Estruturas Discretas

Relações
Introdução e definições

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@dc.ufscar.br

Relações

- **Relação**
  - É uma comparação entre objetos
    - Relaciona pares de objetos por meio de uma “associação” entre eles
    - É, portanto, um conjunto de <u>pares ordenados</u>
  - Exemplos
    - Maior do que
    - É paralelo a
    - É subconjunto de
  - Algumas relações abordadas neste curso
    - Relação de equivalência
    - Relação de ordem
    - Funções

Relações

- **Relação**
  - Par ordenado
  - Produto cartesiano
  - Relação (definição)
    - Autorrelação
    - Relações sobre mais de dois conjuntos
  - Operações
  - Representação gráfica
  - Relação de igualdade
  - Relação inversa

Relações

- **Par ordenado**
  - Um par de elementos da forma (x, y) onde
    - x é o primeiro elemento do par e
    - y é o segundo elemento do par
    - ➔ A ordem é importante!
      - (a, b) = (c, d) se e somente se a = c e b = d
      - (a, b) $\neq$ (b, a) a menos que a = b
  - Exemplo
    - Os conjuntos {1, 2} e {2, 1} são iguais
    - Mas os pares ordenados (1, 2) e (2, 1) não são iguais!

Relações

- **Produto cartesiano**
  - O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com o primeiro elemento em A e o segundo em B

$$\mathbf{A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}}$$

  - ➔ Denotado por $A \times B$ e $A^2 = A \times A$
  - Exemplo
    - Sejam A = {1, 2} e B = {3, 4}
      - $A \times B = \{ (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) \}$
      - $B \times A = \{ (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2) \}$
      - $A^2 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$
      - $A^3 = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2) \}$

Relações

- **Produto cartesiano**
  - IMPORTANTE
    - A ordem dos conjuntos altera o resultado do produto cartesiano

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

    - Para conjuntos A e B finitos, o número de elementos no produto cartesiano é:

$$\mathbf{|\ A \times B\ | = |A| * |B|}$$

      - Produto cartesiano de
        - Três conjuntos = conjuntos de triplas
        - ...
        - *n* conjuntos = conjunto de *n*-tuplas

Relações

- **Produto cartesiano**
  - Exemplo
    - Sejam A = { 1, 2 }, B = { a, b, c } e C = { x, y }
    - $A \times B \times C$ = { (1, a, x), (1, a, y), (1, b, x), (1, b, y), (1, c, x), (1, c, y), (2, a, x), (2, a, y), (2, b, x), (2, b, y), (2, c, x), (2, c, y) }
    - $|A \times B \times C| = |A| * |B| * |C| = 2 * 3 * 2 = 12$

Relações

- **Produto cartesiano**
  - O produto cartesiano pode ser estendido para qualquer número finito de conjuntos
  - Para quaisquer conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o conjunto de todas as *n*-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ é chamado de produto cartesiano de $A_1, A_2, \ldots, A_n$
    - Denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} A_i$

Relações

- **Relação**
  - Uma relação R de A para B é um subconjunto de $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

  - ➔ Uma relação é, portanto, um conjunto de pares ordenados
  - Uma relação distingue os pares ordenados que satisfazem a “regra” que a define
    - x R y indica que o par ordenado (x, y) satisfaz a relação R
      - ➔ Dizemos que x é R-relacionado a y
  - ➔ R pode ser definida com palavras ou listando seus elementos (nesse caso não é preciso uma “regra”)

Relações

- **Autorrelação (ou endorrelação)**
  - Uma autorrelação R é um subconjunto de $A \times A$

$$\mathbf{R \subseteq A \times A}$$

ou

$$\mathbf{R \subseteq A^2}$$

    - Nesse caso diz-se que R é uma relação sobre ou em A

Relações

- **Relações sobre mais do que dois conjuntos**
  - Sejam A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}, C = {x, y} e R uma relação sobre $A \times B \times C$

    R = {(1, b,y), (1,c,x), (2,b,x), (2,b,y), (3,a,y)}

    - De forma geral, dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, uma relação n-ária R pode ser definida sobre o produto cartesiano

      $$\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots A_n}$$

    - Sendo que R será formado por *n*-tuplas da forma

      $$\mathbf{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

      tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$

Relações

- **Relação**
  - Exemplo
    - Seja A = {1, 2}
    - A^2 = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) }
    - Os pares ordenados de A^2 que satisfazem as relações a seguir seriam:
      - Relação de “igualdade” = (1, 1) e (2, 2)
      - Relação de “menor do que” = (1, 2)

Relações

- **Relação**
  - Sejam A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { 4, 5, 6, 7 } os conjuntos a seguir representam relações entre quais conjuntos?
    - a) C = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) }
    - b) D = { (1, 2), (3, 2) }
    - c) E = { (1, 4), (1, 5), (4, 7) }
    - d) F = { (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3) }
    - e) G = { (1, 7), (7, 1) }

RESPOSTAS

a) Relação em A

b) Relação em A

c) Relação de A para B

d) Relação de B para A

e) É uma relação, mas não é de A para B nem de B para A

Relações

- **Relação**
  - Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em $\mathbb{N}$, sublinhe apenas os pares ordenados que pertencem a R:

    a) $x \, R \, y \leftrightarrow x = y + 1$;

    (2, 2), (2, 3), (3, 3), <u>(3, 2)</u>

    b) $x \, R \, y \leftrightarrow x$ divide y;

    <u>(2, 4)</u>, (2, 5), <u>(2, 6)</u>

    c) $x \, R \, y \leftrightarrow x$ é ímpar;

    (2, 3), <u>(3, 4)</u>, (4, 5), <u>(5, 6)</u>

    d) $x \, R \, y \leftrightarrow x > y^2$;

    (1, 2), <u>(2, 1)</u>, <u>(5, 2)</u>, (6, 4), (4, 3)

Um número natural *x* divide outro número natural *y* quando o resultado da divisão de *y*/*x* é um número natural.

Relações

- **Operações**
  - Todas as operações sobre conjuntos se aplicam às relações
    - Já que uma relação nada mais é do que um conjunto de pares ordenados
  - Exemplo
    - Sejam R e S duas relações em $\mathbb{N}$ definidas por $x\ R\ y \leftrightarrow x = y$ e $x\ S\ y \leftrightarrow x < y$. Então

      a) a relação $R \cup S$ é descrita como: $x\ (R \cup S)\ y \leftrightarrow x \leq y$

      b) a relação R' é descrita como: $x\ R'\ y \leftrightarrow x \neq y$

      c) a relação S' é descrita como: $x\ S'\ y \leftrightarrow x \geq y$

      d) o conjunto que representa a relação $R \cap S$ é $\emptyset$

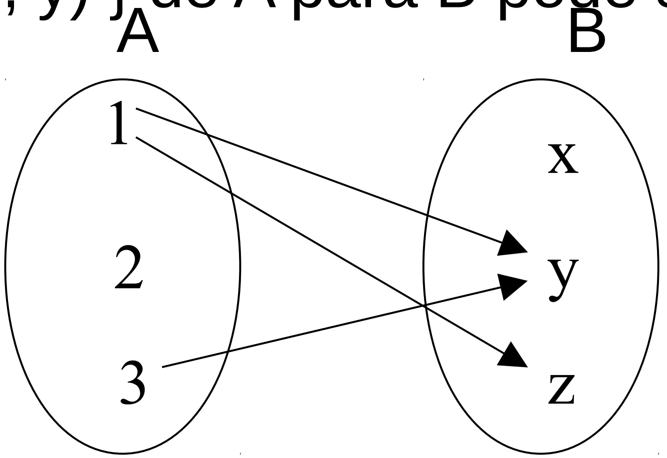
Relações

- **Representação gráfica**
  - **Matriz retangular**
    - As linhas são nomeadas com os elementos de A e as colunas, com os de B
    - Cada posição da matriz terá 1 ou 0, dependendo se a ($a \in A$) está ou não relacionado com b ($b \in B$)
    - Exemplo
      - Sejam A = {1, 2, 3} e B = {x, y, z}
      - R = { (1, y), (1, z), (3, y) } de A para B pode ser representada como

	x	*y*	*z*
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

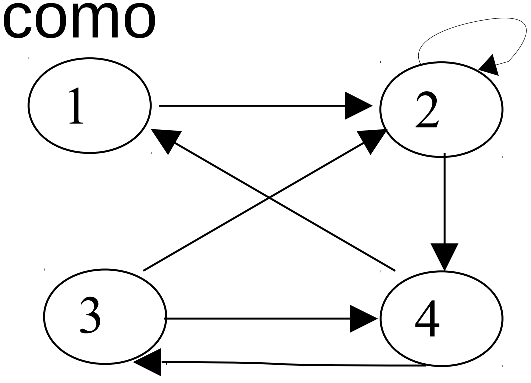
Relações

- **Representação gráfica**
  - **Diagrama de setas** (Diagrama de Venn)
    - Os elementos de A e B são representados em dois discos disjuntos e setas são inseridas de a ($a \in A$) para b ($b \in B$), se a estiver relacionado com b
    - Exemplo
      - Sejam A = {1, 2, 3} e B = {x, y, z}
      - R = { (1, y), (1, z), (3, y) } de A para B pode ser representada como



Relações

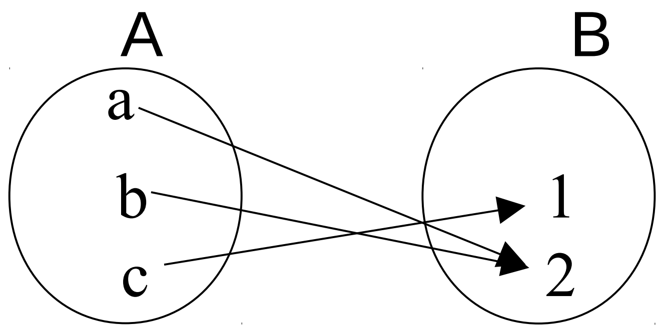
- **Representação gráfica**
  - **Grafo orientado para uma autorrelação**
    - Os elementos do conjunto A são representados por vértices do grafo e setas são inseridas de a ($a \in A$) para b ($b \in A$), se a estiver relacionado com b
    - Exemplo
      - Seja A = {1, 2, 3, 4}
      - R = { (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3) } em pode ser representada como



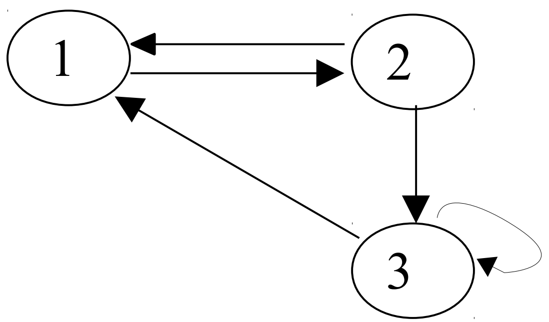
Relações

- **Representação gráfica**
  - Para cada uma das representações gráficas a seguir, liste os pares ordenados correspondentes

a)



c)



b)

	a	*b*	*c*
1	0	1	1
2	1	0	0

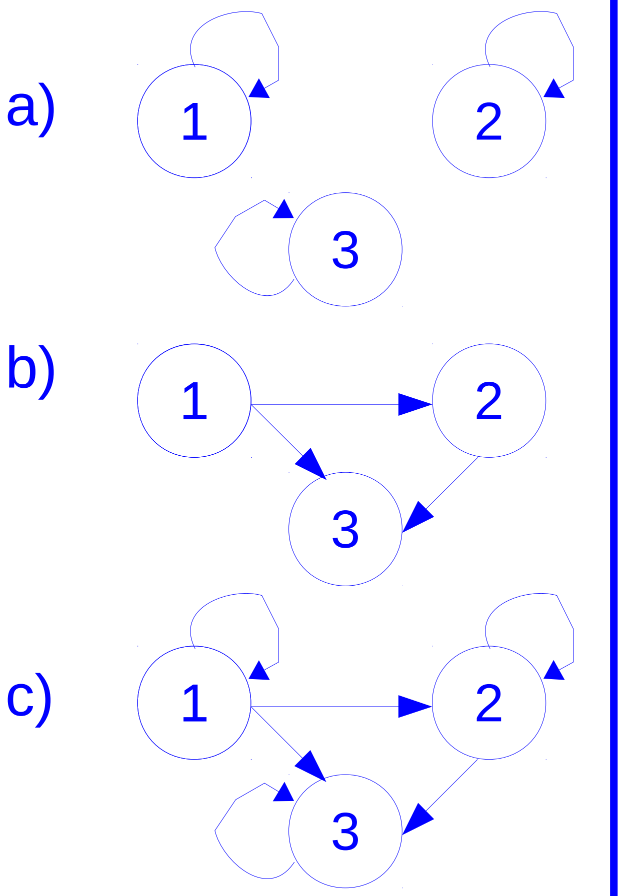
RESPOSTAS

a) R = { (a, 2), (b, 2), (c, 1) }
b) R = { (1, b), (1, c), (2, a) }
c) R = { (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3) }

Relações

- **Representação gráfica**
  - Seja A = { 1, 2, 3 }, represente graficamente cada uma das relações a seguir em A
    - a) x R y ↔ x = y
    - b) x S y ↔ x < y
    - c) x (R ∪ S) y

RESPOSTAS



Relações

- **Relação de igualdade**
  - Também conhecida como **identidade** ou **relação diagonal**
  - A relação igualdade I sobre A é a relação em A definida por

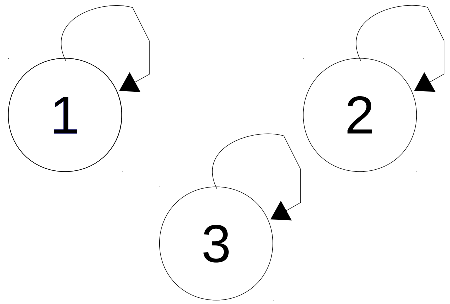
$$I = \{ (a, a) \mid a \in A \}$$

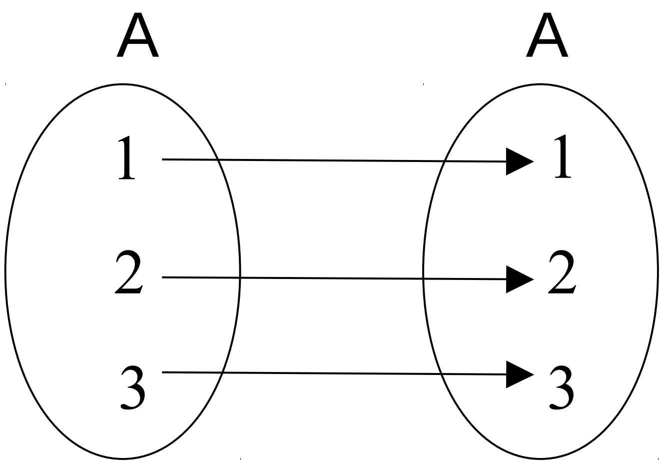
  - *Lê-se: "O conjunto dos pares formados pelo mesmo elemento a, tal que a pertence ao conjunto A".*
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4}
    - A relação de igualdade em A é I = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) }

Relações

- **Relação de igualdade – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A = {1, 2, 3}
    - A relação de igualdade em A é I = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1





Relações

- **Relação inversa**
  - A *inversa* de uma relação R de A para B é a relação formada de B para A invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em R
  - ➔ Denota-se por R^{-1}

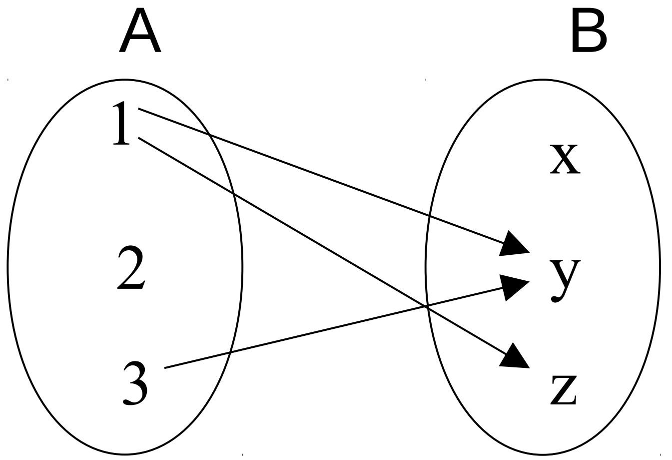
$$\mathbf{R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}}$$

  - Exemplo
    - Sejam $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ x, y, z \}$ conjuntos e $R = \{ (1, y), (1, z), (3, y) \}$
    - $R^{-1} = \{ (y, 1), (z, 1), (y, 3) \}$

Relações

- **Relação inversa – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { x, y, z } conjuntos e R = { (1, y), (1, z), (3, y) }

	x	*y*	*z*
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0



Relações

- **Relação inversa – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { x, y, z } conjuntos e R = { (1, y), (1, z), (3, y) }
    - R^{-1} = { (y, 1), (z, 1), (y, 3) }

	1	2	3
x	0	0	0
y	1	0	1
z	1	0	0

Matriz transposta da matriz original

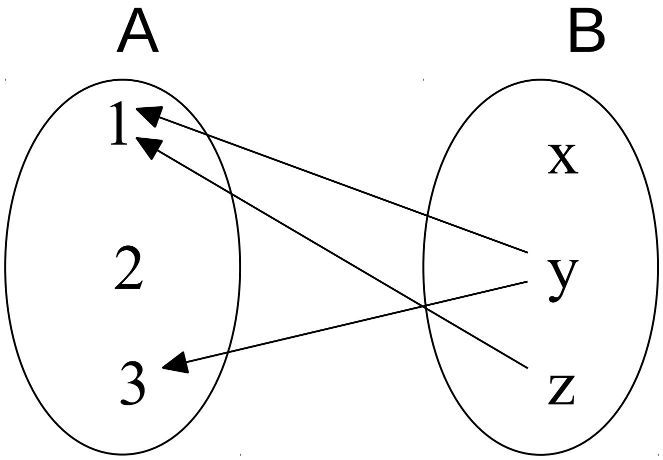


Diagrama obtido invertendo-se o sentido de todas as setas

Relações

- **Relação de igualdade**
  - Dado o conjunto A = { a, b, x, z }

    a) Liste os elementos presentes na relação de igualdade (I) em A

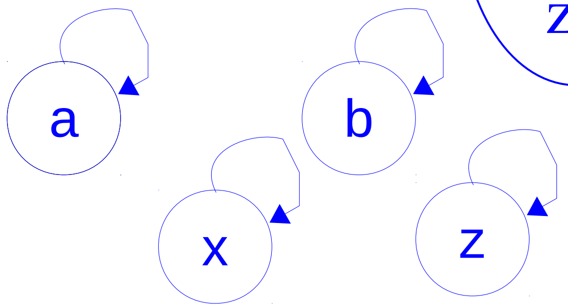
    b) Represente graficamente a relação I

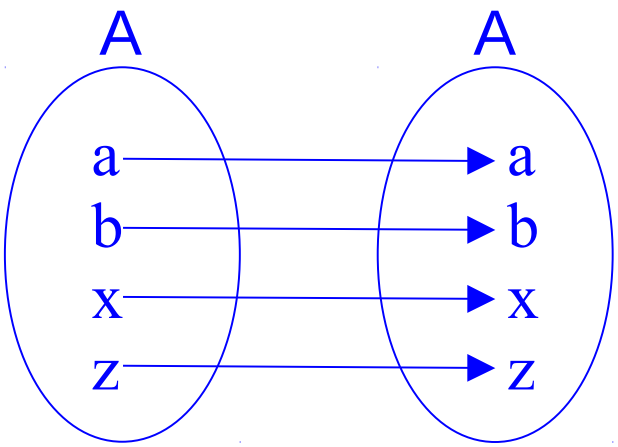
RESPOSTAS

a) I = { (a, a), (b, b), (x, x), (z, z) }

b)

	a	b	x	z
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
x	0	0	1	0
z	0	0	0	1





Relações

- **Relação inversa**
  - Sejam A = { a, b, c } e B = { x, a, z } conjuntos e R = { (a, x), (a, a), (c, z), (b, a) }
    - a) Liste os elementos presentes na relação inversa R^{-1}
    - b) Represente graficamente a relação R^{-1}

RESPOSTAS

a) R^{-1} = { (x, a), (a, a), (z, c), (a, b) }

b)

	a	b	c
x	1	0	0
a	1	1	0
z	0	0	1