Substituição

Na lógica de predicados uma substituição θ é definida como sendo um conjunto finito de pares formados por variáveis e termos. Como o próprio nome sugere, uma substituição define como se pode substituir variáveis por termos em uma expressão ***E*** da lógica de predicados. Como a substituição é uma relação com propriedade funcional, não se pode ter uma mesma variável presente em mais de um par em uma mesma relação. A sintaxe padrão de uma substituição θ é dada por:

$$\theta = \{t_1/v_1,\ t_2/v_2,\ \ldots,\ t_n/v_n\}$$

Considere a expressão E_1 dada por $(p(A,B) \rightarrow q(X,Y)) \wedge r(A,B,X)$. Considere também a substituição θ_1 dada por {a/A, b/B, x/X, y/Y} aplicação da substituição θ_1 na experessão E_1 é representada por $E_1\theta_1$ e gera como resultado o seguinte:

$$E\theta_1 = (p(a,b) \rightarrow q(x,y)) \wedge r(a,b,x)$$

Uma propriedade importante na substituição é a idempotência. Substituições devem ser idempotentes para que possam ser utilizadas de maneira adequada. Um substituição é idempotente sse Eθ = (Eθ)θ.

Exercício 28. Com base nas expressões E1,E2, E3 e E4 dadas abaixo, mostre quais das substituições ($\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$) abaixo são idempotentes, quais não são e porquê.

$E_1 = (p(A,B) \rightarrow q(X,Y)) \wedge r(A,B,X)$
$E_2 = (q(B,B) \vee r(X,Y,A)) \leftrightarrow p(B,X)$
$E_3 = p(B,B) \leftrightarrow r(B,X,A)$
$E_4 = (q(B,B) \vee r(X,Y,A)) \wedge p(B,X)$

$\theta_1 =$ {a/A, b/B, x/X, y/Y}
$\theta_2 =$ {X/A, b/B, x/X, y/Y}
$\theta_3 =$ {y/A, y/B, y/X, y/Y}
$\theta_4 =$ {A/A, B/B, B/X, Y/Y}
$\theta_5 =$ {a/A, X/B, Y/X, y/Y}

Assim como ocorrem com funções no cálculo diferencial, as substituições podem ser utilizadas para se obter composições de substituição. Vejam o exemplo dado na "Cartilha da Lógica":

Tabela 4.2 Composição de substituições.

Substituição θ	Substituição θ_l	Substituição composta $\theta\theta_l$
{f(Z)/Y}	{b/X, a/Y, a/Z}	{f(Z)θ_l/Y,b/X, a/Y, a/Z} = {f(a)/Y, b/X, a/Z}
{f(Y)/X,U/Z}	{b/Y, Z/U}	{f(Y)θ_l/X,Uθ_l/Z, b/Y, Z/U} = {f(b)/X, Z/Z, b/Y, Z/U} = {f(b)/X,b/Y, Z/U}
{Y/X}	{a/X,a/Y}	{Yθ_l/X,a/X,a/Y} = {a/X,a/Y}
{p(X,Y)/Z}	{a/X,b/Y,c/W,d/Z}	{p(X,Y)θ_l/Z,a/X,b/Y,c/W,d/Z} = {p(a,b)/Z,a/X,b/Y,c/W}

Exercício 29. **Com base nas expressões E1,E2, E3 e E4 dadas abaixo (que são as mesmas já utilizadas anteriormente), mostre como é a aplicação das substituições ($\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$) e suas composições conforme os itens abaixo.**

$E_1 = (p(A,B) \rightarrow q(X,Y)) \wedge r(A,B,X)$
$E_2 = (q(B,B) \vee r(X,Y,A)) \leftrightarrow p(B,X)$
$E_3 = p(B,B) \leftrightarrow r(B,X,A)$
$E_4 = (q(B,B) \vee r(X,Y,A)) \wedge p(B,X)$
θ_1 = {a/A, b/B, x/X, y/Y}
θ_2 = {X/A, b/B, x/X, y/Y}
θ_3 = {y/A, y/B, y/X, y/Y}
θ_4 = {A/A, B/B, B/X, Y/Y}
θ_5 = {a/A, X/B, Y/X, y/Y}

i) $E_1\theta_1$ = ?
ii) $E_1\theta_2$ = ?
iii) $E_1\theta_3$ = ?
iv) $E_1\theta_4$ = ?
v) $E_1\theta_5$ = ?
vi) $E_1(\theta_1\theta_2)$ = ?
vii) $E_1(\theta_2\theta_1)$ = ?
viii) $E_1(\theta_3\theta_2)$ = ?
ix) $E_1(\theta_5\theta_4)$ = ?
x) $E_2(\theta_5\theta_5)$ = ?
xi) $E_4(\theta_4\theta_2)$ = ?
xii) $E_3(\theta_1\theta_1)$ = ?
xiii) $E_4(\theta_3\theta_4)$ = ?
xiv) $E_3(\theta_2\theta_3)$ = ?
xv) $E_2(\theta_3\theta_1)$ = ?
xvi) $E_4(\theta_5\theta_1)$ = ?

Exercício 30. **Com base nos experimentos acima, mostre se as propriedades associativa e comutativa valem para substituições na lógica de predicados.**

Sugestão de estudo: Como vimos em sala de aula, a substituição é um processo bastante útil na unificação a ser realizada quando se deseja demonstrar a validade de argumentos utilizando o princípio da resolução. Para este fim, uma propriedade se torna importante na substituição, tal propriedade é a capacidade unificadora de uma substituição. Veja em nosso livro texto (a Cartilha da Lógica- páginas 174 e 175) como identificar se uma substituição é ou não unificadora e quando uma substituição unificadora pode ser considerada a substituição *unificadora mais geral* (mgu).