SIMPLIFICAÇÃO DE CIRCUITOS E MAPAS DE KARNAUGH

TEOREMAS E IDENTIDADES

$$A + 0 = A, \quad A + 1 = 1$$

$$A + A = A, \quad A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot A = A, \quad A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$(A + B) \cdot (A + C) = A + BC$$

$$A + \overline{A}B = A + B$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C \ldots \cdot N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots \overline{N}$$

$$\overline{A + B + C + \ldots + N} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots \overline{N}$$

EXPRESSÕES BOOLEANAS

- As expressões booleanas usualmente são reduzidas a alguma das seguintes formas:
  - Soma de produtos
  - Produto de somas

SOMA DE MINTERMOS

A	B	C	F1	F2	F3	F
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_1 = ABC$$

$$F_2 = AB\overline{C}$$

$$F_3 = A\overline{B}\,\overline{C}$$

FORMA DE SOMA DE PRODUTOS

$$ABC + \bar{A}B\bar{C}$$

Mintermo

$$AB + \bar{A}B\bar{C} + \bar{C}\bar{D} + D$$

$$\bar{A}B + CD + EF + GK + H\bar{L}$$

Observação: Em uma soma de produtos , um sinal de inversão não pode cobrir mais do que uma variável em um termo (por exemplo , expressões do tipo $\overline{ABC}$, $\overline{RST}$ não são permitidas).

FORMA DE PRODUTO DE SOMAS

$$\left(A+\overline{B}+C\right)\left(A+C\right)$$

$$\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{C}+D\right)F$$

$$\left(A+C\right)\left(B+\overline{D}\right)\left(\overline{B}+C\right)\left(A+\overline{D}+\overline{E}\right)$$

Maxtermo

PRODUTO DE MAXTERMOS

A	B	C	G1	G2	G3	G4	G5	F
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$F = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$G_1 = A + B + C$$

$$G_2 = A + B + \overline{C}$$

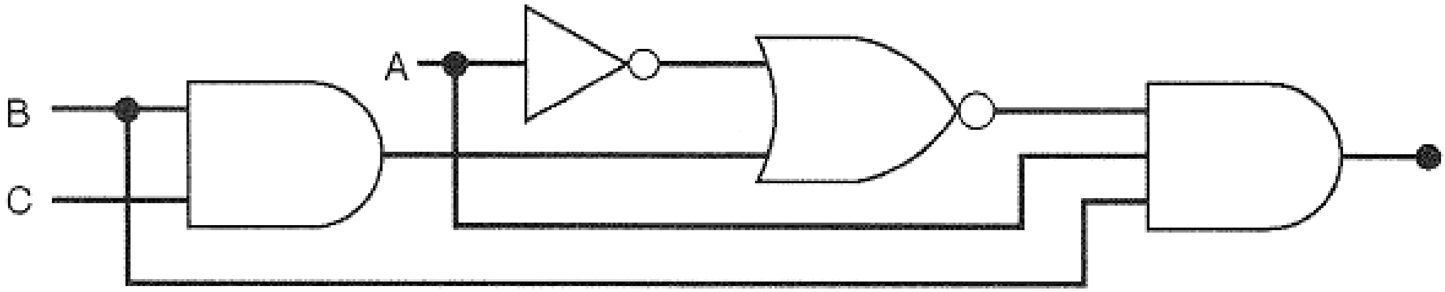
$$G_3 = A + \overline{B} + C$$

$$G_4 = A + \overline{B} + \overline{C}$$

$$G_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$$

EXERCICIO

Simplifique o circuito



EXERCICIO

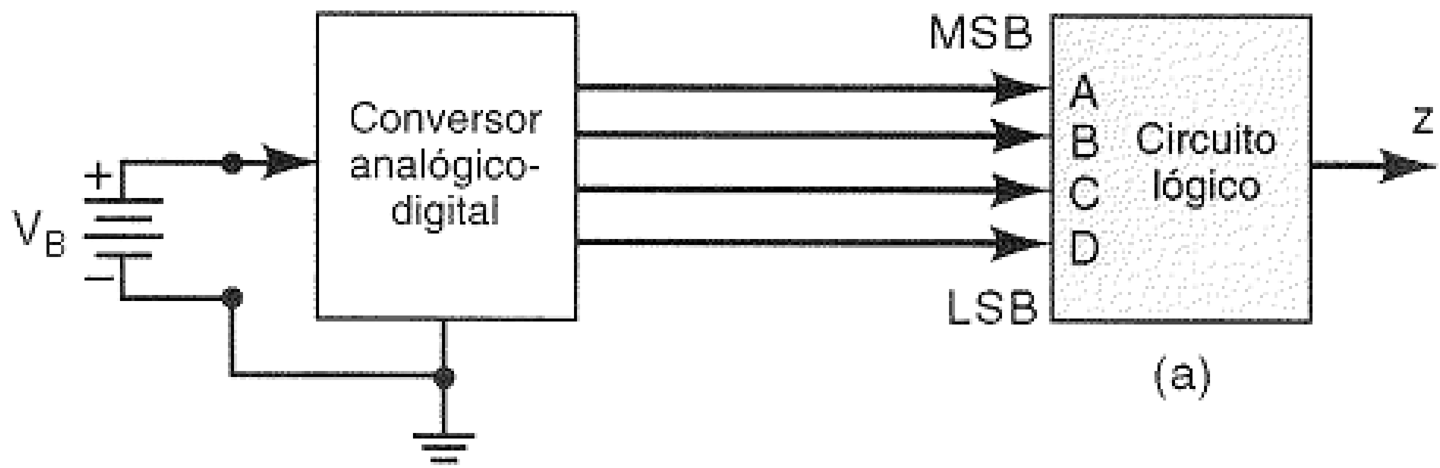
- Simplifique a expressão

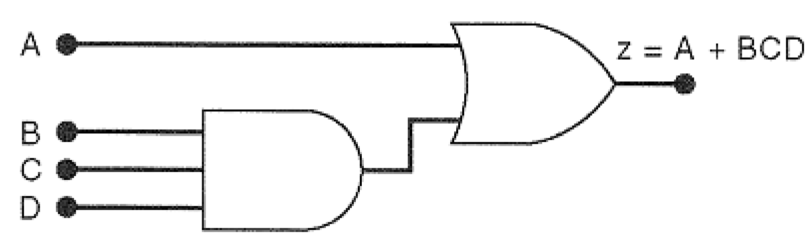
$$Z = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$$

PROJEÇÃO DE CIRCUITOS

- Exemplo: Um conversor analógico digital está monitorando a tensão de uma bateria de 12 V de uma espaçonave em órbita. A saída do conversor é um número binário de quatro bits, ABCD, que corresponde à tensão da bateria em degraus de 1 V, sendo A o MSB. As saídas binárias do conversor são ligadas em um circuito digital que deve produzir uma saída em ALTO sempre que o valor do binário for maior que 6V. Projete este circuito lógico.

PROJEÇÃO DE CIRCUITOS





Projete o circuito anterior utilizando unicamente portas NAND

MÉTODO DO MAPA DE KARNAUGH

- O mapa de Karnaugh é um método gráfico usado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela verdade no seu circuito lógico correspondente, de um modo simples e ordenado.

EXEMPLOS COM 2 E 3 VARIÁVEIS

A	B	X	
0	0	1	$\rightarrow \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$\rightarrow AB$

$$\left\{ x = \overline{A}\,\overline{B} + AB \right\}$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	0	1

A	B	C	X	
0	0	0	1	$\rightarrow \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	1	$\rightarrow \overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	1	$\rightarrow \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$\rightarrow AB\overline{C}$
1	1	1	0	

$$\left\{ \begin{aligned} X = {} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C \\ & + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} \end{aligned} \right\}$$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1
$\overline{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\overline{B}$	0	0

EXEMPLOS COM 4 VARIÁVEIS

A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	$\rightarrow AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	$\rightarrow ABCD$

$$\left\{ \begin{aligned} X = {} & \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D \\ & + AB\bar{C}D + ABCD \end{aligned} \right\}$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

MAPA DE 5 VARIÁVEIS

$AB \backslash CDE$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

AGRUPAMENTO DE VARIÁVEIS

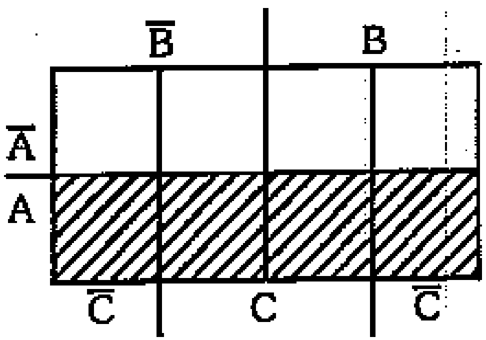
- O agrupamento de “1s” ou “0s” é realizado em potências de 2.
  - Dois termos (pares).
  - Quatro termos (quartetos).
  - Oito termos (octetos).
  - Em geral é possível agrupar até 2^n termos.
- O agrupamento de “1s” ou “0s” se faz nas células adjacentes.
- Deve-se agrupar o maior número de “1s” ou “0s” possível.

AGRUPAMENTO DE VARIÁVEIS

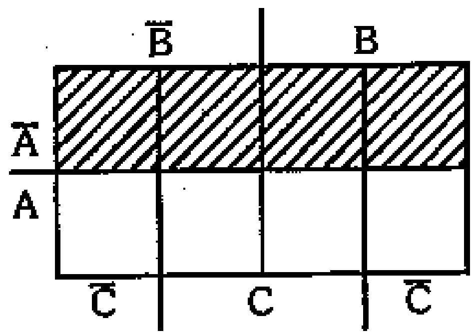
- Se um grupo de $\mathbf{2^n}$ “1s” ou “0s” são adjacentes, **n** variáveis são alteradas (mudam do nível “1” para o nível “0” ou o contrário). Estas variáveis são eliminadas no processo de simplificação. Ex:
  - O agrupamento de 4 “1s” ou “0s” elimina 2 variáveis.
  - O agrupamento de 8 “1s” ou “0s” elimina 3 variáveis.

- Cada variável possui uma região dentro do mapa na qual seu valor não muda.

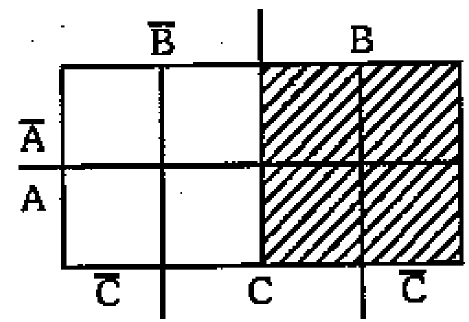
REGIÕES DE CADA VARIÁVEL EM UM MAPA DE KARGNAUGH



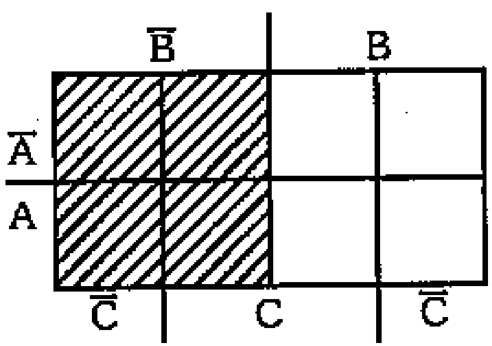
(a)



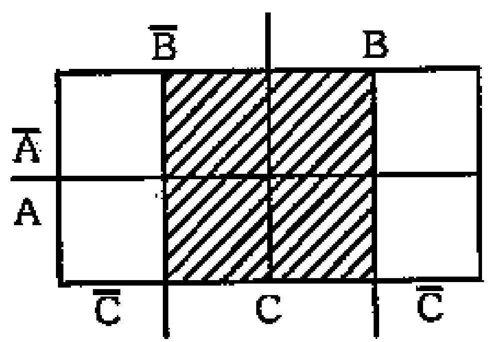
(b)



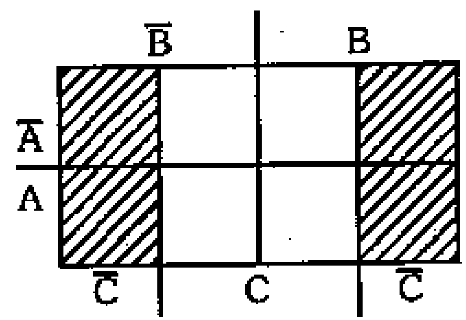
(c)



(d)



(e)



(f)

AGRUPAMENTO DE PARES

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0
$\overline{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\overline{B}$	0	0

$$X = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$
$$= B\overline{C}$$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	0
$\overline{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\overline{B}$	1	0

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} = \overline{B}\,\overline{C}$$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	1	1
$\overline{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\overline{B}$	1	0	0	1

$\overline{A}\,\overline{B}C$

$A\overline{B}\,\overline{D}$

$$X = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}C \quad + A\overline{B}\,\overline{D}$$

(d)

AGRUPAMENTO DE QUARTETOS

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$	0	1
$\overline{A}B$	0	1
AB	0	1
$A\overline{B}$	0	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	0	0	0	0
$\overline{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$	0	0	0	0

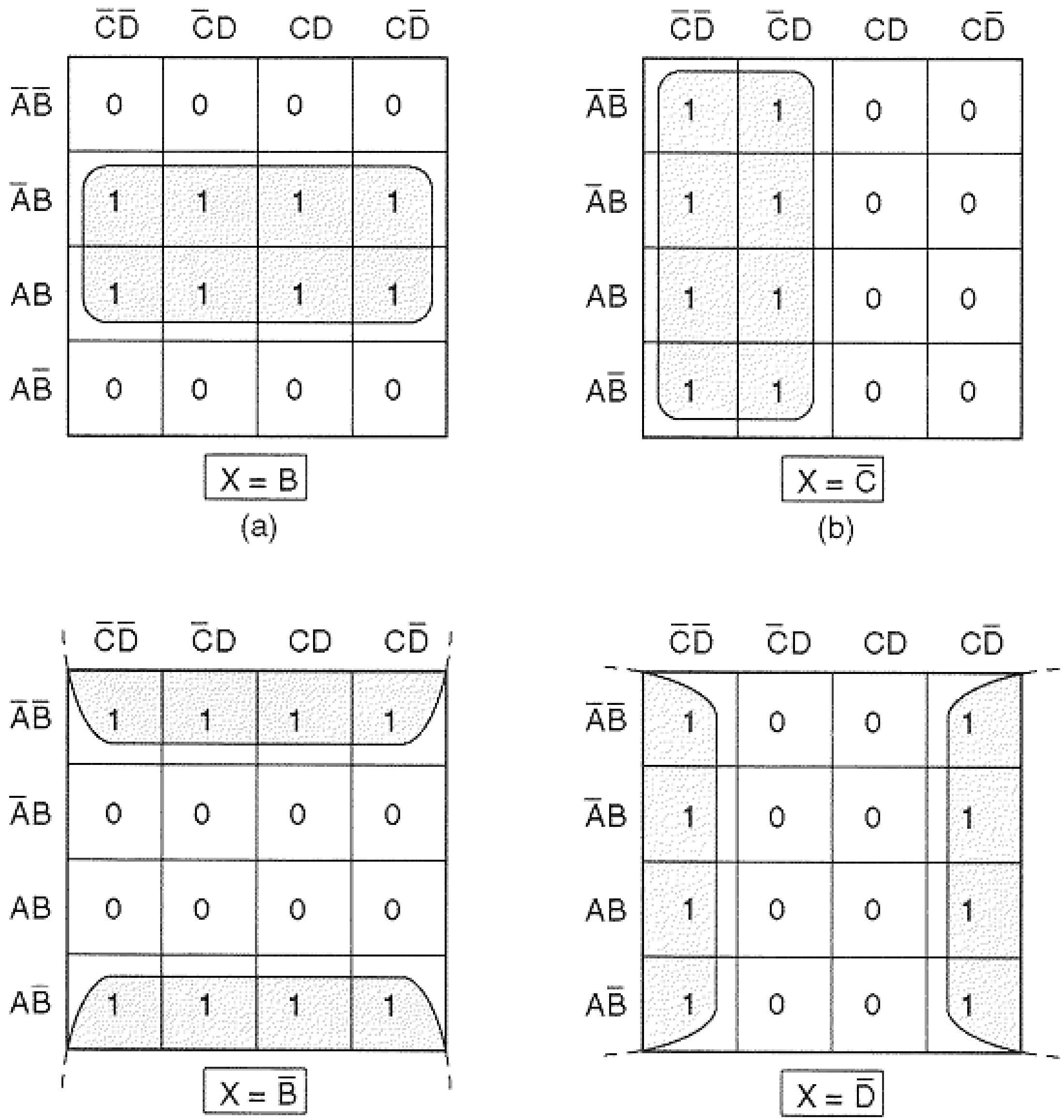
	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	0	0	0	0
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	0	0

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	0	0	0	0
$\overline{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\overline{B}$	1	0	0	1

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	0	0	1
$\overline{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\overline{B}$	1	0	0	1

$X = \overline{B}\,\overline{D}$

AGRUPAMENTO DE OCTETOS



EXEMPLO

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	0

$$S = \overline{A}B + A\overline{B}$$

OR exclusivo

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	0	1

$$S = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

NOR exclusivo

Observação: As portas OR exclusivo e NOR exclusivo só admitem duas entradas. Não existem portas deste tipo que possuam mais de duas entradas.

EXERCICIO

- Simplificar, usando o mapa de Karnaugh, a expressão booleana descrita pela tabela-verdade ilustrada.

$$S = \overline{A}C + A\overline{C} + \overline{B}C$$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

EXERCICIO

- Simplificar, usando o mapa de Karnaugh, a expressão booleana descrita pela tabela-verdade ilustrada

$$S = D + A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

CONDIÇÕES IRRELEVANTES "DON'T CARE"

- São situações nas quais o valor de uma condição é irrelevante. Portanto, um valor "0" ou "1" pode ser assumido, dependendo da conveniência no processo de simplificação.

EXEMPLO

A	B	C	z	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	x	“don't
1	0	0	x	care”
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

	C	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

$$S = A$$

EXEMPLO

- Deseja-se utilizar um amplificador para ligar 3 aparelhos: um toca-fitas, um toca-discos e uma rádio FM. A ligação dos aparelhos obedece às seguintes prioridades:

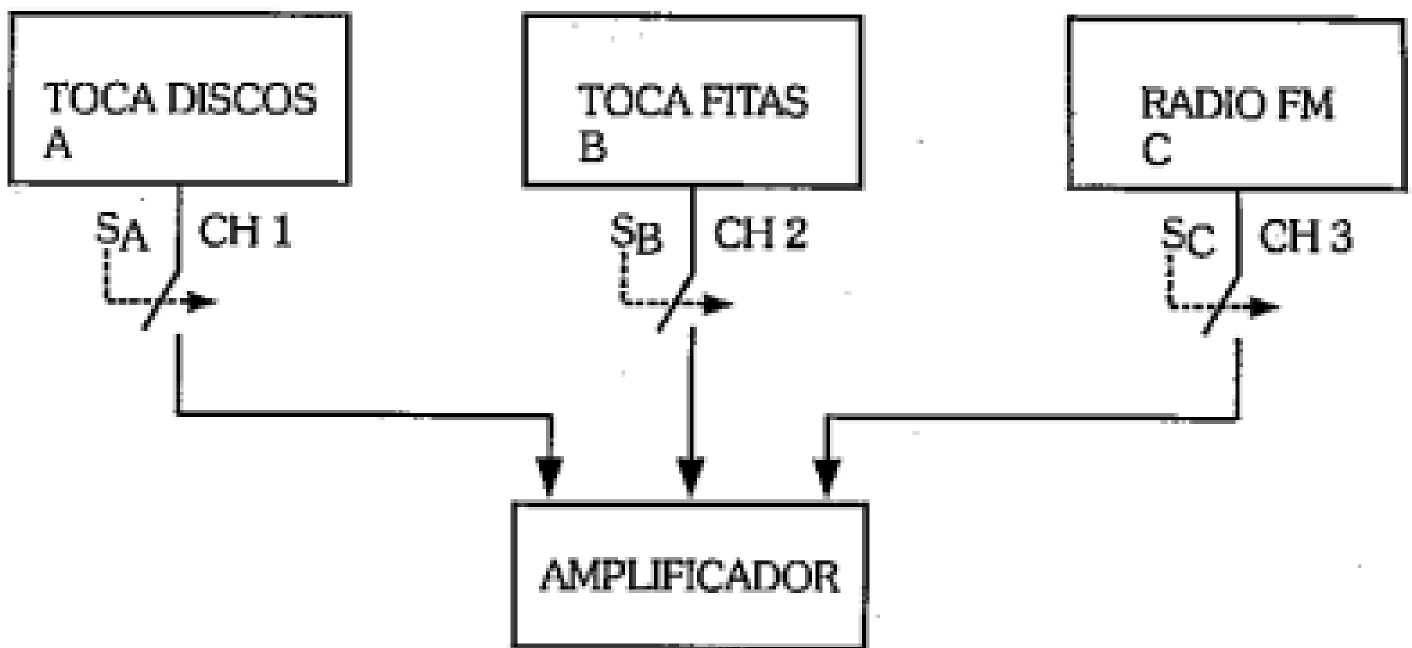
  1ª prioridade: Toca-discos.

  2ª prioridade: Toca-fitas.

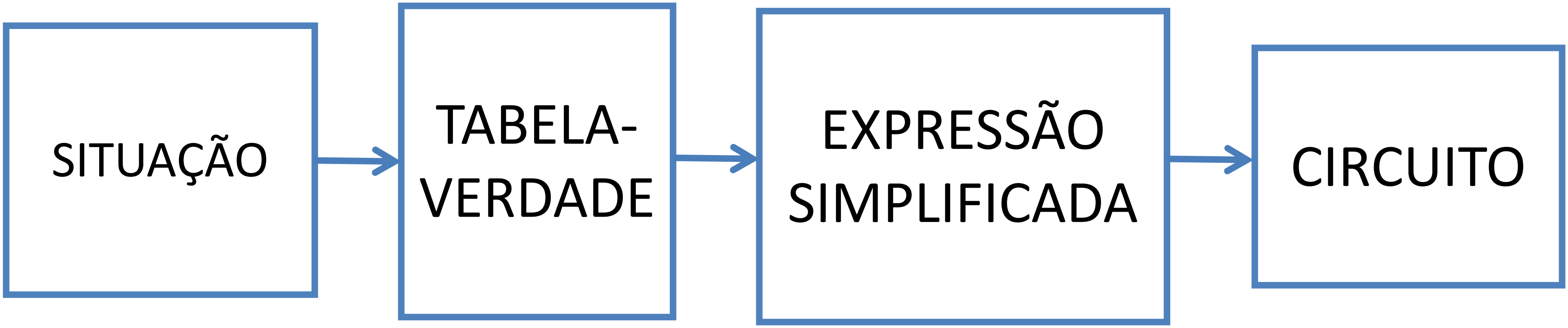
  3ª prioridade: Rádio FM.

- Elaborar um circuito para ligar os aparelhos ao amplificador.

FIGURA DO EXEMPLO ANTERIOR

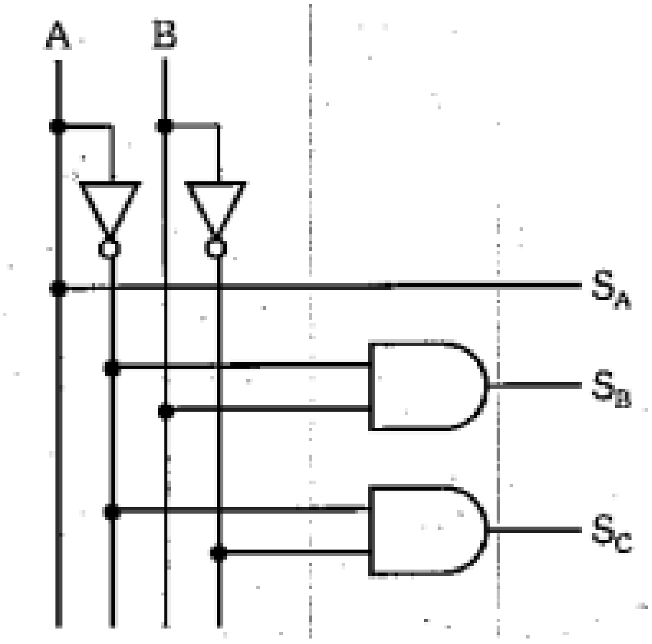


PROCEDIMENTO PARA PROJETAR UM CIRCUITO LÓGICO



SOLUÇÃO DO EXEMPLO

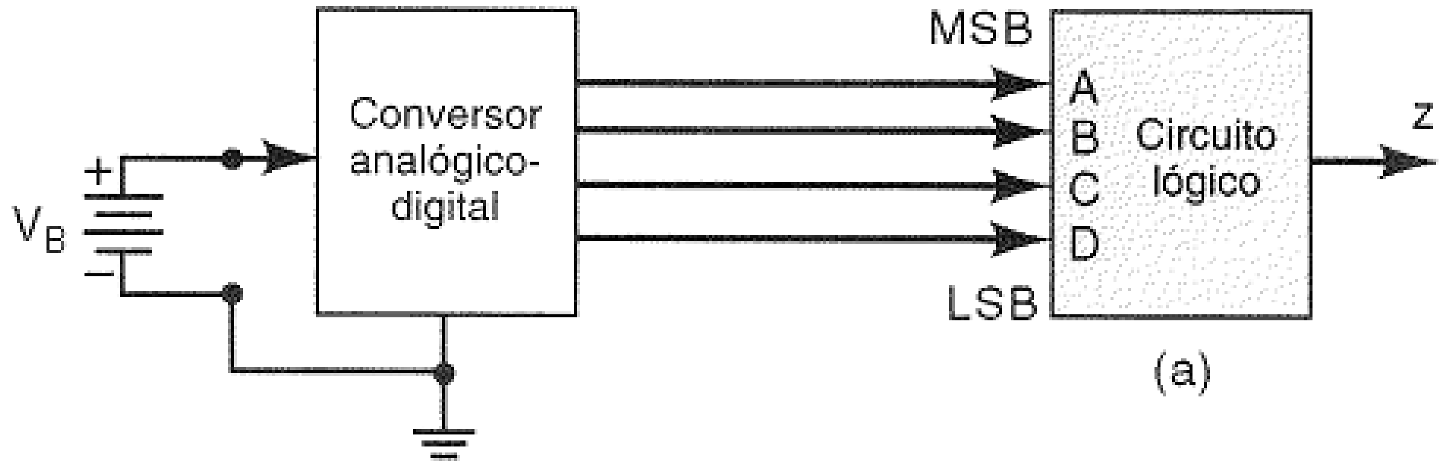
SITUAÇÃO	A	B	C	S_A	S_B	S_C
0	0	0	0	X	X	X
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	0



POSIÇÃO	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Exercício: Determinar o circuito simplificado que corresponde à tabela-verdade

PROJEÇÃO DE CIRCUITOS



Projete o circuito lógico do exemplo anterior considerando e sem considerar condições “don’t care”.

POSIÇÃO	A	B	C	D	S_1	S_2
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	1	1
11	1	0	1	1	1	1
12	1	1	0	0	1	1
13	1	1	0	1	1	X
14	1	1	1	0	1	X
15	1	1	1	1	1	X

Tabela-verdade do circuito lógico da figura anterior

Circuito lógico considerando e sem considerar condições “don’t care”