# Capítulo 3

# Vetores e Eliminação de Gauss

O objetivo deste capítulo é aplicar as técnicas algébricas de cálculo de posto e resolução de sistemas lineares pelo Método de Eliminação de Gauss, nos problemas de vetores relacionados com o capítulo anterior.

Basicamente, estudaremos os seguintes problemas neste capítulo:

1. Verificar se um vetor $\vec{w}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ e obter a combinação linear, quando necessário.

2. Resolver problemas de dependência e independência linear.

3. Aplicar as duas técnicas anteriores na resolução de problemas de retas e planos.

4. Representar retas e planos por meio de equações lineares.

Na segunda parte, estudaremos as posições relativas entre retas, retas e planos, entre planos, todos dados em termos de vetores, utilizando esses resultados.

## 3.1 Combinações Lineares

Considere o problema de, dado um conjunto de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, em coordenadas, obter um vetor $\vec{w}$, também dado em coordenadas, como combinação linear dos vetores do conjunto.

Definição: *Um vetor $\vec{w}$ é uma combinação linear (c.l.) dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se existem escalares reais $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ de tal forma que $\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$.*

Este problema recai em resolver um sistema de equações lineares a $n$ variáveis ($n$ é o número de vetores do conjunto e o número de equações dependerá se o problema é no plano (2 equações) ou no espaço (3 equações)).

Veja três exemplos com resultados bem diferentes, para vetores no espaço:

1. O primeiro exemplo de sistema linear discutido no capítulo de Sistemas pode ser reenscrito da seguinte forma:

   *Verificar se o vetor* $\vec{w} = (8, 15, 3)$ *é combinação linear dos vetores* $\vec{v}_1 = (2, 1, 0)$*,* $\vec{v}_2 = (1, 1, 3)$ *e* $\vec{v}_3 = (1, 4, 2)$.

   Neste problema, procuramos $x$, $y$ e $z$, escalares reais de forma que $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$, ou seja, $(8, 15, 3) = x(2, 1, 0) + y(1, 1, 3) + z(1, 4, 2)$.

   Isto nos leva ao sistema $(*)\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ \quad\;\; 3y + 2z = 9 \end{cases}$ que já vimos inicialmente.

   Observe que as colunas na matriz dos coeficientes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ são as coordenadas dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$ representa o vetor $\vec{w}$.

   Assim, a matriz ampliada $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ tem na última coluna o vetor $\vec{w}$ e nas primeiras colunas, os vetores do conjunto.

   Reveja o Método de Eliminação de Gauss aplicado em $M$:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} = E$$

Continuando, para obter a forma escada l-reduzida (Método de Gauss-Jordan), temos:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R$$

Chegamos que o sistema inicial (*) é equivalente ao sistema simplificado (mais, impossível!)

$$(**) \begin{cases} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 3 \end{cases}$$

Isto nos fornece que a única forma de se escrever $\vec{w} = (8, 15, 9)$ como combinação dos vetores $\vec{v_1} = (2, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 1, 3)$ e $\vec{v_3} = (1, 4, 2)$ é

$$\vec{w} = 2\vec{v_1} + v_2 + \vec{v_3}.$$

2. O próximo exemplo envolve o resultado de infinitas soluções e está ligado ao problema de dependência e independência linear.

   *Verificar se o vetor* $\vec{O} = (0, 0, 0)$ *é combinação linear dos vetores* $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 3)$ *e* $\vec{w} = (1, 4, 21)$

   A combinação linear resulta em:

   $x(2, 1, 0) + y(1, 1, 3) + z(1, 4, 21) = (0, 0, 0)$, ou seja, $(2x + y + z, x + y + 4z, 3y + 21z) = (0, 0, 0)$

   Logo, os coeficientes da combinação linear nula de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ devem satisfazer o sistema de 3 equações a 3 incógnitas

$$(*) \begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 21z & = & 0 \end{cases}$$

   Este é um sistema homogêneo que pode ser escrito matricialmente como $AX = O$, onde

A matriz dos coeficientes do nosso sistema é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \end{bmatrix}$. Observe que as colunas de $A$ são as coordenadas dos vetores que nos propomos a analisar inicialmente. Neste caso, como o sistema é homogêneo, não precisaremos de utilizar a matriz ampliada do sistema.

Vamos fazer uma redução à forma escada de nossa matriz.

Primeiro, somamos à segunda linha a primeira linha multiplicada por $-\dfrac{1}{2}$ ($L_2 \longrightarrow L_2 + (-\dfrac{1}{2})L_1$) e depois, somamos à terceira linha a nova segunda linha multiplicada por $-6$ ($L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 3 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A matriz $A'$ é uma matriz na forma escada, equivalente a $A$.

Como a linha nula não afeta o sistema, o sistema inicial é equivalente ao seguite sistema de 2 equações a 3 incógnitas $(**)$ $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z = 0 \end{cases}$

Temos de $\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z = 0$ que $y = -7z$. Substituindo na primeira equação, temos $2x - 7z + z = 0$, e portanto $2x - 6z = 0$, donde $x = 3z$.

Assim, para cada valor de $z$, assumido entre os reais, temos $x$ e $y$ em função de $z$, satisfazendo o sistema. Por exemplo, se $z = 1$, temos $x = 3$ e $y = -7$.

Isto significa que existem infinitas maneiras de se expressar o vetor nulo $\vec{O}$ como combinação linear dos vetores dados. Também que, além da combinação nula $\vec{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$, existem outras, com coeficientes não todos nulos. Isto é equivalente a dizer que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. (linearmente dependentes) ou que estes 3 vetores dados são coplanares.

3. Este exemplo envolve um sistema impossível.

   *Verificar se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dados $\vec{u} = (5, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, 3, 0)$.*

Estaremos procurando $x$ e $y$ com $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Em coordenadas, $x(5,2,3) + y(1,1,-1) = (2,3,0)$, donde temos o sistema não homogêneo

$$\begin{cases} 5x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & y & = & 3 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{cases} \text{ com forma matricial } \overbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}}^{B}.$$

Escalonando a matriz completa:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{3}{5}L_1]{L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{2}{5}L_1} \begin{bmatrix} 5 & 1 & | & 2 \\ 0 & \frac{3}{5} & | & \frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{8}{5} & | & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 + \frac{8}{3}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & | & \frac{14}{3} \end{bmatrix} = [A'|B']$$

Então temos:

$posto(A)$ = número de linhas não nulas de $A' = 2$ e

$posto([A|B]))$ = número de linhas não nulas de $[A'|B'] = 3$.

Como $posto(A) \neq posto([A|B])$, o sistema não admite solução. De fato, a última linha de $[A'|B']$ significa que no sistema linear equivalente $A'X = B'$, aparece a $3^{\underline{a}}$ equação do tipo $0x + 0y = \frac{14}{3}$, que obviamente não é satisfeita por nenhum valor de $x$ ou $y$.

Isto significa, no exemplo, que não é possível escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A seguir, vamos ver como obter, no Maple, um vetor $\vec{w} = (4,5,7)$ no espaço como c.l. dos vetores $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (1,-1,-2)$.

`Comandos no Maple`

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear

u := vector(3,[1,2,3]);  # vetor u

v := vector(3,[1,-1,-2]);  # vetor v

A := concat(u,v); # matriz cujas colunas são u e v

w := vector(3,[4,5,7]);

X := linsolve(A,w); # resolvendo diretamente

  # X retorna solução do sistema AX=w, X=[3,1]
```

`...`

## 3.2 Dependência e independência linear, através de posto de matriz

Consideremos inicialmente uma matriz $M$ cujas linhas representam vetores do plano (ou do espaço). Então uma matriz de vetores do plano deve ter 2 colunas e do espaço, 3 colunas.

Por exemplo, as linhas de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & \pi & e \end{bmatrix}$ representam os vetores $(1, 2, 3)$ e $(10, \pi, e)$ do espaço e as linhas de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & \pi \end{bmatrix}$ representam os vetores $(1, 2)$ e $(10, \pi)$ do plano.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
u := vector([1,2,3]);
v := vector([10, Pi, E]);
w:= vector([0,0,0]);
M := stackmatrix(u,v,w); # u, v e w aparecem como linhas de M
```

...

Lembremos que vetores são colineares se, representando-os a partir de um ponto dado, existe uma reta que os contém. Ou seja, se são múltiplos de um único vetor não nulo. Eles também são ditos paralelos, pois se variarmos os pontos, podemos construir retas paralelas com os não nulos. Um vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.

Por exemplo, os vetores $(1, 2)$, $(2, 4)$ e $(\pi, 2\pi)$ são paralelos ou colineares.

Dois vetores não paralelos determinam um único plano a partir de um ponto dado. Um conjunto de vetores são coplanares se, representando os vetores a partir de um ponto dado, existe um plano que os contém. Observe que vetores colineares são, em particular, coplanares. Os vetores $(1, 2, 3)$ e $(\pi, 0, 1)$ são sem dúvida coplanares. Agora, $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (\pi, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2 + 3 * \pi, 4, 9)$ são coplanares pois $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Claro que vetores no plano são sempre coplanares.

Agora, 3 ou mais vetores no espaço podem ser não ser coplanares. Os vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são claramente não coplanares.

Qual a relação entre as operações elementares sobre as linhas de $M$ com os conjuntos de vetores representados?

1. A soma de um múltiplo de uma linha pivô em outra linha (`addrow`), mantendo a linha pivô, envolve alterações entre dois vetores do conjunto.

   Considere o exemplo de $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

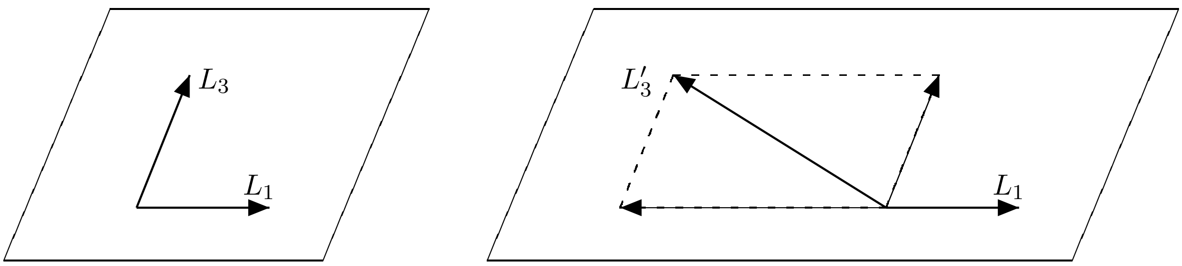
   Observe que a linha pivô $(1, 2, 3)$ é não nula, representando um vetor não nulo.

   Se a outra linha é um múltiplo da linha pivô, os dois vetores representandos pelas 2 linhas seriam colineares e na operação para escalonamento, seria anulada, podendo ser eliminada como vetor.

   $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ pela operação $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 = L2'$. Observe que $L_1$ e $L_2$ representam a mesma direção e $L_2' = \vec{0}$.

   Se a outra linha não for múltipla da linha pivô, as duas linhas representam vetores que determinam um plano. Na operação analisada, o segundo vetor será substituído por um novo vetor do mesmo plano não colinear com o pivô. Logo os dois vetores continuarão determinando o mesmo plano.

   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ pela operação $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 = L_3'$. Observe que $L_1$ e $L_3$ geram o mesmo plano que $L_1$ e $L_3'$, já que $L_3'$ é coplanar com $L_1, L_3$ e não é paralelo a $L_1$.

   Assim, essa operação não altera se os vetores são colineares, coplanares ou não coplanares.

2. A troca de linhas de $M$ (`swaprow`) não altera se os vetores são colineares, coplanares ou não coplanares, pois altera somente a ordem entre os vetores.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A troca entre as linhas 2 e 3 não altera do plano gerado pelos vetores.

3. A multiplicação de uma linha por um escalar não nulo (`mulrow`) também não altera se os vetores são colineares, coplanares ou não coplanares. Apenas troca um vetor com outro na mesma direção.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. No exemplo, $L_1$ e $L_2$ geram o mesmo plano que $L_1$ e $-L_2 = L_2'$.

Assim, as 3 linhas de $M$ representam vetores do mesmo plano que as linhas da última matriz do exemplo acima.

Então podemos verificar se um conjunto de vetores dados em coordenadas são colineares, coplanares ou não coplanares, calculando o posto da matriz $M$ cujas linhas são as coordenadas dos vetores.

Resultado: Seja $r$ o posto da matriz $M$ cujas linhas são as coordenadas dos vetores. Então:

1. Se $r = 0$, todos os vetores são nulos.

2. Se $r = 1$, os vetores são colineares. Todos são múltiplos de qualquer vetor não nulo do conjunto. Mas também são múltiplos do vetor representado pela única linha não nula da forma escada.

3. Se $r = 2$, os vetores são coplanares e não colineares. Todos os vetores podem ser escritos como combinação linear dos dois vetores não nulos representados nas duas linhas não nulas da matriz na forma escada.

4. Se $r = 3$, os vetores são não coplanares e todos os vetores podem ser escritos como combinação linear dos 3 vetores das 3 linhas não nulas da forma escada.

Exemplos:

1. Os vetores $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$ são coplanares:

   A matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   tem posto 2.

   Além disso, todos os vetores inicialmente dados e quaiquer combinações lineares dos vetores dados são combinações lineares de $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, 2)$, ou seja, são da forma $(x, y, -x + 2y)$.

2. Os vetores $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(7, 8, 0)$ são não coplanares.

   A matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   tem posto 3.

   Observe que uma matriz $3 \times 3$ ter posto 3 equivale a dizer que seu determinante é não nulo, ou que a matriz é invertível.

`Comandos no Maple`

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
M := matrix(...);
rank(M);  # retorna o posto de M
gausselim(M); # retorna M escalonado
gaussjord(M); # retorna a escada l-reduzida de M
det(M); # retorna o determinante de M, se existir
```

`...`

Definição: Um conjunto de vetores é *linearmente dependente* se algum dos vetores do conjunto é combinação linear dos demais vetores do conjunto.

Neste caso, este vetor que é c.l. dos demais pode ser eliminada do conjunto, que o conjunto de vetores gerados pelos restantes como c.l. continua sendo o mesmo.

Por exemplo, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, então toda c.l. dos 3 vetores é c.l. dos dois, isto é, são coplanares com $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pois $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} + z(a\vec{u} + b\vec{v}) = (x + za)\vec{u} + (y + \underline{\ })\vec{v}$.

É o caso de conjuntos com 2 ou mais vetores colineares, 3 ou mais vetores coplanares, e 4 ou mais vetores quaisquer no espaço. Ou um conjunto contendo um vetor nulo.

DEFINIÇÃO: Um conjunto de vetores é *linearmente independente* (l.i.) se não for l.d., isto é, se nenhum vetor do conjunto é combinação linear dos demais vetores do conjunto.

Observe que estas definições não são muito práticas do ponto de vista computacional, pois se o primeiro vetor do conjunto não é c.l. dos demais, pode ser que o segundo o seja, ou o último, ou um lá do meio. Por isso, é melhor usar o seguinte Teorema:

TEOREMA: *Sejam os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$. Então:*

1. *Os vetores são l.i. se, e somente se, $x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ implica que $x_1 = \cdots = x_n = 0$.*

2. *Os vetores são l.d. se, e somente se, pode-se escrever $x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ com algum $x_i \neq 0$.*

Ilustremos o Teorema em alguns casos:

1. Se o vetor nulo é um dos vetores do conjunto, o conjunto é l.d. De fato, $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n$ para quaisquer vetores $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$ do plano (ou do espaço, sem misturar) e portanto, o vetor nulo é sempre c.l. dos demais vetores do conjunto. Estenda o resultado para $\{\vec{0}\}$, para poder generalizar.

   Temos então que $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n + \underline{1}\vec{0} = \vec{0}$, ou seja, existe uma c.l. dos vetores do conjunto, com coeficientes não todos nulos, (pelo menos de $\vec{0}$ é $1 \neq 0$) dando o vetor nulo. (versão do Teorema)

   Isto implica que, se considerarmos a matriz $M$ cujas linhas são as coordenadas dos vetores dados, *o posto de $M$ é <u>menor</u> que o número de vetores*, já que a matriz tem uma linha nula e seu número de linhas é o número de vetores.

   *Considere, de agora em diante, conjuntos de vetores sem vetor nulo entre eles.*

2. Seja agora um conjunto de um único vetor não nulo. $\{\vec{v}\}$.

   É claro que $x\vec{v} = \vec{0}$ implica que $x = 0$ já que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Este conjunto $\{\vec{v} \neq \vec{0}\}$ é l.i.

A matriz-linha $M$ cuja linha é dada pelas coordenadas de $\vec{v}$ tem posto 1 (um), igual ao número de vetores, 1 (um).

3. Considere agora um conjunto de dois vetores não nulos, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Eles são l.d. se forem paralelos, isto é, um deles é múltiplo do outro. Suponha por exemplo, que $\vec{v} = x\vec{u}$. Então $x\vec{u} - v = \vec{0}$, ou seja, existe uma c.l. de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com pelo menos um coeficiente não nulo, gerando o vetor nulo. Vale a recíproca: se $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$, com, por exemplo, $x \neq 0$, então $\vec{u} = -\frac{y}{x}\vec{v}$ e portanto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Em termos de independência linear, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ l.i. se, e somente se, $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ somente para $x = y = 0$.

   Em termos de matrizes, considere a matriz $M$ cujas linhas são as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se uma linha é multipla da outra (vetores l.d.), o posto é 1 (menor que o número de vetores, 2). Caso contrário (vetores l.i.), o posto é 2. Ou seja, os 2 vetores formam um conjunto l.i. se e só se $posto(M) = 2 =$ número de vetores.

   Por exemplo, $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $(0, 1, 2)$ são l.i. e o posto da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é 2, igual ao número de vetores. Já $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $(2, 4, 6)$ são l.d. e $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem posto 1, menor que o número de vetores (2).

   Observe também que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ implica que $x = y = 0$ no primeiro exemplo, já que o posto da matriz dos coeficientes é 2 que é o número de variáveis, dando solução única. E no segundo exemplo, o posto sendo 1, fornece infinitas soluções, entre elas soluções não nulas.

   Observe que o número de colunas de $M$ é o número de coordenadas dos vetores.

4. Considere agora um conjunto de 3 vetores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

   Se forem l.d., pelo menos um dos vetores, digamos $\vec{w}$, é c.l. dos outros dois, isto é, $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Então os 3 vetores são coplanares. Veja que $x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ é uma c.l. dos vetores dando o vetor nulo com pelo menos um dos coeficientes não nulo (versão l.d. do Teorema). Reciprocamente, se $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, com um dos coeficientes não nulo, por exemplo, $z \neq 0$, podemos escrever $\vec{w} = -\frac{x}{z}\vec{u} - \frac{y}{z}\vec{v}$, ou seja, $\vec{w}$ é c.l. de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Por exemplo, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ são l.d. e $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$. E se $2\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w} = \vec{0}$, com coeficiente de $\vec{v}$ igual a $-5 \neq 0$, podemos dizer que $\vec{v} = \frac{2}{5}\vec{u} + \frac{4}{5}\vec{w}$.

O conjunto é l.i. se, e somente se, não forem l.d. A negação da condição acima é que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ se, e só se, $x = y = z = 0$.

Por exemplo, $x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (0,0,0)$ implica que $x = y = z = 0$, confirmando que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ são l.i. E obviamente a matriz identidade $3 \times 3$, cujas linas são os vetores, tem posto 3.

Em termos de matriz $M$, o sistema homogêneo decorrente de $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ cuja matriz dos coeficientes é $M^t$ (transposta de $M$) tem solução única $x = y = z = 0$ só quando o posto de $M^t$, que é igual ao posto de $M$, for 3, igual ao número de vetores, pelo Teorema de Rouchè-Capelli.

Exercício: *Verifique, usando o Teorema, que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., então $\vec{w}_1 = a\vec{u} + b\vec{v}$ e $\vec{w}_2 = c\vec{u} + d\vec{v}$ são l.i. se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.*

Solução: Considere a c.l. nula $x\vec{w}_1 + y\vec{w}_2 = \vec{0}$. A equação é equivalente a $x(a\vec{u} + b\vec{v}) + y(c\vec{u} + d\vec{v}) = (xa + yc)\vec{u} + (xb + yd)\vec{v} = \vec{0}$. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., segue que $ax + cy = 0$ e $bx + dy = 0$. Então, pelo Teorema,temos que $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são l.i. se, e somente se, $x = y = 0$, ou seja, a única solução de $\{ax + by = 0,\ cx + dy = 0\}$ é x=y=0. Mas isto se, e somente se, $ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$

Resultado: Um conjunto de vetores dados em coordenadas é l.i. se, e somente se, a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores tem posto igual ao número de vetores.

Exemplos: *Verificando se são li ou ld:*

1. $\{(1,0,3),(0,1,0)\}$ é l.i. pois $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem posto 2. São dois vetores não colineares.

2. $\{(1,2),(\pi,0),(5,100)\}$ é l.d. pois a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores tem posto 2 (2 colunas, donde o posto é no máximo 2), menor que o número de vetores,3. Na verdade, 3 ou mais vetores no plano são sempre l.d.

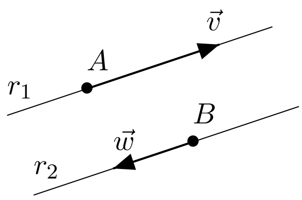
## 3.3 Aplicações em problemas de retas e planos

Vamos agora estudar as posições relativas de duas retas utilizando as técnicas algébricas discutidas anteriormente.

*No plano* $\mathbb{R}^2$, duas retas $r_1$ e $r_2$ no plano dadas por: $\begin{cases} r_1: \quad X = A + \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2: \quad X = B + \mu\vec{w}, \quad \vec{w} \neq \vec{0}, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

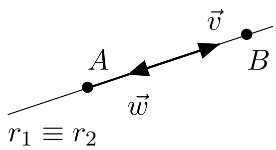
podem ser:

(1) paralelas ($r_1 \parallel r_2$)

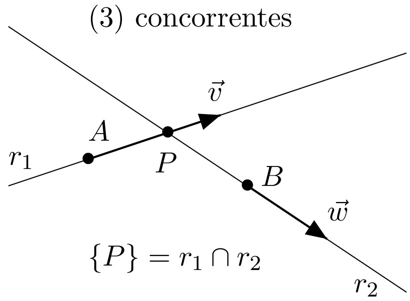



(2) coincidentes

($r_1 \equiv r_2$)




(3) concorrentes




Analisando vetorialmente as possibilidades temos:

1. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.d. e $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ (isto é, $r_1$ e $r_2$ não possuem pontos em comum)

   Basta verificar que existe algum escalar $\alpha$ com $\vec{w} = \alpha\vec{v}$ e que $A$ não satisfaz a equação de $r_2$ (ou que $B$ não satisfaz a equação de $r_1$)

   Vamos a um exemplo, em coordenadas: $\begin{cases} r_1: \qquad X = \lambda(2,-3), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2: \quad X = (x,y) = (1,5) + \mu(-6,9), \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$

   Os vetores $\vec{v} = (2,-3)$ e $\vec{w} = (-6,9)$ são l.d. pois $\vec{w} = -3\vec{v}$.

   Ou ainda, a combinação linear $x\vec{v} + y\vec{w} = x(2,-3) + y(-6,9) = (0,0)$ resulta no sistema $\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -3x + 9y = 0 \end{cases}$ onde a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ se reduz à forma escada $M' = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $posto(M) = 1 < 2 =$ número de variáveis do sistema.

   Logo o sistema é equivalente a $2x - 6y = 0$, donde $x = 3y$. Tomando $y = 1$, por exemplo, temos que $3\vec{v} + \vec{w} = (0,0)$, ou seja, $\vec{w} = -3\vec{v}$.

   Temos portanto que $r_1$ e $r_2$ possuem a mesma direção. Além disso, $B = (1,5)$ não satistaz a equação de $r_1$ pois $(1,5) = \lambda(2,-3)$ implica que $\begin{cases} 1 = 2\lambda \\ 5 = -3\lambda \end{cases}$ donde devemos ter $\lambda = \frac{1}{2}$ e também $\lambda = -\frac{5}{3}$, o que é impossível. As retas são portanto paralelas.

Poderíamos também afirmar que $r \parallel s$ usando o fato de que tomando $A = (0,0) \in r_1$ e $B = (1,5) \in r_2$, temos $\overrightarrow{AB} = (1,5)$ não colinear com $\vec{v} = (2,-3) \parallel \vec{w}$. Se as retas fossem coincidentes, $\overrightarrow{AB}$ deveria definir a mesma direção das retas.

2. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.d. e $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

   Neste caso as retas possuem a mesma direção e possuindo algum ponto em comum, resultam ser coincidentes.

   Nos exercícios, basta checar se $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ é l.d. e verificar que $A \in r_1$ satisfaz a equação de $r_2$ e portanto $A \in r_1 \cap r_2$ (ou pode-se mostrar $B \in r_1 \cap r_2$).

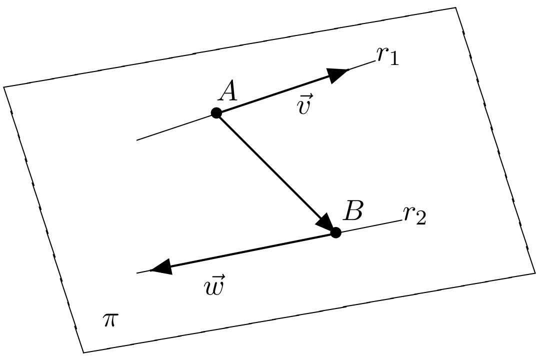
   Ou ainda se $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares

3. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.i. Neste caso, necessariamente haverá um único ponto $P$ no plano que satisfaz as duas equações.

   Em coordenadas, se $\vec{v} = (a_1, b_1)$ e $\vec{w} = (a_2, b_2)$, então a matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ deverá ter posto 2, já que $x\vec{v} + y\vec{w} = x \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ só tem solução trivial $x = 0 = y$.

*No espaço* $\mathbb{R}^3$, duas retas $\begin{cases} r_1 : \quad X = A + \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ r_2 : \quad X = B + \mu\vec{w}, \quad \vec{w} \neq \vec{0}, \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$ podem ser:

1. *coplanares*, quando existe algum plano $\pi$ no espaço que contenha ambas as retas. Neste caso, as possibilidades geométricas das posições entre as duas retas recaem no caso anterior: paralelas, coincidentes ou concorrentes.



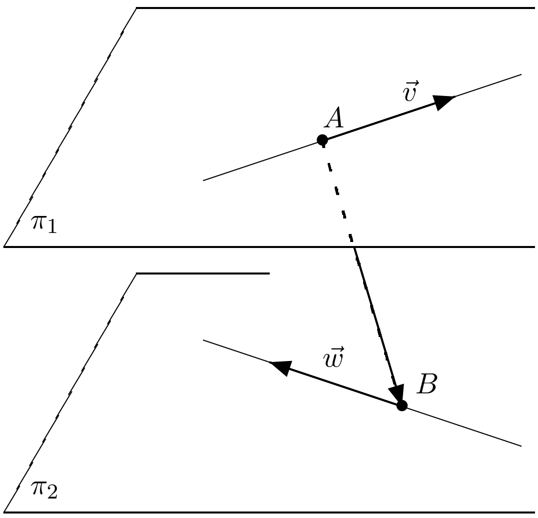

No caso das retas $r_1$ e $r_2$ estarem contidas num plano $\pi$ temos 3 vetores $\{\overrightarrow{AB}, \vec{v}, \vec{w}\}$ coplanares e portanto l.d., quer sejam as retas paralelas ou não.

Em *coordenadas*: se $A = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$, então a matriz $M = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}$ deverá ter <u>posto menor que 3</u>.

No caso do posto ser 1, conclua (exercício!) que se trata de duas retas coincidentes.

No caso do posto ser 2, conclua que as retas são concorrentes se $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ for l.i. e são paralelas se $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ for l.d.

2. *não coplanares* ou *reversas*, quando não for possível encontrar um plano que contenha as duas retas.




Neste caso, o planos:

$\pi_1$ contendo a reta $r_1$ e a direção de $r_2$, e

$\pi_2$ contendo a reta $r_2$ e a direção de $r_1$,

são paralelos.

Obviamente as retas não podem ser paralelas. Como $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$, devemos ter $\overrightarrow{AB}$ não coplanar com as direções de $r_1$ e $r_2$.

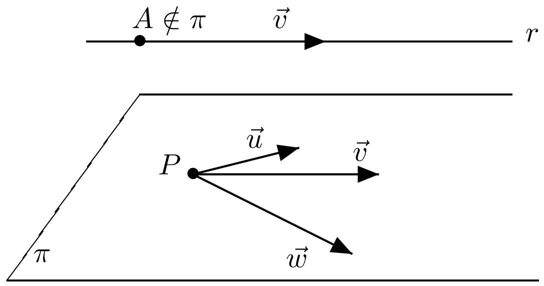
Isto quer dizer que os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. e, em coordenadas, significa que a matriz das coordenadas possui <u>posto 3</u>.

Estaremos mais tarde estudando com mais riqueza de técnicas as posições relativas entre uma reta e um plano, mas com a discussão acima, já podemos concluir as possibilidades geométricas no espaço descritas a seguir.

Sejam a reta $r$ e o plano $\pi$:

$$r: \quad X = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$
$$\pi: \quad X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \{\vec{u}, \vec{w}\} \ l.i.$$

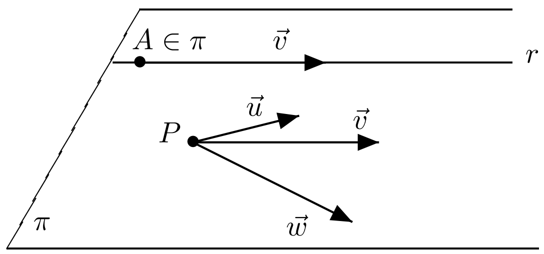
1. *r é paralela a* $\pi$ se $A \notin \pi$ e $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ é l.d.




Neste caso, nenhum ponto $X$ da reta satisfaz a equação do plano ($r \cap \pi = \emptyset$).

Em coordenadas, a matriz das coordenadas dos 3 vetores tem posto 2. Acrescentando o vetor $\overrightarrow{AB}$ obtém-se posto 3.

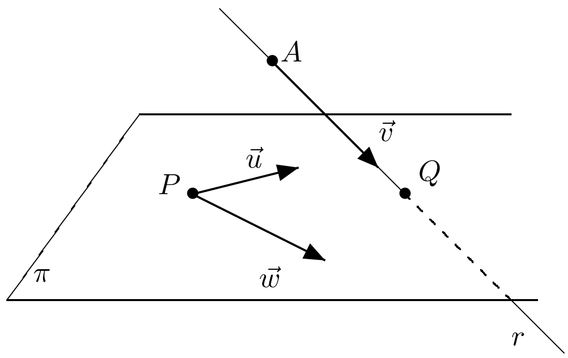
2. $r$ *está contida em* $\pi$, se $A \in \pi$ e $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ é l.d.




Neste caso, todos os pontos $X$ da reta satisfazem a equação do plano.

Em coordenadas, a matriz das coordenadas dos 3 vetores tem posto 2. Incluindo o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem-se uma matriz de 4 vetores, com posto 2.

3. $r$ *é concorrente com* $\pi$, se exite um único ponto $Q$ que satisfaz as equações de $r$ e $\pi$.




Isto ocorre quando $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ é l.i.

Em coordenadas, a matriz das coordenadas dos vetores tem posto 3.

$Q$ é o ponto onde $r$ fura o plano $\pi$.

## 3.4 Retas e planos através de equações lineares

### 3.4.1 Equação geral de reta no plano

No plano, uma reta pode ser descrita também por uma equação linear, da forma $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, chamada equação geral da reta.

Suponha que $X = (x, y)$ é um ponto da reta $r : (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b)$. Como os vetores $\overrightarrow{AX} = (x - x_0, y - y_0)$ e $\vec{v}$ são colineares, devemos ter que o posto de $M = \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{bmatrix}$ deve ser 1, o que implica neste caso que $\det M = 0$. Ou seja, $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.

Logo, os pontos $(x, y)$ da reta satisfazem a equação linear nas duas variáveis, $bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0$.

Por exemplo, a reta $r : (x, y) = (1, -2) + t(-1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ tem a equação dada por $\begin{Vmatrix} x - 1 & y + 2 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} = 0$, ou seja, $3(x - 1) + (y + 2) = 0$.

Reciprocamente, se $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, com $\alpha$ ou $\beta$ não nulo, podemos encontrar a reta dada por esta equação. Suponhamos, por exemplo, que $\alpha \neq 0$. Como temos uma equação não nula e 2 variáveis, temos grau de liberdade 2-1=1. Assim, escolhendo $y$ como a variável livre, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, temos $x = -\frac{\beta}{\alpha}t - \frac{\gamma}{\alpha}$. Assim, temos que as soluções da equação $\alpha x + \beta y + c = 0$ são da forma $(x, y) = (-\frac{\gamma}{\alpha}, 0) + t(-\frac{b}{\alpha}, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, pertencem à reta por $A = (-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$ e com direção $\vec{v} = (-\frac{b}{\alpha}, 1)$.

E se $\alpha = 0$, como $\beta \neq 0$ pode-se escolher $x = t$ como variável independente e obter as soluções da equação em função de $t$.

Resolvendo a equação $2x - 3y - 5 = 0$, temos $y = t, x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t$, donde $(x, y) = (\frac{5}{2}, 0) + t(\frac{3}{2}, 1)$.

Observe que podemos reescrever a equação vetorial encontrada na forma $(x, y) = (\frac{5}{2}, 0) + t(3, 2)$, onde o vetor direção pode ser dado por $\vec{v} = (3, 2) = (a, b)$ e a equação linear é da forma $bx - ay + c = 0$. No capítulo seguinte, vamos ver que $(a, b)$ e $(b, -a)$ são perpendiculares entre si.

As equações de reta estudadas no Ensino Médio, da forma $y = mx + b$, são casos particulares, onde o coeficiente de $y$ é não nulo. Veja que o vetor direção pode ser dado por $\vec{v} = (1, m)$, e um ponto da reta é $A = (0, b)$.

### 3.4.2 Equação geral de plano no espaço

Analogamente a retas no plano, um plano no espaço pode ser representada por uma equação linear, $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, chamada *equação geral do plano.*

Consideremos inicialmente um plano determinado pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e pelas direções l.i. $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_1, b_2, c_2)$:

$$\pi : X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Um ponto $X = (x, y, z)$ do plano deve determinar o vetor $\overrightarrow{AX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Assim, a matriz $M_{3\times 3}$ cujas linhas são os vetores $X - A$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ deve ter determinante nulo, para ter posto 2.

Logo, $\left\|\begin{matrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\| = 0$ quando desenvolvido, fornece a equação geral do plano $\pi$.

Por exemplo, o plano passando pelo ponto $A = (0, 1, 0)$ e com direções $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (3, -1, 4)$ tem equação geral dada por $\left\|\begin{matrix} x & y - 1 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix}\right\| = 0$, ou seja, $11x + 5(y - 1) - 7z = 0$.

Reciprocamente, dada uma equação $ax + by + cz + d = 0$, com pelo menos um dos coeficientes dos termos lineares $a$, $b$ ou $c$, não nulo, pode-se determinar quais pontos $(x, y, z)$ do espaço satisfazem a equação. Se $a \neq 0$, podemos considerar $y$ e $z$ como variáveis livres, obtendo: $(x, y, z) = (-\frac{d}{a}, 0, 0) + t(-\frac{b}{a}, 1, 0) + s(-\frac{c}{a}, 0, 1)$, $t, s \in \mathbb{R}$, que é a equação vetorial de um plano. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ ou se $a = b = 0$ e $c \neq 0$, fica como exercício.

Por exemplo, a equação $x - 2y + 3z - 1 = 0$ representa o plano dado vetorialmente por $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, 1, 0) + s(-3, 0, 1)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

O estudo de posições relativas entre planos dados pelas equações gerais, vira exercício de aplicação do Teorema de Rouchè-Capelli.

Os planos $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : Ax + By + Cz + D = 0$ são:

1. paralelos se o sistema dado pelas duas equações lineares é impossível. Isto implica que $(a, b, c)$ e $(A, B, C)$ são paralelos (múltiplos) mas $(a, b, c, d)$ e $(A, B, C, D)$ não são múltiplos. Por exemplo, os planos $x + 2y + 3z - 1 = 0$ e $2x + 4y + 6z - 10 = 0$ são paralelos, pois $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$, mas $(2, 4, 6, -10) \neq 2(1, 2, 3, -1)$

2. coincidentes se a intersecção é um plano ($\alpha \cup \beta = \alpha = \beta$), ou seja, o grau de liberdade das soluções é 2, ou seja, $(a, b, c, d)$ e $(A, B, C, D)$ são múltiplos. Por exemplo, os planos

$x + 2y + 3z - 1 = 0$ e $2x + 4y + 6z - 2 = 0$ são coincidentes, pois $(2, 4, 6, -2) = 2(1, 2, 3, -1)$.

3. concorrentes se a intersecção é uma reta se as soluções apresentam grau de liberdade $3-p = 1$, ou seja, $(a, b, c)$ e $(A, B, C)$ devem ser coplanares e não colineares para $p = 2$, onde $p$ é o posto da matriz dos coeficientes do sistema. Por exemplo, os planos $x + 2y + 3z - 1 = 0$ e $x - y - z + 4 = 0$ são concorrentes, já que $(1, 2, 3)$ e $(1, -1, 1)$ são l.i.

O problema de encontrar a intersecção de uma reta com um plano fica muito mais simples com o plano dado pela equação geral. Encontremos, por exemplo, o ponto onde a reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, -1, 2)$ fura o plano $\pi : x - 3y + 3z + 10 = 0$. Como o ponto $(x, y, z)$ da reta deve satisfazer a equação do plano, substituímos na equação $(1 + t) - 3(-t) + 3(2 + 2t) = 0$, donde $10t + 7 = 0$ e portanto, $t = -0.7$. Logo, o ponto de intersecção é $Q = (1, 0, 2) + 0.7(1, -1, 2)$.

No próximo capítulo veremos também que o vetor $(a, b, c)$ representa um vetor perpendicular ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

### 3.4.3 Reta no espaço como intersecção de dois planos

Uma reta no espaço não pode ser representada por uma equação linear, pois estas equações representam planos, como acabamos de ver. Mas podemos representar retas no espaço como intersecções de 2 planos concorrentes, cada um dado por uma equação geral.

Por exemplo, $(*)\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \end{cases}$ representa uma reta já que $(2, 1, 1)$ e $(1, 1, 4)$ não são múltiplose portanto, as equações representam planos concorrentes segundo a reta.

Resolvendo o sistema, teremos a equação vetorial da reta:

Obtendo a matriz de Gauss-Jordan da matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que o sistema é equivalente a $(**)\begin{cases} x + \frac{3}{2}z = \frac{7}{2} \\ y - 2z = 1 \end{cases}$, representando a reta é $r : (x, y, z) = (\frac{7}{2}, 1, 0) + t(-\frac{3}{2}, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Vamos reapresentar os comandos para a ilustração do final do capítulo de Sistemas Lineares, que agora devem fazer mais sentido.

Comandos no Maple

```
with(linalg): # carrega o pacote linalg de Álgebra Linear
with(plots); # carrega o pacote plots de gráficos
implicitplot3d( x+y+4*z=15, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10);
   # desenha a parte do plano contida no cubo -10 <= x,y,z <=10
implicitplot3d({x+y+4*z=15, 3*y+2*z=9}, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10);
  # desenha os dois planos no cubo explicitado
  # a solução do sistema é a intersecção
  # (x,y,z) = (12,3,0)+t(-10/3,- 2/3,1)
spacecurve([12 -t*10/3, 3-t*2/3, t], t=3/5 ..33/15, thickness=3, color=red);
  # desenha a reta de intersecção
  # para desenhar os planos e a reta, juntos,
planos := implicitplot3d({x+y+4*z=15, 3*y+2*z=9}, x=-10..10,y=-10..10, z=-10..10):
reta := spacecurve([12 -t*10/3, 3-t*2/3, t], t=3/5 ..33/5, thickness=3, color=red):
display({planos, reta});
```

...