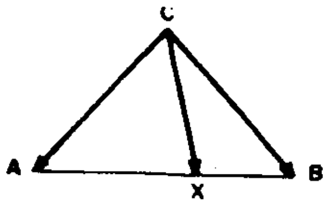
LISTA 3 DE GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m).

Sugestão. Na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.



2. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{AY}, \overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

3. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam.

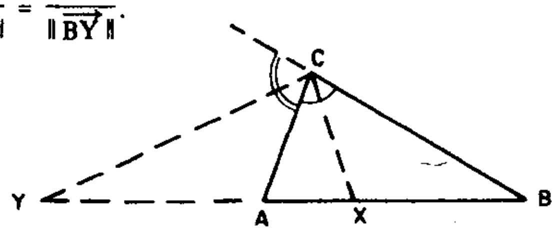
Sugestão: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

4. Num triângulo ABC, sejam X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e, supondo $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$, Y a interseção da reta AB com uma das bissetrizes externas do ângulo $A\hat{C}B$(*).

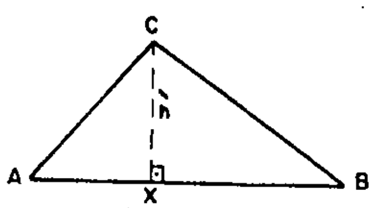
a) Os vetores $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ são respectivamente paralelos a $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$. Dê uma explicação geométrica para isso. No Capítulo 8 (Exercício 3) você dará uma prova analítica.

b) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$ e $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AY}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BY}\|}$.

c) Exprima $\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CY}$, X e Y em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



5. Sendo CX a altura do ΔABC relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Sugestão. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos, vale
$h = \|\overrightarrow{AX}\| \operatorname{tg}\hat{A} = \|\overrightarrow{BX}\| \operatorname{tg}\hat{B}$. Conclua daí que $(\operatorname{tg}\hat{A})\,\overrightarrow{AX} = (\operatorname{tg}\hat{B})\,\overrightarrow{XB}$, quer $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos, quer um deles seja obtuso.



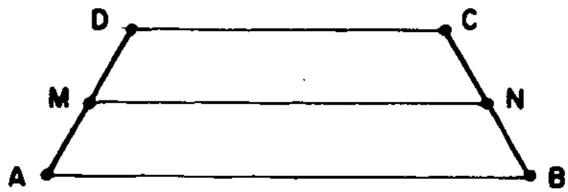
(*) Existe Y se $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$.

6. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.

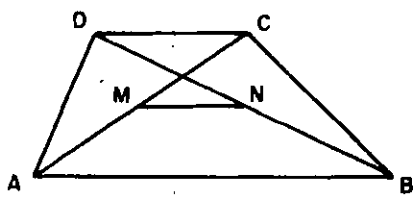
Sugestão: Usando o Exercício Resolvido nº 7: seja G o ponto comum às retas AN e BP, e H o ponto comum às retas AN e CM. Existem λ, μ, α e β tais que $G = A + \lambda\overrightarrow{AN} = B + \mu\overrightarrow{BP}$ e $H = C + \alpha\overrightarrow{CM} = A + \beta\overrightarrow{AN}$. Calcule λ, μ, α e β.

7. Prove que as alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Idem para as bissetrizes internas.

8. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



10. Num triângulo ABC, sejam M, N, P, os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Sugestão: Exercício Resolvido nº 2.

11. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sugestão: Tome um ponto O qualquer e considere os pontos $X = O + \overrightarrow{AN}$, $Y = X + \overrightarrow{BP}$ e $Z = Y + \overrightarrow{CM}$. Mostre que $Z = O$ e que O, X, Y não são colineares.

12. Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O, prove que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,\overrightarrow{AO}.$$

13. Seja OABC um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

14. Seja OABC um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

15. Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

16. Seja ABCD um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

17. Dados O, A, B, C, ache G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ em função de O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

18. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

X é um ponto da reta AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha + \beta = 1$.

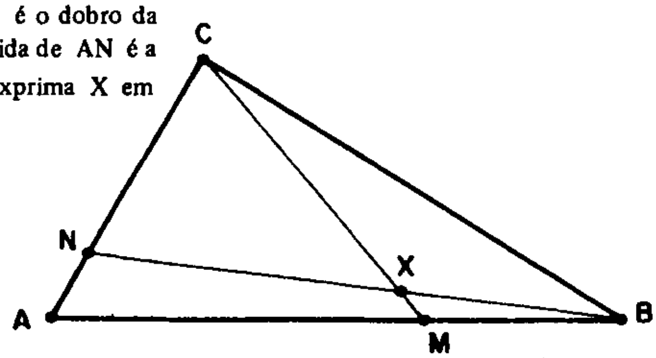
Sugestão: Exercício 1.

19. Nas condições do Exercício 18, prove que:

X é um ponto do segmento AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

20. Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Prove que: X é um ponto interior ao triângulo ABC se e somente se $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $\alpha + \beta < 1$ (um ponto é interior a um triângulo se for interior a alguma ceviana dele).

21. Na figura, a distância de M a A é o dobro da distância de M a B, e a medida de AN é a terça parte da medida de CN. Exprima X em função de A, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



22. Considere o triângulo ABC, e sejam $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, e $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Calcule α real para que o ponto $X = C + \alpha\vec{w}$ pertença à reta AB.

4-4 Prove que $(A + \vec{u}) - \vec{u} = A$.

4-5 Prove que $(A - \vec{u}) + \vec{v} = A - (\vec{u} - \vec{v})$.

4-6 Prove que $A + \vec{u} = B + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$.

4-7 Determine $\overrightarrow{BA}$ em função de $\vec{u}$, sabendo que $A - \vec{u} = B + \vec{u}$.

4-8 Determine a relação entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que, para um dado ponto A, $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A$.

4-9 Prove que $[A + (\vec{u} + \vec{v})] + \vec{w} = (A + \vec{u}) + (\vec{v} + \vec{w})$.

4-10 Dados os pontos A, B e C, determine X, sabendo que $(A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CB}$.

4-11 Prove que, se $B = A + \overrightarrow{DC}$, então $B = C + \overrightarrow{DA}$.

4-12 Dados os pontos distintos A e B, seja $X = A + \alpha\overrightarrow{AB}$. Em cada um dos casos, descreva o conjunto dos valores que α deve tomar para que X percorra todo o conjunto especificado.

(a) O segmento AB.

(b) A semi-reta de origem A que contém B.

(c) A semi-reta de origem B que contém A.

(d) A reta AB.

(e) O segmento CB, que tem A como ponto médio.

4-13 **Baricentro** dos pontos A_1, A_2, A_3 é, por definição, o ponto G que verifica $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$. Prove que, dado um ponto O qualquer, $G = O + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})/3$. Estenda o conceito e o resultado para n pontos. Compare com o Exercício 3-17. Examine o caso particular de dois pontos.

EXERCÍCIOS

6-1 Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Prove:

(a) P, A, B e C são coplanares $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD (b) P, A e B são colineares $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v})$ é LD

6-2 Prove que, se $\vec{u}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$ ($\vec{u} = \lambda\vec{v}$), então qualquer seqüência que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é LD. Em particular, toda seqüência de vetores que contém o vetor nulo é LD.

6-3 A seqüência $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD. Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes (justifique sua resposta).

(a) Necessariamente, um dos vetores é nulo.

(b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{v} /\!/ \vec{w}$.

(c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são nulos, então dois deles são paralelos.

(d) Existem três planos paralelos e distintos, o primeiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{u}$, o segundo contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{v}$ e o terceiro contendo origem e extremidade de um representante de $\vec{w}$.

6-4 Prove que:

(a) $(\vec{u},\vec{v})$ é LD $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD

(b) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ é LI

(c) $(\vec{u},\vec{v})$ é LD $\Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ é LD

6-5 Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

(a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ é LD

(b) $(\vec{u},\vec{v})$ é LI $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI

(c) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são nulos, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD $\Rightarrow (2\vec{u},-\vec{v})$ é LD.

(d) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Rightarrow (\vec{u},\vec{v})$ é LD

(e) Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD, então $(\vec{u},\vec{v})$ tanto pode ser LD como LI.

(f) Se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tanto pode ser LD como LI.

EXERCÍCIO

6-6 Prove, utilizando a Proposição 6-5, que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é LD, quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(a) $\vec{a} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$	$\vec{b} = -\vec{u} + \vec{v}/2 + 3\vec{w}/4$	$\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}/2$
(b) $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$	$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$	$\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$
(c) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$	$\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$	$\vec{c} = \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}$

EXERCÍCIOS

6-8 Prove: $(\vec{u},\vec{v})$ é LI $\Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ é LI.

6-9 Prove:

(a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w})$ é LI (b) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},\vec{u}-\vec{v},3\vec{v})$ é LI

EXERCÍCIO

6-11 Determine a e b, sabendo que $(\vec{u},\vec{v})$ é LI e que $(a-1)\vec{u} + b\vec{v} = b\vec{u} - (a+b)\vec{v}$.

EXERCÍCIOS

6-12 Explique por que a proposição anterior é válida também para $n \geq 4$.

6-13 Em cada caso, é descrita uma alteração efetuada na tripla LI $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Baseando-se na sua intuição, dê um palpite: a seqüência obtida após a alteração é também LI? Em seguida, tente provar que seu palpite está correto.

(a) Multiplica-se cada um dos três vetores por um escalar α.

(b) Substitui-se cada um dos três vetores pela soma dos outros dois.

(c) Soma-se a cada um dos três vetores um mesmo vetor $\vec{t}$.

(d) Somam-se a $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente, os vetores LI $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

6-14 Suponha que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja LI. Dado $\vec{t}$, existem α, β e γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (Proposição 6-8). Prove: $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

6-15 Prove:

(a) $(2\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} + \vec{w})$ é LI $\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w})$ é LI.

(b) $(2\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{v} + \vec{w})$ é LD $\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w})$ é LD.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v})$ também é LI, o mesmo sucedendo com $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$.

2. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. Dado $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem α, β, γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (por quê?). Prove que $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\iff \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

3. Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI $\iff$ $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI. (A implicação $\Rightarrow$ foi provada no Exercício Resolvido nº 3.)

4. Demonstre a Proposição 2 no caso $n = 1$. Pergunta: por que a demonstração feita no texto não serve neste caso?

5. Prove que $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w})$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.