# Lista 2 - Geometria Analítica - Sistemas Lineares

**Observações:** Faça uma leitura de cada exercício antes de iniciar. Procure compreender e assimilar aquilo que está fazendo. Creio que estes exercícios, se resolvidos adequadamente, serão suficientes para o entendimento desta parte do curso.

**1**. Descreva todas as matrizes $2 \times 2$ que estão na forma escalonada reduzida por linhas.

**2**. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma escalonada e escalonada reduzida:

$$(a)\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\quad (b)\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & -4 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\quad (c)\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 2 & 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

**3**. Calcule o posto de cada uma das matrizes da questão anterior.

**4**. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1\\ -4 & \beta & 0 & 2\\ 7 & -9 & \beta & 11\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Encontre todos os valores reais de $\beta$ para os quais a matriz escalonada reduzida de $A$ seja a matriz identidade.

**5**. Encontre a matriz ampliada de cada um dos sistemas lineares abaixo:

$$(a)\begin{cases}3x_1 - 2x_2 &= -1\\ 4x_1 + 5x_2 &= 3\\ 7x_1 + 3x_2 &= 2.\end{cases}\quad (b)\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1\\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 2\\ x_3 + 7x_4 &= 1.\end{cases}\quad (c)\begin{cases}x_1 &= 1\\ x_2 &= 2\\ x_3 &= 3.\end{cases}$$

**6**. Encontre o sistema linear correspondente a cada matriz aumentada dada a seguir:

$$(a)\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad (b)\begin{bmatrix}7 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad (c)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

**7**. Dado o sistema

$$\begin{cases}3x + 5y &= 1\\ 2x + z &= 3\\ 5x + y - z &= 0\end{cases},$$

escreva todas as matrizes associadas ao sistema (matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz incógnita e matriz independente). Reduza a matriz ampliada à forma escalonada (ou escalonada reduzida) e resolva o sistema.

**8**. Encontre a solução do sistema linear

$$\begin{cases}x + 4y + 3z &= 1\\ 2x + 5y + 4z &= 4\\ x - 3y - 2z &= 5\end{cases}$$

**9**. Verifique se o sistema linear abaixo tem solução. Caso tenha encontre-a.

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 3 \end{cases}$$

**10**. Verifique se o sistema linear abaixo tem solução. Caso tenha encontre-a.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= -1 \end{cases}$$

**11**. Determine os valores de $a, b$, e $c$ para que os pontos $P_1 = (-2, 7)$, $P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$ estejam na circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

**Observação:** Para que os pontos estejam na circunferência, eles devem satisfazer a equação da circunferência!!!!

**12**. Encontre os coeficientes $a, b, c$ e $d$ da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico contém os pontos $P_1 = (0, 10)$, $P_2 = (1, 7)$, $P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.

**13**. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade, 1g, determinou-se que

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina $A$, 3 unidades de vitamina $B$ e 4 unidades de vitamina $C$.

ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, de vitaminas $A$, $B$ e $C$.

iii) O alimento III tem 3 unidades de vitamina $A$, 3 de vitamina $C$ e não contém vitamina $B$.

Suponha que sejam necessárias 11 unidades de vitamina $A$, 9 de vitamina $B$ e 20 de vitamina $C$.

$(a)$ Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornecem a quantidade de vitamina desejada.

$(b)$ Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros custam 10, existe uma solução custando exatamente 1 real?

**14**. Dado o sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w &= -3 \\ x + y + 4z - w &= -6 \\ 2y + 2z + w &= 5 \end{cases}$$

$(a)$ Discuta a(s) solução(s) do sistema.

$(b)$ Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a esse sistema e encontre um valor de $k$ para o qual o sistema obtido seja incompatível, isto é não admita solução.

**15**. Determine se o sistema abaixo tem ou não solução e se a solução é única (justifique sua resposta). Caso tenha solução(ões) encontre-a(s).

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

**16**.

$(a)$ Encontre uma equação linear nas variáveis $x$ e $y$ que tem $x = 5 + 2t$, $y = t$ como solução geral.

$(b)$ Mostre que $x = t$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ também é a solução geral da equação linear que você encontrou no item (a).

**17**. Em cada sistema linear abaixo, determine o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada associada. Em seguida, use o Teorema de Rouché-Capelli para concluir se o sistema dado é impossível, possível determinado ou possível indeterminado, isto é, não tem solução, tem solução única ou tem infinitas soluções. Finalmente, use o método de eliminação de Gauss-Jordan, identifique as variáveis livres (se existirem) e determine todas as soluções do sistema.

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**18**. Determine $k$ para que o sistema a seguir admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0. \\ 2x - y = k \end{cases}$$

**19**. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 2 \\ -x - y + \alpha^2 z = \alpha \end{cases}$$

$(a)$ Encontre todos os valores de $\alpha$ para os quais o sistema tenha: (1) solução única; (2) solução alguma; (3) infinitas soluções.

$(b)$ Para $\alpha = -1$, determine o conjunto solução.

**20**. No sistema linear abaixo, encontre todos os valores de $\alpha$ para os quais o sistema tenha: $(a)$ solução única; $(b)$ não tenha solução; $(b)$ tenha soluções. Encontre, em função de $\alpha$, a solução única do sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

**21**. Ache os valores de $\alpha$ tais que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2\alpha z = 2\alpha + 2 \\ x + y + \alpha z = \alpha + 2 \\ -x - 2y + (\alpha^2 - 2\alpha - 1)z = -\alpha - 1 \end{cases}$$

$(a)$ possua solução única.

$(b)$ não possua solução.

$(c)$ possua infinitas soluções.

**22**. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 4x - 5y + 3z = \beta \\ 6x + \alpha y + 2z = 10 \\ 4x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$(a)$ Encontre valores de $\alpha$ e $\beta$ para os quais o sistema abaixo tenha **infinitas** soluções.

$(b)$ Substitua os valores de $\alpha$ e $\beta$ encontrados e determine o conjunto solução.

**23**. Considere o sistema linear $AX = B$, sendo que $A$ e $B$ são definidas abaixo. Encontre a solução do sistema para cada valor de $\alpha$ (solução única, infintas soluções, etc), sendo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & \alpha \\ 2 & 2\alpha - 2 & -\alpha - 2 & 3\alpha - 1 \\ 3 & \alpha + 2 & -3 & 2\alpha + 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**24**. Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + 3y + 3z + 9w = 0 \\ -x + y + z - w = 0 \\ x - y + (\alpha^2 - 2)z + \alpha w = 0 \end{cases}$$

Determine o valor de $\alpha$ para que esse sistema tenha

$(a)$ infinitas soluções com um parâmetro livre

$(b)$ infinitas soluções com dois parâmetros livres

Em ambos os casos, escreva a solução geral do sistema.

**25**. Vários candidatos prestaram um concurso para preenchimento de duas vagas numa empresa. Somente quatro foram classificados, e suas notas foram divulgadas através da tabela:

| | NOTAS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Candidatos | Português | Matemática | Computação | Legislação | Média | Classificação |
| A | 8,0 | 9,2 | 8,5 | 9,3 | 8,58 | 1 |
| B | 8,1 | 7,7 | 8,2 | 8,2 | 8,28 | 2 |
| C | 8,9 | 7,3 | 7,8 | 8,6 | 8,22 | 3 |
| D | 8,0 | 7,5 | 7,6 | 8,1 | 7,80 | 4 |

A empresa convocou os candidatos A e B. Entretanto, o candidato C não aceitou o resultado e procurou o gerente da empresa para se informar como as médias tinham sido calculadas, pois ele observou que não fora a média aritmética (neste caso sua média seria ________ ). A resposta do gerente fora que o critério seria a média ponderada. Baseado nesta informação o candidato C requereu à Justiça a anulação do concurso. Qual o veredicto do juiz designado para o caso e por que?
**Sugestão:** Denote por $x, y, z$ e $w$ os respectivos pesos e faça uma pesquisa sobre os tipos de médias existentes.

---

Bons estudos.