Estruturas Discretas

Relações
Relação de ordem

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@dc.ufscar.br

Relações

- **Relação**
  - Relação de ordem
  - Conjunto parcialmente ordenado
  - Ordem total
  - Predecessor e sucessor
  - Diagrama de Hasse
  - Elementos comparáveis e não comparáveis
  - Cadeia e anti-cadeia
  - Elemento mínimo e elemento máximo
  - Elemento minimal e elemento maximal
  - Supremo e ínfimo
  - Reticulado

Relações

- **Relação de ordem**
  - Seja R uma relação em um conjunto A
  - Dizemos que R é uma **relação de ordem parcial** (ou apenas ordem parcial) se R é <u>reflexiva</u>, <u>antissimétrica</u> e <u>transitiva</u>
    - Denotado por $\preccurlyeq$
  - Em uma ordem parcial é possível estabelecer uma ordenação para os elementos
  - Exemplo
    - A relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$:
      - é reflexiva (pois $A \subseteq A$ para todo conjunto A)
      - é antissimétrica (pois se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$)
      - é transitiva (se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$)

Relações

- **Relação de ordem**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de ordem parcial no conjunto A = { 1, 2, 3 }
    - a) R = { (1,1), (2,2), (2,3) }
    - b) S = { (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3) }
    - c) T = { (1,1), (2,2), (3,3) }
    - d) U = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3) }
    - e) V = { (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3) }

RESPOSTAS

a) Não, pois não é reflexiva, falta o par (3,3)
b) Não, pois não é transitiva, falta o par (1,3)
c) SIM
d) Não, pois não é antissimétrica já que há o par (1,2) e o (2,1) e 1 ≠ 2
e) SIM

Relações

- **Relação de ordem**
  - Seja R uma relação em um conjunto A
  - Dizemos que R é uma **relação de ordem parcial estrita** (ou apenas ordem parcial estrita) se R é antirreflexiva, antissimétrica e transitiva
    - Denotado por $\prec$
  - Em uma ordem parcial é possível estabelecer uma ordenação para os elementos
  - Exemplo
    - A relação $<$ (estritamente menor que) sobre os inteiros:
      - é antirreflexiva (por exemplo, $3 < 3$ é falso)
      - é transitiva (por exemplo, $3 < 4$ e $4 < 5$ então $3 < 5$)
      - é antissimétrica como consequência

Relações

- **Relação de ordem**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de ordem parcial estrita no conjunto A = { 1, 2, 3 }

    a) R = { (1,1), (2,1), (2,3) }

    b) S = { (1,2), (2,3) }

    c) T = { (1,2), (2,3), (1,3) }

    d) U = { (1,2), (2,1) }

    e) V = { (1,2), (1,3) }

RESPOSTAS

a) Não, pois não é antirreflexiva, tem o par (1,1)
b) Não, pois não é transitiva, falta o par (1,3)
c) SIM
d) Não, pois não é antissimétrica já que há o par (1,2) e o (2,1) e 1 ≠ 2
e) SIM

Relações

- **Relação de ordem**
  - A relação *a* divide *b* no conjunto $\mathbb{N}^*$ (inteiros positivos) é uma relação de ordem parcial?

RESPOSTA

SIM, pois

- é reflexiva ($a|a$, $\forall\ a \in \mathbb{N}^*$)

- é antissimétrica (se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$)

- é transitiva (se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$)

Relações

- **Conjunto parcialmente ordenado (PO)**
  - Um conjunto A juntamente com uma ordem parcial R é dito **parcialmente ordenado** (poset – *partially ordered set*)
    - É o par ordenado (A, R) em que R é uma relação de ordem parcial no conjunto A (também chamado de conjunto fundamental do par ordenado)
    - Denotado por $(A, \preccurlyeq)$

Relações

- **Conjunto parcialmente ordenado (PO)**
  - Exemplo
    - Considerando-se a ordem parcial R ↔ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 6, 12 }, ou seja,
      - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (6, 12), (12, 12) }

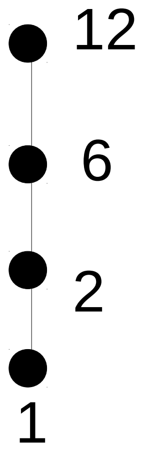
→ Como R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, P = (A, R) é um conjunto PO

Relações

- **Ordem total (ou ordem linear)**
  - Os conjuntos parcialmente ordenados podem conter elementos não comparáveis
    - Esta é a característica que torna a relação de ordem algo “parcial”
  - Uma **ordem total**, ou **ordem linear** é um conjunto parcialmente ordenado no qual <u>não existem</u> elementos <u>não</u> comparáveis
    - Para todos os *x* e *y* no conjunto PO, exatamente uma das seguintes possibilidades é verdadeira:
      - $x \preccurlyeq y$,
      - $y \preccurlyeq x$,
      - $x = y$

Relações

- **Ordem total (ou ordem linear)**
  - Exemplo
    - Considerando-se a ordem parcial R ↔ “*a* divide *b*” em A = { 1, 2, 6, 12 }, ou seja,
      - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (6, 12), (12, 12) }
    - ➔ O conjunto (A, R) é uma ordem total



Relações

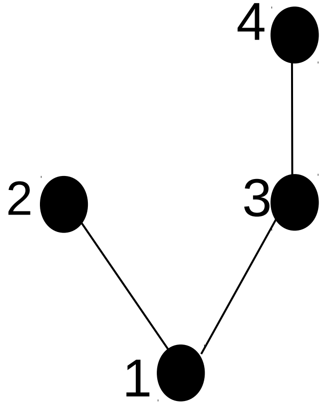
- **Predecessor e sucessor**
  - Seja (X, R) um conjunto parcialmente ordenado
    - Se x R y e $x \neq y$ ($x \prec y$), dizemos que
      - x é **predecessor** de y
      - y é **sucessor** de x
    - Se x é **predecessor** de y e não existe z com x R z e z R y (não existe $x \prec z \prec y$), dizemos que
      - x é **predecessor imediato** de y
      - y é **sucessor imediato** de x

Relações

- **Predecessor e sucessor**
  - Exemplo
    - Considerando-se a ordem parcial R ↔ “*a* divide *b*” em A = { 1, 2, 6, 12 }, ou seja,
      - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (6, 12), (12, 12) }
      - Os predecessores de 6 são: 1, 2
      - Os predecessores imediados de 6 são: 2

Relações

- **Diagrama de Hasse**
  - É a representação visual de um poset (A, R) na qual
    - Cada elemento de A é representado por um ponto (ou vértice)
    - Se o par (x, y) está em R então o ponto que representa x é colocado abaixo do ponto que representa y e os dois pontos são unidos por um segmento de reta (não necessariamente na vertical)
    - Exemplo:



Relações

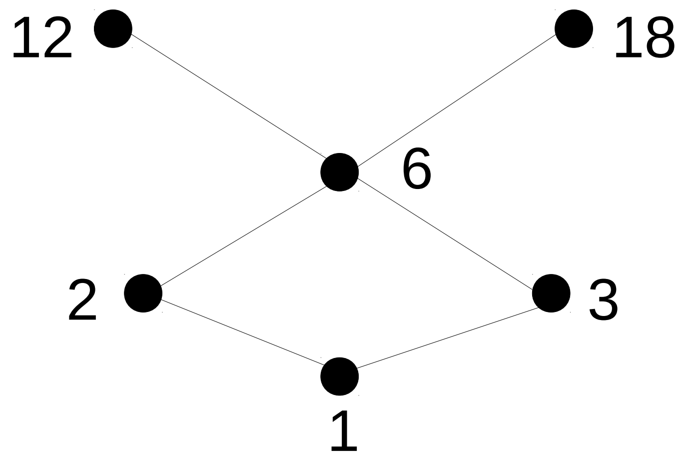
- **Diagrama de Hasse**
  - É a representação visual de um poset (A, R) na qual
    - Cada elemento de A é representado por um ponto (ou vértice)
    - Se o par (x, y) está em R então o ponto que representa x é colocado abaixo do ponto que representa y e os dois pontos são unidos por um segmento de reta (não necessariamente na vertical)
  - ➔ Apesar de serem bastante semelhantes aos grafos, os Diagramas de Hasse têm um significado diferente e são usados especificamente para ilustrar conjuntos parcialmente ordenados, por isso <u>a posição do ponto tem importância</u>

Relações

- **Diagrama de Hasse**
  - Considerações importantes
    - Não é necessário traçar uma ligação de um ponto com ele mesmo, pois está implícito que ela existe, pois a relação de ordem parcial <u>é reflexiva</u>
    - Não é necessário ligar todos os pares de pontos que estão relacionados por R, pois a relação de ordem parcial <u>é transitiva</u>
  - O diagrama de Hasse nos dá toda a informação que precisamos sobre a ordem parcial:
    - Os nós e segmentos de reta nos dão os pares
    - O resto é completado usando o fato de ser uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva

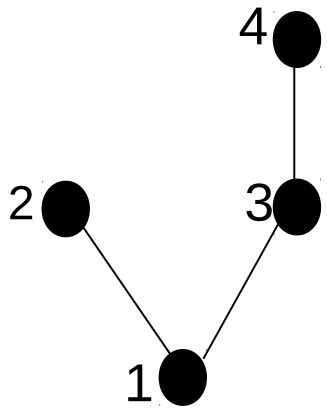
Relações

- **Diagrama de Hasse**
  - Considerando-se a ordem parcial R ↔ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 3, 6, 12, 18 }, ou seja,
    - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (6, 12), (12, 12), (1, 18), (2, 18), (3, 18), (6, 18), (18, 18) }
    - Diagrama de Hasse para esse PO:



Relações

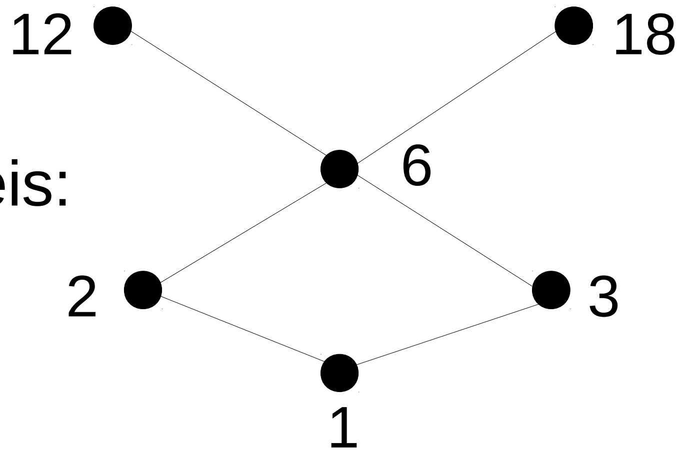
- **Diagrama de Hasse**
  - Dado o digrama de Hasse abaixo



- Quais são os pares ordenados da ordem parcial por ele representada?
- R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (1, 4) }

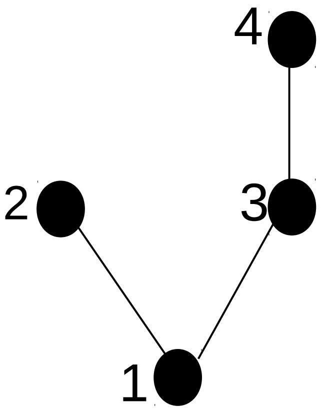
Relações

- **Elementos comparáveis e não comparáveis**
  - Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, R) e $x, y \in A$
    - Dizemos que os elementos *x* e *y* são **comparáveis** se e somente se *x* R *y* ou *y* R *x*
    - Se os elementos *x* e *y* não estiverem relacionados por meio da relação de ordem parcial R, então eles são **não comparáveis**
    - Exemplo
      - Elementos não comparáveis:
      - 2 e 3 e 12 e 18



Relações

- **Elementos comparáveis e não comparáveis**
  - Dado o digrama de Hasse abaixo



  - Quais são os
    - Elementos não comparáveis: 2 e 4, 2 e 3
    - Elementos comparáveis: 1 e 4, 1 e 2, 1 e 3, 3 e 4

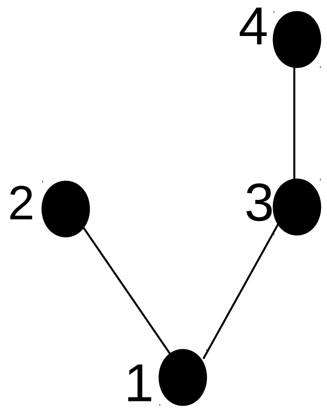
Relações

- **Cadeia e anticadeia**
  - Seja P = (X, R) um conjunto PO e seja C $\subseteq$ X
    - Dizemos que C é uma **cadeia** de P se os elementos de todos os pares em C são comparáveis
    - ➔ Uma relação de ordem total é uma cadeia

    - Dizemos que C é uma **anticadeia** de P se, para todos os pares de elementos distintos em C, os elementos são não comparáveis

Relações

- **Cadeia e anticadeia**
  - Exemplo
    - Dado o digrama de Hasse abaixo



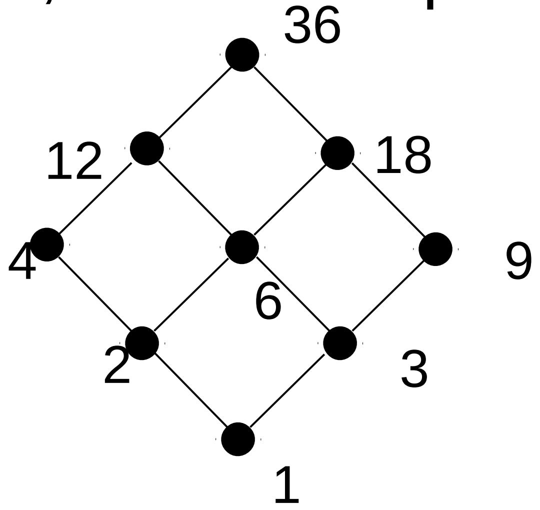
    - São exemplos de cadeias: {1, 2}, {1, 4} e {1, 3, 4}
    - São exemplos de anticadeias: {2, 3} e {2, 4}

Relações

- **Elemento mínimo e elemento máximo**
  - Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, $\preccurlyeq$) e $x, y \in$ A
    - Dizemos que x é **elemento mínimo** (ou menor elemento) se <u>para todo</u> z $\in$ A, temos $x \preccurlyeq z$
      - ➔ x é mínimo se todos os outros elementos do conjunto PO estão acima de x
    - Dizemos que y é **elemento máximo** (ou maior elemento) se <u>para todo</u> z $\in$ A, temos $z \preccurlyeq y$
      - ➔ y é máximo se todos os outros elementos do conjunto PO estão abaixo de y

Relações

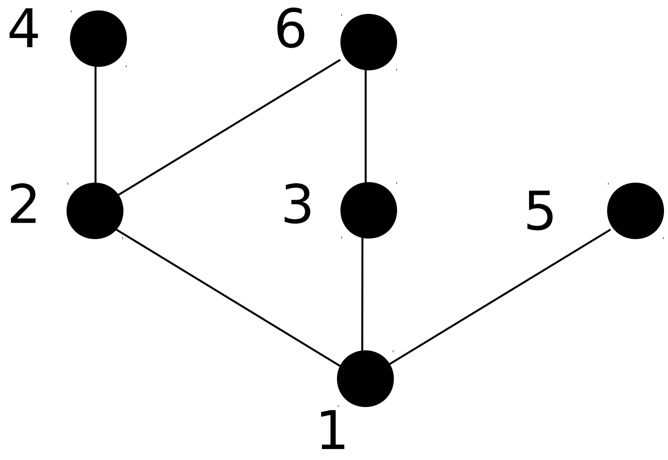
- **Elemento mínimo e elemento máximo**
  - Exemplos
    - Dado o conjunto PO que consiste dos divisores positivos de 36, ordenados por divisibilidade



    - Elemento mínimo = 1 (está abaixo de todos os outros elementos do conjunto PO)
    - Elemento máximo = 36 (está acima de todos os outros elementos)

Relações

- **Elemento mínimo e elemento máximo**
  - Dado o conjunto PO dos inteiros de 1 a 6 ordenados por divisibilidade



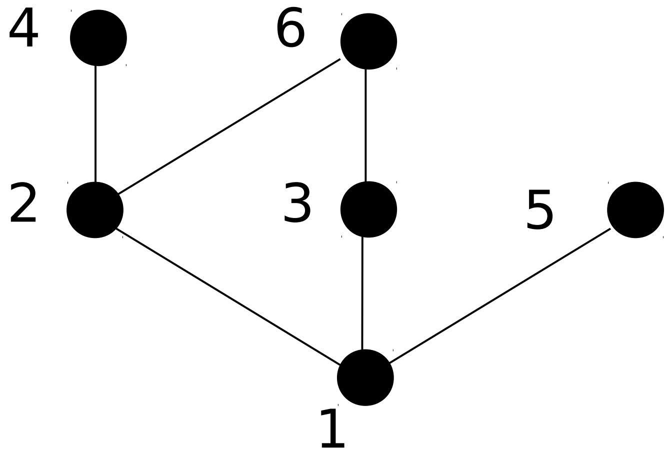
  - Elemento mínimo = 1
  - Elemento máximo = não há

Relações

- **Elemento minimal e elemento maximal**
  - Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, $\preccurlyeq$) e $x, y \in$ A
    - Dizemos que x é **elemento minimal** se não existe z $\in$ A tal que $z \preccurlyeq x$
      - x é minimal se não existe qualquer elemento estritamente abaixo dele
    - Dizemos que y é **elemento maximal** se não existe z $\in$ A tal que $y \preccurlyeq z$
      - y é maximal se não existe qualquer elemento estritamente acima dele

Relações

- **Elemento minimal e elemento maximal**
  - Dado o conjunto PO dos inteiros de 1 a 6 ordenados por divisibilidade



- Elementos minimais = 1 (é mínimo e minimal)
- Elementos maximais = 4, 5 e 6

Relações

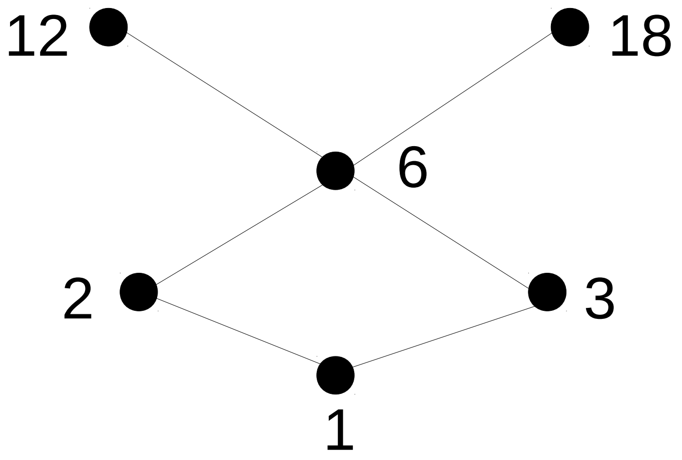
- **Elemento mínimo, máximo, minimal e maximal**
  - Mínimo X Minimal e Máximo X Maximal
    - No Diagrama de Hasse
      - O elemento mínimo está abaixo de <u>todos</u> os outros
      - Um elemento minimal <u>não tem</u> elementos abaixo dele
      - O elemento máximo está acima de <u>todos</u>
      - Um elemento maximal <u>não tem</u> elementos acima dele

Relações

- **Supremo e Ínfimo**
  - Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, $\preccurlyeq$) e $x, y \in$ A
    - O **supremo** de x e $y \in$ A em (A, $\preccurlyeq$) é o menor dos limitantes superiores
    - O **ínfimo** de x e $y \in$ A em (A, $\preccurlyeq$) é o maior dos limitantes inferiores

Relações

- **Supremo e Ínfimo**
  - Dado o poset representado pelo Diarama de Hasse

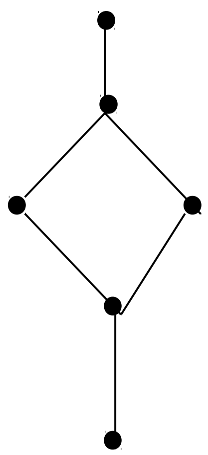


  - Para x = 2 e y = 3
    - Supremo = 6
    - Ínfimo = 1

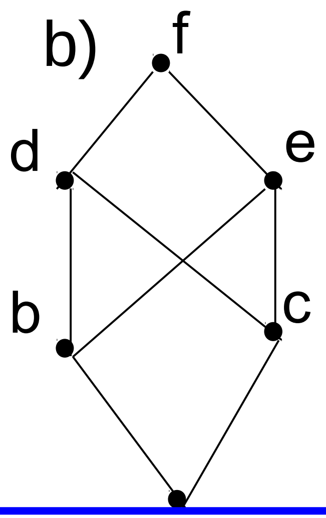
Relações

- **Reticulado**
  - Um reticulado é um poset no qual 2 elementos arbitrários *x* e *y* têm um supremo e um ínfimo
  - Exemplos

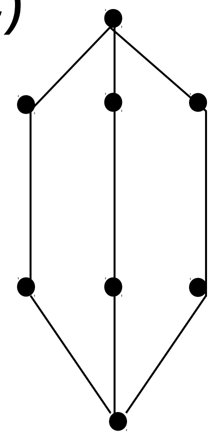
a)



b)



c)



RESPOSTA

São reticulados: a e c

b) não é, pois os elementos *b* e *c* não têm supremo. Os elementos *d*, *e* e *f* são lim. sup. de *b* e *c*, no entanto não é possível determinar o menor entre eles

Relações

- **Propriedades das relações**

	Relação de equivalência	Relação de ordem parcial	Relação de ordem parcial estrita
Reflexiva	✓	✓	
Antirreflexiva			✓
Simétrica	✓		
Antissimétrica		✓	✓
Transitiva	✓	✓	✓
Característica	Determina uma partição	Determina uma ordenação (predecessores e sucessores)	