Respostas da Tarefa 03 - GA - Entrega dia 20/04

1. Em cada item abaixo, use escalonamento para decidir se a matriz dada é invertível e, caso seja, determine sua inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

RESPOSTA: Escalonando a matriz A obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Logo A não é invertível. Para a matriz B temos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11}{12} & \frac{-7}{4} & \frac{7}{12} & \frac{31}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-13}{6} \end{array}\right]$$

ou seja, B é invertível e sua inversa é

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{12} & \frac{-7}{4} & \frac{7}{12} & \frac{31}{12} \\ \frac{-5}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-13}{6} \end{bmatrix}$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule sua inversa.

RESPOSTA: Calculando o determinante de A obtemos que $\det(A) = 4$. Logo A é invertível. Resolvendo, como no exercício anterior, obtemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Resolva a equação matricial

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

.

RESPOSTA: Como a matriz é invertível, temos que

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Logo, resolvendo o produto, obtemos que

$$X = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{13}{4} \\ \frac{-7}{2} & \frac{-15}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

3. Sejam A e B as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule

(a) $\det(A) + \det(B)$ e $\det(A)\det(B)$.

RESPOSTA: Como $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$ então

$$\det(A) + \det(B) = 1 \quad \text{e} \quad \det(A)\det(B) = -6$$

(b) $\det(A + B)$.

RESPOSTA: Como

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

então $\det(A + B) = 3$.

(c) $\det(AB)$

RESPOSTA: Uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

então $\det(AB) = -6$.

4. Determine o valor de β real para que a matriz B não seja invertível.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 12 & \beta & -11 & 21 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

RESPOSTA: Para que a matriz não seja invertível temos que $\det(B) = 0$. Fazendo o desenvolvimento de Laplace em confatores da segunda coluna, obtemos

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 12 & \beta & -11 & 21 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} = \beta(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & \beta \end{bmatrix} = \beta(-7\beta + 14).$$

Ou seja $\beta = 0$ ou $\beta = 2$.

5. Considere sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = \mathbf{O}$ sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Calcule, em função de λ, $\det(A - \lambda I)$.

(b) Para que valores de λ tem-se que $\det(A - \lambda I) = 0$?

(c) Substitua $\lambda = 1$ e depois $\lambda = -1$ no sistema acima e resolva-os (são dois sistemas lineares homogêneos mesmo).

RESPOSTA:

(a) $\det(A - \lambda I) = 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = (1 - \lambda)\left(1 + 2\lambda + \lambda^2\right)$

(b) $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)\left(1 + 2\lambda + \lambda^2\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(c) Para $\lambda = 1$ temos:

$$(A - I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, temos um sistema linear com 2 equações e 3 incógnitas. Logo temos uma variável livre. Usando $z = \alpha$ como variável livre obtemos $S = \{(x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = -1$ temos:

$$(A - I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, temos um sistema linear com 1 equação e 3 incógnitas. Logo temos duas variáveis livres. Usando $y = \alpha$ e $z = \beta$ como variávies livres obtemos

$$S = \{(x, y, z) = (-\alpha + \beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Até a próxima.