Como temos visto desde o início da nossa disciplina, uma das características muito importantes da **Lógica** é a possibilidade de, através dela, se definir uma forma de mecanização do **raciocínio**. O estudo sobre **argumentos** e a **validação de argumentos** nos revela que a partir de um **conjunto de fatos** iniciais (**premissas**) é possível se definir um padrão de raciocínio, e através deste padrão torna-se possível mecanizar o processo de identificação de conclusões que podem ser (logicamente) derivadas.

Assim, considere que dado um conjunto A de *n* fatos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (tal que $\forall i\ \alpha_i \in A$) e uma conclusão β, é possível utilizar a lógica proposicional para se demonstrar se tal conclusão β é uma consequência lógica dos fatos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Para facilitar a sequência da explicação, vamos considerar que um argumento γ é exatamente um conjunto A de *n* fatos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (tal que $\forall i\ \alpha_i \in A$) e uma conclusão β. Neste sentido, o processo de demonstração da validade de γ permite exatamente demonstrar se conclusão β é uma consequência lógica dos fatos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Pela definição da nossa "Cartilha da Lógica", temos:

Definição 1.15 Um *argumento* é uma seqüência $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$ $(n \geq 1)$ de proposições, na qual as proposições α_i $(1 \leq i \leq n-1)$ são chamadas de *premissas* e a proposição α_n é chamada de *conclusão*. Indica-se um argumento por

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$$

Um argumento $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$ é um *argumento válido* se e somente se a fórmula

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge ... \wedge \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n \text{ for uma tautologia,}$$

ou seja, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1} \models \alpha_n$. Essa afirmação é justificada pelo Teorema 1.1, da Seção 1.4.

Um argumento válido pode ser lido como:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1} \text{ acarretam } \alpha_n \text{ ou}$$

$$\alpha_n \text{ decorre de } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1} \text{ ou}$$

$$\alpha_n \text{ é conseqüência lógica de } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}.$$

Para $n = 1$, considera-se por extensão o argumento válido se e somente se α_1 for tautológica.

Existem várias formas de demonstração de argumentos. Se considerarmos a definição dada, é possível perceber que se provarmos que a "condicional associada" a um argumento é uma tautologia, então o argumento é verdadeiro.

Com base nas aulas anteriores, sabemos que uma das formas para provarmos se uma condicional é uma tautologia é através do uso da tabela verdade. Um problema com a técnica que se utiliza da tabela verdade para provar a validade de um argumento é que o número de linhas de uma tabela verdade é exponencial em relação ao número de proposições que compõem a fórmula a ser representada na tabela. Note, por exemplo, que para o item i) do próximo exercício, como o argumento possui apenas 3 proposições atômicas, a técnica da tabela verdade é adequada.

Entretanto, para argumentos com um número elevado de proposições, o uso da tabela verdade acaba sendo proibitivo. Por isso, utiliza-se (nestes casos) o processo de dedução (ou derivação).

Observação 1.19 Existem diferentes sistemas para a realização de derivações. Todos os sistemas têm as seguintes características em comum:

1. consideram uma lista de argumentos lógicos admissíveis, chamada de ***regras de inferência***. Essa lista é referenciada como L;
2. a derivação é uma lista de expressões lógicas. Originalmente, essa lista é vazia. Expressões podem ser adicionadas à lista se forem premissas ou se puderem ser obtidas a partir das expressões anteriores, por meio da aplicação de regras de inferência. Esse processo continua até que a conclusão seja obtida.

Definição 1.16 Considere as fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ e β da Lógica Proposicional. Diz-se que uma seqüência finita de fórmulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ é uma *prova* (ou ***dedução*** ou ***derivação***) de β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ (consideradas *premissas*) se e somente se:

1. cada C_i for uma premissa α_j $(1 \leq j \leq n)$; ou
2. C_i provém das fórmulas precedentes, pelo uso de um argumento válido de L; ou
3. C_i provém do uso do princípio de substituição usado em uma fórmula anterior; ou
4. C_k é β.

Utilizaremos a seguinte lista de regras de inferência (retirada da “Cartilha da Lógica”):

Tabela 1.44 Regras de inferência.

Regra	Nome da regra
$\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$	*modus ponens*
$\alpha \to \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$	*modus tollens*
$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \models \alpha \to \gamma$	silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$ $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$	silogismo disjuntivo silogismo disjuntivo (variante)
$\alpha \wedge \beta \models \alpha$ $\alpha \wedge \beta \models \beta$	simplificação simplificação (variante)
$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$	conjunção (ou combinação)
$\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \beta \models \beta$	de casos
$\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\beta \models \alpha \vee \beta$	adição adição (variante)
$\alpha \to \beta, \gamma \to \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$	dilema construtivo
$\alpha \to \beta, \gamma \to \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$	dilema destrutivo
$\alpha \to \beta \models \neg\beta \to \neg\alpha$	contraposição
$\alpha, \neg\alpha \models \beta$	da inconsistência
$\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$	introdução da equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \to \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \to \alpha$	eliminação da equivalência variante da eliminação da equivalência

1. Demonstre os argumentos abaixo utilizando tabela-verdade e o método de derivação natural (ou derivação direta).

   a. $p \vee \neg q, \neg p \to r, p \to q, \neg q \vdash r$
   b. $p \to q, q \to r, s \to \neg r, p \vdash \neg s$
   c. $\neg p \to q, r \to s, t \leftrightarrow \neg r, s \to \neg q, r \vdash p$
   d. $p \to r, q \to s, \neg r, (p \vee q) \wedge (r \vee s) \vdash s$
   e. $p \vee q, \neg q \leftrightarrow r, s \to (r \vee \neg p), r \vdash p$
   f. $p \to q, \neg r \wedge (t \to u), q \to \neg s, \neg t \vee \neg r \vdash \neg r \wedge (p \to \neg s)$