Após termos visto os conceitos básicos de **Lógica Proposicional**, bem como aprendido como demonstrar a **validade de argumentos** na **Lógica Proposicional**, daremos sequência em nossos estudos de lógica através da **Lógica de Predicados**. Esta nova abordagem a ser estudada em nossa disciplina, a **Lógica de Predicados** é uma lógica de **primeira ordem**. Assim, ela pode ser vista como uma extensão da **Lógica Proposicional**. Tal extensão traz a possibilidade de se utilizar variáveis e funções (dentre outras novidades), e por isso permite que problemas possam ser representados de uma maneira mais expressiva.

Mesmo sendo ainda simples, a **Lógica de Predicados** é mais complexa que a **Lógica Proposicional** e o seu estudo permite uma compreensão que pode servir de base para o estudo de lógicas mais elaboradas (e complexas) Ainda assim, a **Lógica de Predicados** mantém vários princípios básicos da lógica clássica (por exemplo, o **princípio do terceiro excluído**, o **princípio da não contradição**). Por isso, assim como ocorre na **Lógica Proposicional**, a **Lógica de Predicados** também possui muitas limitações que podem gerar dificuldades na representação de problemas do mundo real. Tais limitações (as quais estão presentes também na **Lógica Proposicional**) envolvem, por exemplo, falta de tratamento para temporalidade, para causalidade e para incerteza, dentre outros.

4 Lógica de Predicados

O estudo da lógica de predicados está relacionado ao estudo de teorias de primeira ordem. Neste sentido, para a sequência dos nossos estudos em lógica, é importante conhecermos os componentes de uma teoria de primeira ordem. Em qualquer teoria de primeira ordem, os componentes básicos são:

1. Um alfabeto;
2. Uma linguagem de primeira ordem;
3. Um conjunto de axiomas;
4. Um conjunto de regras de inferência.

Antes de continuarmos, vamos então relembrar: o que é um alfabeto? O que é uma linguagem? O que é uma fórmula bem-formada? O que é um axioma? O que é uma regra de inferência? Dê exemplos!

Assim como ocorre na lógica proposicional, linguagem da Lógica de predicados é constituída por fórmulas bem-formadas, as quais devem ser construídas com base nos símbolos do alfabeto. Os axiomas da lógica de predicados são definidos como um subconjunto específico de fórmulas bem-formas e (os axiomas) são utilizados, juntamente com um conjunto de regras de inferências para derivar teoremas. Assim, através da Lógica de Predicados é possível se construir um processo automático de prova (ou derivação) de teoremas (o PROLOG, por exemplo, é um provador automático de teoremas).

Como definido em nossa "Cartilha da Lógica", o alfabeto da Lógica de Predicados , por ser um alfabeto de primeira ordem, deve ser composto por:

(1) *Variáveis*: representadas por uma letra maiúscula seguida por uma cadeia de letras minúsculas ou maiúsculas ou dígitos. Exemplo: X, Xx, YY, Xy, Maria, Z13MN.

(2) *Constantes*: representadas por letras minúsculas ou dígitos, como: mar, azul, 3.

(3) *Funções n-árias*: um símbolo de função n-ária é uma letra minúscula seguida por uma cadeia de letras minúsculas ou maiúsculas ou dígitos, agregado a um conjunto de argumentos, como: f(Z), f(a), f2(X,y), mae(X,ana). Para enfatizar a aridade (número de argumentos) de um símbolo funcional é usada a notação símbolo/aridade, referenciada como *funtor*. Por exemplo, mae/2.

(4) *Predicados n-ários*: um símbolo de predicado n-ário é uma letra minúscula seguida por uma cadeia de letras minúsculas ou maiúsculas ou dígitos, agregado a um conjunto de

argumentos, como: f(Z), f(a), f2(X,y), mae(X,ana). Para enfatizar a aridade (número de argumentos) de um símbolo funcional é usada a notação símbolo/aridade, referenciada como *funtor*. Por exemplo, f2/2. Dois símbolos de predicados são considerados especiais: os símbolos verdade e falso, ambos com aridade 0. Note que funções e predicados têm a mesma simbologia.

(5) *Conectivos*: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (implicação) e $\leftrightarrow$ (dupla implicação).

(6) *Quantificadores*: $\forall$ (universal) e $\exists$ (existencial).

(7) *Símbolos de pontuação*: ( ) e ,

Qual é a diferença deste alfabeto para o alfabeto da lógica proposicional?

Definição 1.2 O *alfabeto* da Lógica Proposicional é constituído por:

- Símbolos de pontuação: ( )
- **Símbolos de verdade: verdade, falso**
- **Símbolos proposicionais atômicos: p, q, r, s, t, u, ...**
- Conectivos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Um elemento importante na Lógica de Predicados são os Termos.

Definição 3.3 *Termos* são definidos recursivamente como:

1. uma constante é termo;
2. uma variável é termo;
3. se f é um funtor (ou seja, um símbolo funcional com aridade n) e $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos, então $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um termo;

Exemplo 3.1 Considere um alfabeto A cujo conjunto de conectivos, quantificadores e símbolos de pontuação é o da Definição 3.2 e que tenha conjuntos de:

- constantes: {a,b,c};
- variáveis: {X1,X2,Y};
- símbolos funcionais: {f/1,g/3}; e
- símbolos predicados: {p/2, q/1, r/2}.

Tabela 3.1 Exemplos de termos e não-termos considerando o alfabeto A.

São termos	Comentários
a	a é uma constante do alfabeto e, consequentemente, é um termo.
X1	X1 é uma variável do alfabeto e, consequentemente, é um termo.
f(c)	f é um símbolo funcional com aridade 1, e seu argumento (constante c) é um termo.
f(f(X1))	f é um símbolo funcional com aridade 1, e seu argumento, f(X1), é um termo, uma vez que é um símbolo funcional (f) cujo argumento é um termo, dado que é a variável X1.
g(X1,a,f(f(f(a))))	g é um símbolo funcional com aridade 3 e cada um de seus três argumentos são termos: X1 é um termo porque é uma variável; a é um termo porque é uma constante; f(f(f(a))) é um termo porque f é um símbolo funcional; f(f(a)) é um termo uma vez que f é um símbolo funcional; f(a) é um termo uma vez que f é um símbolo funcional e a é uma constante.

Não são termos	Comentários
f(a,b)	f é um símbolo funcional com aridade 1, e não 2.
p(a,b)	Símbolos predicados não são usados para a construção de termos.
$a \vee b$	Conectivos não podem ser usados para a construção de termos.

Não são termos	Comentários
f(a,b)	f é um símbolo funcional com aridade 1, e não 2.
p(a,b)	Símbolos predicados não são usados para a construção de termos.
$a \vee b$	Conectivos não podem ser usados para a construção de termos.

Não são termos	Comentários
f(h(a))	f é símbolo funcional com aridade 1, mas seu argumento, h(a), deveria ser um termo, para que f(h(a)) fosse considerado um termo. O símbolo h, entretanto, não foi definido como símbolo funcional do alfabeto considerado.
f(¬a)	f é símbolo funcional com aridade 1, mas ¬a não é uma constante, uma vez que envolve a negação.
g(b,c,d)	g é símbolo funcional e dois de seus argumentos são constantes do alfabeto. O símbolo d, entretanto, não é um termo neste alfabeto, dado que não é constante, variável ou símbolo funcional aplicado ao termo.

- constantes representam objetos em um domínio;
- variáveis são usadas para fazer abstrações sobre constantes e termos;
- termos representam objetos em um domínio;
- símbolos funcionais permitem a criação de novos termos a partir dos termos existentes;
- símbolos predicados permitem o estabelecimento de assertivas a respeito de termos, ou seja, a respeito de objetos em um domínio.

Exercício 17. Simbolize (na lógica de predicados) as sentenças abaixo. Para entrega (valendo 1P) deve-se "escolher" duas sentenças dentre as definidas nos itens entre i e x, mais duas definidas nos itens entre xi e xx, e mais duas definidas nos itens entre xxi e xxx (totalizando 6 sentenças).

i) Bia é inteligente.
ii) Cris é estudiosa.
iii) Bia é inteligente e Cris é estudiosa.
iv) Bia vai à festa ou ao cinema.
v) Não é verdade que Bia viaje e Cris não.
vi) Se Idalina for ao cinema, ela telefonará para Bia.

vii) A matriz M tem determinante zero se e somente se M for singular.
viii) Bia não é historiadora.
ix) Florisbela é filósofa.
x) Bia e Florisbela são primas.
xi) Bia e Florisbela são excelentes profissionais.
xii) Se a função f é diferenciável, então ela é contínua.
xiii) Bia joga golf, se joga golf é atleta.
xiv) Florisbela faltou à reunião, mas Bia estava presente.
xv) Sempre que Bia vai à praia, Florisbela quer jogar voley com ela.
xvi) Se Florisbela é mãe de Cris e Bia é irmã de Florisbela, então Bia é tia de Cris.
xvii) Todos os engenheiros sabem matemática.
xviii) Certos alunos de computação não gostam de estudar.
xix) Alguns professores gostam de natação.
xx) Nenhum aluno de computação desconhece física.
xxi) Todos os times querem ganhar o campeonato.
xxii) Nenhum advogado desconhece a constituição.
xxiii) Há pintores que não conhecem as cores.
xxiv) Alguns alunos não estudam.
xxv) Nenhum jogador de futebol gosta de perder.
xxvi) Existem atletas que se machucam.
xxvii) Se Bia é professora, todos os alunos estão satisfeitos.
xxviii) Florisbela só vai à aula se a disciplina é cálculo.

xxix) É verdade que alguns atletas são maus profissionais, mas não é verdade que todos sejam maus.
xxx) Alguém é amigo de Bia.
xxxi) Todos falam com alguém.