. Por exemplo, $x = 2$, $y = 1$ e $z = 3$ é uma solução do sistema. Podemos ainda dizer que $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ é uma solução. Na interpretação geométrica, o a solução obtida é a intersecção dos 3 planos dados, no caso, exatamente o ponto $P = (2,1,3)$.

A matriz dos coeficientes desse sistema é dado por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz ampliada do sistema é $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Escrevendo $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$, e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ temos que o sistema linear original é equivalente à equação matricial $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ainda, $X_0 = (2,1,3)$ é solução do sistema pois $AX_0 = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

.

Formalizando, dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn} & = & b_n \end{cases}$$

a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes e a matriz $\widetilde{A} = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$ é a <u>matriz completa</u> do sistema (ou <u>matriz ampliada</u>).

Colocando $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, o sistema corresponde à equação matricial $AX = B$.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
A := matrix(m,n, [a11,a12,...,a1n, a21,a22,...,a2n,..., am1, m2,...,amn]);
                # define a matriz A mxn com entradas dadas na sequência
A := matrix( 3, 3, [ 2,1,1,1,1,4,0,3,2] );
                # define a matriz dos coeficientes A do sistema dado acima
B := matrix( 3, 1, [8, 15, 9] ); # define B como matriz coluna
B := vector( [8, 15, 9] ); # define B como um vetor
B := [8, 15, 9]; # define B como uma lista ordenada (list)
                # qualquer uma das estruturas acima pode ser usada para B
AB := concat(A,B); # justapõe A e B formando a matriz ampliada
AB := augment(A,B); # ídem
linsolve(A,B); # resolve o sistema AX = B, diretamente.
X0 := linsolve(A,B); # define X0 como a solução do sistema
evalm(A &* X0); # multiplica A por X0. Deve resultar em B
```

...

Agora vamos a algumas considerações para introduzir a aplicação do escalonamento.

Observação 1: Existem certos sistemas simplificados em que é mais fácil efetuar substituições para resolvê-los. Nesta categoria, encaixam-se os sistemas com matrizes escada como definiremos depois. Veja o exemplo: o sistema $(*) \begin{cases} x + y + z = 8 \\ \quad\;\; y + 4z = 13 \\ \qquad\quad 2z = 6 \end{cases}$ está na forma escada e podemos resolvê-la facilmente começando a substituição " trás-para-frente", fazendo $z = \frac{6}{2} = 3$, donde $y = 13 - 4z = 13 - 12 = 1$ e portanto, $x = 8 - y - z = 8 - 1 - 3 = 4$.

Observação 2: Algumas alterações no sistema não afetam o conjunto das soluções, como

- trocar duas equações entre si, que na matriz ampliada, corresponde a trocar duas linhas entre si;
- multiplicar uma equação por um número não nulo, que na matriz ampliada, corresponde a multiplicar uma linha pelo número;
- substituir uma equação pela soma dela com uma outra equação, que na matriz ampliada, corresponde a somar a uma linha uma outra linha. Cuidado: a outra equação deve ser mantida!

  De fato, vejamos no caso de um sistema de 3 variáveis x, y e z:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \end{cases}$$

  Substituindo a segunda equação pela soma das duas, temos o novo sistema

$$(**)\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ (a_{21}+a_{11})x & + & (a_{22}+a_{12})y & + & (a_{23}+a_{13})z & = & (b_2+b_1) \end{cases}$$

  É óbvio que que uma solução (x_0, y_0, z_0) do sistema (*) satisfaz o sistema (**), pois se

$$\begin{cases} a_{11}x_0 & + & a_{12}y_0 & + & a_{13}z_0 & = & b_1 \\ a_{21}x_0 & + & a_{22}y_0 & + & a_{23}z_0 & = & b_2 \end{cases},$$

  então $(a_{21}+a_{11})x_0 + (a_{22}+a_{12})y_0 + (a_{23}+a_{13})z_0 = (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) + (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) = b_2 + b_1$.

  Reciprocamente, se (x_0, y_0, z_0) é uma solução de (**), então é uma solução de (*), pois a primeira equação de (*) é a mesma e a segunda equação de (*) pode ser obtida de (**) multiplicando a primeira por (-1) e somando à segunda equação de (**).
- juntando as duas alterações anteriores, pode-se substituir uma equação pela soma dela com um múltiplo de outra equação, correspondendo na matriz ampliada à soma a uma linha de um múltiplo de outra linha.

O princípio fundamental da resolução do sistema pelo Método de Eliminação de Gauss consiste trocar o sistema inicial por outro sistema equivalente (isto é, com o mesmo conjunto de soluções), de forma que o novo sistema seja mais adequado para discussão e resolução. A troca do sistema é baseada nas observações acima e é feita de forma sistemática.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
A := matrix( 3, 3, [ 2,1,1,1,1,4,0,3,2] );
                # define a matriz dos coeficientes A do sistema dado acima
B := [8, 15, 9]; # define B como uma lista ordenada (list)
AB := augment(A,B);         # justapõe A e B
M := gausselim(AB);
                # aplica diretamente o Método de Eliminação de Gauss em AB
X0 := backsub(M);
                # o comando backsub aplicado numa matriz
                #ampliada escalonada resolve o sistema
evalm(A &* X0);        # para conferir se dá B
```

Por enquanto é só ...

Podemos sintetizar as alterações no sistema a partir das observações acima utilizadas no Método de Eliminação de Gauss em 3 tipos:

1. Troca de equações entre si.
2. Multiplicação de uma equação por um escalar $\lambda \neq 0$.
3. Adição a uma equação de um múltiplo de outra (sem alteração das demais equações).

Estas alterações, na forma matricial, geram operações com linhas nas matrizes, chamadas <u>operações elementares com linhas</u>.

1. Troca de linhas entre si. NOTAÇÃO: NOTAÇÃO: $L_i \longleftrightarrow L_j$
2. Multiplicação de uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$. NOTAÇÃO: $L_i \longrightarrow \lambda L_i$
3. Adição a uma linha de um múltiplo de outra (sem alteração das demais linhas). NOTAÇÃO: $L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_k$

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
swaprow( M, i, j); # realiza em M a troca entre as linhas i e j
mulrow( M, i, x); # multiplica a linha i de M por x
addrow(M, k, i, x) # soma à linha i de M a linha k multiplicada por x
```

Por enquanto é só ...

O novo sistema procurado, no Método da Eliminação de Gauss, deve ter a matriz ampliada na forma escada que será introduzida a seguir.

Definição *Dizemos que uma matriz $M_{m\times n}$ está na forma escada se possui as seguintes características:*

1. *Denotando por c_i a coluna onde ocorre o primeiro elemento não nulo da linha i, devemos ter $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ onde L_r é a última linha não nula de M.*
2. *Ou equivalentemente, se $a_{i,J}$ é o primeiro elemento não nulo da linha i, os elementos da coluna $c_i = J$ abaixo da linha i são todos nulos. Isto faz com que a matriz escada tenha uma escada de zeros na parte inferior da matriz, subindo da direita para a esquerda.*

O processo de Eliminação de Gauss para redução de uma matriz M a uma forma escada é dada pelo seguinte algoritmo:

1. Seja c_1 a primeira coluna não nula de M, da esquerda para a direita. Se necessário, troque de linhas para que o elemento da linha 1 e coluna c_1 seja não nulo, isto é, $M_{1c_1} \neq 0$. Esse elemento é chamado de pivô.

   Fixando a linha 1, anule os elementos abaixo do pivô $M_{1c_1} \neq 0$, utilizando as operações $L_i \longrightarrow L_i + \frac{M_{ic_1}}{M_{1c_1}} \cdot L_1$, para $i > 1$. Chame a nova matriz de M^1.

2. Seja c_2 a coluna de M^1, contada da esquerda para a direita, onde existem elementos não nulos a partir da linha 2. Se necessário, troque a linha 2 por alguma abaixo de forma que $M^1_{2c_2} \neq 0$. esse é o novo pivô.

   Fixando a linha 2, anule os elementos da coluna c_2, abaixo da linha 2 (abaixo do pivô). Chame a nova matriz de M^2.

3. Continue o processo, considerando c_k a primeira coluna de M^{k-1}, contada da esquerda para a direita, onde existem elementos não nulos a partir da k-ésima linha. Se necessário, troque a linha k por alguma abaixo, para que $M^{k-1}_{kc_k} \neq 0$. Esse é o k-ésimo pivô.

   Fixando a linha k, anule os elementos da coluna c_k abaixo da linha k, isto é, do k-ésimo pivô.

4. Este processo termina quando acabam as linhas não nulas ou as colunas.

OBSERVAÇÃO: *Se você estiver utilizando uma calculadora para efetuar as contas, a escolha dos pivôs deve ser efetuada com mais cuidado, de forma a reduzir os erros. Uma escolha simples é escolher como k-ésimo pivô o elemento de maior valor absoluto na coluna c_k, a partir da linha k (conhecido como Emininação de Gauss com pivoteamento parcial, em Cálculo Numérico).*

Voltemos ao nosso exemplo:

$$(*)\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ & & 3y & + & 2z & = & 9 \end{cases} \text{ com matriz ampliada } M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

A matriz M não está na forma escada, pois o elemento $M_{11} = 2$ é o primeiro elemento não nulo da primeira linha (logo $c_1 = 1$), e o elemento $M_{21} = 1$ é o primeiro elemento não nulo da segunda linha (logo $c_2 = 1$), e portanto não temos $c_1 < c_2$, contradizendo (1) da definição. Vemos também que $M_{2,1} = 1 \neq 0$ está na mesma coluna e abaixo do primeiro elemento não nulo da primeira linha, contra (2) da definição.

Vemos que $M_{1c_1} = M_{11} = 2 \neq 0$ e portanto, podemos utilizar como o primeiro pivô, isto é, podemos fixar a linha 1 e anular os termos da coluna $c_1 = 1$ abaixo do pivô. No caso, basta fazer $L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$.

Depois, fixando $M_{2,2} = \frac{1}{2}$ como o segundo pivô, anula-se abaixo dele com $L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2$. A matriz E resultante já está na forma escada.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} = E$$

Assim, o sistema (*) fica equivalente ao sistema escalonado

$$(**) \begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 8 \\ & & \frac{1}{2}y & + & \frac{7}{2}z & = & 11 \\ & & & + & -19z & = & -57 \end{cases}$$

cuja solução pode ser dada substituindo de trás-para-frente (backsub): $z = \frac{-57}{-19} = 3$, donde, $y = 2 \cdot (11 - \frac{7}{2} \cdot 3) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ e $x = \frac{1}{2} \cdot (8 - 1 - 3) = 2$.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
M := matrix(3,4, [2,1,1,8,1,1,4,15,0,3,2,9]); # matriz ampliada
M1 := addrow(M, 1,2, -1/2);
M2 := addrow(M1, 2,3,-6); # já é a matriz escada E
backsub(M2); # resolve o sistema escalonado
```

Por enquanto é só ...

O Processo de Gauss-Jordan consiste em, após obtido uma matriz escada, prosseguir com mais algumas operações elementares sobre linhas, de forma a obter uma matriz mais simplificada, chamada matriz escada linha-reduzida, (ou matriz escada l-reduzida, ou matriz de Gauss-Jordan):

Por defnição, uma matriz R é uma matriz escada l-reduzida se:

1. é uma matriz escada,
2. o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula (pivô) é 1 e,
3. na coluna onde ocorre o primeiro elemento não nulo de alguma linha, todos os outros elementos (mesmo os acima) são nulos.

A matriz escada E do exemplo acima não é l-reduzida, pois os primeiros elementos não nulos das linhas são 2, $\frac{1}{2}$ e -19, diferentes de 1 e, além disso, não são os únicos elementos não nulos de sua coluna.

Para obter a matriz escada l-reduzida R, a partir da matriz escada E, basta seguir o seguinte algoritmo:

1. transforme todos os pivôs em 1, multiplicando as linhas não nulas $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ pelos multiplicadores $\frac{1}{E_{ic_i}}$.
2. Comece pelo último pivô, anulando todos os elementos ACIMA dele, e prossiga até o segundo pivô (inclusive). Como acima do primeiro pivô não há elementos, o processo se completa.

No exemplo,

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R$$

Observe que o sistema correspondente à matriz ampliada R fornece a solução de imediato:

$$(***) \begin{cases} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 3 \end{cases}$$

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
...
M2 := addrow(M1, 2,3,-6); # já é a matriz escada E
M3 := mulrow(M2, 1, 1/2); # transformando o primeiro pivô em 1
M4 := mulrow(M3, 2, 2); # transformando o segundo pivô em 1
M5 := mulrow(M4, 3, -1/19); # tranformando terceito pivô em 1
M6 := addrow(M5, 3,2,-7); # zerando um elemento acima do 3o. pivô
M7 := addrow(M6, 3,1,-1/2); # zerando outro elemento acima do 3o. pivô
M8 := addrow(M7, 2,1,-1/2); # zerando o elemento acima do 2o. pivô
        # ou diretamente.
M8 := gaussjord(M);
```

Por enquanto é só ...

Neste exemplo a solução do sistema é única, isto é, não existem outros valores para x, y e z que satisfaçam o sistema. Portanto é um sistema possível e determinado.

Consideremos agora outro exemplo: $(*)\begin{cases} x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ & & 3y & + & 2z & = & 9 \end{cases}$ com matriz ampliada $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, já na forma escada.

Reduzindo à forma de Gauss-Jordan temos:

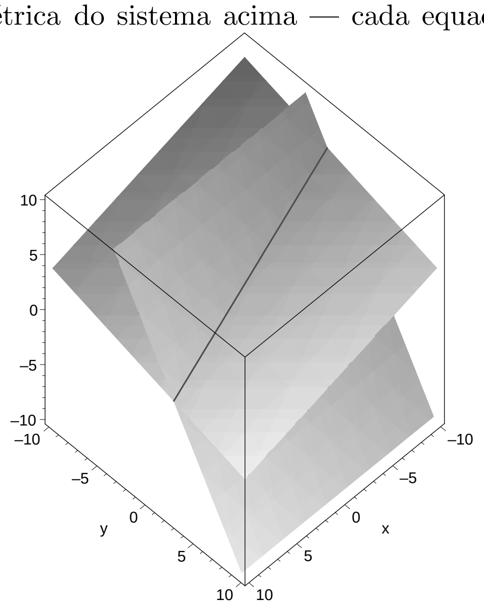
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{3} & 12 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix} = R$$

Logo o sistema acima é equivalente a $\begin{cases} x & & + & \frac{10}{3}z & = & 12 \\ & y & + & \frac{2}{3}z & = & 3 \end{cases}$

donde $x = 12 - \frac{10}{3}z$, $y = 3 - \frac{2}{3}z$ e z pode variar livremente, assumindo qualquer valor real. Por exemplo, para $z = 0$, temos a solução $(x, y, z) = (12, 3, 0)$, para $z = 3$ temos outra solução $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ e para $t \in R$ qualquer, temos $(x, y, z) = (12 - \frac{10}{3}t, 3 - \frac{2}{3}t, t) = (12, 3, 0) + t(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$.

O exemplo acima mostra um sistema com infinitas soluções, ou seja, uma sistema possível e indeterminado, com grau de liberdade igual a 1 = número de variáveis que podem variar livremente. Estas variáveis são chamadas variáveis livres ou parâmetros.

Veja a interpretação geométrica do sistema acima — cada equação representa um plano e a solução é a reta de intersecção:



Se considerarmos o sistema
$\begin{cases} x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & = & 30 \end{cases}$ com matriz ampliada $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 2 & 2 & 8 & 930 \end{bmatrix}$, teremos, o sistema

equivalente $\begin{cases} x & + & y & + & 4z & = & 15 \\ 0 & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{cases}$ pelo escalonamento.

Obviamente a segunda linha é nula e não tem influência no sistema. Assim, ficamos somente com a equação $x+y+4z=15$, e portanto, $x=15-y-4z$ onde y e z podem variar livremente. Por exemplo, $(x,y,z)=(15,0,0)$, $(x,y,z)=(14,1,0)$ e $(x,y,z)=(11,0,1)$ são soluções particulares do sistema. Para uso futuro, é interessante escrever as soluções na forma $(x,y,z)=(15,0,0)+t(-1,1,0)+s(-4,0,1)$, t, $s\in\mathbb{R}$. Isto pode ser obtido reescrevendo as variáveis livres: $y=t$ e $z=s$ e obtendo $(x,y,z)=(15-y-4z,y,z)=(15-t-4s,t,s)=(15,0,0)+(-t,t,0)+(-4s,0,s)=(15,0,0)+t(-1,1,0)+s(-4,0,1)$.

O sistema que acabamos de mostrar também é sistema possível e indeterminado, com grau de liberdade 2.

Observe o que o grau de liberdade é a diferença entre o número de variáveis e o número de equações não nulas na forma escada que aparecem nos sistemas possíveis e indeterminados.

Mas um sistema pode ser impossível, se ao reduzirmos na forma escada obtivermos uma equação do tipo $0=b\neq 0$, ou seja, desconsiderando a coluna dos termos independentes, a forma escada possui pelo menos uma linha não nula a menos que a matriz completa.

Os resultados acima podem ser descritos utilizando uma constante relacionada com matrizes, que é o número de linhas não nulas da forma escada, chamada posto da matriz. Dada uma matriz M, se este não for matriz nula, há sempre infinitas matrizes escada obtidas a partir de M, mas todas elas têm em comum o número de linhas não nulas e as colunas onde aparecem os pivôs. A matriz escada l-reduzida (Gauss-Jordan) é única.

Em todo caso, a constante de todas as matrizes escada obtidas a partir de uma matriz M leva à seguinte definição:

Definição: O posto de uma matriz M é o número de linhas não nulas de qualquer matriz escada obtida a partir de M por operações elementares sobre linhas.

Observamos que existe outra definição de posto de matriz, sem utilizar escalonamento: o posto de M é a ordem da maior submatriz quadrada de M com determinante não nulo. Por exemplo, se M for quadrada e invertível, seu posto é a ordem da matriz. Pode-se demonstrar que se trata do mesmo conceito.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ tem posto 2. De fato,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto, o número de linhas não nulas da matriz escada obtida é 2.

Fica como exercício encontrar uma submatriz 2×2 com determinante não nulo e verificar que todas as submatrizes 3×3 (são 3 no total) têm determinante 0. Fica como exercício também indicar quais operações elementares foram efetuadas nos passos acima.

Vamos apresentar um teorema acerca de soluções de sistemas lineares, em termos de postos de matrizes:

TEOREMA DE ROUCHÈ-CAPELLI. *Seja um sistema linear de m equações a n variáveis $AX = B$, cuja matriz dos coeficientes A tem posto p e cuja matriz ampliada $\widetilde{A}$ tem posto q. Então:*

1. *se $p \neq q$, o sistema é impossível;*

2. *se $p = q = n$, o sistema é possível e determinado;*

3. *se $p = q < n$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $n - p$.*

O teorema fica evidente se analisar os sistemas lineares na forma escada, de preferência de Gauss-Jordan:

1. se $p \neq q$, significa que a matriz ampliada escalonada tem a q-ésima linha do tipo $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_q \end{bmatrix}$, que corresponde à equação $0x_1 + \cdots + 0x_n = b_q$, sem solução, já que $b_q \neq 0$.

2. se $p = q = n$, as $p = q = n$ linhas não nulas da matriz de gauss-jordan da ampliada é da forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & b_n \end{bmatrix}$, donde a única solução é $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

3. se $p = q < n$, as $p = q$ linhas não nulas vão permitir escrever $p = q$ incógnitas em função das outras $n - p$ incógnitas, que podem variar livremente, chamadas variáveis livres.

A seguir, vamos indicar alguns métodos para a escolha das variáveis livres e forma de apresentar as soluções, nos sistemas indeterminados.

1. Obtenha a forma escada da matriz completa do sistema. Considere a parte correspondente à matriz dos coeficientes.

2. Se os pivôs estão nas colunas $c_1 < c_2 < \cdots < c_p$, as demais $n - p$ colunas correspondem às variáveis livres.

   As colunas dos pivôs correspondem às variáveis que se escrevem em termos das variáveis livres (podendo inclusive ser constante)

   Por exemplo, se a matriz ampliada de um sistema de 4 variáveis x, y, z e w, é dada por $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ temos que os pivôs estãos nas colunas $c_1 = 1$ e $c_2 = 3$ de x e z, donde os candidatos às variáveis livres são as demais, y e w. Temos que $x = 10 - 2y - 3w$ e $z = 5 - w$.

3. Utilizando parâmetros para as variáveis livres, escreva as soluções de forma a evidenciar cada parâmetro.

   Por exemplo, no sistema acima, utilizando parâmetros $y = t$ e $w = s$, temos $(x, y, z, w) = (10 - 20t - 3s, t, 5 - s, s) = (10, 0, 5, 0) + t(-20, 1, 0, 0) + s(-3, 0, -1, 1)$, com t, $s \in \mathbb{R}$.

Esta apresentação das soluções facilita a identificação do conjunto das soluções e a ligação com o grau de liberdade, na interpretação geométrica. Quando a solução é descrita com um parâmetro, a interpretação geométrica do conjunto das soluções é de um objeto de dimensão 1, como retas no plano ou no espaço. Quando são utilizados 2 parâmetros na descrição das soluções, temos um plano de soluções (dimensão 2).

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear é homogêneo se os termos independentes são todos nulos, isto é, é um sistema da forma $AX = 0$. Neste caso, sempre há a solução nula $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Resta ver se tem somente a solução nula (sistema homogêneo determinado) ou se existem outras soluções (sistema homogêneo indeterminado). Matricialmente, a última coluna da matriz ampliada sendo nula, as operações elementares sobre linhas não modifica essa situação, e por isso, muitas vezes esta coluna é omitida por economia.

Uma relação interessante entre um sistema não homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$, é que se X_0 é uma solução particular do sistema não homogêneo, isto é, $AX_0 = B$, as outras soluções podem ser escritas na forma $X = X_0 + X_1$, onde X_1 é uma solução do sistema homogêneo.

No exemplo estudado acima $(*) \begin{cases} x + y + 4z = 15 \\ \quad\; 3y + 2z = 9 \end{cases}$, o sistema homogêneo associado é $(**) \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ \quad\; 3y + 2z = 0 \end{cases}$.

Vimos que as soluções de (*) são da forma $(x, y, z) = (12, 3, 0) + t(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que $(12, 3, 0)$ é uma solução particular do sistema (*) e que $t(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ são as soluções do sistema homogêneo (**). Na verdade, em vez da solução particular $(12, 3, 0)$ poderia ser qualquer outra solução de (*).

Geometricamente, o sistema não homogêneo tem como solução a reta que passa pelo ponto $(12, 3, 0)$ e tem a direção da reta (isto é, é paralela à reta) dada como solução de sua homogênea associada, que representa uma reta pela origem.

Inversão de matrizes por escalonamento e matrizes elementares

Uma outra aplicação do processo de Gauss-Jordan é na inversão de matrizes.

Dada uma matriz A quadrada $n \times n$, podemos invertê-la construindo a matriz $M = [A \mid I_n]$ obtida justapondo A com a matriz identidade I_n Aplicando o processo de Gauss-Jordan, se a matriz A for invertível, deve-se chegar na matriz escada l-reduzida $R = [I_n \mid A^{-1}]$.

Isto significa também que a matriz A a ser reduzida à matriz identidade na sua forma de Gauss-Jordan, o que fornece o posto máximo n, e que determinante de A é não nulo. Vale a recíproca, isto é, se $det(A) \neq 0$, então A é invertível.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Temos então que $M = [A \mid I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ e portanto, a inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Para a demonstração da validade deste processo de inversão de matrizes, é necessário definir as matrizes elementares, obtidas da matriz identidade por uma operação elementar sobre linhas.

Uma operação elementar em M corresponde a uma multiplicação $E \cdot M$ de M por uma matriz elementar E, onde E é obtida de uma matriz identidade pela operação elementar em questão.

Por exemplo, a matriz $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida pela operação $L_1 \longleftrightarrow L_3$, e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar obtida pela operação $L_3 \longrightarrow L_3 + 5L_1$, e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 + 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

Assim, dada uma matriz quadrada invertível A, e a matriz $M = [A \mid I_n]$, temos uma sequência de matrizes elementares E_1, E_2, ..., E_r, correspondentes às operações elementares efetuadas para se chegar na sua matriz escada l-reduzida $R = [I_n \mid B]$. Mostremos que $B = A^{-1}$.

De fato, temos que $R = [I_n \mid B] = E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot [A \mid I_n]$. Das primeiras n colunas, conclui-se que $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$, donde $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$. Pelas n últimas colunas, segue que $E_r \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = B$. Logo, $B = A^{-1}$.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
A := matrix(n,n,[a_11, ..., a_nn];  # matriz a ser invertida
inverse(A); # para inverter diretamente
evalm(A^{-1}); # ídem
In := array(1..n,1..n, identity); # define matriz identidade nxn In
M := concat(A,In); # justapõe A e In
R := gaussjord(M); # encontra a matriz l-reduzida.R
submatrix(R,1..n, n+1..2*n); # é a matriz inversa de A, se existir
```

...

Outros comandos elementares para matrizes no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
A[i,j]; # elemento (i,j) da matriz A
row(A,i); # i-ésima linha de A
col(A,j); # j-ésima coluna de A
evalm(2*A + 4*B - 3*C); # calcula a combinação linear das matrizes A, B e C
evalm(A^n);  # potências inteiras de A
evalm(A &* B); # produto de matrizes
rank(A); # posto de A
det(A); # determinante de A
transpose(A); # transposta de A
```

...

Outros comandos no Maple para ilustrações

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
with(plots); # carrega o pacote plots de gráficos
implicitplot3d( x+y+4*z=15, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10);
   # desenha a parte do plano contida no cubo -10 <= x,y,z <=10
implicitplot3d({x+y+4*z=15, 3*y+2*z=9}, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10);
  # desenha os dois planos no cubo explicitado
  # a solução do sistema é a intersecção
  # (x,y,z) = (12,3,0)+t(-10/3,- 2/3,1)
spacecurve([12 -t*10/3, 3-t*2/3, t], t=3/5 ..33/15, thickness=3, color=red);
  # desenha a reta de intersecção
  # para desenhar os planos e a reta, juntos,
planos := implicitplot3d({x+y+4*z=15, 3*y+2*z=9}, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10):
reta := spacecurve([12 -t*10/3, 3-t*2/3, t], t=3/5 ..33/5, thickness=3, color=red):
display({planos, reta});
```

...

Sistemas Lineares e Escalonamento

Exercícios

1. Descreva todas as possíveis matrizes 3×3 que estão na forma escada l-reduzida. Quais são inversíveis? Quais têm posto 2? Quais têm posto 1?

2. Invente matrizes, encontre uma forma-escada e a forma escada l-reduzida de cada uma. Faça o mesmo com as transpostas. Compare os postos.

3. Encontre A^{-1} usando escalonamento. Para cada operação elementar efetuada, obtenha a matriz elementar correspondente. Qual o resultado de ir multiplicando à esquerda por essas matrizes elementares, a partir de A? e a partir de I?
   Considere $A := matrix(4, 4, [3, -1, 5, 0, 0, 2, 0, 1, 2, 0, -1, 3, 1, 1, 2, 0]);$ (na notação do Maple)

4. Resolva os sistemas reduzindo à forma escada l-reduzida e confira os resultados com o Teorema

de Rouchè-Capelli. Faça o gabarito no Maple V.

$$a)\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -7x_5 & =14 \\ 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & -2x_4 & +5x_5 & =-2 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +x_5 & =-1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x & +5y & & =1 \\ 2x & & +z & =3 \\ 5x & +y & -z & =0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x & +y & +z & =4 \\ 2x & +5y & -2z & =3 \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =-4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =2 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 2x & -5y & =0 \\ x & +y & =0 \\ 2x & +y & =0 \end{cases}$$

5. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ é solução.

b) Agora resolva efetivamente o sistema.

c) Resolva também o sistema homogêneo associado.

d) Verifique que toda solução obtida em (b) é soma de uma solução encontrada em (c) com a solução de (a).

O fato é que toda solução de um sistema linear **AX=B** é soma de uma solução do sistema homogêneo associado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ com uma solução particular de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

6. Calcule o determinante de $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ usando desenvolvimento de Laplace pela segunda coluna. Inverta (se possível) pelo escalonamento.

7. Desafio de programação: Considere o Maple sem o pacote linalg, isto é, sem as funções swaprow, mulrow, addrow, gausselim e gaussjord.
Implemente as funções acima, utilizando a programação do Maple (ou do Matlab, Octave, JMathLib, Maxima, ou equivalentes).