Lista 1 - Geometria Analítica - Matrizes e suas operações

Observações: O objetivo das listas será auxiliar e direcionar os estudos. Não são exercícios triviais e não creio serem suficientes para sua avaliação. Procure outros exercícios nas referências do curso. Bons estudos e sucesso na carreira escolhida.

1. Determine os valores de x, y, z e t para que as matrizes abaixo sejam iguais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ t & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $3(A - \frac{1}{2}B) + C$

(b) Encontre uma matriz X tal que $\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C$

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine

a) $A + B$.

b) AC.

c) DB.

d) $-A$.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule AB e BA.

b) Calcule $A + B^t$.

c) Calcule $(BA)^2$

d) Calcule $(-2)A$.

e) Calcule $\det(AB)$ e $\det(BA)$.

5. Sejam A e B matrizes tais que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule AB, BA e $A^2 = AA$.

(b) Calcule $(AB)^t$.

6. Nas matrizes A e B abaixo complete as entradas ausentes para fazer sentido o produto das matrizes AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \dots & -1 & \dots \\ 9 & -13 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & \dots \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & \dots & 12 \\ 28 & 4 & 11 \\ 15 & 23 & -51 \end{bmatrix}$$

7. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que $AB = AC$.

8. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que $AB = BA = 0$, $AC = A$ e $CA = C$.

b) Uma vez obtido os resultados de a), mostre que $ACB = CBA$, $A^2 = B^2 = (A - B)(A + B)$ e $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$

9. Determine uma matriz B tal que $B^2 = A$, sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Determine o valor de x para que $A^t = A$, sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Encontre x, y, z, w tais que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Dada uma matriz simétrica A, determine $A - A^t$. (*sugestão*: pesquise sobre o que é matriz simétrica)

13. Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta. Quando verdadeira mostre no caso geral e quando for falsa dê um exemplo.

a) $(-A)^t = -A^t$;

b) $(A+B)^t = B^t + A^t$;

c) Se $A \cdot B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$;

d) Se $A \cdot B = 0$, então $BA = 0$;

e) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$;

14. Seja α um número real e defina a matriz T_α por

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}\,(\alpha) \\ \text{sen}\,(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Mostre que

(a) $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$. (*sugestão*: pesquise sobre $\cos(\alpha+\beta) = \ldots$, e $\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \ldots$)

(b) $T_{-\alpha} = {T_\alpha}^t$. (*sugestão*: pesquise sobre função par e função impar e faça um resumo aqui)

15. Suponha que $A \neq 0$ e que $AB = AC$, em que A, B e C são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.

a) Pode-se afirmar que $B = C$?

b) Se existir uma matriz Y tal que $YA = I$, sendo que I é a matriz identidade, então $B = C$?

16. Explique por que, em geral, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ e $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.