Exercício 7. Diga quais das proposições compostas abaixo são tautologias, quais são contradições e quais são contingências, e prove sua resposta mostrando a tabela verdade completa de cada proposição. (4º P – deve ser entregue, por e-mail, com um arquivo “escaneado” da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo).

i. $\neg(p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$

p	q	$\neg(p \vee \neg p) \vee q \vee \neg q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

ii. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

p	q	$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

iii. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$

p	q	r	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

iv. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r \rightarrow q \wedge r))$

p	q	r	¬((p → q) → (q ∧ r → q ∧ r))
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contradição.

v. $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

p	q	(p ↔ q) ∧ p → q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

vi. $\neg((p \leftrightarrow p \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg p)$

p	¬((p ↔ p ∧ ¬p) ↔ ¬p)
T	F
F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contradição.

vii. $p \leftrightarrow p$

p	p↔p
T	T
F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

viii. $\neg p \leftrightarrow p$

p	¬p↔p
T	F
F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contradição.

ix. $\neg(p \vee \neg p)$

p	¬(p ∨ ¬p)
T	F
F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contradição.

x. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

p	q	r	p → (q → r)
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xi. $p \to (q \to p)$

p	q	p → (q → p)
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

xii. $(p \to q) \to p$

p	q	(p → q) → p
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xiii. $(p \to q) \to \neg p \ \wedge r \to q \wedge s \to q$

p	q	r	s	(p → q) → ¬p ∧ r → q ∧ s → q
T	T	T	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	F
F	F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xiv. $(p \to r) \to q \ \wedge s \to \neg q \wedge p \to r$

p	r	q	s	(p → r) → q ∧ s → ¬q ∧ p → r
T	T	T	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	T	F	F
F	F	F	T	F
F	F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xv. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \ \wedge r \rightarrow q \wedge s \rightarrow q)$

p	q	r	s	¬((p → q) → ¬p ∧ r → q ∧ s → q)
T	T	T	T	F
T	T	T	F	F
T	T	F	T	F
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	T	F	F
F	T	F	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	T	T
F	F	F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xvi. $\neg((p \rightarrow r) \rightarrow q \ \wedge s \rightarrow \neg q \wedge p \rightarrow r)$

p	r	q	s	¬((p → r) → q ∧ s → ¬q ∧ p → r)
T	T	T	T	F
T	T	T	F	F
T	T	F	T	F
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	T	T	F	F
F	T	F	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T
F	F	F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xvii. $\neg(\neg((p \rightarrow r) \rightarrow q \ \wedge s \rightarrow \neg q \wedge p \rightarrow r))$

p	r	q	s	$\neg(\neg((p \to r) \to q \wedge s \to \neg q \wedge p \to r))$
T	T	T	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	T	F	F
F	F	F	T	F
F	F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xviii. $\neg\neg((p \to q) \to \neg p \ \wedge r \to q \wedge s \to q)$

p	q	r	s	$\neg\neg((p \to q) \to \neg p \wedge r \to q \wedge s \to q)$
T	T	T	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	F
F	F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contingência.

xix. $\neg(p \to (q \to r)) \wedge (p \to (q \to r))$

p	q	r	$\neg(p \to (q \to r)) \wedge (p \to (q \to r))$
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma contradição.

xx. $\neg(p \to (q \to r)) \vee (p \to (q \to r)$

p	q	r	¬(p → (q → r)) V (p → (q → r))
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

Portanto, como demonstra a tabela verdade, a proposição é uma tautologia.

Na aula de hoje iremos realizar uma atividade pedagógica de pesquisa. O objetivo é despertar no aluno o senso crítico e a capacidade de buscar informações, compreender sobre o tema básico a ser abordado, e construir uma visão crítica sobre a teoria estudada. Para isso, será necessário que os alunos busquem informações em livros ou em documentos disponíveis na Web para se apropriarem do conhecimento básico sobre implicação lógica e equivalência lógica, e na sequência expressem a visão pessoal sobre o tema respondendo às questões propostas. Assim, a atividade se divide em três etapas básicas: i) **pesquisa e leitura** sobre os temas propostos; ii) **produção de texto** e, finalmente iii) **resposta às questões**.

i) Descrição da etapa de **pesquisa e leitura:** a etapa de **pesquisa e leitura** deve ser realizada individualmente, e o aluno deverá buscar (em livros ou na internet) material sobre **lógica proposicional** e realizar uma leitura crítica para entender o que é **implicação lógica** e o que é **equivalência lógica** (ambos os conceitos devem ser considerados apenas dentro da lógica proposicional).

ii) Descrição da etapa de **produção de texto**: nesta etapa o aluno deverá produzir um resumo de uma página descrevendo o que ele entendeu sobre a **implicação lógica** (na lógica proposicional) e um resumo, também de uma página, descrevendo o que ele entendeu sobre a **equivalência lógica** (na lógica proposicional). Os textos devem manuscritos (de próprio punho).

iii) Descrição da etapa de **resposta às questões**: nesta etapa o aluno deverá utilizar o conhecimento adquirido nas etapas anteriores e responder às questões abaixo. As questões devem ser respondidas em papel e de forma manuscrita (de próprio punho). É importante que as respostas representem a visão crítica e pessoal do aluno.

Questão 1) Descreva quais são, na sua opinião, as duas maiores diferenças entre **implicação lógica** e **equivalência lógica**.

Questão 2) Descreva quais são, na sua opinião, as duas maiores semelhanças entre **implicação lógica** e **equivalência lógica**.

Questão 3) Descreva quais são, na sua opinião, as situações onde a **implicação lógica** e a **equivalência lógica** podem úteis. Dê exemplos.

Questão 4) Mostre, através da tabela verdade, se as propriedades reflexiva e transitiva são válidas para a **implicação lógica** e a **equivalência lógica**.

Esta atividade deve ser entregue no início da próxima aula, mas apenas poderão entregar a atividade os alunos que tiverem presença na aula de hoje!

1.5 - Implicação e Equivalência

A implicação lógica e a equivalência lógica são muito importantes no estudo da lógica proposicional. Tanto a implicação quanto a equivalência podem ser muito úteis no estudo do cálculo proposicional e na álgebra das proposições. Nesta seção 1.5 veremos o que são as implicações (ou consequências) e as equivalências e como ambas podem ser úteis na sequência dos nosso estudos sobre a lógica das proposições.

1.5.1 Implicação Lógica

Uma proposição P(p, q, ...) implica em Q(r, s, ...) se Q é verdadeira sempre que P também é verdadeira.

Assim, pode-se dizer que toda proposição implica em uma tautologia, e uma contradição implica logicamente uma outra contradição.

A notação é dada por:

$P \Rightarrow Q$

Para a implicação são válidas as seguintes propriedades:

- Reflexiva (R): $P \Rightarrow P$

- Transitiva(T): **Se** $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$,
  Então $P \Rightarrow R$.

Exemplos:

1) Monte as tabelas verdade das seguintes proposições:

a) $p \wedge q$
b) $p \vee q$
c) $p \leftrightarrow q$

Responda Verdadeiro (V) ou Falso(F):

i) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ (V)
ii) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$ (V)
iii) $p \Rightarrow (p \vee q)$ (V)
iv) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow p$ (F)
v) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$ (F)
vi) $p \Rightarrow p \vee q$ (V) (Regra da adição)
vii) $p \Rightarrow p \wedge q$ (F)
viii) $q \Rightarrow p \vee q$ (V) (Regra da adição)
ix) $(p \vee q) \Rightarrow p$ (F)

x) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (V) (Regra da simplificação)

xi) $(p \wedge q) \Rightarrow q$ (V) (Regra da simplificação)

2) Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) e prove sua resposta.

a) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ (V) (Silogismo disjuntivo)

b) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow p$ (F)

c) $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$ (V) (Silogismo disjuntivo)

d) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (V) (Modus Ponens)

e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ (V) (Modus Tollens)

f) $\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q)$ (V)

Teorema: $P \Rightarrow Q$ sse a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo:
$((p \leftrightarrow q) \wedge p) \rightarrow p)$ é tautologia, então $((p \leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p)$ é válida

Pergunta: Existe alguma condicional que não é tautológica e assim não indica uma implicação? Prove sua resposta.

1.5.2 Equivalência Lógica

Uma proposição P(p, q, ...) é logicamente equivalente a uma outra Q (r, s, ...) se as tabelas verdade de P e Q são idênticas.

A notação é dada por:

$P \Leftrightarrow Q$

Assim, todas as tautologias são equivalentes e todas as contradições também o são.

Para equivalências lógicas valem as seguintes propriedades:

a) Reflexiva (R): $P \Leftrightarrow P$
b) Simétrica (S):: **Se** $P \Leftrightarrow Q$ **então** $Q \Leftrightarrow P$
c) Transitiva(T): **Se** $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, **então** $P \Leftrightarrow R$.

Exemplos:

1) Monte as tabelas verdade das seguintes proposições:
   a) $\neg\neg p$
   b) $\neg p \rightarrow p$
   c) $p \rightarrow q$
   d) $p \rightarrow p \wedge q$
   e) $\neg p \vee q$

   Com base nas tabelas, responda Verdadeiro (V) ou Falso (F):

   i) $\neg\neg p \Leftrightarrow \neg p \rightarrow p$ (V)
   ii) $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p \wedge q$ (F)

iii) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (V) (regra da dupla negação)
iv) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ (V) (Regra da absorção)
v) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

2) Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) e prove sua resposta
   a) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (V)
   b) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (V)
   c) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ (F)
   d) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Teorema: $P \Leftrightarrow Q$ sse a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo: $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Regra da Exportação-Importação)

Exercício: Encontre um exemplo onde a bicondicional não é tautológica.

1.6 - Proposições associadas a uma Condicional

Dada:

$p \rightarrow q$ (direta)

1- Recíproca: $q \rightarrow p$
2- Contrária $\neg p \rightarrow \neg q$
3- Contrapositiva: $\neg q \rightarrow \neg p$

Verifique (através da tabela verdade) as equivalências das proposições associadas.

Exercício 8. Determine:

a) a contrária da contrapositiva de $p \rightarrow q$;
b) a contrária da contrapositiva de $\neg p \rightarrow q$;
c) a recíproca da contrapositiva da contrapositiva de: $p \rightarrow \neg q$, $\neg p \rightarrow \neg q$ e $p \rightarrow q$;

d) a contrapositiva da contrária da contrapositiva de $p \to q$, $\neg p \to q$, $p \to \neg q$;

Exercício 9. Sejam p: Bia é bióloga.

q: Bia ainda é estudante.

Mostre em linguagem corrente:

a) a recíproca da contrária de $p \to \neg q$;

b) a contrapositiva da recíproca de $q \to p$;

c) a contrária da contrapositiva de $p \to q$.

1.7 - Negação de 2 proposições - conectivos de Scheffer

1.7.1 Negação conjunta de 2 proposições

É a aplicação da negação nas 2 proposições de uma conjunção ($\neg p \wedge \neg q$).
É dada por:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Verificar como é a tabela verdade

1.7.2 Negação Disjunta de 2 proposições

É a aplicação da negação nas 2 proposições de uma disjunção ($\neg p \vee \neg q$).
É dada por:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Verificar como é a tabela verdade:

Obs.: os símbolos $\uparrow$ e $\downarrow$ são chamados conectivos de Scheffer.