Respostas da Tarefa 05 de Exercícios - GA - Entrega dia 11/05

1 - RESPOSTA:

(a) Temos que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (5,4,3) + (-5,4,3) = (0,8,6) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| = 10$$

(b) Verifique que $M = \frac{1}{2}(A+B)$. Assim

$$M = \left(\frac{3}{2}, 4, \frac{5}{2}\right)$$

(c) Para ser vértice de um losango basta verificarmos que existem 4 lados, dois a dois paralelos, com o mesmo comprimento. Como há uma posibilidade de não estar em ordem os vértices, façamos algumas possíveis combinações:

$$\overrightarrow{AB} = (-5,4,3), \quad \overrightarrow{AC} = (5,0,0), \quad \overrightarrow{AD} = (0,4,3), \quad \overrightarrow{BC} = (-0,4,3), \quad \overrightarrow{BD} = (-5,0,0).$$

Observando os vetores acima concluímos que os lados AD e BC são paralelos, bem como os lados AC e BD (por que?) e estes tem norma igual a 5.

2 - RESPOSTA: Usaremos as seguintes igualdades dos vetores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$$

Assim

(a) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ então

$$G = E + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (-4,-4,9)$$

(b) Temos que $R = E + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = E + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ e $S = E + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} = E + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Logo

$$R = \left(\frac{2}{3}, -3, \frac{11}{3}\right) \quad \text{e} \quad S = \left(\frac{1}{3}, -4, \frac{13}{3}\right)$$

(c) $\overrightarrow{AG} = G - A = (-4,-4,9) - (3,2,-3) = (-7,-6,12)$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (2,-1,-1) - (3,2,-3) + (-1,3,1) - (3,2,-3) = (-5,-2,6)$. Logo, sendo θ o ângulo entre $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{AC}$, temos

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AG} \circ \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AG}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{119}{\sqrt{65}\sqrt{229}} \Longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{119}{\sqrt{65}\sqrt{229}}\right).$$

(d) Seja M o ponto médio de BC. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, então

$$C = B + \overrightarrow{AD} = (-2,0,3).$$

Assim, $M = \frac{1}{2}(B+C) = (0, \frac{-1}{2}, 1)$.

Como vimos acima, a área do triângulo EDM é igual à metade da norma de $\overrightarrow{ED} \times \overrightarrow{EM} = (-7,-2,2)$. Assim

$$\frac{\|\overrightarrow{ED} \times \overrightarrow{EM}\|}{2} = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

.

3 - RESPOSTA: Seja $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$. Então

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow x = -2z$$

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} = 0 \Rightarrow y = -4z$$

Assim $\overrightarrow{u} = (-2z, -4z, z)$.
Como $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{21} \Rightarrow 4z^2 + 16z^2 + z = 21 \Rightarrow z = \pm 1$.
Uma vez que forma ângulo agudo com o vetor $\overrightarrow{r} = (0, 1, 2)$ concluímos que $z = -1$.
Logo $\overrightarrow{u} = (2, 4, -1)$.
Agora

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow B = A + \overrightarrow{u} = (-1, -3, 5) + (2, 4, -1) = (1, 1, 4).$$

4 - RESPOSTA:

(a) Seja $X = (x, y, z)$. Então

$$X \circ (2\overrightarrow{i}) = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$X \circ (3\overrightarrow{j}) = 11 \Longrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$-1 = (X \times \overrightarrow{i}) \circ (\overrightarrow{j}) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = z$$

Logo $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1)$

(b) Seja $Y = (x, y, z)$. Então

$$Y \times (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \Leftrightarrow (x, y, z) \times (1, 0, 1) = (y, z - x, -y) = (2, 2, -2)$$

Assim $y = 2$ e $z = x + 2$ Como

$$\|Y\| = \sqrt{6} \Rightarrow \|(x, 2, x+2)\| = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 + 4 + (x+2)^2 = 6 \Rightarrow x = -1.$$

Logo $Y = (-1, 2, 1)$.

5 - RESPOSTA:

(a) O ponto D é tal que o vetor $\overrightarrow{AD}$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AC}$ na direção de $\overrightarrow{AB}$. Assim,

$$D = A + \text{proj}_{\overrightarrow{AB}}^{\overrightarrow{AC}} = (4, 0, 1) + \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(b) O vetor $\overrightarrow{DC}$, pelas propriedades da projeção ortogonal, é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Logo seu comprimento é a altura do triângulo.

(c) Temos que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$ e $\overrightarrow{DC} = \left(-1, \frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, o que nos leva a $\|\overrightarrow{DC}\| = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

Assim a área será

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{DC}\|}{2} = \frac{\sqrt{26}\sqrt{30}}{4} = \frac{\sqrt{195}}{2}$$

.

Agora, sabemos também que área do triângulo ABC é igual à metade da norma de $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (7, 11, 5)$.

Resolvendo chegamos a $\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{195}}{2}$.

Bons estudos.