Na aula de hoje iremos iniciar o estudo sobre **Universo de Herbrand** na **Lógica de Predicados**. O **Universo,** a **Interpretação** e o **Modelo de Herbrand** são extremamente importantes em Lógica de Predicado, pois permitem se utilizar uma metodologia que elimina a necessidade de instanciações (groundings) infinitos.

Assim como já ocorreu em várias aulas anteriores, na aula de hoje (para iniciar os estudos sobre **Universo de Herbrand** na **Lógica de Predicados**) iremos realizar uma atividade pedagógica de pesquisa. O objetivo é (assim como anteriormente) despertar no aluno o senso crítico e a capacidade de buscar informações, compreender sobre o tema básico a ser abordado, e construir uma visão crítica sobre a teoria estudada. Para isso, será necessário, mais uma vez, que os alunos busquem informações em livros ou em documentos disponíveis na Web para se apropriarem do conhecimento básico sobre o tema "**Universo de Herbrand** na **Lógica de Predicados**", e na sequência expressem a visão pessoal sobre o tema respondendo às questões propostas. Assim, a atividade se divide em três etapas básicas: **i) pesquisa e leitura sobre "Universo de Herbrand** na **Lógica de Predicados"**; **ii) produção de texto e**, finalmente **iii) resposta às questões.**

i) Descrição da etapa de pesquisa e leitura: esta etapa de pesquisa e leitura deve ser realizada individualmente, e o aluno deverá buscar (em livros ou na internet) material sobre lógica proposicional e realizar uma leitura crítica para entender o que são argumentos no contexto da lógica proposicional).

ii) Descrição da etapa de produção de texto: nesta etapa o aluno deverá produzir um resumo de uma página descrevendo o que ele entendeu sobre a pesquisa realizada na etapa de pesquisa e leitura. Os textos devem ser manuscritos (de próprio punho).

iii) Descrição da etapa de resposta às questões: nesta etapa o aluno deverá utilizar o conhecimento adquirido nas etapas anteriores e responder às questões abaixo. As questões devem ser respondidas em papel e de forma manuscrita (de próprio punho). É importante que as respostas representem a visão crítica e pessoal do aluno.

Exercício 33. Os exercícios abaixo devem ser entregues no início da próxima aula. A entrega da resolução correta de todos exercícios valerá 2Ps.

1) Como a utilização do conceito de **Universo de Herbrand** na **Lógica de Predicados** pode "diminuir" a complexidade (número de groundings) no processo de demosntração da validade de argumentos?

2) O que é **Universo de Herbrand** e **Base de Herbrand** na **Lógica de Predicados**?

3) Como é feita a interpretação no **Universo de Herbrand?** Dê pelo menos um exemplo (que seja diferente do exemplo dado na "Cartilha da Lógica".

Universo de Herbrand

Como já vocês já viram nos estudos investigativos sugeridos na última aula, o Universo de Herbrand representa uma forma de tornar tratável a demonstração da validade de argumentos (na lógica de Predicados).

Em Lógica de Predicados um conjunto de clausulas é insatisfatível se e somente se este conjunto for falso em todas as interpretações possíveis de todos os domínios possíveis. Como não se pode, na prática, fazer a verificação se um conjunto de cláusulas é falso em todas as interpretações de todos os universos de domínio possíveis, o universo de Herbrand pode ser utiizado para tornar a verificação de satisfatibilidade tratável. Assim, para um conjunto de cláusulas S, e um universo de domínio H (universo de Herbrand), diz-se que S é insatisfatível se e somente se S é falso sob todas as interpretações possíveis em H.

Considere o conjunto de cláusulas dadas em um dos exercícios de demonstração de validade de argumentos das aulas anteriores: Exemplo1 = {mae(f(X),X), $\neg$mae(Y,X) $\vee$ $\neg$mae(Z,Y) $\vee$ avo(Z,X), $\neg$avo(Y,a)}. Para se construir o universo de Herbrand para este conjunto, deve-se considerar o seguinte:

1) Se o conjunto de cláusulas contém tanto funções quanto constantes, então o universo de Herbrand será contavelmente infinito.
2) Se o conjunto de cláusulas contém apenas constantes, então o universo de Herbrand para este conjunto será um conjunto finito formado pelas constantes do conjunto de cláusulas.
3) Se o conjunto de cláusulas não contém constante alguma, então cria-se uma constante fictícia (a, por exemplo).

Os elementos do conjunto universo de Herbrand são todos os símbolos ground gerados a partir das funções e constantes presentes no conjunto de cláusulas.

Assim, para o exemplo dado acima, o conjunto universo de Herbrand (H) será:

H_0 = {a}, pois *a* é a única constante do conjunto de cláusulas.
$H_1 = H_0 \cup$ {f(a)}, pois *f* é a única função do conjunto de cláusulas.
$H_2 = H_1 \cup$ {f(f(a))}
$H_3 = H_2 \cup$ {f(f(f(a)))}
....
E assim sucessivamente. Ou seja, H é infinito.

Suponha agora que tenhamos o seguinte conjunto de cláusulas: Exemplo2 = {mae(f(X),X), $\neg$mae(Y,X) $\vee$ $\neg$mae(Z,Y) $\vee$ avo(Z,X), $\neg$avo(Y,X)}. A única diferença deste conjunto para o anterior é a ausência de constantes. Assim, o conjunto universo de Herbrand seria exatamente o mesmo, pois para a definição de H_0 temos que criar uma constante (que pode ser *a*). Assim, teríamos:

H_0 = {a}, pois *a* é a constante “criada” para o conjunto de cláusulas.

$H_1 = H_0 \cup \{f(a)\}$, pois *f* é a única função do conjunto de cláusulas.
$H_2 = H_1 \cup \{f(f(a))\}$
$H_3 = H_2 \cup \{f(f(f(a)))\}$
....
E assim sucessivamente. Ou seja, H é infinito.

Supondo agora que tenhamos o seguinte conjunto de cláusulas: Exemplo3 = {mae(f(X),X), ¬mae(Y,X) ∨ ¬mae(Z,Y) ∨ avo(g(X),X), ¬avo(Y,X)}. A única diferença deste conjunto para o anterior é a existência de duas funções (*f* e *g*). Assim, para a definição de H_0 temos que criar uma constante (que pode ser *a*), e o conjunto H ficaria assim:

$H_0 = \{a\}$, pois *a* é a constante "criada" para o conjunto de cláusulas.
$H_1 = H_0 \cup \{f(a),g(a)\}$, pois *f* e *g* são as únicas funções do conjunto de cláusulas.
$H_2 = H_1 \cup \{f(f(a)), f(g(a)),g(f(a)),g(g(a))\}$
$H_3 = H_2 \cup \{f(f(f(a))),f(f(g(a))),f(g(f(a))),f(g(g(a))),$
$g(f(f(a))), g(f(g(a))),g(g(f(a))),g(g(g(a)))\}$
....
E assim sucessivamente. Ou seja, H é infinito.

Para finalizar nossos exemplos iniciais, suponha agora que tenhamos o seguinte conjunto de cláusulas: Exemplo4 = {mae(Y,X), ¬mae(Y,X) ∨ ¬mae(Z,Y) ∨ avo(W,X), ¬avo(Y,X)}. Este conjunto de cláusulas não possui funções e nem constantes. Assim, para a definição de H_0 temos que criar uma constante (que pode ser *a*), e o conjunto H ficaria assim:

$H_0 = \{a\}$, pois *a* é a constante "criada" para o conjunto de cláusulas.
$H_1 = H_0 \cup \varnothing$
$H_2 = H_1 \cup \varnothing$
$H_3 = H_2 \cup \varnothing$
....
E assim sucessivamente. Ou seja, H = {a}, sendo um conjunto finito.

Para um conjunto de cláusulas S, a base de Herbrand, normalmente denotada por B_S é o conjunto de todos os predicados de S instanciados com todos os elementos do universo de Herbrand de S.

Assim, para o Exemplo 1, B_S = {mae(a,a), avo(a,a), mae(f(a),a), avo(f(a),a), mae(a,f(a)), avo(a,f(a)), mae(f(a),f(a), avo(f(a),f(a)), mae(a,f(f(a))),avo(a,f(f(a))), ...}, sendo um conjunto infinito. Já para o conjunto de cláusulas do Exemplo4, temos B_S = {mae(a,a),avo(a,a)}, sendo um conjunto infinito.

Mostre o conjunto de Herbrand e a base de Herbrand para o conjunto de cláusulas criado a partir da Forma Normal Conjuntiva de cada uma das fórmulas bem formadas dadas abaixo.

a) $(\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
b) $(\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
c) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
d) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
e) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
f) $(\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
g) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
h) $(\exists X\ (\exists Y\ \neg(p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
i) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
j) $(\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall X\ \forall Y \neg(q(X) \wedge q(Y))))))$
k) $(\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$
l) $(\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \rightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(W) \wedge q(Z))) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
m) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(Z) \rightarrow (\forall Y(q(Z) \wedge q(Z))))))$
n) $\neg (\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$
o) $\neg (\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$