Respostas da Tarefa 07 de Exercícios - GA - Entrega dia 25/05

1. Considere os planos $\pi_1 : x + y - 2z = 1$ e $\pi_2 : 2x + y + 2z = 2$.

(a) Determine o ângulo entre eles.

(b) Seja s a interseção dos planos acima. Determine o ângulo entre a reta s e a reta

$$r : \{(x, y, z) = (-1, 1, 3) + t(8, -12, -2), t \in \mathbb{R}\}.$$

RESPOSTA:

(a) Temos que os vetores normais aos planos π_1 e π_2 são $\vec{n_1} = (1, 1, -2)$ e $\vec{n_2} = (2, 1, 2)$. Assim, o cosseno do ângulo entre os planos é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\theta)| = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \|\vec{n_2}\|} \right| = \left| \frac{-1}{3\sqrt{6}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

Portanto o ângulo é $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{18}\right)$.

(b) Resolvendo o sistema linear chegamos à equação paramétrica

$$s : \begin{cases} x &= 1 - 4\alpha \\ y &= 6\alpha \\ z &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_s} = (-4, 6, 1)$ e $\overrightarrow{v_r} = (8, -12, -2)$ são paralelos (por quê?), então as retas são paralelas e o ângulo entre elas é zero.

2. Obtenha as equações geral e paramétrica do plano π que contém a reta $r = \{(1, 1, 0) + t(2, 1, 2), t \in \mathbb{R}\}$ e é paralelo à reta

$$s : \left\{ \frac{x+1}{2} = y = z + 3. \right.$$

(*Observação*: um plano π é paralelo a uma reta s se não se interseptam, isto é $\pi \cap s = \emptyset$.)
RESPOSTA: Temos que $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, 1)$. Como π contém r e é paralelo à s, então podemos escolher vetor normal por

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = (-1, 2, 0).$$

Assim $\pi : -x + 2y + d = 0$. Como o ponto $(1, 1, 0)$ está no plano, segue que $d = -1$. Logo a equação geral de π é

$$\pi : -x + 2y - 1 = 0,$$

e sua equação paramétrica é

$$\pi : \begin{cases} x &= 1 + 2\alpha + 2\beta \\ y &= 1 + \alpha + \beta \\ z &= 2\alpha + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Sejam as retas $r = \{(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1); \beta \in \mathbb{R}\}$ e $s : \left\{ \frac{x-1}{2} = y = z. \right.$

(a) Determine A, B e C os pontos de interseção de s e $\pi : x - y + z = 2$, de r com os planos coordenados xz e xy (isto é $y = 0$ e $z = 0$) respectivamente.

(b) Calcule a área formada pelo triângulo ABC.

RESPOSTA:

(a) As retas r e s têm como equação paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \beta \\ z = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim um ponto de s é da forma $P_s = (1 + 2\alpha, \alpha, \alpha)$ e um ponto de r é $P_r = (1, 1 + \beta, \beta)$. Como s intersepta π então deve satisfazer a equação do plano. Logo

$$(1 + 2\alpha) - \alpha + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Os pontos B e C são obtidos fazendo $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente, na reta r. No primeiro caso obtemos $\beta = -1$ e no segundo $\beta = 0$. Logo

$$B = (1, 0, -1) \quad \text{e} \quad C = (1, 1, 0).$$

(b) A área é dada por

$$A = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|(1, 1, -1)\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Considere a reta $r : \left\{ -x + 1 = \frac{-y}{2} = \frac{z + 1}{2} \right.$ e o plano $\pi : x - z + 1 = 0$.

(a) Verifique que a reta é transversal (não paralela) ao plano e determine o ponto onde a reta intercepta o plano.

(b) Qual o ângulo formado pela reta r e pelo plano π?

(c) Determine a equação paramétrica da reta s que é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano π, isto é s está contida no plano π.

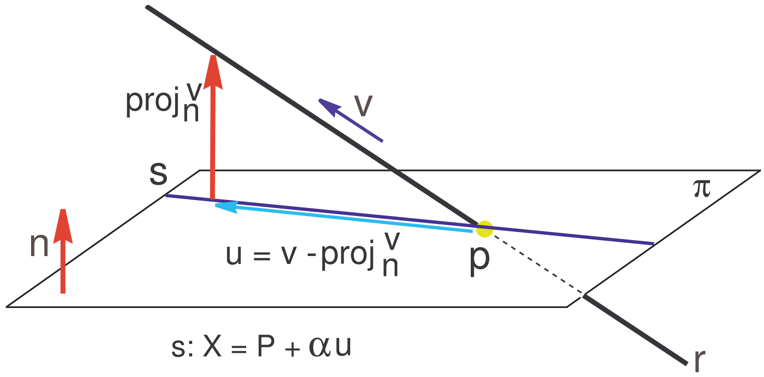
RESPOSTA:

(a) Fazendo $-x + 1 = \frac{-y}{2} = \frac{z + 1}{2} = \alpha$, obtemos a equação paramétrica

$$r : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = -1 + 2\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_r} = (-1, -2, 2)$ e $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 0, -1)$ não são ortogonais (por quê?), então a reta e o plano não são paralelos (como mesmo?). Logo eles são transversais. Seja P o ponto de interseção (tem outro?). Então $P = (1 - \alpha, -2\alpha, -1 + 2\alpha)$ deve satisfazer a equação do plano.

Assim, $1 - \alpha - (-1 + 2\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$. Logo $P = (0, -2, 1)$.



(b)

Já temos o ponto de interseção da reta com o plano. Agora só nos resta encontrarmos um vetor diretor de s, que chamaremos de $\vec{u}$ e que pode ser calculado (veja a figura acima) por

$$\vec{u} = \vec{v} - \text{proj}_{\vec{n}}\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$$

Logo,

$$s : \begin{cases} x &= \dfrac{\beta}{2} \\ y &= -2 - 2\beta \\ z &= 1 + \dfrac{\beta}{2}, \; \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(c) O ângulo entre a reta e o plano por ser calculado (por exemplo) pelo ângulo entre as retas r e s (Uma outra forma é observar que o ângulo entre a reta e o plano é dado por $90 - \beta$, sendo que β é o ângulo entre a reta r e uma reta perpendicular ao plano). Então

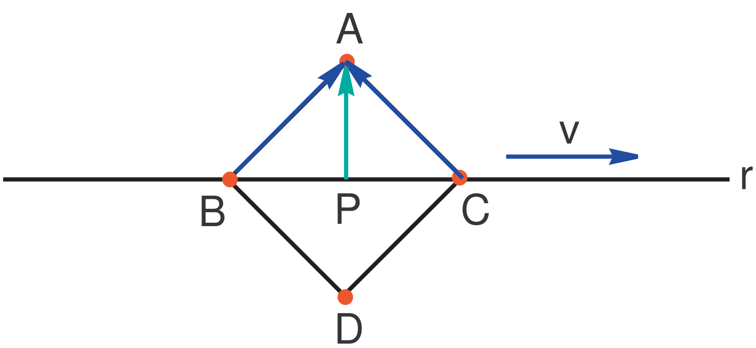
$$\cos(r, s) = |\cos(\theta)| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto o ângulo é 45^o ou $\pi/4$.
Observe que quem achou o valor de 45^o ou $\pi/4$ poderá não estar correta a resposta. Pois alguém poderá chegar neste valor calgulando o ângulo entre a normal e o vetor diretor da reta, que neste caso particular dará o mesmo valor, mas a resposta estará errada.

5. A diagonal BC de um quadrado $ABCD$ está contida na reta

$$r : X = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $A = (1, 1, 0)$, determine os outros três vértices.
RESPOSTA: (Primeira solução)



Determine um ponto P na reta r tal que o vetor $\vec{PA}$ seja perpendicular à r (por que mesmo?). Este ponto será o ponto médio entre os seguimentos BC e AD e $\|\vec{PA}\| = \|\vec{PC}\| = \|\vec{BP}\| = \|\vec{PD}\|$. Como P está na reta, temos $P = (1, t, t)$ para algum t (que devemos determiná-lo claro). Então

$$0 = \vec{PA} \cdot \vec{v} = (0, 1-t, -t) \cdot (0, 1, 1) = 1 - t - t \Longrightarrow t = 1/2 \Longrightarrow \vec{PA} = (0, 1/2, -1/2)$$

e o ponto $P = A + \vec{AP} = (1, 1/2, 1/2)$

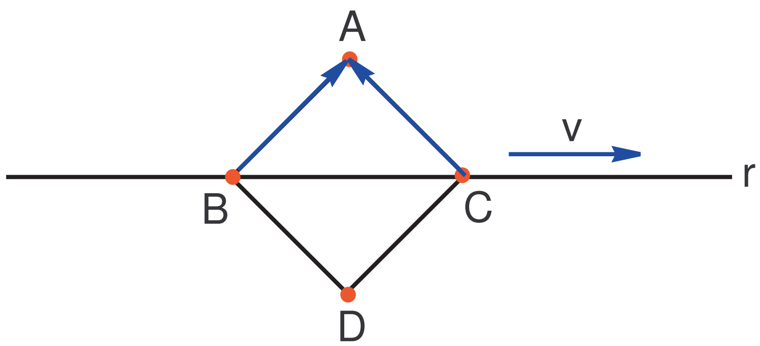
Como os pontos B e C deverão satisfazer $\|\vec{BP}\| = \|\vec{PC}\| = \|\vec{PA}\| = \sqrt{2}/2$, então devemos procurar pontos X da reta r com estas propriedades. Seja $X = (1, t, t)$ um ponto qualquer da reta (devemos encontrar valores para t) tal que $\|\vec{XP}\| = \|\vec{PA}\| = \sqrt{2}/2$. Assim

$$\|\vec{XP}\| = \|(0, 1/2 - t, 1/2 - t)\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{\text{ao quad.}}{\Longrightarrow} (1/2 - t)^2 + (1/2 - t)^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow t = 0,\ t = 1$$

Logo (a menos da ordem correta) para $t = 0$, $B = (1, 0, 0)$ e para $t = 1$, $C = (1, 1, 1)$. Para o ponto D temos pelo menos duas maneiras de calculá-lo (quais são elas mesmo?). Uma delas é esta (a(s) outra(s) fica(m) como exercício): O vetor $\vec{AD} = 2\vec{AP} = -2\vec{PA}$. Portanto

$$D = A - 2(0, 1/2, -1/2) = (1, 0, 1).$$

Segunda Solução:



Os pontos B e C são pontos X da reta que tais que os vetores $\vec{XA}$ formam ângulos de 45^o e 135^o com o vetor diretor $\vec{v}$. Como não sabemos a ordem devemos considerar (por exemplo) o valor absoluto. Um ponto X é da forma $X = (1, t, t)$. Então

$$\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\vec{XA} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{XA}\| \|v\|} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 - 2t|}{\sqrt{(1-t)^2 + t^2}\sqrt{2}} \overset{\text{ao quad}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} = \frac{(1-2t)^2}{(1-t)^2 + t^2 2}$$

Resolvendo chegamos aos valores de $t = 0$ e $t = 1$. O resto das conclusões segue como na primeira solução.

Bons estudos.