Estruturas Discretas

Relações
Propriedades e Relação de equivalência

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@dc.ufscar.br

Relações

- **Relação**
  - Propriedades de autorrelações
    - Reflexiva
    - Antirreflexiva
    - Simétrica
    - Antissimétrica
    - Transitiva
  - Relação de equivalência
  - Classes de equivalência
  - Partições
  - Conjunto quociente

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Uma relação em um conjunto A (uma autorrelação) pode ter determinadas propriedades
  - Por exemplo, a relação R de igualdade em A, x R y $\leftrightarrow$ x = y, tem três propriedades:

R é **reflexiva**

1. para qualquer $x \in A$, $x = x$, ou seja $(x, x) \in R$;
2. quaisquer que sejam $x, y \in A$, se $x = y$ então $y = x$, ou seja, $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$;
3. quaisquer que sejam $x, y, z \in A$, se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$, ou seja, $[(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Uma relação em um conjunto A (uma autorrelação) pode ter determinadas propriedades
  - Por exemplo, a relação R de igualdade em A, x R y $\leftrightarrow$ x = y, tem três propriedades:

1. para qualquer $x \in A$, x = x, ou seja (x, x)

R é **simétrica**

2. quaisquer que sejam $x, y \in A$, se x = y então y = x, ou seja, $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$;
3. quaisquer que sejam $x, y, z \in A$, se x = y e y = z então x = z, ou seja, $[(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Uma relação em um conjunto A (uma autorrelação) pode ter determinadas propriedades
  - Por exemplo, a relação R de igualdade em A, x R y $\leftrightarrow$ x = y, tem três propriedades:

1. para qualquer $x \in A$, x = x, ou seja $(x, x) \in R$;
2. quaisquer que sejam $x, y \in A$, se x = y então y = x, ou seja, $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$;

R é **transitiva**

3. quaisquer que sejam $x, y, z \in A$, se x = y e y = z então x = z, ou seja, $[(x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação reflexiva**
    - R é reflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos x R x
    - ➔ R é reflexiva se <u>todo</u> elemento de A está relacionado a ele mesmo

    - Exemplo – Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 1) } é reflexiva

b) R = { (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3) } não é reflexiva, pois (2,2) não está presente em R

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação antirreflexiva**
    - R é antirreflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not R x$
    - → R é antirreflexiva se <u>nenhum</u> elemento de A está relacionado a ele mesmo

    - Exemplo – Seja A = {1, 2, 3}

a) R = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2),(3,1)} não é antirreflexiva, pois é reflexiva

b) R = {(1,1), (1,2), (2,3), (3,3)} não é reflexiva e não é antirreflexiva, pois (1,1) está presente em R

c) R = {(1,3), (2,3), (1,2), (3,1)} é antirreflexiva

Relações

IMPORTANTE
Relação reflexiva <u>e</u> antirreflexiva → IMPOSSÍVEL
Relação não reflexiva <u>e</u> não antirreflexiva → POSSÍVEL

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação reflexiva X Relação antirreflexiva**
    - Relação reflexiva → relação não antirreflexiva
    - Relação antirreflexiva → relação não reflexiva
    - Relação não reflexiva → ?
      - Uma relação não é reflexiva se <u>existe um</u> $a \in A$ tal que $(a,a) \notin R$
      - ➔ existe um ≠ para todo
    - Relação não antirreflexiva → ?
      - Uma relação não é antirreflexiva se <u>existe um</u> $a \in A$ tal que $(a,a) \in R$
      - ➔ existe um ≠ para todo

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação simétrica**
    - R é simétrica se <u>para todo</u> x, y $\in$ A temos

      $x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$
    - A expressão $x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$ deve ser lida como *"<u>sempre</u> que x está relacionado a y por R, <u>então</u> y está relacionado a x por R"*
      - O par (y,x) deve aparecer na relação "apenas" se o par (x,y) estiver na relação
      - Não é necessário que todos os pares (x,y) com $x \neq y$ estejam relacionados

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação simétrica**
    - R é simétrica se <u>para todo</u> x, y $\in$ A temos

      x R y $\Rightarrow$ y R x

    - Exemplo – Seja A = {1, 2, 3}

a) R = { (1,1), (2,2), (3,3) } é simétrica

b) R = { (1,1), (2,2), (1,2), (3,2), (2,3) } não é simétrica,

pois (1,2) $\in$ R mas (2,1) $\notin$ R

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação antissimétrica**
    - R é antissimétrica se para todo x, y $\in$ A temos $(x \; R \; y \wedge y \; R \; x) \Rightarrow x = y$
    - O símbolo $\wedge$ representa o conectivo "e", logo a expressão x R y $\wedge$ y R x significa *"x está relacionado com y por R* ***e*** *y está relacionado com x por R"*
      - A propriedade antissimétrica estabelece que não é possível inverter a ordem dos elementos do par ordenado a menos que eles sejam iguais

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação antissimétrica**
    - R é antissimétrica se <u>para todo</u> x, y $\in$ A temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
    - Exemplo – Seja A = {1, 2, 3}

a) R = { (1,1), (2,2), (3,3) } é antissimétrica

b) R = { (1,1),(2,2),(1,2),(3,2),(2,3)} não é antissimétrica, pois (3,2) $\in$ R e (2,3) $\in$ R e $2 \neq 3$

Relações

IMPORTANTE
Relação simétrica <u>e</u> antissimétrica → POSSÍVEL
Relação não simétrica <u>e</u> não antissimétrica → POSSÍVEL

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação simétrica X Relação antissimétrica**
    - As propriedades de simetria e antissimetria não são mutuamente excludentes
      - Uma relação pode não ser simétrica nem antissimétrica, ou pode ser simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo (veja exemplos anteriores)
    - Uma relação não é simétrica se existe $(a,b) \in R$ mas $(b,a) \notin R$, ou seja, existe pelo menos um par (a,b) na relação R tal que seu inverso (b,a) não esteja em R
      - Isso não basta para afirmar que a relação é antissimétrica
    - R não é antissimétrica se existem $a,b \in A$ tais que (a,b) e $(b,a) \in R$ mas $a \neq b$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - **Relação transitiva**
    - R é transitiva se <u>para todo</u> x, y, z $\in$ A temos
      $(x \; R \; y \wedge y \; R \; z) \Rightarrow x \; R \; z$
    - Exemplo – Seja A = {1, 2, 3}

a) R = { (1,1), (1,2), (2,3), (1,3) } é transitiva

b) R = { (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3) } não é transitiva, pois (1,2) $\in$ R, (2,3) $\in$ R mas (1,3) $\notin$ R

c) R = { (1,1), (2,2), (3,3) } é transitiva

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:

    a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$

    b) Relação de menor ou igual ($\leq$) sobre $\mathbb{Z}$

    c) Relação divide ($x|y$) sobre $\mathbb{Z}^*$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:

    a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$

RESPOSTAS

a)

- Reflexiva (qualquer inteiro é igual a si mesmo) ✔
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva ✘
- Simétrica (se x = y então y = x) ✔
- Antissimétrica (se x = y e y = x então x e y são o mesmo elemento) ✔
- Transitiva (se x = y e y = z então x = z) ✔

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:
    - a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$
    - b) Relação de menor ou igual (≤) sobre $\mathbb{Z}$

RESPOSTAS

b)

- Reflexiva (para qualquer inteiro x, é verdade que $x \leq x$) ✔
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva ✘
- Não simétrica ($x \leq y \nrightarrow y \leq x$) ✘
- Antissimétrica (se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$) ✔
- Transitiva ($x \leq y$ e $y \leq z$ implicam $x \leq z$) ✔

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:
    - a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$
    - b) Relação de menor ou igual ($\leq$) sobre $\mathbb{Z}$
    - c) Relação divide (x|y) sobre $\mathbb{Z}^*$

RESPOSTAS

c)

- Reflexiva (por exemplo, 3|3 e -3|-3) ✓
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva ✗
- Não simétrica (por exemplo, 3|9 mas 9 não divide 3) ✗
- Não antissimétrica (por exemplo, 3|-3 e -3|3 e 3 $\neq$ -3) ✗
- Transitiva (por exemplo, 2|4 e 4|8 então 2|8) ✓

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - IMPORTANTE
    - As propriedades são atributos de uma relação R definida em um conjunto A
    - O conhecimento do conjunto A é fundamental para que se determine se a relação é ou não **reflexiva**
    - Para as outras propriedades, contudo, é suficiente olhar apenas para os pares ordenados em R

Relações

- **Resumo das propriedades**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
    - R é reflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \, R \, x$
    - R é antirreflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not R \, x$
    - R é simétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
    - R é antissimétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
    - R é transitiva se <u>para todo</u> $x, y, z \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$

Relações

- **Relação de equivalência**
  - Seja R uma relação em um conjunto A
  - Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se R é <u>reflexiva</u>, <u>simétrica</u> e <u>transitiva</u>
    - Relações de equivalência são relações que apresentam forte semelhança com a relação de igualdade
    - Objetos relacionados por uma relação de equivalência são objetos parecidos
  - Exemplos
    - Em {1, 2, 3}, R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}
    - Em $\{x \mid x$ é um aluno dessa turma}, x R $y \leftrightarrow$ "x senta-se na mesma fila que y"

Relações

- **Classes de equivalência**
  - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in$ A
  - A **classe de equivalência** de *a*, denotada por [*a*], é o conjunto de todos os elementos do conjunto A que estão R-relacionados com *a*; isto é,

$$[a] = \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \, R \, a \,\}$$

Relações

- **Classes de equivalência**
  - Exemplos
    - Considerando-se algumas das relações de equivalência vistas anteriormente

a) Dado o conjunto A= {1, 2, 3}, e a relação de equivalência R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

Conjunto [1] = {1, 2}. Esse conjunto também pode ser chamado de [2]

b) Dado o conjunto de alunos de uma turma e a relação R, x R $y \leftrightarrow$ "x senta-se na mesma fila que y". Se João, Carlos, José, Judite e Téo sentam-se todos na terceira fila

A classe de equivalência de João é [João] = {João, Carlos, José, Judite, Téo}

Relações

- **Classes de equivalência**
  - Considerando-se a relação de equivalência em $\mathbb{N}$, $x\ R\ y \leftrightarrow$ "$x + y$ é par", qual é a classe de equivalência [0]?
    - Pela definição,

      $$\mathbf{[0] = \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}\ e}\ x\ R\ 0 \leftrightarrow \text{"}x + 0 \text{ é par"}\mathbf{\}}$$

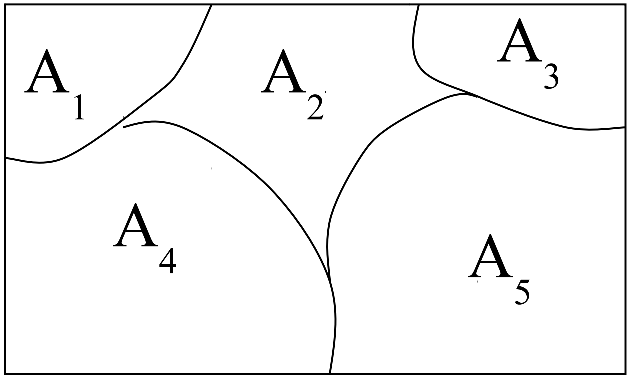
      - ou seja, esse é o conjunto de todos os números naturais x, de modo que somados a 0, resulte em par
      - … é o conjunto de todos os números pares
    - ➔ O conjunto [0] é o conjunto dos números pares
    - ➔ De modo semelhante, não é difícil ver que [1] é o conjunto dos números ímpares

Relações

- **Classes de equivalência**
  - A relação de equivalência em $\mathbb{N}$, x R y ↔ "$x + y$ é par" tem apenas duas classes de equivalências:
    - O conjunto dos números naturais pares [0] e
    - O conjunto dos números naturais ímpares [1]
  - ➔ Assim, as classes de equivalência dividem o conjunto sobre o qual estão definidas
    - Toda classe contém elementos que estão relacionados uns com os outros, mas não com qualquer elemento que não esteja naquela classe
    - Se duas classes de equivalência tem 1 elemento em comum, então elas são idênticas

Relações

- **Classes de equivalência e Partições**
  - **Teorema**
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As classes de equivalência de R são subconjuntos não-vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A
  - **Partição**
    - Dado um conjunto não-vazio A, uma **partição** de A é uma subdivisão de A em conjuntos não-vazios, disjuntos



Partições de A: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

Relações

- **Classes de equivalência e Partições**
  - Reescrevendo o Teorema
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto das classes de equivalência de A pela R é uma partição de A. Especificamente:

i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$

ii.

iii.

Toda relação de equivalência é reflexiva

Relações

- **Classes de equivalência e Partições**
  - Reescrevendo o Teorema
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto das classes de equivalência de A pela R é uma partição de A. Especificamente:

i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$

ii. $[a] = [b]$ se e somente se $(a,b) \in R$

iii.

Toda relação de equivalência é simétrica

Relações

- **Classes de equivalência e Partições**
  - Reescrevendo o Teorema
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto das classes de equivalência de A pela R é uma partição de A. Especificamente:

i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$

ii. $[a] = [b]$ se e somente se $(a,b) \in R$

iii. se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos

Consequência de (ii)

Relações

- **Classes de equivalência e Partições**
  - Reescrevendo o Teorema
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto das classes de equivalência de A pela R é uma partição de A. Especificamente:

i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$

ii. $[a] = [b]$ se e somente se $(a,b) \in R$

iii. se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos

→ Qualquer relação de equivalência determina uma partição no conjunto em que está definida

→ Por outro lado, dada uma partição $\{A_i\}$ do conjunto A, existe uma relação de equivalência R em A tal que os conjuntos A_i são as classes de equivalência

Relações

- **Conjunto quociente**
  - É a coleção de todas as classes de equivalência de elementos de A por uma relação de equivalência R

$$\mathbf{A/R = \{ [a] \mid a \in A\}}$$

  - Exemplo
    - Dado o conjunto A= {1, 2, 3}, e a relação de equivalência R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}
      - O conjunto quociente A/R é A/R = { [1], [3] }
  - Reescrevendo mais uma vez o Teorema
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O quociente A/R é uma partição de A.

Relações

- **Classes de equivalência X Partições X Conjunto quociente – Teorema e suas versões**
  - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As **classes de equivalência** de R são subconjuntos não-vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A
  - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O conjunto das **classes de equivalência** de A pela R é uma **partição** de A. Especificamente:
    i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$
    ii. $[a] = [b]$ se e somente se $(a,b) \in R$
    iii. se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos
  - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. O **quociente** A/R é uma **partição** de A.