Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Estruturas Discretas – Profa. Helena Caseli

Sétima Lista de Exercícios – Estruturas Algébricas

1) Prove que $[M_2(Z), *]$ não é um monóide comutativo.

2) Prove que $[M_2(Z), *]$ não é um grupo.

3) Cada item a seguir define uma operação binária denotada por * em um conjunto dado.

a. Em Z: $x * y = \begin{cases} x & se\ x\ é\ par \\ x+1 & se\ x\ é\ impar \end{cases}$

Prove que * é associativa.

b. Em N: $x * y = (x + y)^2$

Prove que * é comutativa e não é associativa.

4) A tabela a seguir define uma operação binária * no conjunto {a, b, c, d}. Essa operação é associativa? Essa operação é comutativa?

*	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*c*	*d*	*a*
b	*b*	*c*	*a*	*d*
c	*c*	*a*	*b*	*d*
d	*d*	*b*	*a*	*c*

5) Seja S={p, q, r, s}. A tabela a seguir define parcialmente uma operação * em S. Complete a tabela de modo que * seja associativa. Essa operação é comutativa?

*	*p*	*q*	*r*	*s*
p	*p*	*q*	*r*	*s*
q	*q*	*r*	*s*	*p*
r			*p*	
s	*s*		*q*	*r*

6) Defina se as estruturas [S, *] a seguir formam semigrupos, monóides, grupos ou nenhum desses. Identifique o elemento identidade em qualquer monóide ou grupo.

a. S=N; x*y=min(x,y)
b. S=R; $x*y=(x+y)^2$
c. S=$\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$; multiplicação tradicional

7) Em cada um dos casos a seguir, decida se a primeira estrutura forma um subgrupo do grupo representado pela segunda estrutura. Se não, diga por quê. Observação: $S^{\bullet}$ denota S-{0}.

a. $[Z_5^{\bullet}, *_5]$; $[Z_5, +_5]$
b. $[Z^{\bullet}, *]$; $[Q^{\bullet}, *]$

8) Em cada item a seguir, decida se a função dada é um homomorfismo do grupo à esquerda no grupo à direita. Algum desses homomorfismos é também um isomorfismo?

a. [Z, +], [Z, +]; $f(x)=2$
b. [R, +], [R, +]; $f(x)=|x|$
c. [$R^{\bullet}$, *], [$R^{\bullet}$, *]; $f(x)=|x|$ (onde $R^{\bullet}$ denota o conjunto dos números reais não nulos e * a multiplicação).

9) Ache todos os subgrupos de [Z_6, $+_6$].

10) Ache todos os subgrupos de [Z_9, $+_9$].

11) Seja * uma operação definida em um conjunto A. Então, mostre que * pode ter no máximo um elemento identidade.

12) Seja (G, *) um grupo. Mostre que todo elemento de G tem um inverso único em G.

13) Considerando-se o conjunto $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, complete as tabelas a seguir para as operações * indicadas e diga se o par [Z_4,*] é um monóide ou um grupo. Verifique também se trata-se de uma estrutura com a propriedade comutativa.

a)

$+_4$	0	1	2	3
0				
1				
2		3		
3			1	

b)

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0			
1			2	
2				
3		3		