2 Álgebra das Proposições

Após termos visto que a **tabela verdade** pode ser utilizada como ferramenta de apoio para demonstração de todas as propriedades e relações já vista até então (em nossa disciplina), iniciaremos hoje o estudo do formalismo algébrico que embasa o **cálculo proposicional**. Tal formalismo é chamado nesta disciplina de **álgebra das proposições** (ou álgebra proposicional).

A maior razão para o estudo da **álgebra proposicional** é permitir que o **cálculo proposicional** possa ser utilizado como ferramenta alternativa à **tabela verdade**. Neste primeiro momento, estudaremos as propriedade dos operadores da **lógica proposicional**, bem como as **regras de equivalências notáveis**.

2.1 - Operadores de Conjunção e Disjunção

Para os operadores "$\wedge$" (conjunção) e "$\vee$" (disjunção), valem as seguintes propriedades:

a) Idempotente:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

b) Comutativa:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

c) Associativa:

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$$
$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$$

d) Identidade:

Considere *t* uma proposição simples com valor lógico V, e *c* uma proposição simples com valor lógico F.

p ^ ***t*** ⇔ **p** (*t* é o elemento neutro da conjunção)

p ^ ***c*** ⇔ ***c*** (*c* é o elemento absorvente da conjunção)

p ∨ ***t*** ⇔ ***t*** (*t* é o elemento absorvente da disjunção)

p ∨ ***c*** ⇔ **p** (*c* é o elemento neutro da disjunção)

2.2 - Conjunção e Disjunção em uma mesma proposição

Para as proposições que possuem ambos operadores os operadores “$\wedge$” (conjunção) e “$\vee$” (disjunção), valem as seguintes propriedades:

a) Distributiva:

i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) Absorção:

i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Além disso, para as proposições que possuem o operador “$\neg$” (negação) e ambos operadores os operadores “$\wedge$” (conjunção) e “$\vee$” (disjunção), também valem as equivalências notáveis dadas pelas regras de De Morgan:

Regras de De Morgan:

i) A negação da conjunção entre duas ou mais proposições é equivalente à disjunção destas proposições negadas:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

ii) A negação da disjunção entre duas ou mais proposições é equivalente à conjunção destas proposições negadas:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Com base nas regras de De Morgan pode-se verificar que:

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

As equivalências notáveis dadas pelas regras da Negação do Condicional, bem como pela negação do bicondicional também são importantes:

a) Negação Condicional:

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Verifique a aplicação da negação nas duas proposições desta equivalência

$$\neg\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

b) Negação Bicondicional:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Exercícios:

1) Mostre como é a negação das proposições abaixo através da linguagem corrente.

p: Bia estuda muito.
q: Lia gosta de ler.
r: Lea viaja bastante.

a) $p \rightarrow q$
b) $\neg q \vee r \leftrightarrow p$
c) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
d) $(\neg r \wedge p \rightarrow q) \rightarrow p$

2) Mostre, através da tabela verdade, se as propriedades comutativa, associativa e idempotente são válidas para o condicional e bicondicional.