Capítulo 6

Superfícies e quádricas

Como as curvas, as superfícies também podem ser apresentadas de forma paramétrica, ou como gráfico de funções de 2 variáveis ou através de equações a 3 variáveis.

A maioria das chamadas quádricas formam os primeiros exemplos de superfícies, além dos já conhecidos planos e esferas.

Algumas destas superfícies são superfícies cilíndricas (reunião de retas paralelas (geratrizes), cada uma passando por um ponto de uma curva diretriz), cones sobre curvas (reunião de retas que passam por um ponto de uma curva diretriz e por um ponto fixo, chamado vértice do cone), ou superfícies de revolução (obtidas girando uma curva diretriz em torno de um eixo fixo). Tanto cilindros como cones são regrados (reunião de retas), mas existem outras superfícies não tão óbvias mas regradas, inclusive entre as quádricas.

Vamos apresentar inicialmente as quádricas na sua forma mais simples, com equação reduzida.

6.1 Introdução às Quádricas

Como as cônicas do plano, que podiam ser descritas no sistema cartesiano por equações polinomiais de grau 2 em duas variáveis, as quádricas no espaço são aquelas que podem ser representadas por equações polinomiais de grau 2 em 3 variáveis.

$$p(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Como nas cônicas, os termos mistos $(2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz)$ representam que os eixos e planos de simetria estão rotacionados em relação aos eixos e planos coordenados. Também como nas cônicas, o ponto de simetria (centro da quádrica) na origem deixa a equação sem termos lineares $(2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z)$. Assim como nas cônicas, existem quádricas sem centro (parabolóides) que nunca ficam sem todos os termos lineares.

Em geral, para uma quádrica é uma superfície. Mas há degenerações como vazio, ponto e reta.

As secções planas de uma quádrica são cônicas. Já vimos o exemplo clássico das secções do cone, gerando as cônicas.

Vamos inicialmente apresentar as quádricas com centro na origem, e sem rotação dos eixos e planos de simetria. Os eixos de simetria são as intersecções dos planos de simetria.

6.2 Quádricas e suas equações, na forma reduzida.

Apresentamos inicialmente as quádricas com centro $(0, 0, 0)$ (sem termos lineares na equação reduzida):

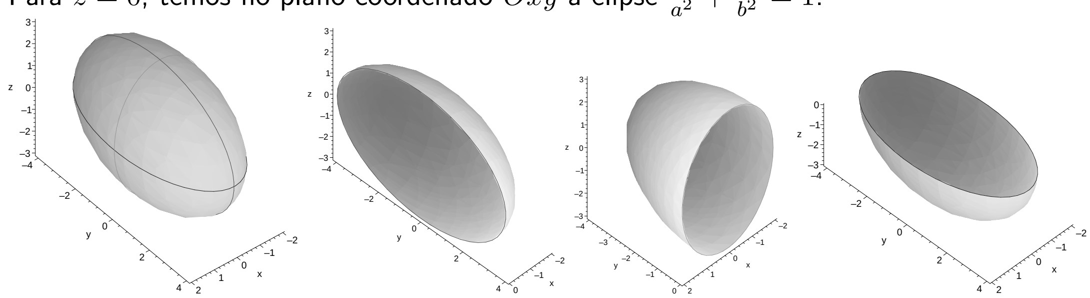
1. Elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

   Observe que as secções pelos planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ são elipses:

   Para $x = 0$, temos no plano coordenado Oyz a elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   Para $y = 0$, temos no plano coordenado Oxz a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   Para $z = 0$, temos no plano coordenado Oxy a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ e suas metades, mostrando as secções

   Os 3 planos coordenados são planos de simetria, a origem é ponto de simetria.

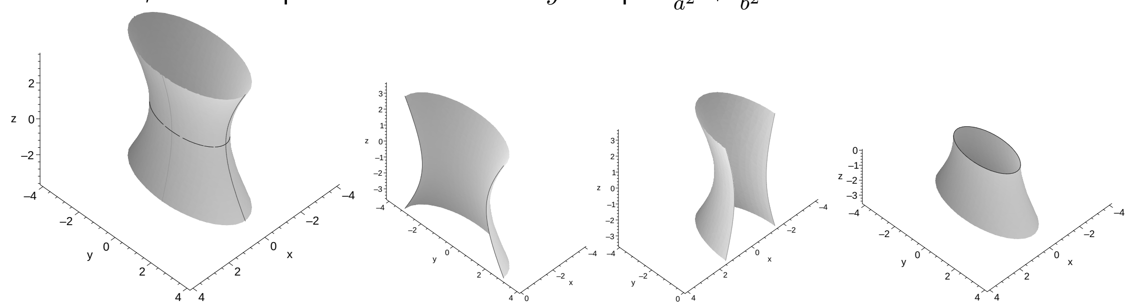
   Observe que se $a = b$, o elipsóide é uma superfície de revolução em torno do eixo Oz, se $a = c$, em torno do eixo Oy e se $b = c$, em torno do eixo Ox.

2. Hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

   Para $x=0$, temos no plano coordenado Oyz a hipérbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

   Para $y=0$, temos no plano coordenado Oxz a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

   Para $z=0$, temos no plano coordenado Oxy a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ e suas metades, mostrando as secções

Como exercício, estude os hiperbolóides $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. O que muda?

Em que situação o hiperbolóide é superfície de revolução? Em torno de que eixo?

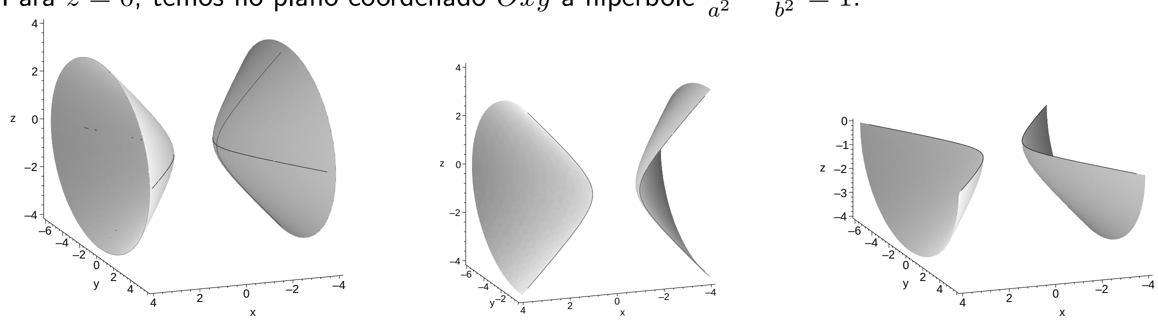
Um modelo concreto de hiperbolóide de uma folha é o clássico cesto de lixo, construído com varetas retas colocadas num fundo circular, com inclinação constante. Os hiperbolóides de uma folha são superfícies regradas, apesar de não serem cilindros, nem cones.

3. Hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

   Para $x=0$, temos a cônica vazia (o hiperbolóide não passa pelo plano Oyz).

   Para $y=0$, temos no plano coordenado Oxz a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

   Para $z=0$, temos no plano coordenado Oxy a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



Hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9/4}-\frac{z^2}{1}=1$ e suas metades, mostrando as secções

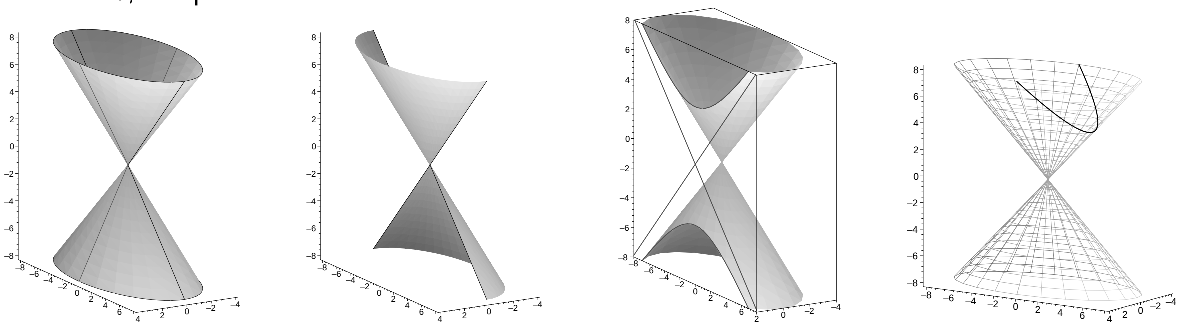
Como exercício, estude os hiperbolóides $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. O que muda?

Em que situação o hiperbolóide é superfície de revolução? Em torno de que eixo?

4. Cone $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

   Para $x = 0$ e para $y = 0$, duas retas concorrentes $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ e $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, respectivamente.

   Para $z = 0$, um ponto.



Cone $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0$ e suas partes

Secções: retas concorrentes, hipérbole e parábola

   Como exercício, estude os cones $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ e $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$. O que muda?

   Em que situação o cone é superfície de revolução? Em torno de que eixo? Qual a curva diretriz?

5. Cilindro elítico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

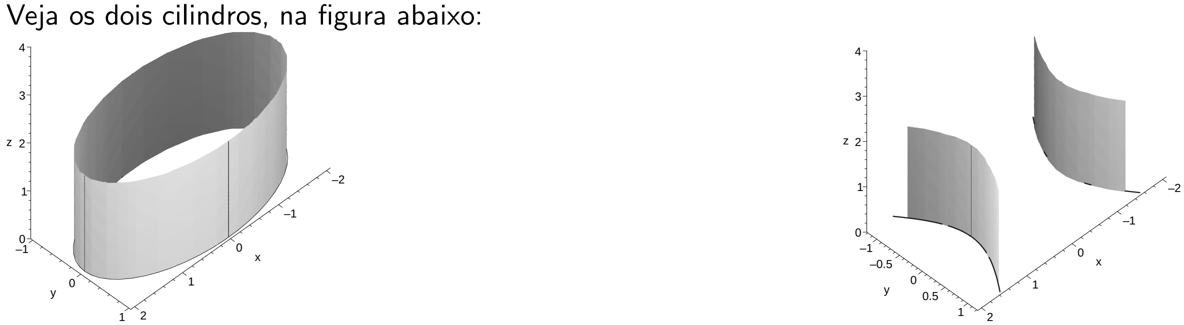
   Como z não aparece na equação, é livre. Assim, a figura é um cilindro com retas geratrizes paralelas ao eixo Oz, baseadas na curva diretriz dada pela secção $z = 0$, que é uma elipse.

   Esta quádrica também pode ser uma superfície de revolução em alguns casos. Descreva estes casos.

6. Cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   Neste caso, a curva diretriz é a hipérbole dada no plano Oxy pela equação.

   Veja os dois cilindros, na figura abaixo:



7. Par de planos concorrentes $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

8. Par de planos paralelos $\frac{x^2}{a^2} = 1$

9. Um plano $\frac{x^2}{a^2} = 0$

10. Uma reta $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

11. Um ponto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

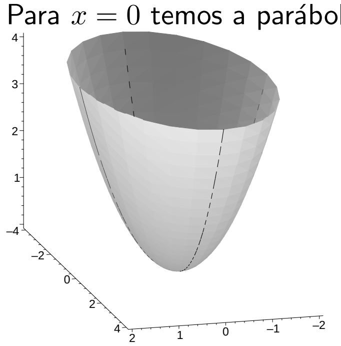
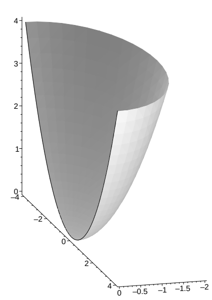
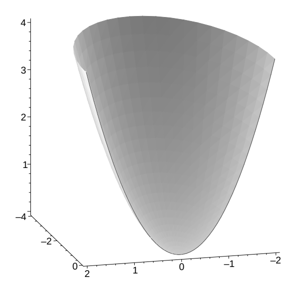
12. Conjunto vazio ($\emptyset$): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ ou $\frac{x^2}{a^2} = -1$

    Tanto o plano, como os planos concorrentes ou paralelos são superfícies regradas, e cilíndricas.

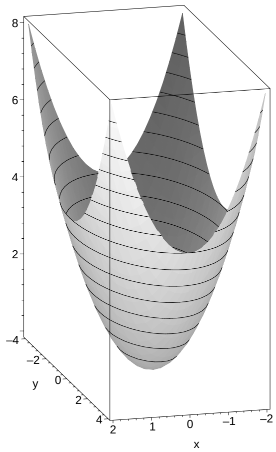
Agora, as quádricas sem centro, muito importantes para Cálculo de 2 variáveis. Podemos sempre reduzir a parte linear a apenas um componente, por exemplo z, e a quádrica pode ser encarada como gáfico de função de 2 variáveis $z = f(x, y)$.
Neste estudo, é interessante conhecer além das intersecções com os planos coordenados, também as suas secções por planos $z = k$, obtendo as chamadas curvas de nível k representadas no plano Oxy.

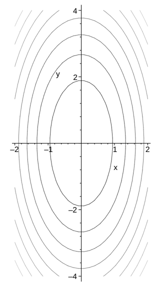
1. Parabolóide elítico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

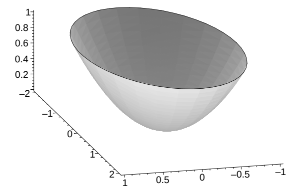
   Para $x = 0$ temos a parábola no plano Oyz; para $y = 0$, a parábola no plano Oxz.

   Para $z = 0$, temoos um ponto; para $z = k < 0$ temos a cônica vazia; para $z = k > 0$ temos elipses e, em particular, para $z = 1$, a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.







$-2 \le x \le 2$, $-4 \le y \le 4$ curvas de nível no plano Oxy corte no nível $k = 1$

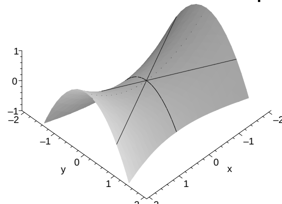
As ilustrações acima são do parabolóide $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$, seus cortes, seus níveis $z = k > 0$.

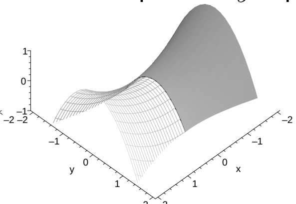
Este parabolóide também pode ser uma superfície de revolução em torno do eixo Oz, se $a = b$.

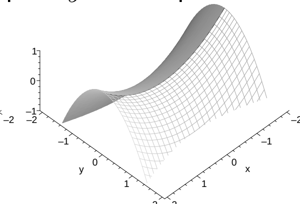
Estes são os modelos de antenas parabólicas, por exemplo.

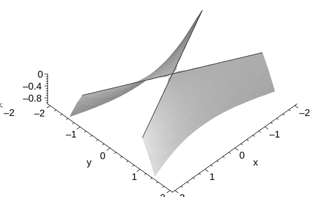
2. Parabolóide hiperbólico (sela) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

   Para $x = 0$ temos a parábola no plano Oyz; para $y = 0$, a parábola no plano Oxz.

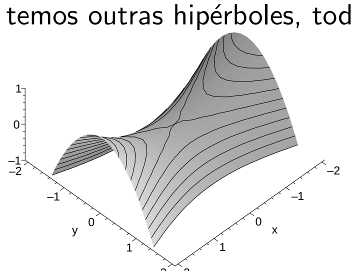


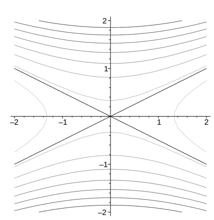


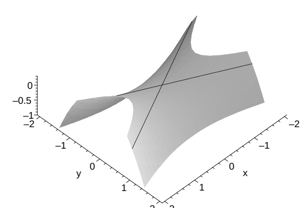




   Para $z = 0$, temos um par de retas concorrentes; para $z = k < 0$ temos hipérboles; para $z = k > 0$ temos outras hipérboles, todas com as mesmas assíntotas dadas pelo nível $z = 0$







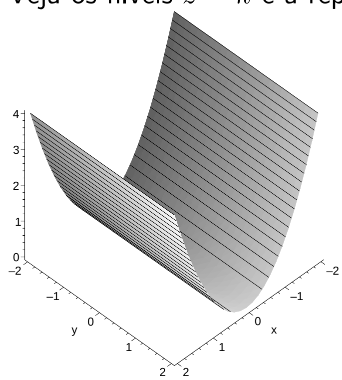
   curvas com $z = k$ sobre a sela curvas de nível no plano Oxy corte no nível $k = 0.5$

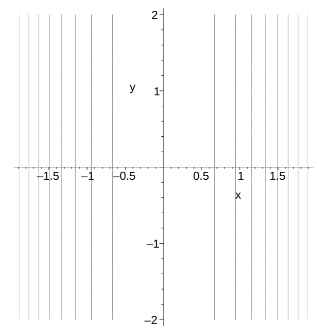
   Parabolóides hiperbólicos são também superfícies regradas.

3. Cilindro parabólico $z = \frac{x^2}{a^2}$.

Para $y = 0$ é uma parábola, sua curva diretriz. As retas geratrizes são paralelas ao eixo Oy, já que y não aparece na equação (é livre!).

Veja os níveis $z = k$ e a representação das curvas de nível no plano Oxy:





Podemos obter casos análogos de quádricas sem centro na forma reduzida, gráficos de funções $x = f(y, z)$ e $y = f(x, z)$.

Para se reconhecer graficamente uma quádrica, e superfícies em geral, utiliza-se obter suas secções pelos planos coordenados e por alguns planos paralelos a estes como $z = k$ gerando curvas de nível, e de posse destas secções, faz-se a análise das possibilidades. Os exemplos de secções cônicas e quádricas na forma reduzida precisam ser memorizados, como as letras de um alfabeto, pois são os primeiros modelos para várias situações, como no estudo de pontos de máximo, mínimo e sela de funções de 2 e 3 variáveis, a ser vista no Cálculo 2.

Nos casos de quádricas reduzidas acima, vimos que as que são cilíndricas aparecem com geratrizes paralelas ao eixo da variável que não comparece na equação. A diretriz é a cônica descrita pelas outras duas variáveis.

E as quádricas na forma reduzida que são superfícies de revolução têm um dos eixos coordenados como eixo de simetria, que é o eixo de rotação. Além disso, as secções da quádrica por planos perpendiculares ao eixo de rotação são circunferências com centro no eixo, ou ponto do eixo, ou vazio. Isto ocorre, por exemplo no caso de Oz ser o eixo de rotação da quádrica reduzida $p(x, y, z) = 0$, quando para cada constante k, $p(x, y, k) = \phi(x^2 + y^2)$.

6.3 Quádricas transladadas, eliminação dos termos lineares e equação na forma reduzida

Suponha uma quádrica com centro fora da origem, mas com os planos de simetria paralelos aos planos coordenados. Por exemplo, um elipsóide de centro $C = (c_1, c_2, c_3)$, com semi-eixos a, b e c como apresentado na forma reduzida. Então, num sistema de coordenadas $S' = \{C, x', y', z'\}$ obtido apenas transladando a origem para C, temos a equação

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1.$$

Como deduzido no caso do plano, temos no espaço, as equações de mudança:

$$\begin{cases} x' = x - c_1 \\ y' = y - c_2 \\ z' = z - c_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x' + c_1 \\ y = y' + c_2 \\ z = z' + c_3 \end{cases}.$$

donde a equação no sistema original fica:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} + \frac{(z - c_3)^2}{c^2} = 1.$$

Ou seja, se $p(x, y, z) = 0$ representa uma quádrica com centro na origem, a equação

$$p(x - c_1, y - c_2, z - c_3) = 0$$

representa a mesma quádrica com centro $C = (c_1, c_2, c_3)$.

No caso de quádricas sem centro, temos um resultado análogo. Na equação reduzida $z = f(x, y)$, obtivemos quádricas sem centro com uma espécie de vértice na origem. Se este vértice estiver no ponto $V = (v_1, v_2, v_3)$, a equação da quádrica fica $z - v_3 = f(x - v_1, y - v_2)$.

Observe que as equações dessas quádricas com centro deslocados da origem geram equações com termos lineares. Por exemplo, expandindo a equação do cilindro $(x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 = 1$ temos $x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 21 = 0$.

Como no caso das cônicas, se esta fosse a equação dada, podemos chegar na primeira equação completando quadrados e assim reconhecer a quádrica apresentada. Ou utilizando a matriz da quádrica

4×4, obtida de forma semelhante ao do caso caso das cônicas, podemos procurar o centro resolvendo um sistema linear com as 3 linhas da matriz.

No exemplo, a equação $p(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 21 = 0$ fornece a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 21 \end{bmatrix}$, com parte quadrática dada por $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Das 3 primeiras linhas obtemos o sistema $\begin{cases} c_1 - 2 = 0 \\ 2c_2 - 6 = 0 \end{cases}$, donde temos que $C = (c_1, c_2, c_3) = (2, 3, 100)$ é um centro (a última coordenada é livre, portanto temos uma reta de centros).

Então, assim como no caso das cônicas, efetuando a mudança de coordenadas apenas com deslocamento da origem para o centro, utilizando as equações $x = x' + 2$, $y = y' + 3$, $z = z' + 100$, obtemos uma nova equação nas novas coordenadas, $p'(x', y', z') = p(x' + 2, y' + 3, z' + 100) = (x')^2 + 2(y')^2 + p(2, 3, 100) = 0$ (os coeficientes da parte quadrática não se alteram com esse tipo de mudança). Como $p(2, 3, 100) = -1$, temos $(x')^2 + 2(y')^2 - 1 = 0$, ou seja, $(x-2)^2 + 2(y-3)^2 = 1$, que representa o cilindro elítico de eixo central $r : X = (2, 3, 100) + t(0, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Nesses casos em que não há termos mistos, pelo método do completamento de quadrados, também obtemos o mesmo resultado facilmente. Veja no exemplo: $p(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 21 = (x^2 - 4x) + 2(y^2 - 6y) + 21 = (x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 6y + 9) + 21 - 4 - 18 = (x-2)^2 + 2(y-3)^2 - 1 = 0$.

Nos casos de quádricas sem centro, mas sem termos mistos na equação, o completamento de quadrados é a forma para simplificação máxima dos termos lineares (deixar somente uma das coordenadas na parte linear, como nos exemplos reduzidos): Na equação $p(x,y,z) = x^2 - y^2 - 6x + 2y + 4z - 10 = 0$, por exemplo, podemos eliminar a parte linear com x e y utilizando a parte quadrática, mas não podemos eliminar o z. Temos: $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 4z - 10 = (x^2 - 6x) - (y^2 - 2y) + 4z - 10 = (x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) + 4z - 10 - 9 + 1 = (x-3)^2 - (y-1)^2 + 4z - 18 = (x-3)^2 - (y-1)^2 + 4(z - 9/2) = 0$, donde temos um parabolóide hiperbólico (sela) $z' = -\dfrac{(x')^2}{4} + \dfrac{(y')^2}{4}$, fazendo o deslocamento da origem para $V = (3, 1, 9/2)$.

Obtenção da equação reduzida e do esboço

Seja então a equação da quádrica sem termos mistos, $p(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$. Podemos transformá-las (as equações) em uma das citadas no início, a menos de troca de variáveis entre si. Podemos utilizar os seguintes passos:

- Para quádricas com centro:

  1. No caso de quádricas com centro, se a equação apresentar termos lineares, utilizando completamento de quadrados ou achando o centro, podemos obter:
  $p(x,y,z) = a_{11}(x-c_1)^2 + a_{22}(y-c_2)^2 + a_{33}(z-c_3)^2 + p(c_1,c_2,c_3) = 0$ onde o centro é (c_1,c_2,c_3).
  2. Se $K = p(c_1,c_2,c_3)$ não for nulo, reescreva a equação, isolando K e transformando-o em 1, dividindo a equação por ele:
  $-\dfrac{a_{11}}{K}(x-c_1)^2 - \dfrac{a_{22}}{K}(y-c_2)^2 - \dfrac{a_{33}}{K}(z-c_3)^2 = \lambda_1(x-c_1)^2 + \lambda_2(y-c_2)^2 + \lambda_3(z-c_3)^2 = 1.$
  Se $K = 0$, pule esta etapa.
  3. Finalmente, se achar necessário, faça modificação do tipo $\lambda(x-c_1)^2 = \dfrac{(x-c_1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}$ se $\lambda > 0$ e $\lambda(x-c_1)^2 = -\dfrac{(x-c_1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right)^2}$ se $\lambda < 0$. Análogo para outras variáveis.

- Para quádricas sem centro:

  1. No caso de quádricas sem centro, pelo menos um dos coeficientes de x^2 ou y^2 ou z^2 é nulo e, após completamento de quadrados, aparece, na parte linear, um termo não nulo sem seu correspondente quadrático, como por exemplo:
  $p(x,y,z) = a_{11}(x-v_1)^2 + a_{22}(y-v_2)^2 + 2a_{34}(z-v_3) = 0$, onde $V = (v_1,v_2,v_3)$ representará um vértice da quádrica sem centro.
  2. Isole $(z-v_3)$ na equação, e fique com $(z-z_0) = \lambda_1(x-v_1)^2 + \lambda_2(y-v_2)^2$ no caso exemplificado acima.
  3. Se achar necessário, faça o último tipo de modificação das quádricas com centro:
  $\lambda(x-v_1)^2 = \dfrac{(x-v_1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}$ se $\lambda > 0$ e $\lambda(x-v_1)^2 = -\dfrac{(x-v_1)^2}{\left(\dfrac{1}{(\sqrt{-\lambda}}\right)^2}$ se $\lambda < 0$, $\ldots$.

Para obtenção do esboço da quádrica, é bom lembrar de alguns truques. Se na equação já na forma simplificada, ainda aparecer o centro ou o vértice, (x_0, y_0, z_0) fora da origem, pode-se considerar $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ e $Z = z - z_0$, e desenhar a quádrica com a equação mais simplificada com centro (ou vértice) na origem do sistema. Esse novo sistema tem origem no ponto $O' = (x_0, y_0, z_0)$ e eixos $O'X$, $O'Y$ e $O'Z$ paralelos aos eixos Ox, Oy, Oz, respectivamente.

E para fazer o esboço nessa forma mais simplificada ainda, $F(X, Y, Z) = 0$, experimente os cortes pelos planos $X = 0$, $Y = 0$ e $Z = 0$. Se ainda não for suficiente, faça mais cortes por planos paralelos a estes. De qualquer forma, tem que deixar catalogados na memória todos os modelos de quádricas, para reconhecer logo.

Se houver troca de eixos em relação aos modelos catalogados, não se esqueça de trocar os eixos na hora do esboço.

Exemplos e exercícios

1. Seja o elipsóide $p(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 5 = 0$.
   Modifique a equação e deixe na forma padrão do elipsóide com centro na origem $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
   SOLUÇÃO:

   - primeiro, passamos o termo constante para o outro lado: $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 5$.
   - depois, com uma divisão, transformamos a constante em 1:
     $\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{3}{5}y^2 + \dfrac{1}{5}z^2 = 1$.
   - Por último, reescrevemos os coeficientes do primeiro lado:
     $$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{1}}\right)^2} = 1$$

   Concluimos que a quádrica é um elipsóide com centro (0,0,0), e semi-eixos $a = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $b = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ e $c = \sqrt{\dfrac{5}{1}}$ nos eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

2. Classifique e esboce a quádrica $x^2 + 2y^2 - z^2 - 4x - 8y - 2z - 0 = 0$.

3. Classifique e esboce a quádrica $x^2 - 2y^2 - 4x - 8y - 2z - 0 = 0$.

4. Suponha que a matriz Q da parte quadrática tenha posto (ou característica) menor que o posto da matriz 3×4 das 3 primeiras linhas da matriz A. A quádrica tem centro? quais as possibilidades para a quádrica?

5. Sabia que as cônicas se chamam cônicas por serem, exceto alguns casos degenerados, obtidos a partir de um cone circular, seccionando-o por planos? Classifique a cônica de intersecção do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ pelo plano $y + z = 1$. Quais cortes dão elipses? E hipérboles?

6. Um polinômio $p(x, y, z)$ que define uma quádrica $p(x, y, z) = 0$ é uma função real a 3 variáveis reais, definida em todo $\mathbb{R}^3$. Uma superfície de nível k de uma função a 3 variáveis reais $w = F(x, y, z)$ é definido como o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação $F(x, y, z) = k$. Quádricas são superfícies de nível $k = 0$ dessas funções.

   Por exemplo, para $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, temos as superfícies de nível do tipo hiperbolóide de 2 folhas ($k < 0$) que vão se encaixando como folhas, até chegar num cone no nível $k = 0$ e passar a hiperbolóides de uma folha nos níveis $k > 0$, do lado de fora do cone.

   Considere agora a função $G(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ e verifique a evolução das superfícies de nível, de $k < 0$ passando por $k = 0$ e indo para $k > 0$.

   Ídem para $H(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.

6.4 Quádricas com termos mistos

Quando os termos mistos aparecem na equação da quádrica, algum plano de simetria não é paralelo a plano coordenado. Ou seja, a eliminação dos termos quadráticos se dá com uma mudança de coordenadas com alteração na base de vetores que definem as direções dos eixos coordenados.

Há um teorema clássico da Álgebra Linear (Teorema Espectral) que garante que a simplificação é possível. Além disso, o sistema $S' = \{O, x', y', z'\}$ com base de vetores $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, na qual a nova equação fica sem termos mistos, ocorre numa base ortonormal, obtida como auto-vetores da matriz Q da parte quadrática.

Nas novas equações, somente com mudança da base de vetores, a parte quadrática fica na forma diagonal, isto é, $q'(x', y', z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2$, onde λ_1, λ_2 e λ_3 são os chamados auto-valores da matriz Q. Além disso, esta mudança não altera o termo independente.

Por exemplo, considere a equação $p(x,y,z) = x^2+3y^2+z^2-4xy+2yz-1 = 0$, com parte quadrática $q(x,y,z) = x^2+3y^2+z^2-4xy+2yz$.

A matriz da quádrica é $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, e $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular os autovalores λ_i de Q, que satisfazem a equação $\det(Q-\lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade.

$\left\| \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \right\| = -2-2\lambda+5\lambda^2-\lambda^3 = 0$, logo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{6}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{6}$.

Encontramos um auto-vetor $\vec{v}_i$ de Q associado ao autovalorλ_i, resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_i & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda_i & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então, para $\lambda_1 = 1$, $\vec{v}_1 = (1,0,2)$, para $\lambda_2 = 2+\sqrt{6}$, $\vec{v}_2 = (-2, 1+\sqrt(6), 1)$ e para $\lambda_3 = 2-\sqrt{6}$, $\vec{v}_3 = (-2, 1-\sqrt{6}, 1)$. Normalizando, temos os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ da base ortonormal do novo sistema com eixos Ox', Oy' e Oz', onde a nova equação fica:

$$(x')^2 + (2+\sqrt{6})(y')^2 + (2-\sqrt{6})(z')^2 - 1 = 0,$$

donde podemos concluir que a quádrica é um hiperbolóide de uma folha.

Observamos que mesmo neste caso, os autovalores sendo raízes de um polinômio cúbico, pode não ter cálculo muito simples.

Se partimos de uma equação com termos mistos e parte linear, primeiro tente eliminar os termos lineares e depois, os termos mistos. Se a quádrica for sem centro, portanto não é possível eliminar os termos lineares, lembre-se que esta mudança de coordenadas altera os termos lineares se estes existirem. Para saber como eles são alterados, precisarmos saber como são as equações de mudança, quando se altera a base de vetores.

Como no caso do plano, se $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ é a base do sistema $S = \{O, x, y, z\}$ e $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é a base do sistema $S' = \{O, x', y', z'\}$, onde $\vec{e}_1 = (a_1, b_1, c_1)_\mathcal{C}$, $\vec{e}_2 = (a_2, b_2, c_2)_\mathcal{C}$ e $\vec{e}_3 = (a_3, b_3, c_3)_\mathcal{C}$, temos:

$$P = (x, y, z)_S \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_{\mathcal{C}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (1)$$

$$P = (x', y', z')_{S'} \iff \overrightarrow{OP} = (x', y', z')_{\mathcal{E}} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \qquad (2)$$

Substituindo $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ em (2), temos

$$\overrightarrow{OP} = (a_1x' + a_2y' + a_3z', b_1x' + b_2y' + b_3z', c_1x' + c_2y' + c_3z')_{\mathcal{C}},$$

donde, por (1), tem-se que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Como as bases são ortonormais, a matriz de mudança que aparece acima é uma matriz ortogonal (sua inversa é a transposta) e portanto, temos também que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Com essas equações de mudança, obtendo-se a base ortonormal de autovetores de Q, pode-se conhecer a nova parte linear, quando necessário.

O efeito das mudanças de coordenadas cartesianas estudadas sobre a matriz da quádrica A e a sua parte quadrática Q é que o determinante de ambas é invariante, assim como o traço da parte quadrática. Assim, é possivel obter muitas informações da quádrica sem efetuar de fato as mudanças de coordenadas. Por exemplo, se $C = (c_1, c_2, c_3)$ é o centro da cônica, $f(c_1, c_2, c_3) = \dfrac{\det(A)}{\det(Q)}$ (exercício!)

6.5 Introdução às superfícies no espaço

A maioria das quádricas apresentadas são exemplos típicos de superfícies, entendidos intuitivamente como objetos no espaço que são reuniões de partes que se assemelham a pedaços de planos (sem rasgos nem bicos), coladas umas nas outras de forma "suave". Ou seja, superfícies bidimensionais, que em quase todos os seus pontos pode-se falar em plano tangente à superfície no ponto, etc.

Também como no caso de curvas no plano, uma superfície pode ser descrita, no sistema cartesiano do espaço, na forma paramétrica (agora com 2 parâmetros: $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $z = z(t, s)$), ou na forma implicita (por uma equação $f(x, y, z) = 0$ como as quádricas) ou como gráfico de funções (gráfico de $z = f(x, y)$ ou $x = f(y, z)$ ou $y = f(x, z)$), pelo menos por partes. É importante saber distinguir essas formas, até para utilizarmos um computador para desenhá-las.

No software Maple, temos as 3 maneiras de plotar as superfícies:

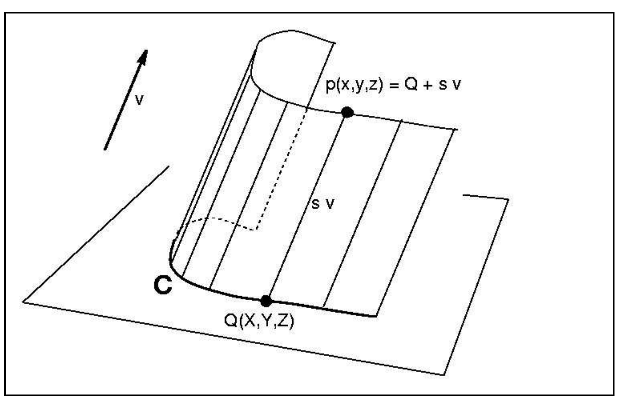
```
with(plots):
plot3d( [ f(t,s), g(t,s), h(t,s)], t= tmin .. tmax, s= smin .. smax );
implicitplot3d(equação(x,y,z), x=xmin ..xmax,y=ymin..ymax,z=zmin .. zmax);
plot3d( f(x,y), x=xmin .. xmax, y=ymin .. ymax);
```

A existência de um plano tangente em cada ponto está relacionada a condições de diferenciabilidade das funções envolvidas e deverá ser tratada no Cálculo.

A seguir, vamos trabalhar um pouco com a forma implícita e a forma paramétrica das superfícies cilíndricas, dos cones sobre curvas e das superfícies de revolução.

6.5.1 Superfícies cilíndricas

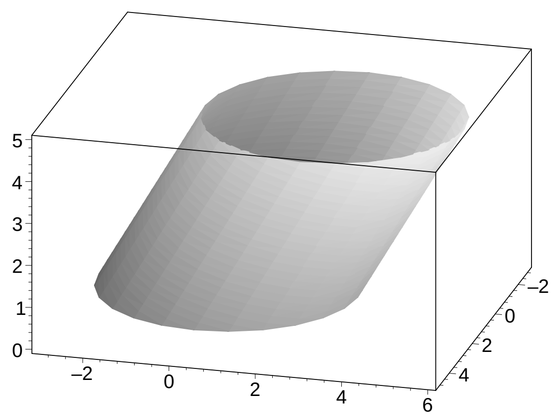
Considere uma curva plana C no espaço, e $\vec{v}$ um vetor transversal (não paralelo) ao plano da curva. O cilindro de diretriz C e geratrizes paralelas a $\vec{v}$ é a reunião das retas que passam por um ponto de C e são paralelas a $\vec{v}$. Isto é, é o conjunto dos pontos P que podem ser escritos na forma $P = Q + s\,\vec{v}$ onde $Q \in C$.



Os primeiros exemplos de superfícies cilíndricas são aquelas em que na equação $f(x,y,z) = 0$ alguma das variáveis não comparece explicitamente. As geratrizes do cilindro serão paralelas ao eixo da variável que não comparece e a curva diretriz é a curva determinada no plano das outras variáveis.

Vimos alguns exemplos na apresentação das quádricas reduzidas. Vejamos mais um exemplo: na equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ a variável z não comparece explicitamente. Isto significa que esta variável é livre, sendo portanto a superfície um cilindro com geratrizes paralelas a $\vec{k} = (0,0,1)$. O cilindro deste exemplo tem como diretriz a circunferência de raio 3 e centro na origem do plano Oxy.

Se C é dado parametricamente por $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, com o parâmetro $t \in I$, e $\vec{v} = (a,b,c)$, obtemos a parametrização $\begin{cases} x = f(t) + s * a \\ y = g(t) + s * b \\ z = h(t) + s * c \end{cases}$, com os parâmetros $t \in I$ e $s \in \mathbb{R}$. Fazendo, na parametrização dada, $s \in [0,1]$, estamos descrevendo um tronco de cilindro cujas geratrizes são segmentos de mesmo comprimento e direção que $\vec{v}$.



Por exemplo, o cilindro sobre a circunferência de raio 3 e centro $(0,0,0)$ no plano $z = 0$ e geratrizes paralelas a $\vec{v} = (2,3,5)$ é parametrizada por $\begin{cases} x = 3\cos t + 2s \\ y = 3 \operatorname{sen} t + 3s \\ z = 5s \end{cases}$, com $t \in [0, 2\pi]$, $s \in \mathbb{R}$.

Se C é dada implicitamente por 2 equações a 3 variáveis, $f(x,y,z) = 0$ e $g(x,y,z) = 0$ (toda equação nas variáveis x, y e z pode ser colocada na forma $F(x,y,z) = 0$), e $\vec{v} = (a,b,c)$ é a direção das geratrizes, podemos obter a equação do cilindro, da seguinte forma:

- Para cada $P = (x,y,z)$ do cilindro, seja $Q = (X,Y,Z) \in C$ tal que $Q = P + \lambda\vec{v}$, para algum

$\lambda \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\begin{cases} X = x + \lambda a \\ Y = y + \lambda b \\ Z = z + \lambda c \end{cases}$.

- Como $Q = (X, Y, Z) \in C$, devemos ter $f(X, Y, Z) = 0$ e $g(X, Y, Z) = 0$.

- Substituindo X, Y e Z pelas equações envolvendo x, y, z e λ, se tiver sorte, pode-se obter λ em função de x, y e z por uma das equações e, substituindo λ na outra equação, obter uma equação $F(x, y, z) = 0$ para descrever os pontos (x, y, z) do cilindro.

Veja o mesmo exemplo do cilindro parametrizado acima: C é dada pelas equações $x^2 + y^2 = 9$ e $z = 0$. Ou seja, $C : \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ g(x, y, z) = z = 0 \end{cases}$. Se $\vec{v} = (2, 3, 5)$, para cada (x, y, z) no cilindro, temos $\begin{cases} X = x + 2\lambda \\ Y = y + 3\lambda \\ Z = z + 5\lambda \end{cases}$ para algum (X, Y, Z) na circunferência e $\lambda \in \mathbb{R}$. Substituindo nas equações de C tem-se: $\begin{cases} f(X, Y, Z) = (x + 2\lambda)^2 + (y + 3\lambda)^2 - 9 = 0 \\ g(X, Y, Z) = z + 5\lambda = 0 \end{cases}$. Donde $\lambda = \frac{-z}{5}$ e, portanto, $(x - 2\frac{z}{5})^2 + (y - 3\frac{z}{5})^2 - 9 = 0$ é a equação do cilindro.

Como a equação é dada por um polinômio de grau 2 nas variáveis x, y e z, este cilindro é um exemplo de quádrica.

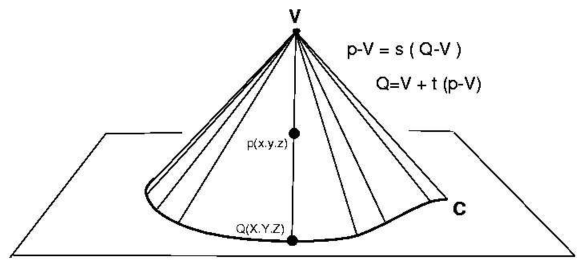
Exercícios: Esboce e obtenha as formas paramétrica e implícita do cilindro com diretriz C e geratrizes paralelas a $\vec{v}$, nos seguintes casos:

1. C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$ e $z = 0$; $\vec{v} = (5, 1, 1)$.

2. C é um ramo de hipérbole dado por $x = \cosh t$, $y = 0$, $z = \operatorname{senh} t$, com $t \in \mathbb{R}$ (verifique que satisfaz a equação $x^2 - z^2 = 1$); $\vec{v} = (0, 1, 0)$; faça também com $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

6.5.2 Cones sobre curvas

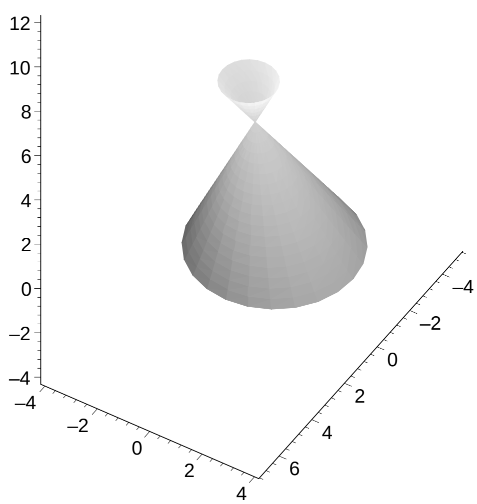
Seja C uma curva plana no espaço e V um ponto, não pertencente ao plano da curva. O cone de diretriz C e vértice V é a reunião das retas passando por V e por um ponto da curva.



O cone mais clássico é a quádrica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, que é um cone tendo como vértice o ponto $(0,0,0)$ e como diretriz qualquer uma de suas secções planas elíticas.

Se $P \in cone$, existe $Q \in C$ tal que $P = V + s(Q-V)$ para algum $s \in \mathbb{R}$. Ou, $Q = V + t(P-V)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Se quisermos obter o cone na forma paramétrica, usamos a primeira forma: $P = V + s(Q-V)$, e substituimos Q pela forma paramétrica da curva. Se quisermos a equação do cone, usamos a segunda forma: $Q = V + \lambda(P-V)$ e fazemos $f(Q) = 0$ e $g(Q) = 0$, onde $f = 0$ e $g = 0$ seriam as equações da curva C.



Por exemplo, o cone cuja diretriz é a circunferência $C : \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ e vértice $V = (2,1,4)$ tem as equações paramétricas dadas por: $\begin{cases} x = 2\cos t + s(\cos t - 2) \\ y = 2\operatorname{sen} t + s(\operatorname{sen} t - 1) \\ z = -4s \end{cases}$, com $t \in [0, 2\pi]$ e $s \in \mathbb{R}$.

Para obter a equação do cone, escrevemos $\begin{cases} X = 2 + \lambda(x-2) \\ Y = 1 + \lambda(y-1) \\ Z = 4 + \lambda(z-4) \end{cases}$, substituímos nas equações $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 4 \\ Z = 0 \end{cases}$, e eliminamos λ. De $Z = 4 + \lambda(z-4) = 0$ tem-se que $\lambda = \dfrac{-1}{z-4}$, e substituindo na outra equação, temos $\left(2 - \dfrac{(x-2)}{(z-4)}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{(y-1)}{(z-4)}\right)^2 = 4$. Este cone também pode ser reescrito como uma quádrica (Exercício: obtenha o polinômio de grau 2 que define esta quádrica.)

Exercícios: Esboce e obtenha as formas paramétrica e implícita do cone com diretriz C e vértice V, nos seguintes casos:

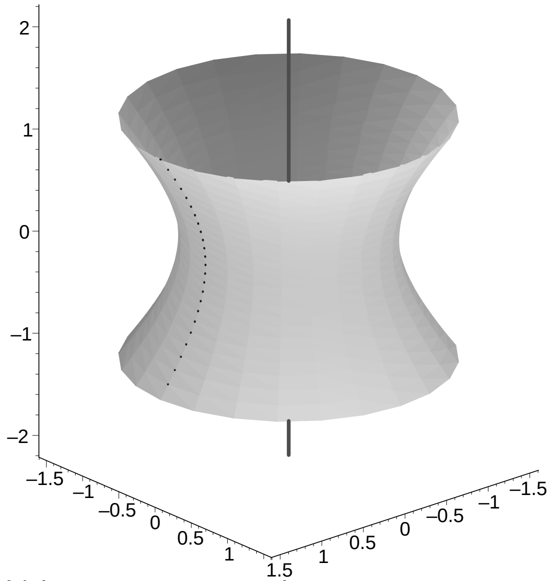
1. C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\dfrac{(y-1)^2}{4} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$ e $x = 0$; $V = (5, 1, 1)$.

2. C é a parábola dado por $x = t$, $y = 0$, $z = t^2 - 5t$, com $t \in \mathbb{R}$; $V = (0, 1, 0)$; faça também com $V = (1, 2, 3)$.

6.5.3 Superfícies de revolução

Seja C uma curva plana, e r uma reta contida no plano da curva. Sob certas condições sobre esses elementos, rotacionado a curva em torno da reta r, obtemos uma superfície de revolução de C em torno de r. Observe que a superfície é a reunião das circunferências que passam por pontos de C e centro em r, em planos perpendiculares a r.

Os exemplos mais simples de superfícies de revolução $f(x, y, z) = 0$ são aqueles que para cada $z = k$, $f(x, y, k) = 0$ é uma equação de uma circunferência de mesmo centro (x_0, y_0) no plano Oxy, podendo-se degenerar no ponto (x_0, y_0) ou no vazio. Neste caso, é uma superfície de revolução em torno do eixo $r : X = (x_0, y_0, 0) + t(0, 0, 1)$, desde que a secção pelo plano $x = 0$ seja uma curva.



Por exemplo, o hiperbolóide de uma folha $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ é uma superfície de revolução de uma hipérbole em torno do eixo Oz, já que para cada $z = k$, $f(x,y,k) = x^2 + y^2 - k^2 - 1 = 0$ representa a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{1+k^2}$ no plano Oxy.

Voltemos ao caso geral.

Suponha a curva C dada parametricamente: $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in I$. Para cada $t \in I$, seja $r(t)$ o ponto de r tal que o vetor $(f(t), g(t), h(t)) - r(t)$ seja perpendicular a r e tenha norma $\rho(t)$. O ponto $r(t)$ corresponde ao centro da circunferência e $\rho(t)$ é o raio. Seja $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ um par de vetores unitários e ortogonais a r (paralelos aos planos das circunferências). Então temos a seguinte parametrização da superfície de revolução:

$$(x,y,z) = r(t) + \rho(t)\cos s * \vec{e_1} + \rho(t)\,\mathrm{sen}\, s * \vec{e_2},\ t \in I,\ s \in [0, 2\pi].$$

Isto fica bem mais simples quando $r = Oz$ e C é uma curva no plano Oxz dada como gráfico de uma função $x = f(z)$, com $z \in I$.

Teremos a parametrização $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ com $t \in I$, da curva, e podemos tomar $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $r(t) = (0,0,t)$, $\rho(t) = f(t)$.

Assim,

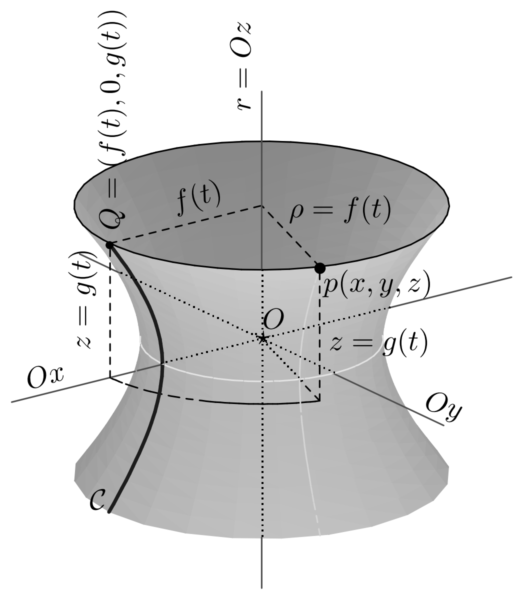
$$(x,y,z) = (0,0,t) + f(t)(\cos s, \mathrm{sen}\, s, 0),\ t \in I,\ s \in [0, 2\pi],$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = f(t)\cos s \\ y = f(t)\operatorname{sen} s \\ z = t \end{cases}, \ t \in I, \ s \in [0, 2\pi].$$

A mesma parametrização, se $r = Oz$ e C é uma curva no plano Oyz como gráfico da função $y = f(z)$.

Se $r = Oz$ e a curva é dada por $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = g(t) \end{cases}$,



$t \in I$, no plano Oxz, temos os raios $raio(t) = f(t)$ e os centros $r(t) = (0, 0, g(t)$.

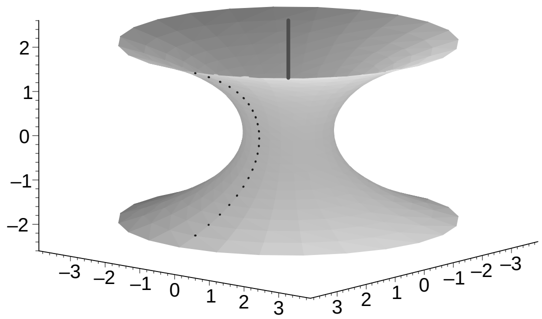
Assim,

$(x, y, z) = (0, 0, g(t)) + f(t)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$, $t \in I$, $s \in [0, 2\pi]$, ou seja,

$$\begin{cases} x = f(t)\cos s \\ y = f(t)\operatorname{sen} s \\ z = g(t) \end{cases}, \ t \in I, \ s \in [0, 2\pi].$$

Obtém-se resultados análogos, mantendo os eixos de rotação como um dos eixos coordenados e a curva num dos planos coordenados.

Por exemplo, o catenóide obtido rotacionando a catenária $x = \cosh(z)$ do plano Oxz em torno do eixo Oz, obtemos a parametrização $(x, y, z) = (0, 0, t) + \cosh(t)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0, 2\pi]$:



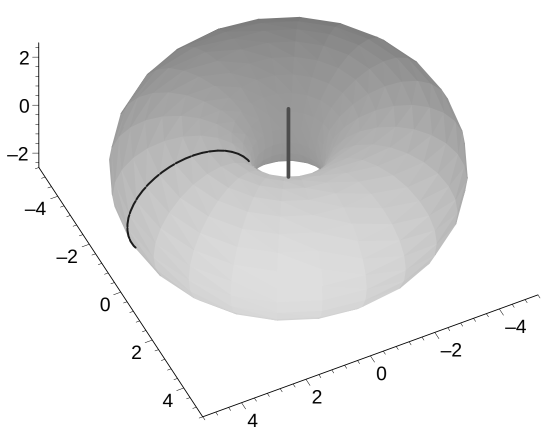
$$\begin{cases} x = \cosh(t)\cos s \\ y = \cosh t \operatorname{sen} s \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \ s \in [0, 2\pi].$$

O elipsóide obtido rotacionando a elipse $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 0 \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$ em torno do eixo Oz pode ser dada parametricamente por $(x, y, z) = (0, 0, 2\,\mathrm{sen}\, t) + 3\cos t(\cos s, \mathrm{sen}\, s, 0)$, $t \in [0, \pi]$, $s \in [0, 2\pi]$, ou seja,
$\begin{cases} x = 3\cos t \cos s \\ y = 3\cos t\,\mathrm{sen}\, s \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$, $s \in [0, 2\pi]$.

O toro (pneu, rosquinha, bóia, etc) obtido rotacionando a circunferência

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos t \\ y = 0 \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi],$$

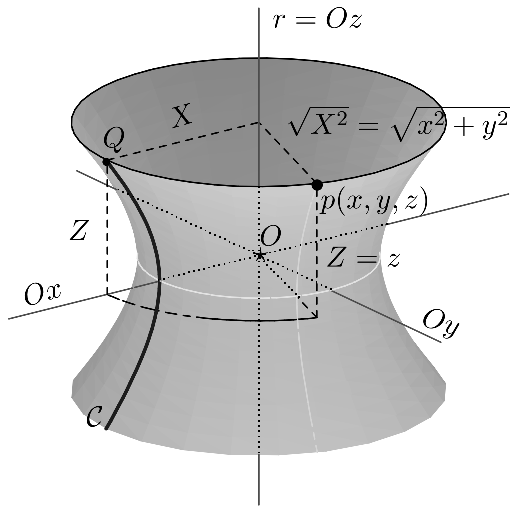
em torno do eixo $r = Oz$ tem parametrização dada por



$$\begin{cases} x = (3 + 2\cos t)\cos s \\ y = (3 + 2\cos t)\,\mathrm{sen}\, s \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases},$$

$t \in [0, 2\pi]$, $s \in [0, 2\pi]$.

Considere agora o caso de $r = Oz$, e C no plano Oxz dada por equações $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = y = 0$.



Se $(X, 0, Z) \in C$, então os pontos (x, y, z) da circunferência de centro $(0, 0, Z)$ e raio $\rho(Z) = \sqrt{X^2}$ pertencem à superfície de revolução.

Ou seja, $\begin{cases} z = Z \\ x^2 + y^2 = \rho^2(Z) = X^2 \end{cases}$.

Juntamente com $\begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$,

pode-se obter uma equação em x, y e z.

Por exemplo, rotacionando a elipse C : $\begin{cases} x^2 + 3z^2 = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ em torno do eixo Oz, obtemos um elipsóide de revolução. Seja (X, Y, Z) um ponto na elipse. Os pontos (x, y, z) do elipsóide com $z = Z$, estão na circunferência de centro $(0, 0, Z)$ e raio $\rho(Z) = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Ou seja, satisfazem as equações $\begin{cases} X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 \\ Z = z \end{cases}$. Assim, das equações da elipse $\begin{cases} X^2 + 3Z^2 = 5 \\ Y = 0 \end{cases}$, segue que $x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ é a equação da superfície, conhecida como elipsóide. Ou seja, esse elipsóide é dado implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + 3z^2 - 5 = 0$ e portanto, esse elipsóide é um caso de quádrica.

Exercícios:

I. Esboce a superfície, e obtenha as formas paramétrica e implícita da superfície de revolução da curva C em torno do eixo r, nos seguintes casos:

1. C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\dfrac{(y-3)^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ e $x = 0$; $r = Oy$.

2. C é a parábola dado por $x = t$, $y = 0$, $z = t^2$, com $t \in \mathbb{R}$; $r = Oz$; faça também com $r = Ox$, pelo menos a paramétrica. Qual dos casos a superfície é uma quádrica?

3. C é uma reta paralela ao eixo Oy, dada por $x = 0$, $z = 5$. Faça para $r = Oy$ e para $r = Oz$.

4. C é uma reta que cruza o eixo Oy, dada por $x = 0$, $z = 5y$. Faça rotação em torno de $r = Oy$ e $r = Oz$.

II. Obtenha a superfície dada como uma superfície de revolução, isto é, exiba a curva e o eixo de rotação, e mostre as equações (a que não tiver sido dada).

1. Cone circular com vértice $V = (0, 1, 0)$ cujas geratrizes formam ângulo $\pi/4$ com o eixo Oy.

2. Cilindro circular de raio 5 e eixo central Ox.

3. Esfera de centro $(0, 0, 5)$ e raio 3.

4. O hiperbolóide de uma folha dada pela equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

5. O hiperbolóide de 2 folhas dada pela equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

6.5.4 Gráficos de funções de 2 variáveis

Uma função real de duas variáveis reais $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, associa a cada ponto (x, y) do seu domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ um número real $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. O seu gráfico é o conjunto $Graf(f) = \{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \}$ no espaço $\mathbb{R}^3$.

Uma superfície dada como gráfico de $f(x, y)$, tem naturalmente a equação $z = f(x, y)$ e a forma paramétrica $(x, y, z) = (t, s, f(t, s))$, com $(t, s) \in D$.

Mas, dependendo da situação, podemos identificar o domínio D de uma função de 2 variáveis dentro do plano Oxz ou Oyz, em vez de Oxy, tendo como gráficos as superfícies de equação $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$ e parametrização $(x, y, z) = (t, g(t, s), s)$ ou $(x, y, z) = (h(t, s), t, s)$.

Observadas certas condições, como continuidade e diferenciabilidade, a serem esclarecidos mais tarde, o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ é uma superfície suave (sem bicos e rasgos). Toda superfície suave no $\mathbb{R}^3$ deve ser uma reunião de superfícies dadas como gráfico de funções boas, do tipo $z = f(x, y)$ ou $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$, com as "emendas"suaves.

Aqui vamos apenas apresentar alguns exemplos de gráficos, sem nos preocuparmos em justificar se realmente os gráficos são superfícies suaves.

Exemplos e exercícios.

1. O gráfico da função $f(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, onde a, b, c, x_0 e y_0 são constantes reais, é um plano no espaço com vetor normal $\vec{N} = (a, b, -1)$ e passando pelo ponto (x_0, y_0, c).

2. O gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ é uma calota esférica, pois devemos ter
$$\begin{cases} z^2 = f^2(x,y) = 1-x^2-y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

3. O gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é um parabolóide de revolução, passando pelo vértice $(0,0,0)$. Você pode visualizar isto, obtendo os cortes do gráfico por planos paralelos aos planos coordenados:

   - Cortando com o plano $z = 0$, devemos resolver $f(x,y) = x^2 + y^2 = z = 0$. Daí, temos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, e vemos que temos somente o vértice $V = (0,0,0)$.
   - Cortando com um plano $z = k < 0$, não temos nada, pois $x^2 + y^2$ nunca é negativo.
   - Cortando com um plano $z = k > 0$, temos circunferências de raio $\sqrt{k}$ e centro $(0,0,k)$, das equações $x^2 + y^2 = k$ e $z = k$. Trata-se portanto de uma superfície de revolução de uma curva em torno do eixo Oz.
   - Cortando com o plano $x = 0$, temos $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ que é uma parábola no plano Oyz. Logo, o gráfico é a superfície obtida pela rotação da parábola em torno do eixo Oz.

   Exercícios: Obtenha um esboço do gráfico de $f(x,y) = 2x^2+2y^2+10$. Qual o nome da superfície? Ídem para $g(x,y) = 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 - 5$. Qual a diferença desta superfície para a anterior?

4. Exercício: Obtenha um esboço do parabolóide elítico, gráfico de $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} - 1$, analisando diversos cortes da superfície por planos paralelos aos planos coordenados.

5. O gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ é uma superfície chamada sela ou parabolóide hiperbólico. Obtenha as curvas de nível de f (veja a definição no último exemplo de curvas no plano), para os níveis $k = 0$, $k = 1$ e $k = -1$. Obtenha os cortes pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = 2$. Esboce a superfície.

6. O gráfico da função $f(x,y) = x^2$ é um cilindro parabólico. Veja superfícies cilíndricas. Obtenha as secções do cilindro pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = k \geq 0$.

7. Obtenha o gráfico da função $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$. Antes, determine o domínio da função.

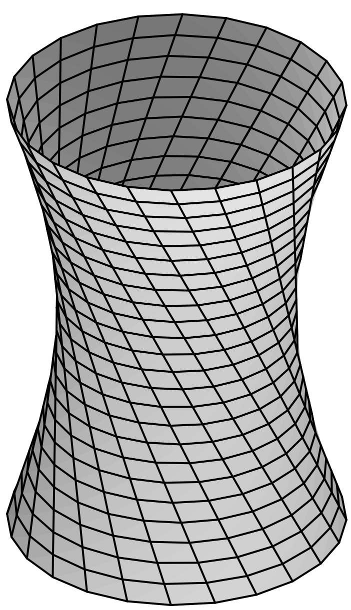
8. Todos os gráficos de funções que são também superfícies de revolução em torno do eixo Oz são da forma $z=f(x,y)=\phi(x^2+y^2)$. Descreva uma forma prática de esboçar o gráfico de uma função deste tipo.

6.5.5 Superfícies Regradas

Superfícies regradas são reuniões de retas. Já vimos os cilindros e cones, mas temos outras superfícies com essa propriedade. Entre as quádricas, podemos citar o hiperbolóide de uma folha, de revolução, tipo um cesto de lixo. Temos também o parabolóide hiperbólico ou sela. O helicóide, grosseiramente aproximado por uma escada em caracol, pode ser obtido por uma hélice e retas ligadas ao eixo da hélice.

1. Para obter um hiperbolóide de uma folha regrado, considere duas circunferências de mesmo raio, em planos paralelos:

$$C_1:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases} = \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \\ z=1 \end{cases} \text{ e } C_2:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=-1 \end{cases} = \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \\ z=-1 \end{cases}.$$



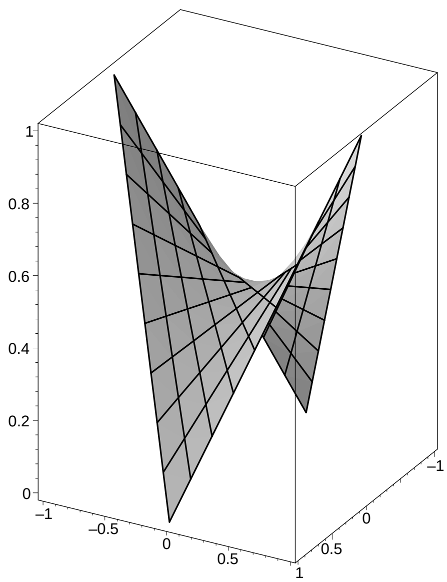
Ligue os pontos de uma circunferência com os da outra, de forma que haja uma defazagem no parâmetro, isto é, ligue $(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ com $(\cos(t+\theta), \operatorname{sen}(t+\theta), -1)$, para algum θ fixo.

Então $(x,y,z) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) + s(\cos(t+\theta) - \cos t, \operatorname{sen}(t+\theta) - \operatorname{sen} t, -2)$.

Essa é a construção da cesta de lixo, usando um fundo circular e varetas formando o contorno, todos colocados na borda da base formando o mesmo ângulo com o plano da base. Quando as varetas ficam perpendiculares à base ($\theta=0$), temos o cilindro circular.

Na verdade, dado um hiperbolóide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, e um ponto $p=(x_0,y_0,z_0)$ no hiperbolóide, o plano $T_p: \dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\dfrac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$ intercepta o hiperbolóide segundo duas retas concorrentes, que são as retas do hiperbolóide passando pelo ponto.

2. Uma sela (parabolóide hiperbólico) regrada pode ser obtida tomando-se inicialmente um quadrado com reticulado de retas como uma peneira com beirada quadrada. Suponha os lados do quadrado de material duro, mas articulável nas quinas, de forma que se possa suspender dois vértices opostos ao mesmo tempo, mantendo os outros dois no lugar. E suponha as linhas que formam o reticulado elásticas e sempre esticadas em linha reta.

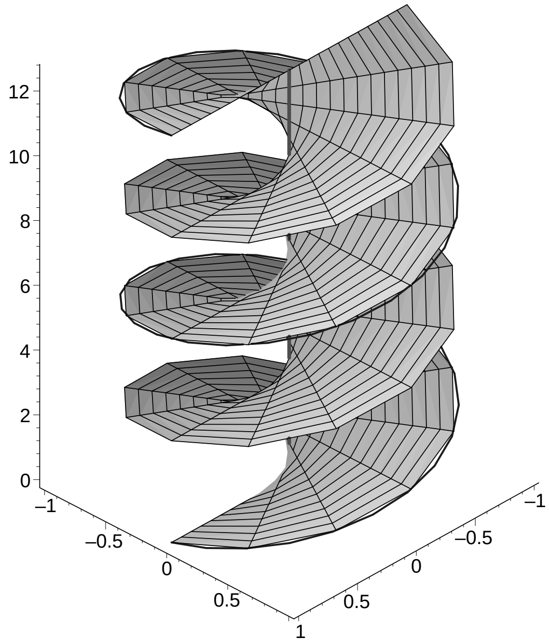


A superfície formada pelo reticulado é de uma sela.
Na figura, a sela $z=\frac{1}{2}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

```
P := t -> evalm([1,0,0]+t*[-1,1,1]):
Q := t -> evalm([0,-1,1]+t*[-1,1,-1]):
X := (t,s) ->
    convert(evalm(s*(Q(t)+(1-s)*P(t)),list):
plot3d(X(t,s), t=0..1, s=0..1);
```

De uma forma geral, para cada ponto $p=(x_0,y_0,z_0)$ de uma sela $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$, o plano $T_p:\ z=z_0+\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)-\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)$ intercepta a sela segundo duas retas concorrentes.

3. Vamos aqui construir a parametrização do helicóide, reunindo as retas que passam pela hélice $(x,y,z)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$ e pelo ponto $(0,0,t)\in Oz$.



A parametrização fica: $(x, y, z) = (0, 0, t) + s(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$. Modelos aproximados do helicóide, além das escadas em caracol, podem ser vistas feitas com palitos de sorvete para girarem com o vento.

6.5.6 Coordenadas esféricas

Como no caso de coordenadas polares no plano, podemos descrever os pontos do espaço através das coordenadas esféricas ou das coordenadas cilíndricas.

O primeiro, como o nome diz, se presta mais a descrever os pontos através de sua posição em esferas. Considere um ponto fixo O, a origem do sistema. Considere um plano de referência passando por O e um eixo de referência, contida no plano e passando também por O. Na passagem entre coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas $Oxyz$, consideramos O como a origem do sistema cartesiano, o plano de referência como o plano Oxz e o eixo, o Oz. Para cada ponto P no espaço ($P \neq O$), consideraremos r a distância do ponto a O, θ o ângulo do raio OP com o eixo Oz de referência, e ϕ o ângulo entre o plano Oxz de referência e o plano contendo o eixo Oz e o ponto P, que coimcide com o ângulo formado com a projeção ortogonal de OP sobre o plano Oxy e o eixo Ox. Assim, dada a terna r, θ, ϕ, com $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$, pode-se determinar exatamente a posição do ponto e vice-versa. Na origem, apenas indicamos $r = 0$.

A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, ϕ) fica portanto equacionado por

$$\begin{cases} x = r * \operatorname{sen}\theta * \cos\phi \\ y = r * \operatorname{sen}\theta * \operatorname{sen}\phi \\ z = r * \cos\theta \end{cases}.$$

Exemplos e exercícios

1. Uma esfera de centro na origem e raio R, tem a equação em coordenadas esféricas dada simplesmente por $r = R$. A partir disso, fica fácil obter a parametrização da esfera em coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x = R * \operatorname{sen}\theta * \cos\phi \\ y = R * \operatorname{sen}\theta * \operatorname{sen}\phi \\ z = R * \cos\theta \end{cases}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$.

   Exercícios: (1) Obtenha as equações paramétricas (em coordenadas cartesianas) de uma esfera com centro na origem e raio 5.

   (2)Depois da calota superior dessa esfera ($z \geq 0$) mudando a variação dos parâmetros.

   (3) Supondo que a esfera representa o globo terrestre em escala menor, sendo o equador no plano $z = 0$, represente os paralelos e os meridianos.

   (4) Obtenha a parametrização da esfera de centro (a, b, c) e raio R, em coordenadas cartesianas.

2. Um cone circular reto com vértice na origem e geratrizes formando ângulo θ_0 com o eixo Oz, tem equação $\theta = \theta_0$ em coordenadas esféricas. A partir disso, segue a parametrização do cone sem o vértice, em coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x = r * \operatorname{sen}\theta_0 * \cos\phi \\ y = r * \operatorname{sen}\theta_0 * \operatorname{sen}\phi \\ z = r * \cos\theta \end{cases}$, com $r > 00$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$.

   Exercício: Qual a parametrização do cone cujo com vértice na origem cujas geratrizes formam ângulos de 30 graus com o eixo Oz?

6.5.7 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas, como o nome diz, descreve os pontos do espaço através da descrição do ponto em cilindros. Considere um ponto do origem, O que compararemos com a origem de um sistema cartesiano. Considere um eixo de referência Oz e o plano de referència Oxz. Para cada ponto $P \neq O$, considere o cilindro circular reto de raio ρ e eixo Oz, a distância z de P ao plano Oxy (perpendicular a Oz por O) e ângulo ϕ do plano por Oz e P e o plano Oxz. As coordenadas cilíndricas de P são dadas por ρ, ϕ e z, que se relacionam com o sistema cartesiano pelas equações $\begin{cases} x = \rho * \cos\phi \\ y = \rho * \operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases}$, com $\rho > 0$, $0 \leq \phi < 2 * \pi$ e $z \in \mathbb{R}$.

Um cilindro circular reto de raio R e eixo central Oz pode ser escrita pela equação $\rho = R$ em coordenadas cilíndricas. Assim, uma parametrização do mesmo cilindro, em coordenadas cartesianas pode ser dada por $\begin{cases} x = R * \cos\phi \\ y = R * \operatorname{sen}\phi \\ z = t \end{cases}$, com $0 \leq \phi < 2 * \pi$ e $t \in \mathbb{R}$.