

Aula 10 – Aritmética Binária

Prof. Dr. Emerson Carlos Pedrino

024376 – Circuitos Digitais

DC/UFSCar

www.dc.ufscar.br/~emerson

Soma de 2 Números Binários

Álgebra Booleana (OR)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

Aritmética (+)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ e "vai um"} = (10)$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ e "vai um"} = (11)$$

"Carry"

Soma de 2 Números Binários

| | | | | | |
|--|---|---|--|---------------|---|
| $\begin{array}{r} 0 \\ + 0 \\ \hline 0 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 0 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \\ + 0 \\ \hline 1 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 10 \end{array}$ | \rightarrow | $\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow \text{"e vai um"}$ |
| $\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array} \rightarrow \text{"e vai um"}$ | | | | | |

Exemplos

Nº 1

$$\begin{array}{r} 100100 \\ + 110011 \\ \hline 1010111 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 11 \\ \hline 36 \end{array}$$

Exemplos

Nº 2

A diagram illustrating the binary addition of 1001 and 1111. The numbers are aligned vertically, with a horizontal line below the second row. Above the first row, four '1's are positioned, each with an arrow pointing down to a specific column in the second row. The second row contains the digits 1, 0, 0, 1. The third row contains the digits 1, 1, 1, 1, followed by a plus sign. The result, shown below the horizontal line, is 1, 1, 0, 0, 0. The digits 1, 0, 0, 1 in the second row and 1, 1, 1, 1 in the third row are highlighted in yellow.

$$\begin{array}{r} 1 1 1 \\ 1 0 1 \\ \hline 1 1 0 0 \end{array}$$

Conferindo:

An arithmetic verification of the binary sum. It shows the decimal values 09 and 15, each followed by a plus sign, stacked vertically. A horizontal line is drawn under the 15, and the result 24 is shown below the line.

$$\begin{array}{r} 09 \\ 15 + \\ \hline 24 \end{array}$$

Exemplos

Nº 3

A diagram illustrating binary addition. The top row shows the summands: 11,011 and 10,110. Above the first four digits of the summands are carry bits: 1, 1, 1, and 1. Arrows point from these carry bits to the corresponding digits in the summands. A horizontal line separates the summands from the result. The result is 110,001. The digits of the summands and the result are yellow, while the carry bits and arrows are white.

$$\begin{array}{r} 11,011 \\ 10,110 \\ \hline 110,001 \end{array}$$

Conferindo:

3,375

2,750 +

6,125

Soma de 2 Números BCDs

$$\begin{array}{r} 52 \\ 43 + \\ \hline 95 \end{array}$$


$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & + \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Soma de 2 Números BCDs

Quando a soma for maior do que 9?

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7 + \\ \hline 13 \end{array}$$

0 1 1 0

→ BCD para 6

0 1 1 1 +

→ BCD para 7

1 1 0 1

→ **BCD Inválido!**

Somar 6 (0110) ao resultado final para corrigir o código BCD inválido e adicionar o “carry” que será gerado!

Exemplo

The diagram illustrates the binary addition of 26 and 57 to get 83, showing a carry chain and a correction step.

Decimal Addition:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 57 + \\ \hline 83 \end{array}$$

Binary Representation and Addition:

| | |
|---------|-----------|
| 0 0 1 0 | 0 1 1 0 |
| 0 1 0 1 | 0 1 1 1 + |
| <hr/> | |
| 0 1 1 1 | 1 1 0 1 |
| <hr/> | |
| 1 0 0 0 | 0 1 1 0 + |
| <hr/> | |
| 1 0 0 0 | 0 0 1 1 |

Annotations:

- A red arrow points from the carry '1' in the third row to the first row of the second addition.
- An orange arrow points from the '+' sign in the second row to the text "Adicione 6".
- A cyan bracket groups the first three rows of the binary addition.
- The numbers 8 and 3 are written below the first and second rows of the final binary result, respectively.

Subtração Binária

Aritmética (-)

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1 \text{ e "empresta um"}$$



"Borrow"

Subtração Binária

$$\begin{array}{r} 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 10 \text{ (2)} \\ - 1 \text{ (1)} \\ \hline 1 \text{ (2-1=1)} \end{array}$$

“empresta um”
(2 - 1 = 1)

Exemplos

Nº 1

$$\begin{array}{r} 11001 \\ 1011- \\ \hline 01110 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 11- \\ \hline 14 \end{array}$$

Exemplos

Nº 2

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 11001- \\ \hline \end{array}$$

?

$$\begin{array}{r} 11 \\ 25- \\ \hline -14 \end{array}$$

Números Negativos

BIT DE SINAL

Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se $MSB = 0 \Rightarrow (+)$
- se $MSB = 1 \Rightarrow (-)$

Portanto, o número binário pode ser representado por:

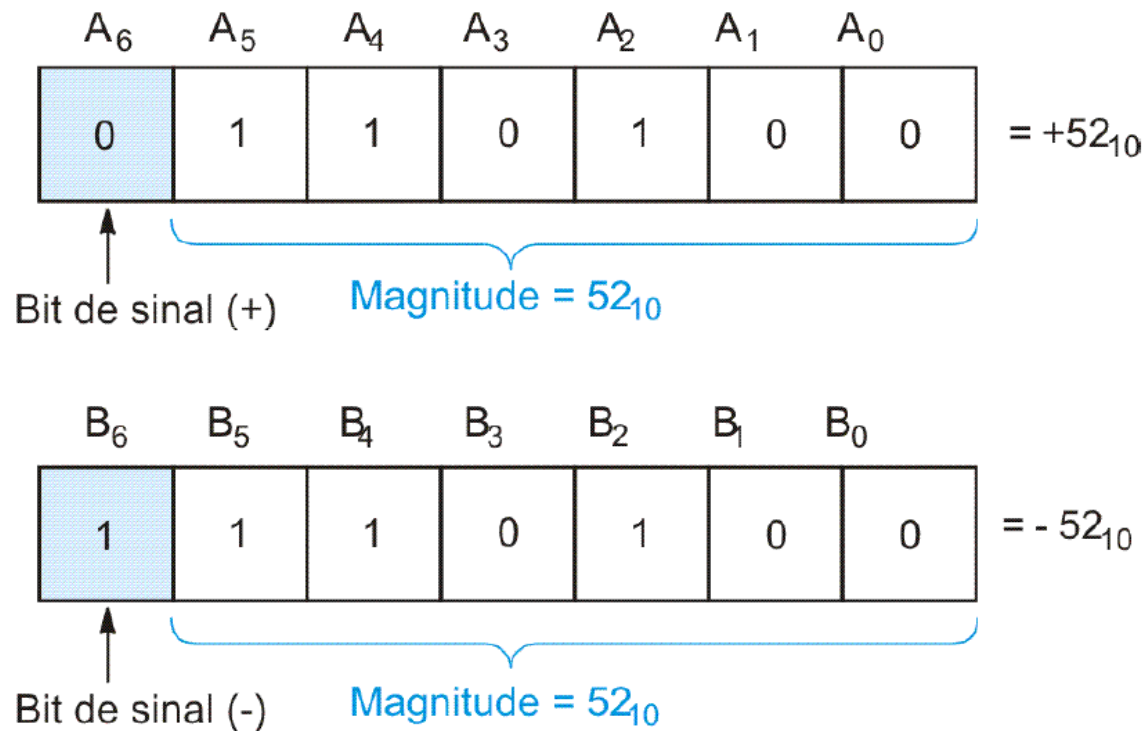
SINAL / MAGNITUDE

↙
MSB

↘
(n-1) bits restantes

Sistema Sinal-
Magnitude

Sistema Sinal-Magnitude



Não é muito utilizado!

Complemento de 1

Em binário:

Complemento $\Rightarrow (2^n - 1) - \text{número}$

\Rightarrow substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa

Comp. de 10110 = 01001

$(2^5 - 1) = 32 - 1 = 31 \Rightarrow 11111 (31) - 10110 (22) = 01001 (9)$

Complemento de 1

Comp. de 11011010 = 00100101

$(2^8 - 1) = 255 \rightarrow 11111111$ (255) - 11011010 (218) = 00100101 (37)

Complemento de 2

Em binário:

Complemento de 2 $\Rightarrow (2^n) - \text{número}$

\Rightarrow substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa

\Rightarrow soma-se “1” ao resultado

Comp. de 2 de 10110 = 01010

$(2^5) = 32 \Rightarrow 100000 (32) - 10110 (22) = 01010 (10)$

Complemento de 2

Comp. de 2 de 11011010 = 00100110

$$(2^8) \equiv 256 \rightarrow 100000000 (256) - 11011010 (218) \equiv 00100110 (38)$$

Representação de Números em Complemento de 2

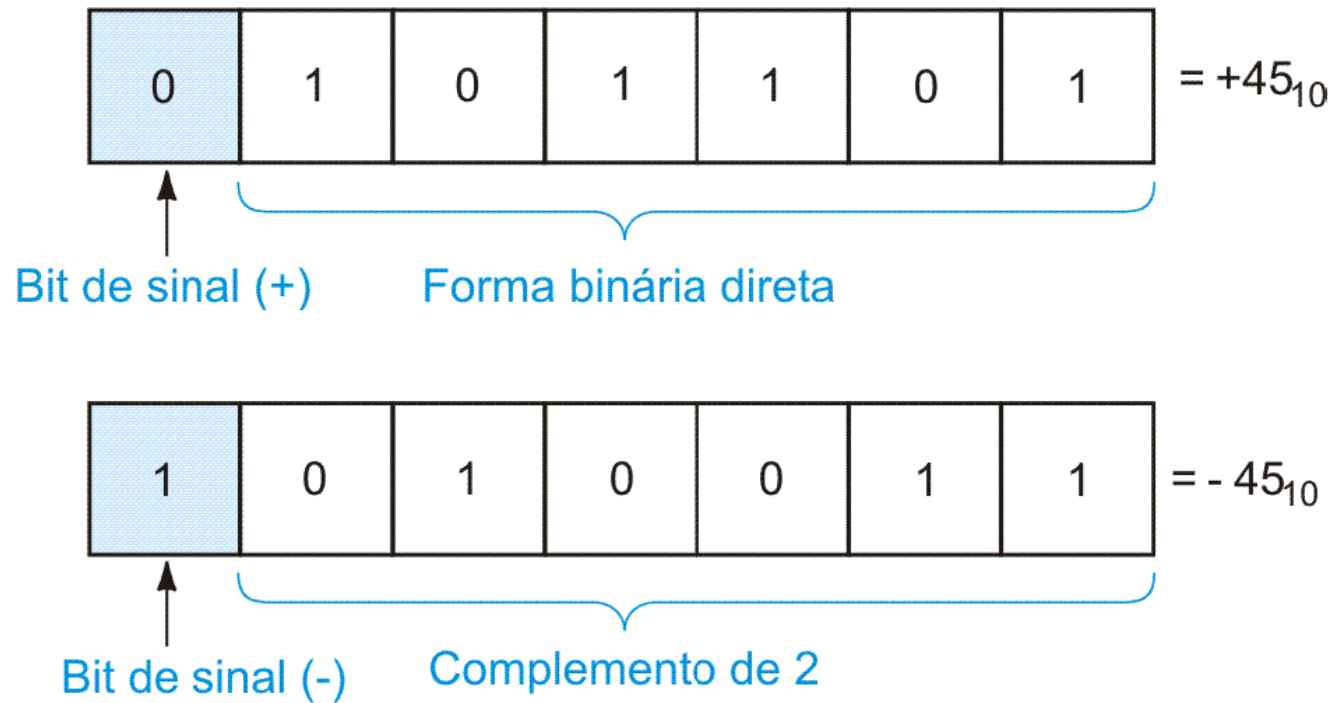
Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se $MSB = 0$ ➡ \oplus SINAL / MAGNITUDE

- se $MSB = 1$ ➡ \ominus SINAL / COMPLEMENTO DE 2

Sistema de
complemento de 2

Complemento de 2



Muito utilizado!

Exemplos

+13 \Rightarrow 01101

-9 \Rightarrow 01001 \Rightarrow 10110 + 1 \Rightarrow 10111

-8 \Rightarrow 01000 \Rightarrow 10111 + 1 \Rightarrow 11000

Exemplos

01100 \Rightarrow + 12

6
└───┘

11010 \Rightarrow 00101 + 1 \Rightarrow 00110 \Rightarrow - 6

15
└───┘

10001 \Rightarrow 01110 + 1 \Rightarrow 01111 \Rightarrow - 15

Subtração como Soma de Complementos

Subtração = soma com o complemento do subtraendo

$$A - B = A + (-B)$$

Em decimal, por ex.: $8 - 6 = 2$

Complemento de 6 = 4 

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 4 \\ \hline \cancel{1} 2 \end{array}$$

Negação

Negamos um número calculando seu complemento de 2

$$+13 = 01101$$



$$-13 = 10010 + 1 = 10011$$



$$+13 = 01100 + 1 = 01101$$

Exemplos

Ex1: 51 0 1 1 0 0 1 1
 18 - 0 0 1 0 0 1 0 - → comp. 2: 1101110

0 1 1 0 0 1 1
1 1 0 1 1 1 0 +

~~1~~ 0 1 0 0 0 0 1

Desprezado quando
estiver à esquerda
do bit de sinal

Resultado final (+33)

Exemplos

Ex2:
$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{51} - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ \underline{0110011} \end{array} \rightarrow \text{comp. 2: } 1001101$$

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ 1001101 + \\ \hline 1011111 \end{array} \rightarrow 0100001$$

33

Resultado final (-33)

Observação

A quantidade de 0's colocados à esquerda de um número positivo ou 1's colocados à esquerda de um número negativo não altera seu valor

$$+13 = 01101$$



$$+13 = 00001101$$

$$-13 = 10010 + 1 = 10011$$



$$-13 = 1110011$$

Usado para representar qualquer número binário, positivo ou negativo, com o número de bits desejado.

Exemplos

Ex3:
$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{25 -} \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ \underline{11001 -} \end{array} = \begin{array}{r} 000101 \\ \underline{011001 -} \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 000101 \\ 100111 + \\ \hline 101100 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 010100 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ 20 \end{array}$$

Resultado final (-20)

Exemplos

Ex4:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{5 -} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \underline{101 -} \end{array}$$

=

$$\begin{array}{r} 011001 \\ \underline{000101 -} \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 011001 \\ \underline{111011 +} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1}010100 \end{array}$$



Resultado final (+20)

Desprezado quando
estiver à esquerda
do bit de sinal

Faixa Completa Representada

FAIXA COMPLETA DE VALORES QUE PODEM SER REPRESENTADOS

$$- 2^{(n-1)} \Rightarrow + (2^{(n-1)} - 1)$$

sendo n o número de bits

Exemplo

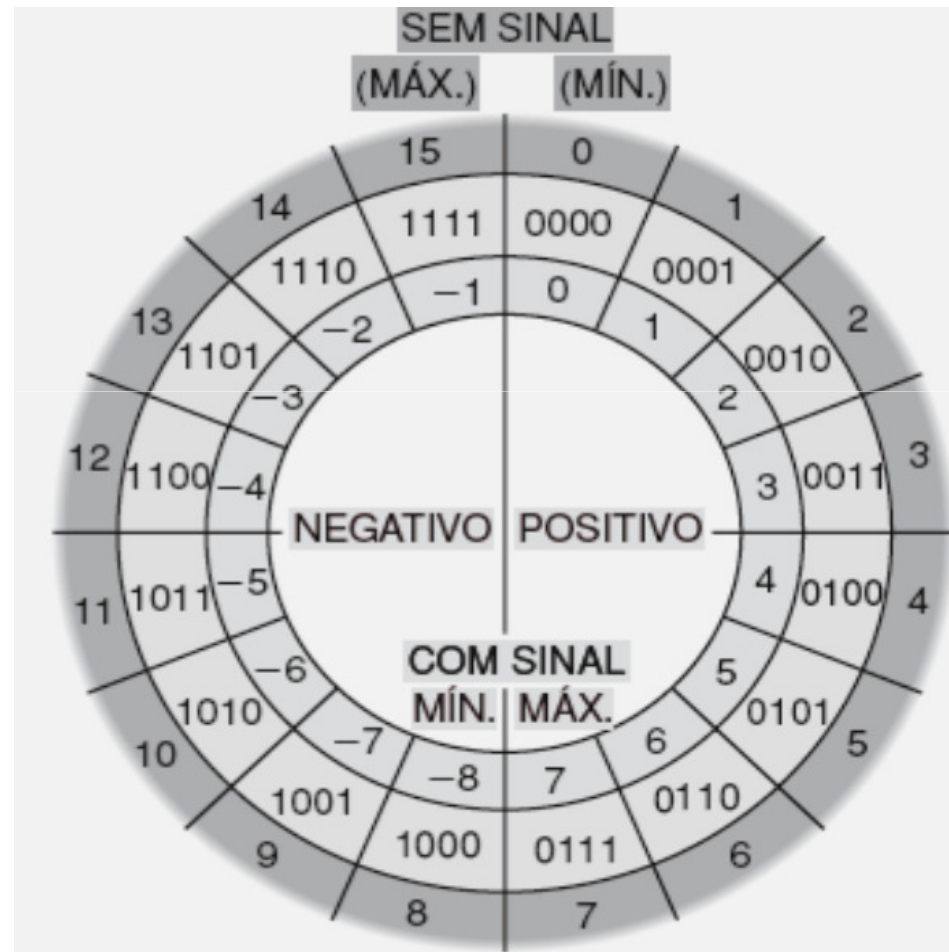
“Quantos números **com sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$-(2^{n-1}) \Rightarrow +(2^{n-1} - 1) = 1000 (-8) \Rightarrow 0111 (+7)$$

“Quantos números **sem sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$2^n = 16 \Rightarrow 0 \rightarrow 15$$

Observação



Caso Especial de Complemento de 2

1000 \Rightarrow 0111 + 1 \Rightarrow 1000



“Sempre que o número com sinal tiver um 1 no bit de sinal e zero em todos os outros bits, seu equivalente decimal será -2^n , sendo n o número de bits da magnitude”

1000 = -2^3 = - 8
10000 = -2^4 = - 16

01000 = + 8
010000 = + 16

Overflow

Ex1: $\begin{array}{r} 18 \\ \underline{60 +} \end{array}$

Pode ser representado com 5 bits. Precisa de 6 bits para representar o sinal

0010010

0111100+

Pode ser representado com 6 bits. Precisa de 7 bits para representar o sinal

1001110

→ 78 (precisa de 7 bits!)

Não é bit de sinal!

O resultado não pode ser representado com 6 bits, pois é maior do que $2^6 = 64$!

Com bit de sinal, seriam necessários 8 bits!

→ 01001110 → +78 (precisa de 8 bits!)

Overflow

Ex2: - 18
 - 60

Precisa ser representado com
no mínimo 6 bits

1 1 0 1 1 1 0

1 0 0 0 1 0 0 +

Precisa ser representado com
no mínimo 7 bits

1 0 1 1 0 0 1 0

→ (precisa de 8 bits!)

bit de sinal!

comp. 2: 0 1 0 0 1 1 1 0

78

Resultado final (-78)

Overflow

- Só pode ocorrer overflow quando dois números positivos ou dois números negativos são somados. Assim, não pode haver mudança de sinal na resposta.
- Nesse caso, a necessidade de um bit extra é detectada quando o bit de sinal da resposta é diferente dos números somados.
- Quando isso ocorrer, um bit de sinal deve ser adicionado no bit mais significativo.

Multiplicação Binária

A diagram illustrating binary multiplication on a blue background. The multiplicand 11001 is shown in yellow. The multiplier 11 is shown in yellow, followed by a yellow \times symbol. A horizontal yellow line separates the multiplier from the first partial product, which is 11001 . A second horizontal yellow line separates the first partial product from the second partial product, which is 11001 shifted one position to the left. The final result, 1001011 , is shown in yellow. Below the binary result, the decimal equivalent $25 \times 3 = 75$ is displayed in white.

$$\begin{array}{r} 11001 \\ \times 11 \\ \hline 11001 \\ 11001 \\ \hline 1001011 \end{array}$$

$25 \times 3 = 75$

Multiplicação Binária

Multiplicamos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **esquerda** e o **zero** é colocado no bit **menos** significativo.

$$\begin{array}{rcl} & 1 & 0 & 0 & 1 & = & 9 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 9 \times 2 = 18 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 9 \times 4 = 36 \end{array}$$


Divisão Binária


Dividimos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **direita** e o **zero** é colocado no bit **mais** significativo.

Atenção: Usar vírgula quando o bit menos significativo for igual a 1!

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0 = 18$$


$$0\ 1\ 0\ 0\ 1 = 18 : 2 = 9$$


$$0\ 0\ 1\ 0\ 0, 1 = 18 : 4 = 4,5$$


$$0\ 0\ 0\ 1\ 0, 0\ 1 = 18 : 8 = 2,25$$

Divisão Binária

A | B
R | Q

25 | 2
1 | 12

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|--|-------|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 0 |
| | | | | | | <hr/> | |
| -1 | 0 | | | | | 1 | 1 |
| <hr/> | | | | | | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | |
| - | 1 | 0 | | | | | |
| <hr/> | | | | | | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | |
| - | 0 | 0 | | | | | |
| <hr/> | | | | | | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | | | | | |
| - | 0 | 0 | | | | | |
| <hr/> | | | | | | 0 | |
| 0 | 1 | | | | | | |

Divisão Binária

$$25 \div 2 = 12,5$$

1 1 0 0 1 | 1 0
- 1 0

0 1 0
- 1 0

0 0 0 1
0 0 0 1 0
- 1 0

0 0 0 0 0

1 1 0 0,1

Exercícios *😊

- Fazer os seguintes exercícios:
 - De 6.1 até 6.17.

Referências

- Tocci, R. J. et al. Sistemas Digitais (princípios e aplicações), 10a Edição. Pearson, 2007.
- Vieira, M. A. C. SEL-0414-Sistemas Digitais, EESC-USP.