Vamos iniciar nossos estudos de lógica através da lógica proposicional, e uma das razões para isso é a simplicidade da lógica proposicional. Mesmo sendo extremamente simples, a lógica proposicional possui os princípios básicos da lógica clássica e o seu estudo permite uma compreensão adequada que serve de base para o estudo de lógicas mais elaboradas (e complexas). Por sua simplicidade, a lógica proposicional possui muitas limitações que podem gerar dificuldades na representação de problemas do mundo real. Tais limitações envolvem, por exemplo, falta de tratamento para temporalidade, para causalidade e para incerteza, dentre outros. Além disso, a lógica proposicional não possui formas de representação semântica.

Mesmo com suas limitações, a lógica proposicional é um formalismo extremamente importante na computação, sendo muito adequado para a modelagem de vários problemas.

1 Lógica Proposicional

É um formalismo lógico dos mais simples existentes, e por este motivo servirá de base para o início dos nossos estudos sobre Lógica.

Por conta de sua simplicidade, na **Lógica Proposicional** os problemas tendem a precisar de uma simplificação para poderem ser representados. Pois, todos os problemas precisam ser modelados através do uso de **Proposições** e **Conectivos.**

As **Proposições** são sentenças declarativas e os conectivos são operadores que podem ser aplicados às **Proposições**.

Um dos pontos muito importantes no estudo da **Lógica Proposicional** é o contato com o rigor formal. A **Lógica Proposicional** é uma **linguagem formal** e isso é muito útil na modelagem computacional de problemas. Entretanto, por ser uma teoria formal, em alguns casos, pode haver um certo distanciamento do raciocínio lógico presente no senso comum. Isso faz com que o estudante possa ser levado a erros em situações específicas (que veremos no decorrer deste curso).

Além disso, por ser uma linguagem formal, pequenos detalhes (uma vírgula, um parêntese, etc.) podem fazer muita diferença. Assim o(a) estudante precisa ser muito cuidadoso(a) e detalhista quando está trabalhando com a Lógica Proposicional. Neste sentido, da mesma forma que a falta de um “ponto-e-vírgula” em um programa de computador na linguagem de programação C[1], por exemplo, pode gerar erros, aqui na Lógica Proposicional a uma letra minúscula *p* é diferente de uma letra maiúscula *P*, e o uso de *p* (minúsculo) onde deveria ser usado *P* (maiúsculo) pode gerar um erro também.

1 A Linguagem de programação C, assim como a maioria das linguagens de programação, é uma Linguagem Formal.

1.1 - Proposições e Conectivos

Proposição: é todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

Uma proposição é diferente de um termo.

Exemplos de termos:

- bia;
- carro;
- triângulo equilátero.

Dentro da lógica matemática clássica, uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Isto define o (i) **princípio da não contradição**. Por conta deste príncipio, diz-se que a **Lógica Proposicional** é monotônica, ou seja, o princípio da não contradição define a monotonicidade da **Lógica Proposicional**.

Outro princípio da lógica clássica diz que uma proposição deve sempre ser verdadeira, ou falsa, tendo que assumir, obrigatoriamente, um destes dois valores. Este princípio é conhecido como (ii) **princípio do terceiro excluído**, ou seja, não há um terceiro valor (além do verdadeiro e do falso) possível. Assim, pode-se dizer que esta é uma lógica bivalente.

Pergunta: os princípios da lógica podem ser vistos como proposições?

O valor lógico de uma proposição pode ser a verdade (verdadeiro – **V**) ou a falsidade (falso – **F**). Sendo assim, uma proposição verdadeira tem valor lógico **verdadeiro (V)**, já uma proposição falsa tem valor lógico **falso (F)**.

Por motivo de simplificação, utiliza-se da letra **V** para denotar um valor lógico verdadeiro e da letra **F** para denotar um valor lógico falso. Levando-se em consideração conceito de valor lógico e o princípio do terceiro excluído, pode-se definir os dois princípios da lógica da seguinte forma:

- Toda a proposição, na lógica clássica, tem um, e somente um, dos valores **V** ou **F**.

Exemplos de proposições e valores lógicos:

Está chovendo.
Todos os alunos desta turma vão tirar dez na primeira prova. (incerteza)
Que horas são? (não é proposição)
Hoje é sábado.
A altura deste prédio. (não é proposição)
Bia é engenheira.
5 é ímpar.

Exercício 1. (1º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula) Considere as sentenças abaixo e diga quais são proposições e quais não são. Para as proposições, indique qual é o valor lógico de cada uma.

i) O lago da UFSCar possui 10.000.000 metros de profundidade.
ii) A UFSCar possui um campus em São Carlos.
iii) São Carlos fica no estado de São Paulo;
iv) Quantos anos você tem?
v) Tomara que chova hoje.
vi) Capitu tem cabelos longos.
vii) Grampola nasceu em Curitiba.
viii) Fedra sabe nadar.
ix) Bia adora estudar.
x) Katchuska é uma aluna brilhante.
xi) Bons alunos serão excelentes profissionais.
xii) Estudar é muito bom.
xiii) Se algum dia chover 24 horas seguidas, então haverá alagamentos.
xiv) Há prédios mais altos que outros.
xv) É difícil prever o futuro.

Como já comentamos anteriormente, a **Lógica Proposicional** é uma teoria formal sobre **Proposições** e **Conectivos**. As proposições podem ser simples (atômicas) ou compostas.

Definição 1: Proposição simples: *é aquela que não contém outra proposição como parte integrante de si mesma.*

Estas proposições são representadas pelas letras proposicionais p, q, r, s, ... sempre minúsculas.

Definição 2: Proposição composta: *é formada pela combinação de duas ou mais proposições.*

Estas proposições são representadas pelas letras proposicionais P, Q, R, S, ... sempre maiúsculas.

Estas proposições também são chamadas fórmulas, e podem ser definidas explicitando-se suas subproposições, como por exemplo, P(p,q), Q(r,s,t), etc.

Na construção de proposições compostas são utilizados **Conectivos** que fazem a ligação entre proposições simples ou compostas. Os conectivos podem ser:

- não ($\neg$)
- e ($\wedge$)
- ou ($\vee$)
- se... então ... ($\rightarrow$)
- ... se e somente se ... ($\leftrightarrow$)

Exemplos:

- *Ela é alta e magra*. Pode ser representada como:

  p: *Ela é alta*

  q: *Ela é magra*

  $p \wedge q$: *Ela é alta e magra*

- *O aluno está lendo ou estudando.* Pode ser representada como:

p: *O aluno está lendo*
q: *O aluno está estudando*
$p \vee q$: *O aluno está lendo ou estudando*

- *Se a aluna está na biblioteca então o professor está satisfeito*. Pode ser representada como:
  p: *A aluna está na biblioteca.*
  q: *O professor está satisfeito.*
  $p \rightarrow q$: *Se a aluna está na biblioteca então o professor está satisfeito.*

- *O triângulo ABC é equilátero se e somente se possui os três lados iguais*. Pode ser representada como:
  p: *O triângulo ABC é equilátero.*
  q: *O triângulo ABC possui os três lados iguais*

- p ↔ q: *O triângulo ABC é equilátero se e somente se possui os três lados iguais*
- *Ele não é brasileiro*. Pode ser representada como:

  p: *Ele é brasileiro.*

  ¬p: *Ele não é brasileiro.*

Assim como as proposições simples, uma proposição composta P, por exemplo, também possui um valor lógico associado. A determinação deste valor é feita com base nos valores lógicos das proposições simples que compõem P associados aos conectivos utilizados para compor a proposição. Assim, para se determinar o valor lógico de uma sentença composta, deve-se primeiramente conhecer os valores lógicos das sub-proposições, bem como o "comportamento" dos conectivos (definido pelas operações lógicas).

1.2 - Operações Lógicas

Os conectivos utilizados nas proposições compostas (ou fórmulas) revelam operações lógicas efetuadas sobre as proposições, por isto, a parte da lógica que aborda este tema é chamada de cálculo proposicional.

As operações são:

1. **Negação:** Considere uma proposição *p*, sua negação é dada por não *p*. A negação de uma proposição possui valor lógico V quando a proposição original possui valor lógico F e vice-versa.

Notação: $\neg p$.

Exemplo:

p: 5 + 6 = 11 (V) e $\neg p$:5 + 6 ≠ 11 (F).

Na linguagem corrente, a negação é, normalmente, efetuada inserindo-se ***não*** antes do verbo da proposição.

Exemplos:

p: Estevam é professor.
$\neg p$*:* Estevam não é professor.

q: Todos os alunos irão passar de ano
$\neg q$: Nem todos os alunos vão passar de ano.

r: Nenhum aluno irá reprovar
$\neg r$*:* Algum aluno irá reprovar.

Para se verificar o comportamento de uma operação lógica utiliza-se da tabela verdade (uma ferramenta que auxilia a verificação dos valores lógicos associados a todas as combinação de estados possíveis):

p	¬p
F	V
V	F

2. **Conjunção (∧):** É uma operação lógica associada ao conectivo **E**. A conjunção entre duas proposições é feita compondo-se uma proposição composta formada por p e q.

Exemplo:

p: está frio.
q: está chovendo
$p \wedge q$: está frio **e** está chovendo.

O valor lógico de uma **conjunção** é verdade somente quando todas as componentes da proposição possuem valor lógico verdade.

Tabela Verdade:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

3. Disjunção ($\vee$)

A **disjunção** é a operação associada ao conectivo **OU**. Por isso a disjunção entre duas proposições (p e q) é dada por p **OU** q.

Exemplo:

p: Bia é aluna da UFSCar.

q: Bia estuda computação.

$p \vee q$: Bia é aluna da UFSCar ou Bia estuda computação.

O valor lógico de uma **disjunção** é verdade quando pelo menos uma das componentes da disjunção possui valor lógico verdade.

Tabela Verdade:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

4. Disjunção Exclusiva ($\veebar$)

A **disjunção exclusiva** é a operação associada ao conectivo **OU exclusivo**. Por isso, a disjunção entre duas proposições ($p \veebar q$) é dada por **OU** *p* **OU** *q*. Esta disjunção não faz parte do cálculo proposicional, mas é muito útil na computação.

Exemplo:

p: está amanhecendo.

q: está anoitecendo

p $\underline{\vee}$ *q*: Ou está amanhecendo ou está anoitecendo.

O valor lógico de uma **disjunção exclusiva** é verdade quando uma, e somente uma das componentes da disjunção exclusiva possui valor lógico verdadeiro.

Tabela Verdade:

p	q	p $\underline{\vee}$ q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

5. Condicional ($\rightarrow$)

A condicional é a operação associada ao conectivo **Se** ... **então** ... . Por isso a condicional entre duas proposições ($p \rightarrow q$) é dada por **Se** p **então** q.

Exemplo:
p: Está chovendo.
q: A grama está molhada

$p \rightarrow q$: **Se** está chovendo, **então** a grama está molhada.

A condicional também é conhecida como implicação lógica. Assim pode-se dizer que no exemplo acima, i) p é condição suficiente para q e ii) q é condição necessária para p.

O valor lógico de uma condicional é dado conforme a seguinte tabela verdade:

Tabela Verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Note que uma proposição condicional ser verdadeira não significa dizer que suas proposições componentes também o são.

6. Bicondicional ($\leftrightarrow$)

A **bicondicional** é a operação associada ao conectivo ... **se e somente se** ... . Por isso a condicional entre duas proposições ($p \leftrightarrow q$) é dada por *p* **se e somente se** *q*.

Exemplo:
p: Bia é maior de idade.
q: Bia tem mais de 18 anos de idade.

$p \leftrightarrow q$: Bia é maior de idade **se e somente se** Bia tem mais de 18 anos de idade.

A bicondicional também pode ser representada como i) p é condição necessária e suficiente para q e ii) q é condição necessária e suficiente para p.

O valor lógico de uma **bicondicional** é verdade quando as duas componentes são verdade, ou quando as duas são falsas:

Tabela Verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Note que uma proposição **bicondicional** ($p \leftrightarrow q$) é como a conjunção de duas proposições condicionais ($p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$).

Exercício 2. Traduzir as proposições p: é verão e q: está quente para a linguagem corrente de acordo com os itens abaixo (parte do 2º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula):

a) $p \rightarrow q$

b) $q \vee p$

c) $(p \wedge q) \rightarrow q$

d) $q \leftrightarrow p$

Exercício 3. Considere as proposições p: Bia é estudante e q: Bia já trabalha e traduza para a linguagem simbólica (parte do 2º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula):

a) Bia é estudante e já trabalha
b) Bia não é estudante ou Bia já trabalha
c) Não é verdade que Bia já trabalha ou Bia é estudante
d) Ou bia é estudante ou Bia já trabalha

Exercício 4. Verifique se as proposições abaixo são atômicas ou compostas e converta-as para a forma de letras proposicionais e conectivos (parte do 2º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula).

a) Meu cachorro é branco.

b) Alguns cachorros são brancos.
c) Meu cachorro não é branco.
d) Alguns cachorros são brancos, outros são pretos.
e) Meu cachorro é branco, outros são pretos.
f) Os cachorros são brancos se e somente se não são pretos.
g) Eu não vou para a aula, mas Bia irá.

Exercício 5. Indique, através de letras proposicionais e conectivos, as interpretações plausíveis para as proposições abaixo (utilize parênteses como auxílio). Parte do 2º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula:

a) Vá estudar ou vá passear e divirta-se.
b) Bia estuda se Maria estuda mas Lia não.
c) Bia joga futebol e vôlei ou tênis ao mesmo tempo.

1.3 - Construção de tabelas verdade

Como vimos na seção 1.2, as proposições compostas são formadas por proposições simples e por operadores (ou conectivos) que as conectam. O comportamento dos 5 conectivos da lógica proposicional (além do "ou exclusivo" que também foi visto na seção 1.2) é definido através da tabela verdade de cada conectivo. Uma proposição composta (também chamada de fórmula da lógica proposicional) pode ser formada por mais de um conectivo, e neste caso é necessário ter atenção para alguns itens importantes e que auxiliam no processo de definição do valor lógico de fórmulas contendo vários conectivos. Uma das formas para se determinar o valor lógico de uma fórmula é através da construção da tabela verdade da fórmula em questão. Nesta seção 1.3 veremos como construir tais tabelas verdade.

Os conectivos lógicos podem ser utilizados para combinar proposições mesmo a partir de proposições já compostas. Assim, torna-se possível determinar o valor lógico de qualquer conjunto de proposições (ou fórmula).

É necessário, entretanto, antes de se determinar o valor lógico de uma fórmula, verificar se a proposição é uma **fórmula bem formada** (wff – well-formed formula).
Uma proposição é dita uma **fórmula bem formada** da **lógica proposicional** se e somente se é formada apenas por símbolos do alfabeto da lógica proposicional, e além disso:

i) é um valor lógico (*V* ou *F*);

ii) é uma proposição atômica;
iii) é uma proposição composta formada por fórmulas bem formadas α e/ou β conforme a tabela abaixo (extraída do nosso livro texto – A Cartilha da Lógica)

wff	lida como	wff chamada de
$(\neg\alpha)$	não α	negação
$(\alpha \wedge \beta)$	α e β	conjunção
$(\alpha \vee \beta)$	α ou β	disjunção
$(\alpha \rightarrow \beta)$	se α então β	condicional
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	α se e somente se β	bicondicional

Como pode ser visto em nosso livro-texto (A Cartilha da Lógica), o alfabeto da lógica proposicional é constituído por:

- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: verdade, falso
- Símbolos proposicionais atômicos: p, q, r, s, t, u, ...
- Conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

No momento de se construir uma tabela verdade sobre uma proposição composta, ou determinar seu valor lógico, a precedência de operadores (conectivos) é importante para que os resultados sejam obtidos de forma correta.

A ordem de precedência é a seguinte:

1) $\neg$;
2) $\wedge$;
3) $\vee$;
4) $\rightarrow$;
5) $\leftrightarrow$.

A ordem de precedência dos operadores pode ser alterada com a utilização de parênteses.

Exercício 6. Construa as tabelas verdade das proposições abaixo. (3º P a ser entregue por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo, antes do início da próxima aula)

a) $p \wedge q \to q$
b) $p \wedge (q \to q)$
c) $p \vee (q \wedge p \leftrightarrow r)$
d) $p \vee q \wedge p \leftrightarrow r$
e) $p \to p \vee r \vee q \wedge p \leftrightarrow r$
f)$p \to p \vee r$
g) $(p \to p \vee q) \leftrightarrow (p \to p \vee q)$
h) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \leftrightarrow s$
i)$(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow s$
j)$p \to q \to r \to s$
k) $(p \to (q \to r)) \to s$
l)$p \to p \vee p \vee p \wedge p \leftrightarrow p$
m) $q \to q \vee q \vee q \wedge q \leftrightarrow q$
n) $r \to r \vee r \vee r \wedge r \leftrightarrow r$
o) $\neg p \to \neg p \vee \neg p \vee \neg p \wedge \neg p \leftrightarrow \neg p$
p) $(\neg p \to \neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg p \vee \neg q)$
q) $\neg p \leftrightarrow \neg q \leftrightarrow \neg r \leftrightarrow \neg s$
r)$(\neg p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg r)) \leftrightarrow \neg s$

1.4 - Tautologias, Contradições e Contingências

1.4.1 Tautologia

É toda proposição composta cuja coluna que define seu valor lógico, em sua tabela verdade, é formada somente por valores V (verdade). Sendo assim, em uma tautologia, todas as combinações de valores lógicos, das componentes da proposição, levam a um valor lógico verdade. Por isso, também são chamadas de proposições logicamente verdadeiras.

Exemplos:

$p \rightarrow p$

$p \leftrightarrow p$

$\neg(p \wedge \neg p)$

$q \vee \neg q$

$p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$

$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Para toda tautologia P(p, q, r, ...), é válido o princípio da substituição que diz: " se P(p, q, r, ...) é uma tautologia , então P(P_0, Q_0, R_0, ...) também é tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, ...

1.4.2 Contradição

É toda a proposição composta cuja coluna que define seu valor lógico, em sua tabela verdade, é formada somente por valores F (falsidade). Sendo assim, em uma contradição, todas as combinações de valores lógicos, das componentes da proposição, levam a um valor lógico falsidade. Por isso, também são chamadas de proposições logicamente falsas.

Pode-se afirmar que a negação de uma contradição é sempre uma tautologia, e vice-versa.

Exemplos:

$p \wedge \neg p$

$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

$\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$

O princípio da substituição também é válido para as contradições: “ se $P(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então $P(P_0, Q_0, R_0, ...)$ também é contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, ...

1.4.3 Contingências

Uma contingência é uma proposição composta que não é tautologia, nem tampouco contradição. Isto é, a coluna que define seu valor lógico, em sua tabela verdade, é formada por pelo menos um valor lógico V (verdade) e pelo menos um valor lógico F (falsidade), por isso, também são chamadas proposições indeterminadas.

Exemplos:

$$p \vee q \rightarrow p$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$(p \wedge q) \wedge r$$

Exercício 7. Diga quais das proposições compostas abaixo são tautologias, quais são contradições e quais são contingências, e prove sua resposta mostrando a tabela verdade completa de cada proposição. (4º P – deve ser entregue, por e-mail, com um arquivo "escaneado" da solução manuscrita de cada um dos itens abaixo).

i. $\neg(p \lor \neg p) \lor (q \lor \neg q)$.

ii. $(p \to (p \to q)) \to q$

iii. $(p \to q) \to (p \land r \to q)$

iv. $\neg((p \to q) \to (q \land r \to q \land r))$

v. $(p \leftrightarrow q) \land p \to q$

vi. $\neg((p \leftrightarrow p \land \neg p) \leftrightarrow \neg p)$

vii. $p \leftrightarrow p$

viii. $\neg p \leftrightarrow p$

ix. $\neg(p \lor \neg p)$

x. $p \to (q \to r)$

xi. $p \to (q \to p)$

xii. $(p \to q) \to p$

xiii. $(p \to q) \to \neg p \ \land r \to q \land s \to q$

xiv. $(p \to r) \to q \ \land s \to \neg q \land p \to r$

xv. $\neg((p \to q) \to \neg p \ \land r \to q \land s \to q)$

xvi. $\neg((p \to r) \to q \ \land s \to \neg q \land p \to r)$

xvii. $\neg(\neg((p \rightarrow r) \rightarrow q \ \wedge s \rightarrow \neg q \wedge p \rightarrow r))$

xviii. $\neg\neg((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \ \wedge r \rightarrow q \wedge s \rightarrow q)$

xix. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

xx. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vee (p \rightarrow (q \rightarrow r)$