

16ª Lista de Exercícios – Teoria dos Grafos
Emparelhamentos Estáveis e o algoritmo de Gale-Shapley

- 1) Defina o que é um emparelhamento estável.
- 2) Com base no pseudo-código a seguir, explique o funcionamento do algoritmo de Gale-Shapley para a obtenção de um emparelhamento estável M a partir de um grafo bipartido G .

```
Initially all  $m \in M$  and  $w \in W$  are free
While there is a man  $m$  who is free and hasn't proposed to
every woman
    Choose such a man  $m$ 
    Let  $w$  be the highest-ranked woman in  $m$ 's preference list
    to whom  $m$  has not yet proposed
    If  $w$  is free then
         $(m, w)$  become engaged
    Else  $w$  is currently engaged to  $m'$ 
        If  $w$  prefers  $m'$  to  $m$  then
             $m$  remains free
        Else  $w$  prefers  $m$  to  $m'$ 
             $(m, w)$  become engaged
             $m'$  becomes free
        Endif
    Endif
Endwhile
```

- 3) Construa um exemplo em que há mais de um emparelhamento estável. Você pode usar apenas 2 rapazes e 2 moças para fazer isso).
- 4) Suponha uma instância do problema do emparelhamento estável em que todos os rapazes preferem moças distintas. Quantas iterações o algoritmo de Gale-Shapley leva para convergir?
- 5) Suponha uma instância do problema do emparelhamento estável em que todos os rapazes possuem exatamente as mesmas preferências. Quantas iterações o GS leva para convergir?
- 6) Suponha que num site de relacionamentos existam as seguintes listas de preferências entre um grupo de rapazes e garotas.

BOY	1	2	3	4	5
Adam	Beth	Amy	Diane	Ellen	Cara
Bill	Diane	Beth	Amy	Cara	Ellen
Carl	Beth	Ellen	Cara	Diane	Amy
Dan	Amy	Diane	Cara	Beth	Ellen
Eric	Beth	Diane	Amy	Ellen	Cara

Boys' Preferences

GIRL	1	2	3	4	5
Amy	Eric	Adam	Bill	Dan	Carl
Beth	Carl	Bill	Dan	Adam	Eric
Cara	Bill	Carl	Dan	Eric	Adam
Diane	Adam	Eric	Dan	Carl	Bill
Ellen	Dan	Bill	Eric	Carl	Adam

Girls' Preferences

Utilizando o algoritmo de Gale-Shapley encontre:

- um emparelhamento estável M sendo os rapazes o conjunto dominante. Mostre a sequência de propostas até o emparelhamento estável.
- um emparelhamento estável M' sendo as garotas o conjunto dominante. Mostre a sequência de propostas até o emparelhamento estável.

7) Utilizando o algoritmo de Gale-Shapley, encontre um emparelhamento estável:

Student	1	2	3	4
A	d	a	b	c
B	c	b	a	d
C	c	b	a	d
D	d	a	b	c

University	1	2	3	4
a	C	D	B	A
b	D	C	A	B
c	A	C	B	D
d	B	D	A	C

- Orientado aos estudantes (eles escolhem)
- Orientado as universidades (elas escolhem)

8) Dado o conjunto de moças e rapazes a seguir, encontre um emparelhamento estável utilizando o algoritmo de Gale-Shapley:

- Garotos escolhem
- Garotas escolhem

Obs: Elementos do conjunto B são b_1, b_2, \dots, b_n e os elementos do conjunto G são g_1, g_2, \dots, g_n



9) Encontre um emparelhamento estável para o problema a seguir:

(as listas de preferências são dadas em termos da inicial de cada nome)

Men	Preferences
Amir	S>T>U>V
Bengt	S>V>U>T
Ceasar	S>U>T>V
David	U>V>T>S

Women	Preferences
Susanne	D>A>B>C
Tana	A>D>C>B
Ursula	C>D>B>A
Virginia	A>C>D>B

a) Homens propõem

b) Mulheres propõem