

8ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos  
Árvores de Caminhos Mínimos e o Algoritmo de Dijkstra

1) O problema do caminho ótimo/mínimo em grafos ponderados é um dos mais recorrentes em várias áreas da computação, com aplicações que vão desde processamento de imagens e aprendizado de máquina até redes de computadores. Responda:

a) O que é um caminho mínimo P? Ele necessariamente passa pelo menor número de arestas? Explique

b) A operação a seguir é conhecida como relaxamento de uma aresta. O que ela faz?

```
RELAX( $u, v, w$ )  
1  if  $v.d > u.d + w(u, v)$   
2       $v.d = u.d + w(u, v)$   
3       $v.\pi = u$ 
```

c) Com base no código a seguir, explique o funcionamento do algoritmo de Dijkstra. Que estrutura de dados é utilizada na sua implementação? A árvore de caminhos mínimos obtida por esse algoritmo pode ser considerada sempre ótima? Porque?

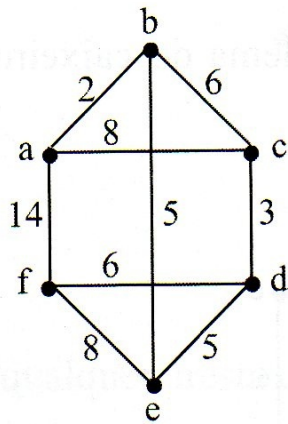
```
DIJKSTRA( $G, w, s$ )  
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )  
2   $S = \emptyset$   
3   $Q = G.V$   
4  while  $Q \neq \emptyset$   
5       $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$   
6       $S = S \cup \{u\}$   
7      for each vertex  $v \in G.Adj[u]$   
8          RELAX( $u, v, w$ )
```

d) Mostre que o algoritmo de Dijkstra com raiz em  $s$  sempre gera uma árvore de caminhos mínimos, ou seja, que o algoritmo termina com  $\lambda(v) \geq d(s, v)$  ,  $\forall v \in V$

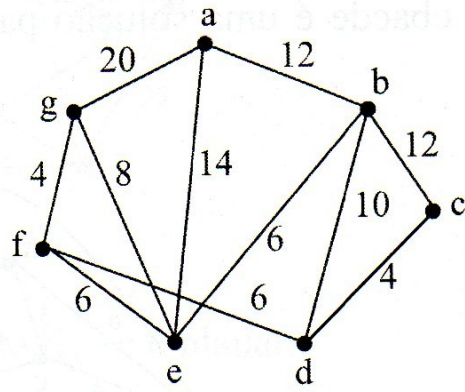
2) Discuta as principais diferenças entre os algoritmos de Busca em Largura, Busca em Profundidade e Dijkstra no que diz respeito as estruturas de dados utilizadas.

3) Use o algoritmo de Dijkstra nos grafos a seguir para encontrar o comprimento dos caminhos mais curtos do vértice 'a' a cada um dos outros vértices e para dar exemplos desses caminhos, ou seja, obtenha a árvore de caminhos ótimos com raiz no vértice 'a'. Desenhe a árvore de caminhos mínimos em cada caso e compare com a MST. Execute o trace completo do algoritmo de Dijkstra.

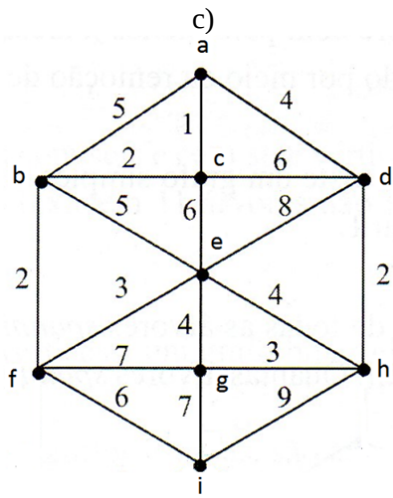
a)



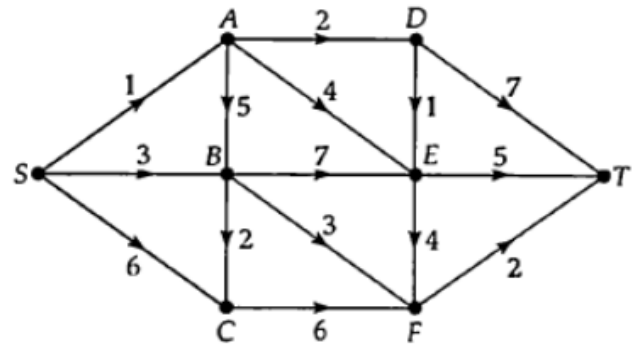
b)



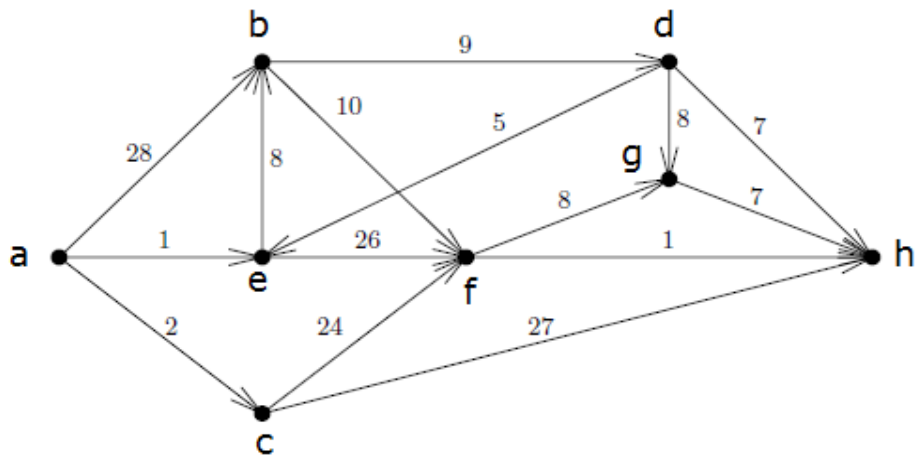
c)



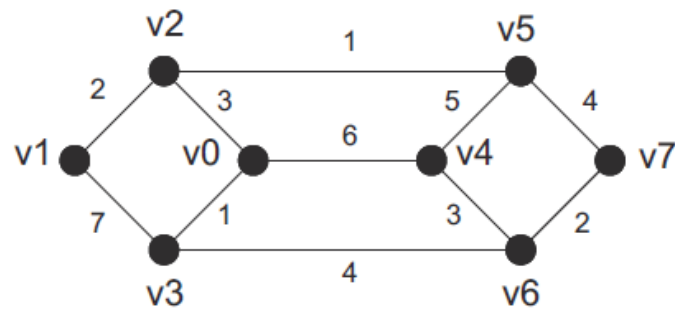
d)



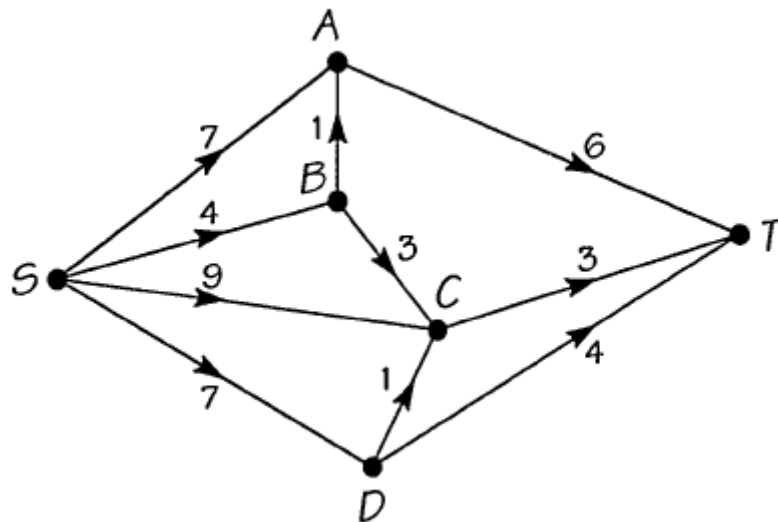
e)



4) Encontre o custo mínimo de  $v_4$  a todos os outros vértices do grafo a seguir. Monte a árvore de caminhos mínimos e compare com a MST.

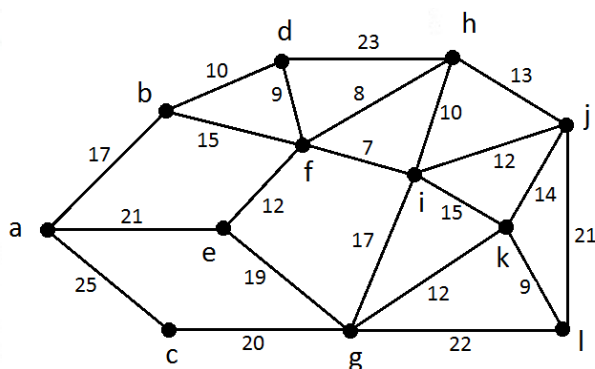


5) Encontre o custo dos caminhos mínimos de  $s$  a todos os outros vértices do dígrafo abaixo. Mostre a árvore de caminhos mínimos.



6) Aplique o algoritmo de Dijkstra para encontrar o custo de sair de  $a$  e chegar a todos os outros vértices do grafo. Responda:

Qual é o menor caminho  $W$  de  $A$  até  $L$ ? E qual é o menor caminho  $P$  de  $A$  até  $J$ ? Os caminhos  $W$  e  $P$  possuem alguma aresta em comum?



7) Aplique o algoritmo de Dijkstra para encontrar o menor caminho entre os vértices a e m

