

**Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação**  
**Estruturas Discretas – Profa. Helena Caseli**

**Quinta Lista de Exercícios – Funções**

- 1) Seja  $W = \{a, b, c, d\}$ . Determine se cada conjunto de pares ordenados define uma função de  $W$  em  $W$ .
- $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$
  - $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$
  - $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$
  - $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)\}$
- 2) Para cada uma das relações seguintes, responda:
- É uma função? Se não for, explique por que. Se for, responda as questões seguintes;
  - Quais são seus domínios e imagem?
  - A função é injetora (um-para-um)? Se não for, explique por que.
- $\{(1, 2), (3, 4)\}$
  - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y = 2x\}$
  - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x+y = 0\}$
  - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x|y\}$
  - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y \text{ e } y|x\}$
- 3) Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{4, 5\}$ . Escreva todas as funções  $f: A \rightarrow B$ . Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 4) Sejam  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{3, 4, 5\}$ . Escreva todas as funções  $f: A \rightarrow B$ . Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 5) Sejam  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{4, 5\}$ . Escreva todas as funções  $f: A \rightarrow B$ . Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 6) Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{5, 6, 7\}$ . Seja a relação  $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (?, ?)\}$ . Determinar um par ordenado  $(?, ?)$  pertencente a  $A \times B$ , para completar a  $f$ , de modo que as proposições a seguir sejam verdadeiras:
- A relação  $f$  não é uma função.
  - A relação  $f$  é uma função de  $A$  para  $B$  mas não sobrejetora.
  - A relação  $f$  é uma função de  $A$  para  $B$  e é sobrejetora.
- 7) Para cada caso a seguir, determine se a função é injetora, sobrejetora ou ambos (bijetora). Justifique suas afirmações.
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(x) = 2x$ .
  - $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(x) = 10 + x$ .
  - $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(x) = 10 + x$ .
- 8) Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos e  $f: A \rightarrow B$ . Verifique que duas quaisquer das afirmações seguintes acarretam a terceira:
- $f$  é injetora.
  - $f$  é sobrejetora.
  - $|A| = |B|$ .

9) Dê exemplo de um conjunto  $A$  e uma função  $f: A \rightarrow A$  onde  $f$  é sobrejetora, mas não é injetora. Dê um exemplo em que  $f$  é injetora, mas não é sobrejetora.

10) Para cada um dos pares de funções a seguir, faça:

- Determine qual das duas funções  $g \circ f$  ou  $f \circ g$  está definida
- Se uma ou ambas forem definidas, ache as funções resultantes.
- Se ambas forem definidas, determine se  $g \circ f = f \circ g$  ou não.

a)  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  e  $g = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ .

b)  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  e  $g = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

c)  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  e  $g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 5), (4, 3)\}$ .

d)  $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$  e  $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ .

11) Avalie:

a)  $\lfloor 13,2 \rfloor, \lfloor -0,17 \rfloor, \lfloor 34 \rfloor$

b)  $\lceil 13,2 \rceil, \lceil -0,17 \rceil, \lceil 34 \rceil$

12) Prove que  $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$ .

13) Calcule os seguintes valores:

a.  $31 \bmod 11$

b.  $16 \bmod 8$

c.  $22 \bmod 6$

d.  $-7 \bmod 3$

14) Defina  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por  $f(x) = x + 1$ . Seja  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(x) = 3x$ . Calcule as seguintes expressões:

a.  $(g \circ f)(5)$

b.  $(f \circ g)(5)$

c.  $(g \circ f)(x)$

d.  $(f \circ g)(x)$

e.  $(f \circ f)(x)$

f.  $(g \circ g)(x)$

15) Para cada uma das bijeções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a seguir, encontre  $f^{-1}$ :

a.  $f(x) = 2x$

b.  $f(x) = x^3$

c.  $f(x) = (x+4)/3$

16) Sejam  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $U = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ . Sejam também,  $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 6)\}$  uma função de  $S$  em  $T$  e  $g = \{(1, 7), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$  uma função de  $T$  em  $U$ . Escreva os pares ordenados da função  $g \circ f$ .

17) Sejam  $A = \{x, y\}$  e  $A^*$  o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com símbolos pertencentes a  $A$ . Defina uma função  $f: A^* \rightarrow \mathbb{Z}$  da seguinte maneira: para  $s$  em  $A^*$ ,  $f(s)$  = o comprimento de  $s$ .  $f$  é injetora? Prove que sim ou que não.  $f$  é sobrejetora? Prove que sim ou que não.

18) Se  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  é definida por  $f(x) = 3x$ , encontre  $f(A)$  para

a.  $A = \{1, 3, 5\}$

b.  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } (\exists y) (y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y)\}$