Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Estruturas Discretas – Profa. Helena Caseli

Terceira Lista de Exercícios – Relações

1) Dados A = {1, 2}, B = {x, y, z} e C = {3, 4} ache $A \times B \times C$.

2) São dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {x, y, z}. Seja R = {(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)}
   a) Determine a matriz retangular da relação.
   b) Desenhe os discos disjuntos de R.
   c) Ache a relação inversa R^{-1} de R.

3) Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, determine se a relação é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.
   a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
   b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
   c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$
   d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
   e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4) Suponha que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Represente esta relação como um conjunto de pares ordenados e verifique se R é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva.

5) Determine R^{-1} para cada uma das seguintes relações:
   a) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}
   b) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}
   c) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x-y = 1\}$
   d) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y\}$
   e) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy > 0\}$

6) Seja A = {1, 2, 3, 4, 6} e seja R a relação em A definida por "*x* divide *y*", escrita $x|y$.
   a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.
   b) Desenhe seu grafo orientado.
   c) Ache a relação inversa R^{-1} de R. R^{-1} pode ser descrita por palavras?

7) Seja R a relação *tem o mesmo tamanho que* definida sobre todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ (A R B se e somente se $|A| = |B|$). Quais das cinco propriedades (reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, e transitiva) R possui? Demonstre suas respostas.

8) Quais dos conjuntos a seguir são relações de equivalência?
   a) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)} no conjunto {1, 2, 3}
   b) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 1)} no conjunto {1, 2, 3}
   c) $|$ em $\mathbb{Z}$
   d) $\leq$ em $\mathbb{Z}$
   e) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto {1, 2, 3}

9) Para cada relação de equivalência ache a classe de equivalência pedida.
   a) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} em {1, 2, 3, 4}. Ache [1].
   b) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} em {1, 2, 3, 4}. Ache [4].

10) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e a relação de equivalência R sobre esse conjunto:
R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.
Encontre as classes de equivalência dessa relação.

11) Dê exemplos de relações R em A = {1, 2, 3} que têm a propriedade requerida.
   a) R é simétrica e antissimétrica.
   b) R não é nem simétrica nem antissimétrica.
   c) R é transitiva, mas $R \cup R^{-1}$ não é transitiva.

12) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}:
R = {(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)}
Ache a partição de A induzida por R, isto é, ache todas as classes de equivalência de R.

13) Considere o conjunto de palavras W = {saúde, luva, sal, pato, peso, som}. Ache W/R onde R é a relação de equivalência em W definida por
   a) "tem o mesmo número de letras que" ou
   b) "começa com a mesma letra que".

14) Cada uma das frases seguintes define uma relação nos inteiros positivos $\mathbf{N}^+$:
   a) x é maior que y
   b) xy é o quadrado de um inteiro
   c) $x + y = 10$
   d) $x + 4y = 10$
   Determine quais relações são: i) reflexiva, ii) simétrica, iii) antissimétrica, iv) transitiva.

15) Seja S = {1, 2, 3, ..., 19, 20}. Seja R a relação de equivalência em S definida por $x \equiv y (mod\ 5)$, isto é, x-y é divisível por 5. Ache a partição de S induzida por R, isto é, o conjunto quociente S/R.

16) Sejam R e S relações em um conjunto A. Assumindo que A tem pelo menos três elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contraexemplo no conjunto A = {1, 2, 3}.
   a) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ é simétrica.
   b) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.
   c) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ é reflexiva.
   d) Se R e S são reflexivas, então $R \cup S$ é reflexiva.
   e) Se R é antissimétrica então R^{-1} é antissimétrica.
   f) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

17) Desenhe o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais:
   a) A = {a, b, c} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)}
   b) A = {a, b, c, d} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (c, d)}
   c) A = {□, {a}, {a, b}, {c}, {a, c}, {b}} e B R C $\leftrightarrow$ B $\subseteq$ C

18) Para o exercício 17, encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal.

19) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial "x divide y" no conjunto {2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre um subconjunto totalmente ordenado com quatro elementos.

20) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “x divide y” no conjunto {3, 6, 9, 18, 54, 72, 108, 162}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre os pares de elementos que não estão relacionados.