AED2 - Aula 16
Radix sort e bucket sort

Radix sort

Na última aula vimos o counting sort,

- cuja ideia central é contar o número de predecessores de cada chave
    - para posicionar corretamente os elementos no vetor ordenado.
- Ele é muito eficiente para ordenar conjuntos de elementos
    - cujas chaves são inteiros pequenos.
- Por inteiros pequenos, queremos dizer
    - valores inteiros entre 0 e R - 1,
        - sendo R da ordem do número de elementos do conjunto.

Uma alternativa para ordenar conjuntos,

- quando suas chaves são grandes
    - é dividir as chaves em pedaços menores
        - e realizar a ordenação por etapas.
- Chamamos cada um desses pedaços de dígito
    - e seu tamanho deriva da base (radix) utilizada.
    - Note que, esses dígitos não precisam pertencer ao conjunto {0, …, 9}.
- Essa é a ideia central dos métodos de ordenação radix sort.

Os métodos radix sort

- também são chamados de ordenação digital,
    - por ordenar as chaves dígito-a-dígito,
        - ou strings caracter-a-caracter.
- Eles variam de acordo com a ordem em que consideramos os dígitos, i.e.,
    - se vamos dos mais significativos para os menos,
    - ou dos menos para os mais significativos.

MSD radix sort

- **Bônus, conteúdo extra**

Neste método vamos ordenar o conjunto indo

- do dígito mais significativo até o menos significativo,
    - i.e., percorremos cada chave da esquerda para a direita.
- Em cada etapa podemos usar uma variante do algoritmo da separação,
    - que estudamos junto do quickSort.
- Esta variante só considera o dígito corrente
    - e divide o conjunto em R subconjuntos,

        - sendo R o número de possibilidades de valor de um dígito.
- Um caso particular, e mais simples, deste método
    - em que o dígito tem tamanho 1
        - e R vale 2^1 = 2
    - é o binary quicksort.

Códigos:

```
const int bitsword = 32;
const int bitsdigit = 1;
const int digitsword = bitsword / bitsdigit;
const int Base = 1 << bitsdigit;

int digit(int a, int d)
{
   // return (int)((a >> (bitsdigit * (digitsword - 1 - d))) & (Base - 1));
   return (int)((a >> (bitsword - 1 - d)) & (Base - 1));
}

int digit2(int a, int d)
{
   // return (int)(a / exp2(bitsdigit * (digitsword - 1 - d))) % Base;
   return (int)(a / exp2(bitsword - 1 - d)) % Base;
}

// p indica a primeira posicao, r indica a ultima, d indica o digito corrente
void quicksortBin(int v[], int l, int r, int d)
{
   int i, j;
   i = l;
   j = r;
   if (r <= l || d > bitsword)
       return;
   while (j > i)
   {
       while (digit(v[i], d) == 0 && i < j)
           i++;
       while (digit(v[j], d) == 1 && j > i)
           j--;
       troca(&v[i], &v[j]);
   }
   if (digit(v[r], d) == 0)
       j++;
   quicksortBin(v, l, j - 1, d + 1);
   // quicksortBin(v, l, j - 1, d + bitsdigit);
   quicksortBin(v, j, r, d + 1);
   // quicksortBin(v, j, r, d + bitsdigit);
}
```

```
void MSDradixSort(int v[], int n)
{
   quicksortBin(v, 0, n - 1, 0);
}
```

Eficiência de tempo:

- Uma observação importante para analisar os método radix sort
    - é que nenhum dígito é verificado mais de uma vez.
    - Assim, radix sort é linear no número de dígitos.
- O(n * bitsword)

Eficiência de espaço:

- memória adicional da ordem de bitsword,
    - por conta da profundidade máxima da recursão.

Estabilidade:

- Não é estável.

LSD radix sort

Este método é interessante para ordenar

- um vetor v[0 .. n - 1] de chaves,
    - sendo todas do mesmo comprimento.
- Se as chaves são strings de caracteres,
    - estamos falando do problema de colocá-las em ordem lexicográfica.

Nele vamos ordenar o conjunto indo

- do dígito menos significativo até o mais significativo,
    - i.e., percorremos cada chave da direita para a esquerda.
- Em cada etapa ordenamos todo o conjunto
    - considerando um dígito por etapa
    - e usando um método de ordenação estável,
        - de preferência o counting sort,
            - por levar tempo linear, ser estável,
            - e funcionar bem com chaves pequenas (dígitos).

Primeiro veremos uma versão do LSD radix sort

- que trabalha com vetores de caracteres (strings) de mesmo tamanho,
    - sendo cada string uma chave.

Exemplo:

Original	3° Dígito	2° Dígito	1° Dígito
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
KNG	KDA	KDA	FFU
FFU	RFD	KDV	KDA
KDV	KNG	RFD	KDV
RFD	FFU	FFU	KNG
KDA	KDV	KNG	RFD

Observe que na última coluna todas as chaves estão ordenadas.

- Para entender o motivo, considere a penúltima coluna e observe que
    - se remover dela todos os elementos que não começam com K
        - os elementos restantes já estão em ordem.
- De fato, em cada etapa deste método
    - todas as chaves estão ordenadas
        - com relação apenas aos dígitos já considerados.
- Como a ordenação utilizada em cada etapa é estável,
    - esta propriedade invariante se mantém e propaga
        - para mais um dígito a cada nova etapa.

No algoritmo a seguir,

- W é o comprimento, em dígitos, de cada chave (string),
- R é o universo de valores que cada dígito pode assumir.
    - Note que, R < 256, já que cada dígito corresponde a um byte.

Códigos:

```
typedef unsigned char byte;

// Rearranja em ordem lexicográfica um vetor v[0 .. n - 1]
// de strings. Cada v[i] é uma string v[i][0 .. W - 1]
// cujos elementos pertencem ao conjunto 0 .. R - 1.
void ordenacaoDigital(byte *v[], int n, int W, int R)
{
   int *fp, d, r, i;
   byte **aux;
   fp = malloc((R + 1) * sizeof(int));
   aux = malloc(n * sizeof(byte *));

   for (d = W - 1; d >= 0; d--)
   {
       for (r = 0; r <= R; r++)
```

```
            fp[r] = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++)
        {
            r = v[i][d];
            fp[r + 1] += 1;
        }
        // agora fp[r] é a frequência de r-1
        for (r = 1; r <= R; r++)
            fp[r] += fp[r - 1];
        // agora fp[r] é a freq dos predecessores de r
        // logo, a carreira de elementos iguais a r
        // deve começar no índice fp[r]
        for (i = 0; i < n; i++)
        {
            r = v[i][d];
            aux[fp[r]] = v[i];
            fp[r]++;
        }
        // aux[0..n-1] está em ordem crescente considerando
        // apenas os digitos entre d .. W - 1
        for (i = 0; i < n; i++)
            v[i] = aux[i];
    }
    free(fp);
    free(aux);
}
```

Invariante e corretude:

- No início de cada iteração do laço externo as strings estão ordenadas
    - com relação aos subvetores v[i][d+1 .. W - 1], para i = 0, …, n.

Eficiência de tempo:

- Uma observação importante para analisar os método radix sort
    - é que nenhum dígito é verificado mais de uma vez.
    - Assim, radix sort é linear no número de dígitos.
- O((n + R) * W), sendo
    - n o número de chaves,
    - R o número de valores que cada dígito pode assumir,
    - W o número de dígitos em cada chave.
- Este método é preferível às ordenações O(n lg n) quando
    - R = O(n) e W = o(lg n),
        - sendo que o(lg n) indica assintoticamente menor que lg n.

Eficiência de espaço:

- memória adicional da ordem de (n + R).

Estabilidade:

- É estável,
    - desde que o método escolhido para ordenar cada dígito seja estável.
    - Isso porque, neste caso, em nenhuma etapa
        - elementos com a mesma chave serão invertidos.

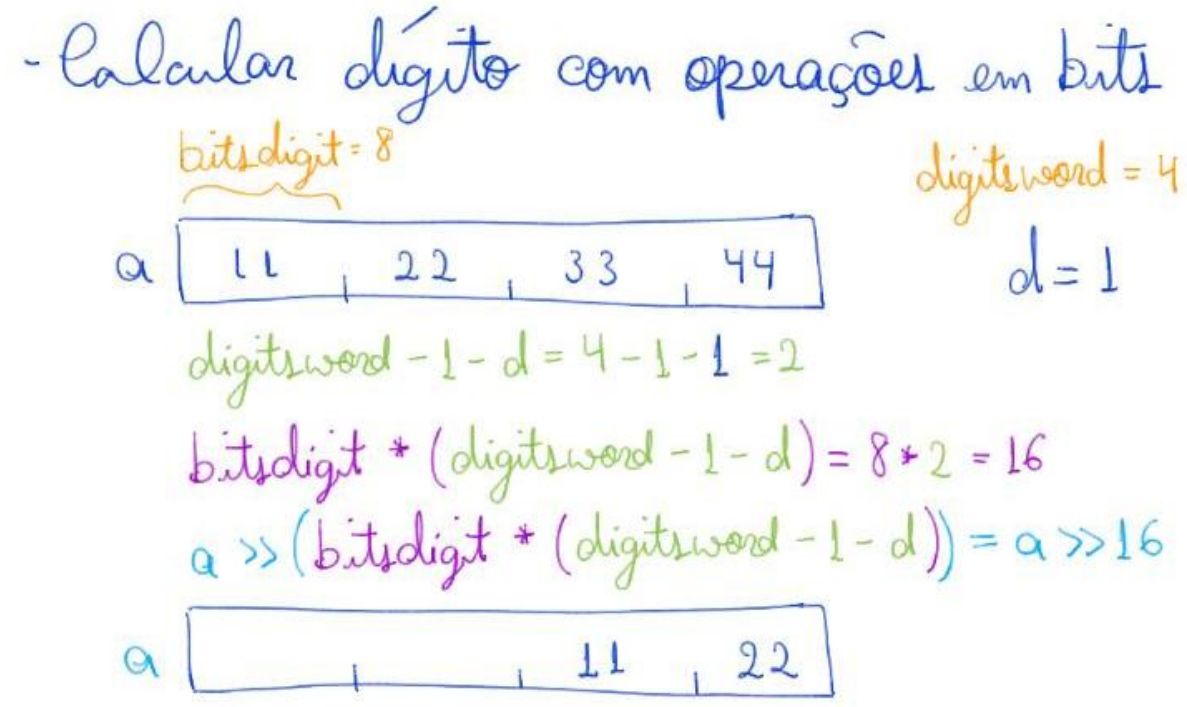
Agora veremos uma versão semelhante do LSD radix sort

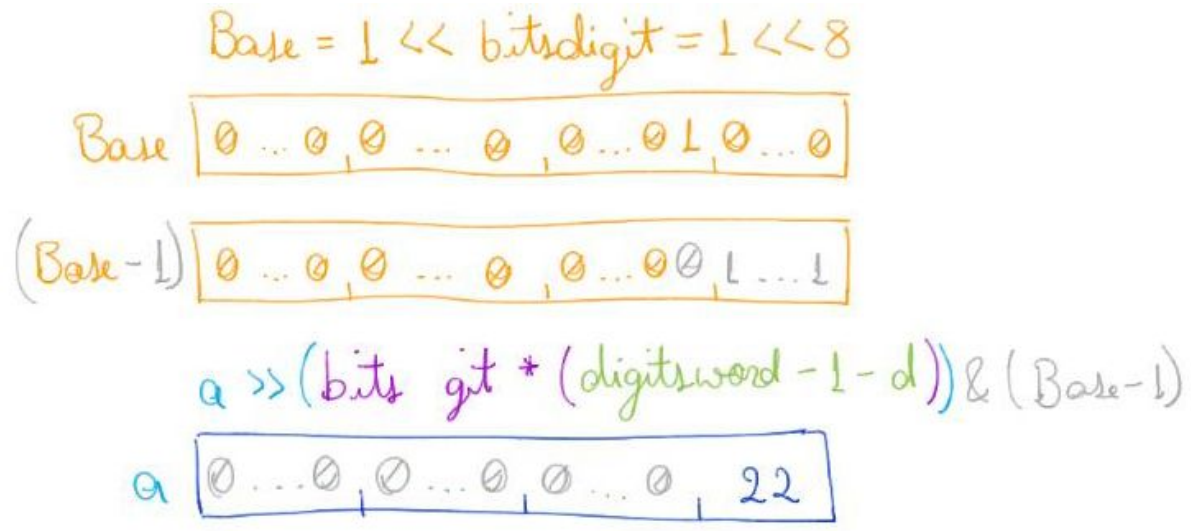
- que trabalha com vetores de inteiros,
    - sendo cada inteiro uma chave.
- Esta versão manipula explicitamente os bits das chaves
    - para obter cada dígito.

Códigos:

```
const int bitsword = 32;
const int bitsdigit = 8;
const int digitsword = bitsword / bitsdigit;
const int Base = 1 << bitsdigit;

int digit(int a, int d)
{
   return (int)((a >> (bitsdigit * (digitsword - 1 - d))) & (Base - 1));
}
```






```
int digit2(int a, int d)
{
   return (int)(a / exp2(bitsdigit * (digitsword - 1 - d))) % Base;
}

void LSDradixSort(int v[], int n)
{
   int r, i, d;
   int *fp, *aux;
   fp = malloc((Base + 1) * sizeof(int));
   aux = malloc(n * sizeof(int));

   for (d = digitsword - 1; d >= 0; d--)
   {
       for (r = 0; r <= Base; r++)
           fp[r] = 0;
       for (i = 0; i < n; i++)
       {
           r = digit(v[i], d);
           fp[r + 1] += 1;
       }
       // agora fp[r] é a frequência de r-1
       for (r = 1; r <= Base; r++)
           fp[r] += fp[r - 1];
       // agora fp[r] é a freq dos predecessores de r
       // logo, a carreira de elementos iguais a r
       // deve começar no índice fp[r]
       for (i = 0; i < n; ++i)
       {
           r = digit(v[i], d);
           aux[fp[r]] = v[i];
           fp[r]++; // *
       }
       // aux[0..n-1] está em ordem crescente considerando
```

```
        // apenas os digitos entre d .. digitsword - 1
        for (i = 0; i < n; i++)
            v[i] = aux[i];
    }
    free(fp);
    free(aux);
}
```

Eficiência de tempo:

- Uma observação importante para analisar os método radix sort
    - é que nenhum dígito é verificado mais de uma vez.
    - Assim, radix sort é linear no número de dígitos.
- O((n + Base) * digitsword), sendo
    - n o número de chaves,
    - Base o número de valores que cada dígito pode assumir,
    - digitsword o número de dígitos em cada chave.
- Se os dígitos forem pequenos e as chaves grandes
    - a eficiência tende a O(n lg n).
- Já se os dígitos forem grandes em relação às chaves
    - a eficiência tende a O(n).
- Por exemplo, tome n = 1 bilhão.
    - Se bitsdigit = 1 (Base = 2) e bitsword = 32,
        - temos digitsword = 32, que é maior que lg 10^9.
    - Se bitsdigit = 16 (Base = 265536) e bitsword = 32,
        - temos digitsword = 4, que é uma pequena constante.

Eficiência de espaço:

- memória adicional da ordem de (n + Base).

Estabilidade:

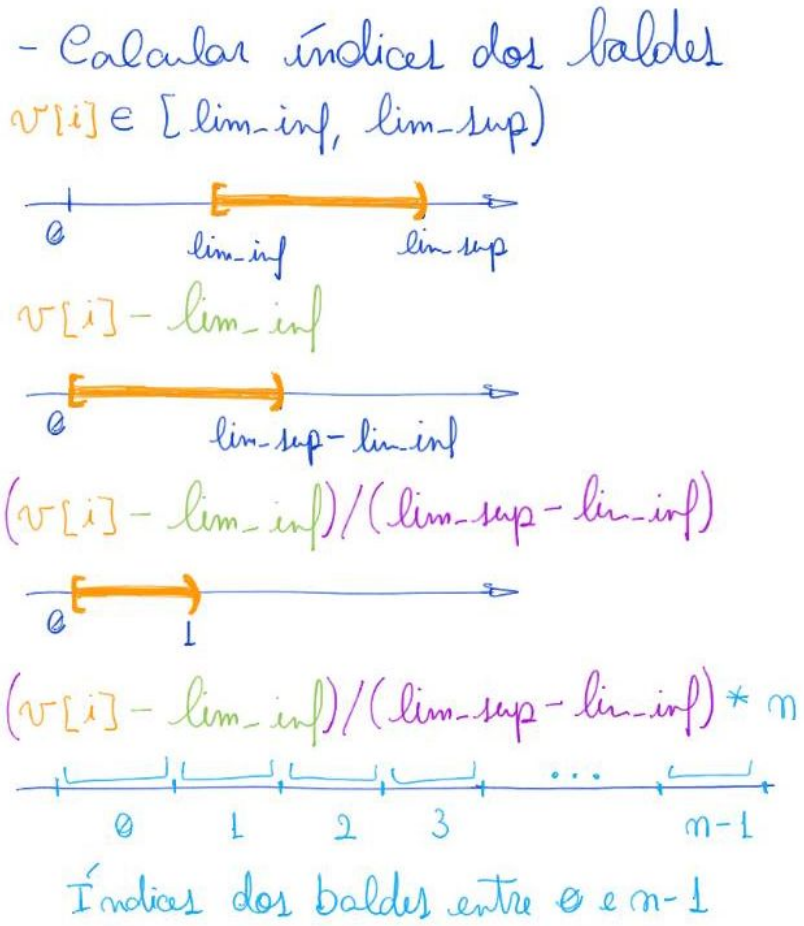
- É estável.

Bucket sort

Este é um método eficiente para ordenar um conjunto com n elementos

- distribuídos uniformemente num intervalo de tamanho k.
- Primeiro, dividimos o intervalo de tamanho k em n baldes
    - e associamos com cada balde
        - uma fração de valor igual a k/n.
- Então colocamos cada elemento em seu respectivo balde.
- Em seguida ordenamos os elementos de cada balde,
    - o que deve levar tempo constante,
        - já que cada balde deve ter um número pequeno de elementos,

        - uma vez que estes vieram de uma distribuição uniforme.
- Por fim, percorremos os baldes em ordem
    - e os elementos de cada balde, também em ordem,
        - copiando eles de volta para o vetor original.



Códigos:

```c
#define lim_inf 0
#define lim_sup 1

void bucketSort(double v[], int n)
{
   int i, j, k;
   Celula *p, *nova, *morta;
   Celula **b = (Celula **)malloc(n * sizeof(Celula *));
   // inicializando cada balde com uma lista com um nó cabeça
   for (j = 0; j < n; j++)
   {
       b[j] = (Celula *)malloc(sizeof(Celula));
       b[j]->prox = NULL;
   }
   // coloca cada elemento no balde correspondente
```

```
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        j = (int)(v[i] * n);
        // j = (int)((double)(v[i] - lim_inf) / (lim_sup - lim_inf) * n);
        p = b[j];
        // já insere o elemento na ordem correta dentro do balde
        while (p->prox != NULL && p->prox->chave < v[i])
            p = p->prox;
        nova = (Celula *)malloc(sizeof(Celula));
        nova->chave = v[i];
        nova->prox = p->prox;
        p->prox = nova;
    }
    //põe os elementos dos baldes de volta no vetor
    i = 0;
    for (j = 0; j < n; j++)
    {
        p = b[j]->prox;
        while (p != NULL)
        {
            v[i++] = p->chave;
            p = p->prox;
        }
    }
    for (j = 0; j < n; j++)
    {
        p = b[j];
        while (p != NULL)
        {
            morta = p;
            p = p->prox;
            free(morta);
        }
    }
    free(b);
}
```

Eficiência de tempo esperado é O(n),

- apenas se as chaves forem uniformemente distribuídas.
- Sem essa hipótese o tempo de pior caso do algoritmo é O(n^2),
    - pois muitos elementos podem se acumular num mesmo balde,
    - e a ordenação deste pode levar tempo quadrático,
        - dependendo do método utilizado.
- Diante disso, vale a pena usar um método de ordenação O(n lg n),
    - para ordenar cada balde?
        - Em geral não, pois são esperados poucos elementos por balde,
        - e métodos como insertionSort são melhores para n pequeno.

Eficiência de espaço:

- memória adicional da ordem de n,
    - pois são utilizados n baldes e
    - n células, uma para cada elemento.

Estabilidade:

- A estabilidade depende da implementação da ordenação intrabalde.
- O código que estudamos não é estável, mas uma pequena modificação
    - na inserção/ordenação intra balde pode corrigir isso.
        - Que modificação é essa?