Respostas da Tarefa 02 - GA 2017.

1. Encontre a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x+4y+3z &= 1 \\ 2x+5y+4z &= 4 \\ x-3y-2z &= 5 \end{cases}$$

RESPOSTA: Escalonando a matriz ampliada do sistema obtemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

o que nos leva a $x = 3, y = -2, z = 2$ ou seja, o conjunto solução é $S = \{(3, -2, 2)\}$

2. Verifique se o sistema linear abaixo tem solução. Caso tenha encontre-a.

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y-z &= 2 \\ 2x+y+z &= 3 \end{cases}$$

RESPOSTA: Escalonando a matriz ampliada do sistema obtemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim o posto da matriz dos coeficientes é igual a 2 e o posto da matriz ampliada do sistema é 3. Logo não há solução, ou seja o conjunto solução é vazio $(S = \emptyset)$.

3. Verifique se o sistema linear abaixo tem solução. Caso tenha encontre-a.

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+4x_4-7x_5 &= 14 \\ 2x_1+6x_2+x_3-2x_4+5x_5 &= -2 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_5 &= -1 \end{cases}$$

RESPOSTA: Escalonando a matriz ampliada do sistema obtemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -7 & 14 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -10 & 19 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -10 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{11}{9} & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{9} & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

O que nos leva a

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{2}{3} - 3x_2 - \dfrac{11}{9}x_5 \\ x_3 &= \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{9}x_5 \\ x_4 &= \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}x_5, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{2}{3} - 3\alpha - \dfrac{11}{9}\beta \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{9}\beta \\ x_4 &= \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\beta \\ x_5 &= \beta, \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ou seja, o conjunto solução é

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{3} - 3\alpha - \frac{11}{9}\beta, \alpha, \frac{5}{3} + \frac{7}{9}\beta, \frac{5}{2} + \frac{5}{3}\beta, \beta \right) \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Determine os valores de $a, b,$ e c para que os pontos $P_1 = (-2, 7)$, $P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$ estejam na circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Observação: Para que os pontos estejam na circunferência, eles devem satisfazer a equação da circunferência!!!!

RESPOSTA: Como os pontos pertencem à circunferência, então devem satisfazer a equação da circunferência. Logo

$$\begin{cases} -2a + 7b + c &= -53 \\ -4a + 5b + c &= -41 \\ 4a - 3b + c &= -25 \end{cases}$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema obtemos que

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 & -53 \\ -4 & 5 & 1 & -41 \\ 4 & -3 & 1 & -25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 & -53 \\ 0 & -9 & -1 & 65 \\ 0 & 0 & \frac{16}{9} & -\frac{464}{9} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -29 \end{bmatrix}$$

Logo $a = -2, b = -4, c = -29$. Assim, a equação da circuferência é

$$\underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2-1} + \underbrace{y^2 - 4y}_{(y-2)^2-4} - 29 = 0.$$

Portanto a circunferência tem como equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34.$$

5. No sistema linear abaixo, encontre todos os valores de a para os quais o sistema tenha: (a) solução única; (b) não tenha solução; (b) tenha soluções. Encontre, em função de a, a solução única do sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{cases}$$

RESPOSTA: Escalonando a matriz ampliada do sistema obtemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \underbrace{a^2-16}_{(a+4)(a-4)} & a-4 \end{bmatrix}$$

Para que a solução seja única, o posto da matriz ampliada deve ser igual ao posto da matriz dos coeficientes e igual ao número de incógnitas. Neste caso devemos ter $a^2 - 16 \neq 0$, isto é, $a \neq 4$ e $a \neq -4$, o que dá a condição de solução única.
Para não ter solução, o posto da matriz dos coeficientes deve ser menor do que da ampliada, o que nos leva a $a = -4$. E para ter infinitas soluções, $a = 4$.
Resolvendo obtemos que a solução única é $S = \left\{ \left(\frac{8a+25}{7(a+4)}, \frac{10a+54}{7(a+4)}, \frac{1}{a+4} \right), a \neq -4 \text{ e } a \neq 4. \right\}$