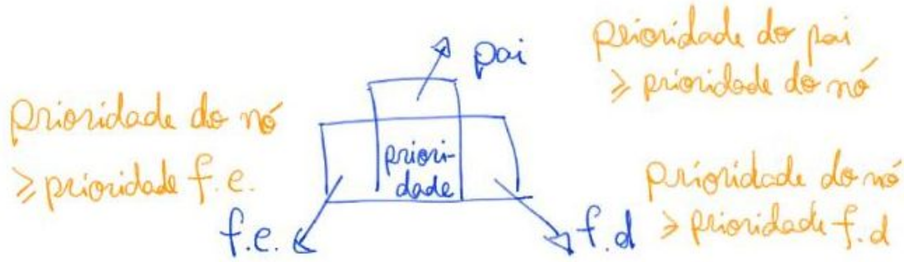
AED2 - Aula 12
Heap e ordenação por seleção eficiente (heapsort)

Heap é uma estrutura de dados eficiente para

- implementar o tipo abstrato de dados chamado Fila de Prioridades.
- Uma fila de prioridades deve suportar as operações de:
    - inserção de um elemento com um certo valor de prioridade,
    - edição da prioridade de um elemento (operação menos comum),
    - remoção do elemento com maior (ou menor) prioridade.
        - Esta propriedade não atende maior e menor simultaneamente.
        - Por isso temos filas de prioridade (e heaps)
            - de máximo e de mínimo.
                - vamos focar nas versões de máximo.

Um heap de máximo é uma árvore binária

- que respeita a propriedade do heap de máximo, i.e.,
    - o valor da prioridade de um nó é >= que a prioridade de seus filhos.

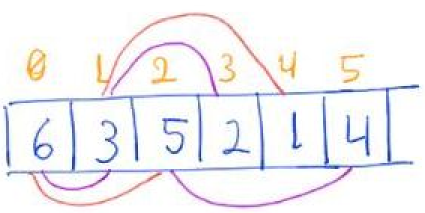


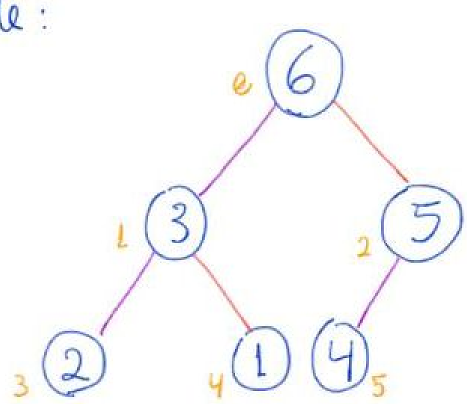
- Note que essa propriedade difere da propriedade de busca em árvores.

Embora corresponda a uma árvore binária,

- o heap é tradicionalmente implementado em um vetor,
    - como mostra o seguinte exemplo

- Exemplo de heap na visão de:
    - árvore binária
    - linearizado em vetor





- Em tal implementação o vetor é preenchido da esquerda para a direita,
    - enquanto os nós da árvore são lidos de cima para baixo e

            - em cada nível, também da esquerda para a direita.
- Isso é possível pois o heap é uma árvore binária quase completa.

Numa árvore binária completa
- cada nível p tem 2^p nós.
- Lembrando que a raiz fica no nível 0
    - e que o nível aumenta cada vez que
        - vamos de um nó para seu filho esquerdo ou direito
- observe que, numa árvore binária completa
    - todo nível tem o máximo de nós possíveis.

Numa árvore binária quase completa
- cada nível i tem 2^p nós,
    - com a possível exceção do último nível.
        - Se for esse o caso, no último nível as posições dos nós estão ocupadas da esquerda para a direita, sem espaços vazios.

Essa definição possibilita a implementação de um heap com m elementos
- em um vetor v que começa em 0 e vai até m - 1.
- Para tanto, dado um elemento na posição i,
    - é essencial saber quem é pai, filho esquerdo e filho direito de i.
- Como numa árvore binária o número de nós dobra a cada novo nível,
    - a posição do pai de é aproximadamente metade de i,
        - e a posição dos filhos é aproximadamente o dobro de i.
- Mais precisamente, determinamos as posições usando as seguintes fórmulas

```
#define PAI(i) (i - 1) / 2
#define FILHO_ESQ(i) (2 * i + 1)
#define FILHO_DIR(i) (2 * i + 2)
```

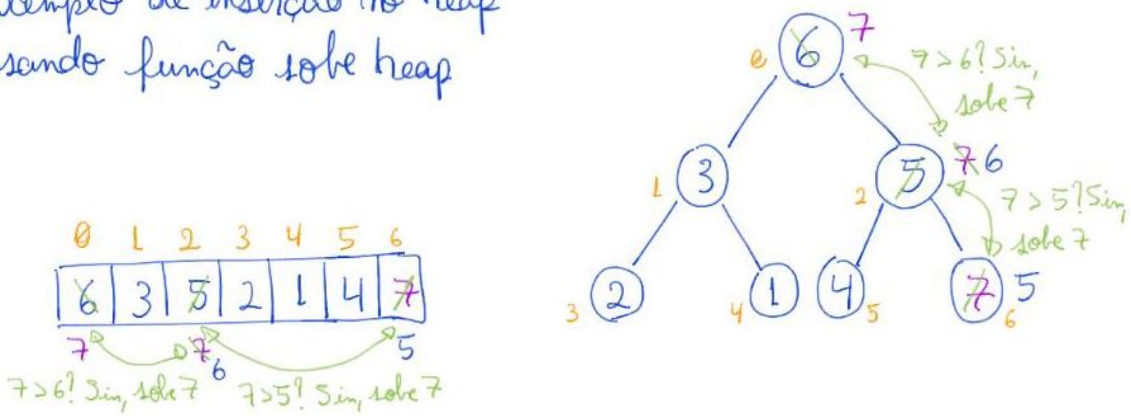
- Traduzindo a propriedade do heap de máximo para a implementação em vetor temos
    - v[PAI(i)] = v[(i - 1) / 2] >= v[i]
    - v[i] >= v[2 * i + 1] = v[FILHO_ESQ(i)]
    - v[i] >= v[2 * i + 2] = v[FILHO_DIR(i)]
- Observe que, o nó raiz, que não tem pai, fica na posição 0.
- Além disso, se FILHO_ESQ(i) ou FILHO_DIR(i) forem >= m,
    - então i não tem filho esquerdo ou direito, respectivamente.
- Note que os nós da segunda metade do vetor não tem filhos, já que
    - para i >= m / 2 temos FILHO_ESQ(i) = 2 * i + 1 >= 2 m / 2 + 1 >= m.
- De fato, em um heap (e em toda árvore binária quase completa),
    - o número de folhas (nós sem filhos) é pelo menos metade do total.

Lembrando que o nível p de uma árvore binária quase-completa

- tem 2^p nós, exceto talvez se p for o último nível,
  - temos que tais nós são 2^p - 1, 2^p, 2^p + 1, …, 2^(p + 1) - 2
- Dessa observação conseguimos determinar que
  - o nível de um nó i é piso(lg (i + 1))
- Demonstração:
  - seja p o nível do nó i. Então
    - 2^p - 1 <= i <= 2^(p + 1) - 2
    - 2^p <= i + 1 <= 2^(p + 1) - 1
    - 2^p <= i + 1 < 2^(p + 1)
    - p <= lg (i + 1) < p + 1
  - Como p é inteiro, piso(lg (i + 1)) = p
- Como o último nó é m - 1, conseguimos determinar que o último nível é
  - piso(lg (m - 1 + 1)) = piso(lg m)
  - e o total de níveis é piso(lg m) + 1,
    - já que o primeiro nível é 0.

Agora vamos estudar as duas funções mais importantes para manutenção do heap.
- A primeira é a sobe heap,
  - que veremos aplicada à seu uso mais comum,
    - a inserção de um novo elemento.

- Exemplo de inserção no heap usando função sobe heap



Código da sobeHeap:

```
void sobeHeap(int v[], int m)
{
   int f = m;
   while (f > 0 && v[PAI(f)] < v[f])
   {
       troca(&v[f], &v[PAI(f)]);
       f = PAI(f);
   }
}
```

- Exemplos de uso da sobeHeap:

```
   printf("Testando sobeHeap com elemento da ultima posicao\n");
```

```c
    sobeHeap(v, m - 1);
    printf("Criando um max heap mandando todos subirem da esquerda pra direita\n");
    for (i = 1; i < m; i++)
        sobeHeap(v, i);
```

Corretude e invariante da sobeHeap:

- o invariante principal que vale no início de cada iteração é
    - todo elemento em v[0 .. m] respeita a propriedade do heap,
        - exceto, possivelmente, pelo elemento f.
    - Isto é, v[i] <= v[PAI(i)] = v[(i - 1) / 2] vale para todo i != f.

Eficiência da sobeHeap:

- número de operações é O(lg m),
    - pois no início f = m e em cada iteração f é dividido por 2.

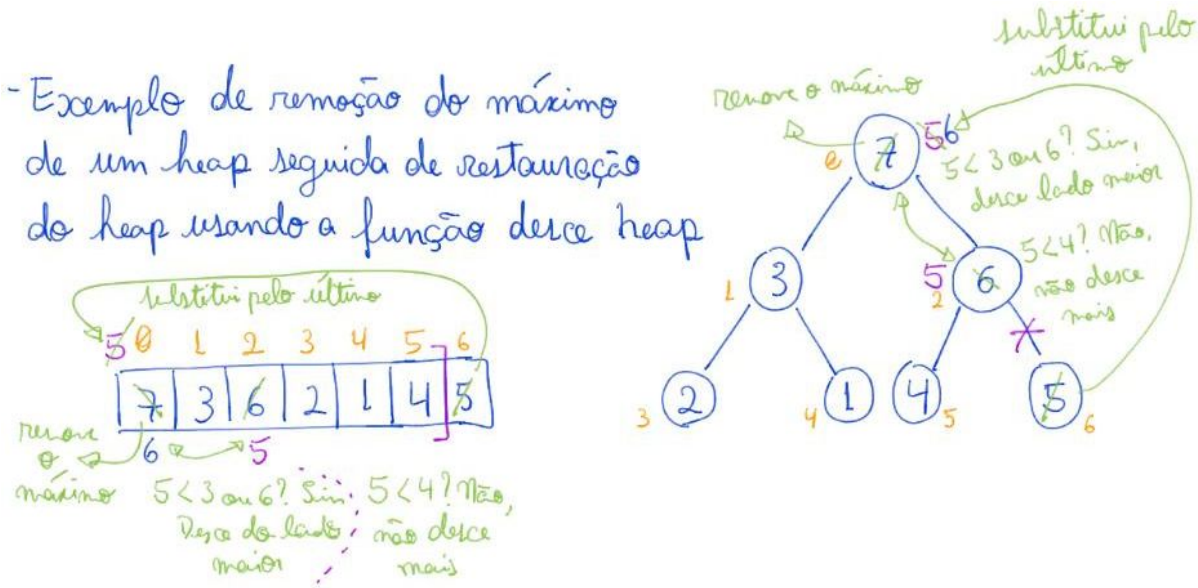
Código da insereHeap:

```c
int insereHeap(int v[], int m, int x)
{
    v[m] = x;
    sobeHeap(v, m);
    return m + 1;
}
```

- Exemplos de uso da insereHeap:

```c
    printf("Inserindo novo elemento no max heap\n");
    m = insereHeap(v, m, 999);
    printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem direta\n");
    m = 0;
    for (i = 0; i < n; i++)
        m = insereHeap(v, m, i);
    printf("Criando novo max heap usando insereHeap - ordem inversa\n");
    m = 0;
    for (i = 0; i < n; i++)
        m = insereHeap(v, m, n - i - 1);
```

- A segunda função mais importante na manutenção do heap é a desce heap,
    - que veremos aplicada à seu uso mais comum,
        - a remoção de um novo elemento.



Código da desceHeap:

```
void desceHeap(int v[], int m, int k)
{
   int p = k, f;
   while (FILHO_ESQ(p) < m && (v[FILHO_ESQ(p)] > v[p] || (FILHO_DIR(p) < m &&
v[FILHO_DIR(p)] > v[p])))
   {
       f = FILHO_ESQ(p);
       if (FILHO_DIR(p) < m && v[FILHO_DIR(p)] > v[f])
           f = FILHO_DIR(p);
       troca(&v[p], &v[f]);
       p = f;
   }
}
```

- Exemplos de uso da desceHeap:

```
   printf("Testando desceHeap com elemento da primeira posicao\n");
   v[0] = 0;
   desceHeap(v, m, 0);
   printf("Criando um max heap mandando todos descerem da direita pra esquerda\n");
   for (i = m - 1; i >= 0; i--)
       desceHeap(v, m, i);
```

Corretude e invariante da desceHeap:

- o invariante principal que vale no início de cada iteração é
    - todo elemento em v[0 .. m - 1] respeita a propriedade do heap,
        - exceto, possivelmente, pelo elemento p.
    - Isto é, v[i] >= v[FILHO_ESQ(i)] = v[2 * i + 1]
        - e v[i] >= v[FILHO_DIR(i)] = v[2 * i + 2] vale para todo i != p.

Eficiência da desceHeap:

- número de operações é O(lg m),

    - pois em cada iteração descemos um nível na árvore do heap
        - e o maior nível é piso(lg m).

Código da removeHeap:

```
int removeHeap(int v[], int m, int *x)
{
   *x = v[0];
   troca(&v[0], &v[m - 1]);
   desceHeap(v, m, 0);
   return m - 1;
}
```

- Exemplo de uso do removeHeap:

```
   m = removeHeap(v, m, &x);
```

Agora que nosso heap de máximo está funcionando,

- podemos voltar a atenção ao problema de ordenar
    - um vetor v de tamanho n.

Comecemos relembrando a ideia do selectionSort,

- que percorre o vetor da esquerda para a direita
    - e em cada iteração busca o menor elemento do sufixo do vetor
        - colocando este na posição corrente.

Código do selectionSort:

```
void selectionSort(int v[], int n)
{
   int i, j, ind_min, aux;
   for (i = 0; i < n - 1; i++)
   {
       ind_min = i;
       for (j = i + 1; j < n; j++)
           if (v[j] < v[ind_min])
               ind_min = j;
       aux = v[i];
       v[i] = v[ind_min];
       v[ind_min] = aux;
   }
}
```

Chama atenção neste algoritmo que ele realiza sucessivas

- buscas pelo menor elemento de um conjunto.
- Mas nós acabamos de estudar uma estrutura de dados que é muito eficiente
    - justamente nesse tipo de busca.

Da união dessas ideias surge o algoritmo heapSort.

- Primeiro re-organizamos os elementos do vetor
    - de modo a construir um heap de máximo.
- Então, em cada iteração,
    - extraímos o maior elemento do heap e o colocamos
        - na última posição do vetor corrente.
- É basicamente a ideia do selectionSort com um heap
    - o motivo de usarmos um heap de máximo,
        - e não de mínimo,
    - será explicado em seguida.

Código do heapsort1:

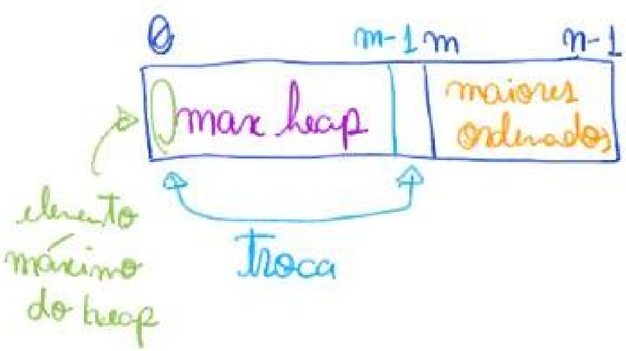
```
void heapsort1(int v[], int n)
{
    int i, m = n;
    for (i = 1; i < n; i++)
        sobeHeap(v, i);
    for (m = n - 1; m > 0; m--)
    {
        troca(&v[0], &v[m]);
        desceHeap(v, m, 0);
    }
}
```

- Exemplo de uso do heapsort1:

```
printf("Ordenando com heapsort1\n");
heapsort1(v, m);
```

Corretude e invariante da heapSort1:

- os invariantes principais que valem no início de cada iteração do segundo laço são
    - v[m .. n - 1] está ordenado em ordem crescente,
    - v[0 .. m - 1] é um heap de máximo,
    - v[0 .. m - 1] <= v[m .. n - 1]
        - exceto, possivelmente, pelo elemento p.
    - Isto é, v[i] >= v[FILHO_ESQ(i)] = v[2 * i + 1]
        - e v[i] >= v[FILHO_DIR(i)] = v[2 * i + 2] vale para todo i != p.



Eficiência de tempo da heapsort1:

- o algoritmo executa da ordem de n lg n operações, i.e., O(n lg n)
  - pois tanto o primeiro quando o segundo laço executam O(n) vezes
    - e em cada iteração invocam uma operação do heap
      - que leva tempo O(lg n).

Código do heapsort2:

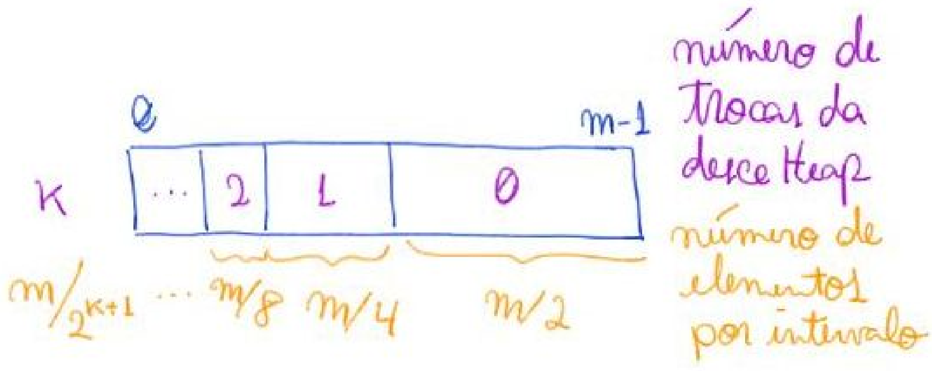
```
void heapsort2(int v[], int n)
{
   int i, m = n;
   for (i = n / 2; i >= 0; i--)
       desceHeap(v, n, i);
   for (m = n - 1; m > 0; m--)
   {
       troca(&v[0], &v[m]);
       desceHeap(v, m, 0);
   }
}
```

- Exemplo de uso do heapsort2:

```
printf("Ordenando com heapsort2\n");
heapsort2(v, m);
```

Eficiência de tempo da heapsort2:

- o algoritmo executa da ordem de n lg n operações, i.e., O(n lg n)
  - pois no segundo laço ele realiza n extrações do máximo,
    - cada uma seguida por uma operação de desceHeap
      - que realiza da ordem de O(lg n) operações.
- No entanto, vale destacar que a constante de tempo desse algoritmo
  - é melhor que a do anterior, porque no primeiro laço
    - ele contrói o heap em tempo linear, i.e., O(n).
  - Isso pode parecer estranho, já que o primeiro laço realiza
    - O(n) chamadas à função desceHeap,
      - que leva tempo O(lg n).
- Vamos fazer uma análise mais cuidadosa. Note que
  - para os n/2 últimos elementos do vetor nenhuma troca é realizada,
  - para os próximos n/4 desceHeap fará no máximo 1 troca,
  - e para os próximos n/8 desceHeap fará no máximo 2 trocas.
- Em geral, teremos n/2^(k+1) elementos realizando k trocas
  - para k entre 0 e lg n.
- Assim, o total de trocas é dado pelo somatório
  - n/2 * 0 + n/4 * 1 + n/8 * 2 + … + n/2^(k+1) * k + … + 1 * lg n
  - cujo valor <= O(n)



Estabilidade:

- ordenação não é estável, pois a manipulação do heap destrói a estabilidade
  - para visualizar, considere a troca que ocorre antes do desceHeap,
    - nela o último elemento do heap corrente
    - vai para a posição do primeiro,
      - invertendo a posição relativa deste com todos os seus iguais.

Eficiência de espaço:

- ordenação é in place, pois não usa vetor auxiliar,
  - e as únicas variáveis utilizadas
    - tem tamanho constante em relação ao vetor de entrada.
- De fato, usamos um heap de máximo ao invés de um heap de mínimo
  - para que o algoritmo possa ser in-place,
  - já que ao removermos o elemento máximo do heap,
    - ele diminui no final do vetor,
  - e é nessa posição liberada no final que devemos colocar
    - o maior elemento que acabamos de remover.

Curiosidade:

- se construirmos o heap num vetor auxiliar,
  - o algoritmo deixa de ser in place,
- Neste caso, passamos a poder utilizar um heap de mínimo, por exemplo.
- Além disso, seu melhor caso pode mudar,
  - pois quando o vetor original já está em ordem crescente
    - a construção do heap não precisa inverter todos os elementos.
- Destado que isso é só uma curiosidade, pois
  - a economia de memória é desejável,
  - e a implementação mais eficiente do heapsort é a segunda que vimos.

Código do heapsort3:

```
void heapsort3(int v[], int n)
```

```c
{
    int i, m = n, *w;
    w = mallocSafe(sizeof(int) * n);
    for (i = 0; i < n; i++)
        w[n - i - 1] = v[i];
    for (i = 1; i < n; i++)
        sobeHeap(w, i);
    for (m = n - 1; m >= 0; m--)
    {
        v[m] = w[0];
        w[0] = w[m];
        desceHeap(w, m, 0);
    }
    free(w);
}
```

- Exemplo de uso do heapsort3:

```c
    printf("Ordenando com heapsort3\n");
    heapsort3(v, m);
```

Animação:

- Visualization and Comparison of Sorting Algorithms - www.youtube.com/watch?v=ZZuD6iUe3Pc