3 Cálculo Proposicional ou Método Dedutivo

Agora que já conhecemos a álgebra proposicional podemos definir o Cálculo Proposicional (ou método Dedutivo).

O Cálculo Proposicional é uma ferramenta que pode ser utilizada (assim como a tabela verdade) para se demonstrar propriedades e relações da lógica proposicional. Uma das grandes vantagens na utilização do cálculo proposicional, ao invés da tabela verdade, é que neste formalismo não há uma aumento exponencial no esforço exigido para a tarefa de demonstração. Assim, mesmo que a proposição composta P, a ser tomada como base, possua um número alto de proposições atômicas (p, q, r, s, ...), o esforço exigido pelo método não cresce necessariamente de maneira exponencial com relação ao número de proposições atômicas envolvidas.

Para que as demonstrações possam ser realizadas, deve-se utilizar as propriedades e regras sobre as proposições (álgebra proposicional). E para cada tipo de propriedade (ou relação) que se deseja demonstrar, pode-se definir uma estratégia específica para se realizar a demonstração. Por exemplo, para se demonstrar a validade de implicações e equivalências lógicas, umas das estratégias mais comuns são dadas a seguir.

Na demonstração de implicações lógicas uma estratégia muito comum é a substituição da implicação por sua condicional associada, e em seguida, aplica-se a álgebra proposicional buscando-se uma tautologia.

Já na demonstração de uma equivalência, é muito comum partir-se de um dos termos em busca do outro termo.

Exemplo: considere *p, q* e *r* proposições simples, *t* uma proposição simples com valor lógico *V* (verdade) e *c* uma proposição simples com valor lógico *F* (falsidade). Demonstre as implicações e equivalências abaixo através do método dedutivo.

i) Simplificação:

$p \wedge q \Rightarrow p$

$(p \wedge q) \rightarrow p \;\Leftrightarrow$

$\neg(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow$

$\neg p \vee \neg q \vee p \Leftrightarrow$

$(\neg p \vee p) \vee \neg q \Leftrightarrow T \vee \neg q \Leftrightarrow T$

ii) Adição: $p \Rightarrow p \vee q$

iii) Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

iv) Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

v) Silogismo Disjuntivo: $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

vi) Redução ao Absurdo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow c$

vii) Exportação-Importação:

$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Exercícios:

Exercício 10. Demonstre as equivalências e implicações abaixo através do método dedutivo.

i) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

ii) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$

iii) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$

iv) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

v) $p \Rightarrow q \rightarrow p$

vi) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

vii) $p \Rightarrow \neg p \rightarrow q$

viii) $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$

Na aula de hoje iremos realizar uma atividade pedagógica de fixação do conteúdo já visto nas duas últimas semanas de aula. O objetivo é fixar o conhecimento acerca do uso da ***álgebra proposicional*** na manipulação de ***proposições***. A ***álgebra proposicional*** é um ferramental muito rico e importante, que permite a demonstração de ***implicações*** e ***equivalências***, sem o uso direto da ***tabela verdade***. Assim, na prática, o uso da ***álgebra proposicional*** pode auxiliar a resolver problemas da ***lógica proposicional*** que envolvam ***proposições compostas*** por um número grande de ***proposições atômicas***.

Como já visto em sala de aula, o ***método dedutivo*** é uma forma de se demonstrar a validade de ***implicações*** e ***equivalências*** lógicas. Ao realizar-se a demonstração através do ***método dedutivo*** não é necessário o uso da ***tabela verdade***.

Para que as demonstrações possam ser realizadas, deve-se utilizar as propriedades e regras sobre as proposições (***álgebra proposicional***). Tradicionalmente, utilizam-se estratégias diferente para as demonstrações de ***implicações*** e para as demonstrações de ***equivalências***.

Na demonstração de ***implicações***, a estratégia tradicional consiste em substituir a ***implicação*** por sua ***condicional associada*** e, em seguida, aplicar a ***álgebra proposicional*** buscando-se uma ***tautologia***. O exemplo abaixo mostra um caso onde se demonstra a validade da implicação $p \wedge q \Rightarrow p$ através do método dedutivo:

Exemplo: Demonstre através do método dedutivo a validade da implicação dada por $p \wedge q \Rightarrow p$.

Inicialmente substitui-se a implicação $p \wedge q \Rightarrow p$ *por sua condicional associada, ou seja,* $(p \wedge q) \rightarrow p$. *Na sequência, inicia-se a aplicaçãoo das regras e propriedades da álgebra proposicional buscando-se a tautologia.*

1) $p \wedge q \Rightarrow p$	condicional associada
2) $(p \wedge q) \rightarrow p$	condicional
3) $\neg(p \wedge q) \vee p$	De Morgan
4) $(\neg p \vee \neg q) \vee p$	comutativa
5) $p \vee (\neg p \vee \neg q)$	associativa
6) $(p \vee \neg p) \vee \neg q$	identidade
7) Tautologia $\vee \neg q$	identidade
8) Tautologia.	

Portanto, como partimos da ***condicional associada*** e conseguimos atingir uma ***tautologia***, podemos concluir que a ***implicação*** é válida.

A estratégia tradicional de demonstração da ***equivalência*** se inicia de maneira diferente daquela vista (acima) para a demonstração da ***implicação***. Na demonstração de uma ***equivalência***, parte-se de um dos termos e, aplicando-se as propriedades e regras da ***álgebra proposicional***, busca-se alcançar o outro termo. O exemplo a seguir mostra um caso onde se demonstra a validade da ***equivalência*** $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ através do ***método dedutivo***.

1) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$	condicional
2) $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$	comutativa
3) $(r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$	distributiva

4) $r \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ comutativa
5) $(\neg p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ condicional
6) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ De Morgan
7) $(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$ dupla negação
8) $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

Como, através da ***álgebra proposicional*** pudemos demonstrar que, partindo-se de $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ é possível atingir-se $(p \vee q) \rightarrow r$, então a ***equivalência*** é válida.

Os exercícios abaixo devem ser entregues até o início da próxima aula (cópia da resolução realizada de próprio punho, enviada por e-mail), mas apenas poderão entregar a atividade os alunos que tiverem presença na aula de hoje. A entrega da resolução correta de todos exercícios valerá 2Ps.

Exercícios

Demonstre as implicações e equivalências abaixo através do método dedutivo.

i) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
ii) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$
iii) $p \Rightarrow (p \vee q)$
iv) $p \Rightarrow p \vee q$
v) $q \Rightarrow p \vee q$
vi) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
vii) $(p \wedge q) \Rightarrow q$
viii) $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
ix) $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$
x) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
xi) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
xii) $\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q)$
xiii) $\neg\neg p \Leftrightarrow \neg p \rightarrow p$
xiv) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
xv) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$
xvi) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$
xvii) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$
xviii) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$
xix) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$