3.2 - Forma Normal da Proposições

Todas as proposições compostas (caso não estejam na forma normal) possuem uma proposição que está na forma normal e que é equivalente à proposição original. Utilizando-se do método dedutivo e da redução do número de conectivos é possível encontrar a Forma Normal (FN) de uma dada proposição.

Considera-se que uma proposição P está na FN se ela possui somente conectivos ^, v e ¬, ou seja, uma proposição na forma normal não pode conter os conectivos → e ↔.

Exemplos de proposições na forma normal:

- ¬p v q
- ¬(p ^ q) v r v s
- p v (q ^ r ^ s)
- p ^ (q v r v s)

Para facilitar o uso do método dedutivo na busca pela FN de uma dada proposição, iremos replicar aqui as tabelas existentes em nosso livro texto (A Cartilha da Lógica):

Leis	Nome
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv$ falso	Lei da contradição
$\alpha \vee \neg\alpha \equiv$ verdade	Lei do meio excluído
$\alpha \wedge$ verdade $\equiv \alpha$ $\alpha \vee$ falso $\equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \wedge$ falso $\equiv$ falso $\alpha \vee$ verdade $\equiv$ verdade	Leis da dominação
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Leis De Morgan

Tabela 1.28 Equivalências da condicional e da bicondicional.

$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	(1)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	(2)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	(3)

Tabela 1.32 Equivalências importantes.

$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	absorção
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	absorção
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	β	
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	β	

Já vimos então, que através do método dedutivo (ou através da tabela verdade) é possível se obter a Forma Normal de qualquer proposição. Além disso, sabemos que toda fórmula bem formada de lógica proposicional pode ser escrita em sua FN (a qual é equivalente à fórmula bem formada original).

Um ponto interessante de ser observado é que existem diferentes Formas Normais possíveis. Uma FN é definida com o objetivo de se criar uma padronização das proposições. A padronização é importante em uma linguagem formal, pois facilita, por exemplo, a manipulação automática (através de algoritmos e programas de computador) das proposições.

Na Lógica Proposicional, duas formas normais são de particular interesse, a saber: a Forma Normal Conjuntiva (FNC) e a Forma Normal Disjuntiva (FND).

3.2.1 Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Uma fórmula bem formada α (da lógica proposicional) está em sua FNC se e somente se α pode ser escrita como uma conjunção de cláusulas $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge ... \wedge \beta_n$. Nota-se então que precisamos definir o que é uma cláusula para podermos identificar a FNC de uma proposição.

Uma proposição β é uma cláusula se e somente se β é um literal, ou uma disjunção de literais.

Com base em nossa "Cartilha da Lógica", podemos dizer que uma fórmula está em sua Forma Normal Conjuntiva se e somente se:

1. contém como conectivos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$;
2. $\neg$ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;
3. não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
4. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não existem expressões tais como $p \vee (q \wedge r)$.

Se β é uma fórmula na Forma Normal Conjuntiva equivalente a α, então β é referenciada como FNC(α).

Procedimento 1.1 Obtenção da FNC.

Para a obtenção da FNC de uma fórmula não tautológica α com n átomos, procura-se na tabela-verdade de α as interpretações que avaliam α como f. Para cada uma dessas interpretações I_i ($1 \leq i \leq 2^n$) constrói-se uma disjunção da seguinte maneira: se na interpretação I_i o átomo p da fórmula α é avaliado como v, toma-se $\neg p$ e, se for avaliado como f, toma-se p. Em seguida, determina-se a conjunção das disjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i. Se a fórmula α for uma tautologia, determina-se que FNC(α): $p \vee (\neg p)$, na qual p é uma fórmula atômica.

3.2.2 Forma Normal Disjuntiva (FND)

Uma fórmula bem formada α (da lógica proposicional) está em sua FND se e somente se α pode ser escrita como uma disjunção $\beta_1 \vee \beta_2 \vee ... \vee \beta_n$, e além disso, cada uma das fórmulas β_i é um literal, ou uma conjunção de literais.

Com base em nossa "Cartilha da Lógica", podemos dizer que uma fórmula está em sua Forma Normal Disjuntiva se e somente se:

1. contém como conectivos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$;
2. $\neg$ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;
3. não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
4. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não existem expressões tais como $p \wedge (q \vee r)$.

Se β é uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva equivalente a α, então β é referenciada como FND(α).

Procedimento 1.2 Obtenção da FND.

Para a obtenção da FND de uma fórmula não contraditória α com n átomos, procura-se na tabela-verdade de α as interpretações que avaliam α como v. Para cada uma dessas interpretações I_i ($1 \leq i \leq 2^n$) constrói-se uma conjunção da seguinte maneira: se na interpretação I_i o átomo p da fórmula α é avaliado como v, toma-se p e, se for avaliado como f, toma-se $\neg$p. Em seguida, determina-se a conjunção das disjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i. Se a fórmula α for uma contradição, determina-se que FND(α): $p \wedge (\neg p)$, na qual p é uma fórmula atômica.

Na aula de hoje iremos dar sequência à atividade pedagógica de fixação do conteúdo já visto nas últimas aulas. O objetivo é (assim como na última atividade realizada sobre ***implicação*** e ***equivalência***) fixar o conhecimento acerca do uso da ***álgebra proposicional*** na manipulação de ***proposições***. Como já vimos, a ***álgebra proposicional*** é um ferramental muito rico e importante, que permite a demonstração de ***implicações*** e ***equivalências***, sem o uso direto da ***tabela verdade***. Na atividade de hoje iremos explorar o **Cálculo Proposicional** como ferramenta de apoio na identificação de equivalências entre operadores e na obtenção de formas normais.

Com base no conteúdo já visto em sala de aula, e com base também na atividade pedagógica da última aula, podemos considerar que toda proposição ***P*** pode ser algebricamente manipulada (ou seja, manipulada através da ***álgebra proposicional***) para se obter uma nova proposição equivalente à original ***P***. A fim de fixar esta ideia, na atividade de hoje vocês irão demonstrar se é possível (através do método dedutivo) reescrever uma proposição ***P*** qualquer utilizando-se apenas um subconjunto dos operadores da lógica proposicional. Como exemplo, imagine que se deseja encontrar uma proposição ***P'*** equivalente à ***P*** = $p \leftrightarrow q$, mas considerando que P' possua apenas os operadores "$\neg$" e "$\vee$". Neste caso, aplicando-se o método dedutivo, tem-se:

1) $p \leftrightarrow q$	bicondicional
2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	condicional
3) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$	dupla negação
4) $\neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$	De Morgan
5) $\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$	c.q.d.

Ainda na atividade de hoje, vocês utilizarão a mesma ideia para obter a forma normal conjuntiva e a forma normal disjuntiva das proposições utilizando o método dedutivo. Na obtenção das formas normais, vocês também utilizarão a tabela verdade. Como por exemplo, suponha que, usando o método dedutivo e também a tabela verdade, queiramos encontrar a forma normal conjuntiva e a forma normal disjuntiva da proposição ***P*** = $p \leftrightarrow q$. Para se obter a forma norma conjuntiva pelo método dedutivo temos:

1) $p \leftrightarrow q$	bicondicional
2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	condicional
3) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$	assim, FNC(P) = $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Para se obter a forma norma disjuntiva pelo método dedutivo temos:

1) $p \leftrightarrow q$	bicondicional
2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	condicional
3) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$	distributiva
4) $((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$	comutativa
5) $(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee (p \wedge (\neg p \vee q))$	distributiva
6) $((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q))$	associativa
7) $(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$	

assim, FND(P) = $(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

Para se obter tanto a FNC quanto a FND utilizando a tabela verdade, tomaremos como base a tabela verdade a seguir:

p	q	$p \leftrightarrow q$	
F	F	V	linha 1 para a FND = $\neg p \wedge \neg q$
F	V	F	linha 1 para a FNC = $p \vee \neg q$
V	F	F	linha 2 para a FNC = $\neg p \vee q$
V	V	V	linha 2 para a FND = $p \wedge q$

Assim, com base na tabela verdade, temos:
FNC(P) = $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
FND(P) = $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Os exercícios abaixo devem ser entregues no início da próxima aula, mas apenas poderão entregar a atividade os alunos que tiverem presença na aula de hoje. A entrega da resolução correta de todos exercícios valerá 2Ps.

Exercício 12. 2) Utilizando tanto o método dedutivo quanto o método da tabela verdade, encontre a Forma Norma Conjuntiva (FNC) e a Forma Normal Disjuntiva (FND) das proposições abaixo.

i) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
ii) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
iii) $p \leftrightarrow (p \vee q)$
iv) $(p \vee q) \wedge \neg p \leftrightarrow q$
v) $\neg((p \vee q) \wedge \neg q) \wedge p$
vi) $(p \rightarrow q) \wedge p \leftrightarrow q$
vii) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \leftrightarrow \neg p$
viii) $\neg p \leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
ix) $\neg p \rightarrow (p \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow p) \vee q$
x) $\neg(p \rightarrow (p \wedge q \wedge p) \rightarrow q)$
xi) $\neg p \leftrightarrow q \wedge \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$
xii) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$
xiii) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow p \vee q) \rightarrow r$
xiv) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \wedge q \rightarrow r \vee s$
xv) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$