

# Capítulo 3

## Recursividade e algoritmos de busca e ordenação

Profa. Dra. Laura Rodríguez

E-mail: [lmrodrig@uma.pt](mailto:lmrodrig@uma.pt)

Universidade da Madeira

### 3. Recursividade e algoritmos de busca e ordenação

1. Recursão
2. Ordenação
3. Busca

## 3. Recursividade e algoritmos de busca e ordenação

1. Recursão
2. Ordenação
3. Busca

### 3.1 Recursão (ou Recursividade)

- É uma técnica empregada na construção de algoritmos
  - Melhorar a clareza e simplicidade
  - Em alguns casos a solução não-recursiva é bem mais extensa e menos elegante
- Consiste em reduzirmos um determinado problema a **uma instância menor**, do mesmo problema ...

### 3.1 “Fórmula geral” da recursividade

- Se o problema for pequeno, então resolva-o diretamente
- Se o problema for grande:
  - Reduza o seu tamanho, criando uma instância menor do mesmo problema
  - Resolva a instância menor, aplicando o mesmo método
  - E finalmente, retorne ao problema original

### 3.1 Algoritmos recursivos

- Algoritmos recursivos precisam ter um **caso trivial**, isto é, aquela instância (pequena) do problema, para a qual se conhece uma solução simples (nem que seja com força-bruta ...)
- Um algoritmo recursivo faz chamadas a si próprio (para resolver a instância menor)

## Exemplo

- Provavelmente, o exemplo mais clássico de algoritmo recursivo seja o cálculo do fatorial:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 * 2 = 2$$

$$3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

...

$$N! = 1 * \dots * N$$

## Cálculo do fatorial

- Vejamos um algoritmo (não-recursivo) para o cálculo do fatorial

```
FATORIAL(n)  
  fat ← 1;  
  cont ← 1;  
  enquanto cont ≤ n  
    fat ← fat * cont;  
    cont ← cont + 1;  
  retorne fat;
```

## Fatorial usando recursão

- Primeiramente, vamos formular uma solução do problema:

**Fat (n) =**

**1, se  $n = 0$**

**$n * \text{fat}(n-1)$ , se  $n > 0$**

## Algoritmo recursivo

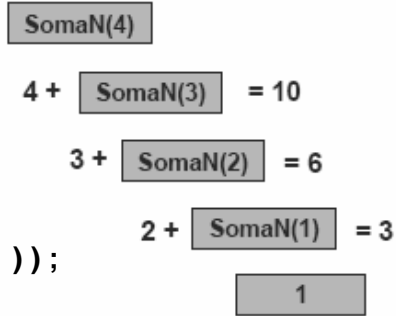
- Vejamos como ficaria o algoritmo recursivo, para o cálculo do fatorial:

```
FAT_REC(n)  
  se  $n = 0$   
    então retorne 1;  
  senão retorne  $n * \text{FAT\_REC}(n-1)$ ;
```

## Exemplo: Somatória

- Exemplo: Escrever uma função recursiva que calcule a soma dos números entre 1 e n.

```
int SomaN (int n )
{
    if ( n == 1) // Caso básico
        return 1 ;
    else // Caso Geral
        return ( n + SomaN ( n - 1 ) ) ;
}
```



## Exemplo: Somatória

- O mesmo problema resolvido da forma convencional:

```
int SomaN (int n )
{
    int l,Soma=0;
    for(l=1; l<=n; l++)
        Soma+=l;
    return (Soma) ;
}
```

```
int SomaN(int n)
{
    return(n*(float)(1+n)/2);
}
// 4*(1+4)/2
// 4* 2.5 / 2 = 10
```

# Recursividade

## ■ Vantagens:

- A utilização de uma função recursiva pode simplificar a solução de alguns problemas;
- Pode-se obter um código mais conciso e eficaz nessas situações;
- Uma solução recursiva pode, por outro lado, eliminar a necessidade de manter o controle manual sobre uma série de variáveis normalmente associadas aos métodos alternativos à recursividade.

# Recursividade

## ■ Desvantagens:

- As funções recursivas são geralmente mais lentas e ocupam mais memória do que as funções iterativas equivalentes, uma vez que são feitas muitas chamadas consecutivas a funções;
- Um erro de implementação pode levar ao esgotamento dos recursos associados à pilha que gere a chamada a funções. Isto é, caso não seja indicada nenhuma condição de paragem, ou essa condição foi definida de forma errada e nunca será satisfeita, então o processo recursivo não terá fim.

## **3. Recursividade e algoritmos de busca e ordenação**

- 1. Recursão**
- 2. Ordenação**
- 3. Busca**

## **3.2 Ordenação**

- 1. Ordenação por seleção (Selection Sort)**
- 2. Ordenação por bolha (Bubble Sort)**
- 3. Ordenação por Inserção (Insertion Sort)**
- 4. Ordenação “rápida” (Quick Sort)**



## Problema

- Dado um vetor:  
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$
- Faça permutações nos elementos para obter um novo vetor:  
 $a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_{n-1}, a'_n$   
de modo que  
 $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_{n-1} \leq a'_n$

## Ordenação por trocas

- Ordena o vetor permutando, ou seja, **trocando posições** de seus elementos
- Existem diversos algoritmos de ordenação por trocas
- O **método da bolha** é um dos mais conhecidos, e fáceis de entender e implementar

## 3.2 Ordenação

1. Ordenação por seleção (Selection Sort)
2. Ordenação por bolha (Bubble Sort)
3. Ordenação por Inserção (Insertion Sort)
4. Ordenação “rápida” (Quick Sort)

## Ordenação por seleção

- Repare que o algoritmo anterior pode permutar dois elementos vizinhos  $v[i]$  e  $v[i+1]$  caso  $v[i] > v[i+1]$
- Até aí tudo bem, mas que dizer se nenhum desses valores for o valor máximo do vetor?
- Não seria melhor escolher o valor máximo, e levar (somente) esse valor para o final do vetor?
- Assim, teríamos apenas uma troca

## Método de seleção direta

Vetor inicial:

7	5	9	3	2
---	---	---	---	---

Identificamos o maior valor:  $v[2]$

E o colocamos no final do vetor

7	5	2	3	9
---	---	---	---	---

Agora procure o 2º maior elemento e leve-o para a penúltima posição ...

## Ilustração – Seleção Direta

7	5	9	3	2
---	---	---	---	---

disposição inicial

7	5	2	3	9
---	---	---	---	---

1ª iteração

3	5	2	7	9
---	---	---	---	---

2ª iteração

3	2	5	7	9
---	---	---	---	---

3ª iteração

2	3	5	7	9
---	---	---	---	---

4ª iteração

# Algoritmo

```
void Selecao (int v[], int n) {  
    int i, j, aux, imaior;  
    for (j=n-1; j>0; j--) {  
        imaior = 0;  
        for(i=1; i<=j; i++)  
            if (v[i] > v[imaior])  
                imaior = i;  
        aux = v[j];  
        v[j] = v[imaior];  
        v[imaior] = aux  
    }  
}
```

# Eficiência

- Quantas comparações o algoritmo faria:
  - No pior caso ?
  - No melhor caso ?
- Quantas trocas o algoritmo faria:
  - No pior caso ?
  - No melhor caso ?

# Eficiência de algoritmos

- O que significa ser eficiente?
  - **Não desperdiçar o tempo ...**
- Como medir, então, o tempo gasto (ou perdido) por um algoritmo, se:
  - O tamanho do problema pode variar?
  - Isso depende do particular computador no qual iremos executar o algoritmo?
- Qual a melhor maneira de medir o tempo de execução de um algoritmo?

## Medindo o Tempo de Execução

- Não vamos medir tempo em segundos, minutos, horas ...
- Mas sim, em **número de instruções executadas !!!**
- Exemplo: para ordenar um vetor de **N** elementos, um certo algoritmo executa **3\*N** instruções:
  - Se um certo computador leva  $10^{-3}$  segundos para executar uma instrução, então vetor de **1000** elementos será ordenado em **3 segundos**, usando tal algoritmo

## Medindo o Tempo de Execução

- Vejamos se essa medida é realmente adequada ...
- O que aconteceria se:
  - O mesmo algoritmo executasse em um computador 10 vezes mais rápido?
  - O mesmo algoritmo recebesse um vetor 100 vezes maior?

## Medindo o Tempo de Execução

- Vejamos:
  - Um computador 10 vezes mais rápido levaria  $10^{-4}$  segundos por instrução.
  - E um vetor 100 vezes maior teria **100 mil** elementos.
  - O tempo (cronológico) total seria = numero de instruções executadas \* tempo por instrução =  $3 * 100 \text{ mil} * 10^{-4} = 3 * 10^5 * 10^{-4} = \mathbf{30}$  segundos

## Medindo o Tempo de Execução

- Repare que, tanto no caso I, quanto no caso II, apesar do tempo cronológico variar (3 segundos, e 30 segundos, respectivamente), o tempo de execução  **$T(n)$**  foi sempre igual a  **$3 \cdot N$**

**Obs.:** Os computólogos costumam chamar de  **$T(N)$** , o tempo gasto por um certo algoritmo para resolver um problema de tamanho  **$N$** .

## Comportamento assintótico

- Assim, quando medirmos a eficiência de um algoritmo, achando o seu  **$T(N)$** , não importa:
  - Em qual computador iremos executar o algoritmo
  - Qual o particular valor de  $N$

## Exemplo

- Imagine que voce conhece 4 algoritmos de ordenação de vetores, cada um com a sua eficiência:

- $T1(N) = N$
- $T2(N) = 3 \cdot N$
- $T3(N) = N \cdot \log_2 N$
- $T4(N) = N^2$

## Exemplo

N	T1(N)	T2(N)	T3(N)	T4(N)
10	10,0	30	33	100
100	100,0	300	664	10000
1000	1000,0	3000	9966	1000000
1000000	1000000,0	3000000	19931569	1000000000000
1000000000	1000000000,0	3000000000	29897352854	1000000000000000000



## 3.2 Ordenação

1. Ordenação por seleção (Selection Sort)
2. Ordenação por bolha (Bubble Sort)
3. Ordenação por Inserção (Insertion Sort)
4. Ordenação “rápida” (Quick Sort)

## Método da bolha

- Percorra o vetor da esquerda para direita:
  - comparando elementos vizinhos estiverem fora de ordem, troque-os de posição
- Considere o vetor inicial:

7	5	9	3	2
---	---	---	---	---

comparando  $v[0]$  com  $v[1] \Rightarrow$  **troca**

comparando  $v[1]$  com  $v[2] \Rightarrow$  **não troca**

comparando  $v[2]$  com  $v[3] \Rightarrow$  **troca**

comparando  $v[3]$  com  $v[4] \Rightarrow$  **troca**

- O vetor ficará

5	7	3	2	9
---	---	---	---	---

## Ilustração – Método da Bolha

7	5	9	3	2
---	---	---	---	---

disposição inicial

5	7	3	2	9
---	---	---	---	---

1ª iteração

5	3	2	7	9
---	---	---	---	---

2ª iteração

3	2	5	7	9
---	---	---	---	---

3ª iteração

2	3	5	7	9
---	---	---	---	---

4ª iteração

Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

35

## Algoritmo - Bolha

- Eis aqui o algoritmo

```
void Bolha (int v[], int n) {  
    int i, j, aux;  
    for (j=n; j>0; j--)  
        for(i=0; i<j; i++)  
            if (v[i] > v[i+1]) {  
                aux = v[i];  
                v[i] = v[i+1];  
                v[i+1] = aux;  
            }  
}
```

Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

36

## Exemplo

- Eis o programa que chama a função Bolha

```
int main()
{
    int v[N]={33,17,-11,45,1,26,54,67,21,10}, i;
    Bolha(v,N);
    for (i=0; i < N; i++)
        cout << "\n v["<<i<<"]="<<v[i];

    cin >> i;
    return 0;
}
```

## Eficiência

- Quantas comparações o algoritmo faria:
  - No pior caso ?
  - No melhor caso ?
- Quantas trocas o algoritmo faria:
  - No pior caso ?
  - No melhor caso ?

## 3.2 Ordenação

1. Ordenação por seleção (Selection Sort)
2. Ordenação por bolha (Bubble Sort)
3. Ordenação por Inserção (Insertion Sort)
4. Ordenação “rápida” (Quick Sort)

### 3.2.3 Ordenação por inserção (Insertion Sort)

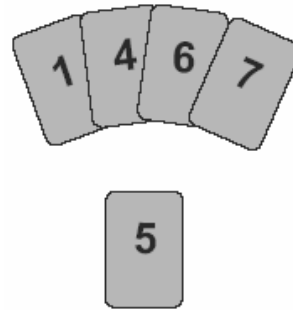
- Efectua apenas uma passagem pela tabela.
  - Cada novo elemento analisado é inserido na sua posição correcta (a procura é feita da direita para a esquerda).
  - Este método implica o deslocamento para a direita de alguns dos elementos já ordenados da tabela.
- O número total de movimentos depende da desordem que reina na tabela.

17	15	55	48	8
----	----	----	----	---

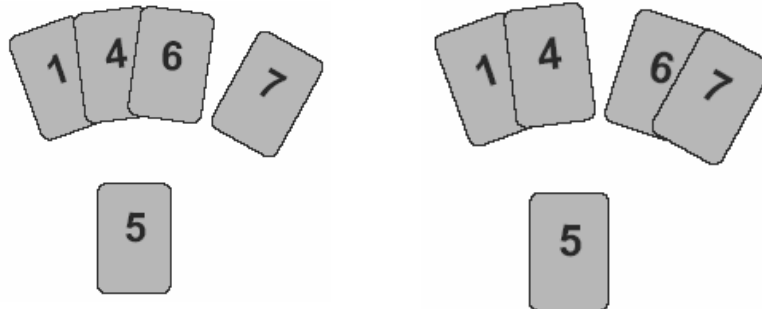
### 3.2.3 Ordenação por inserção (Insertion Sort)

Funciona de forma idêntica à ordenação das cartas na nossa mão num qualquer jogo de cartas.

Para colocar uma nova carta na posição correcta temos que afastar as outras para arranjar espaço para ela.



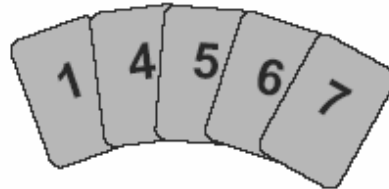
### 3.2.3 Ordenação por inserção (Insertion Sort)



# Insertion Sort

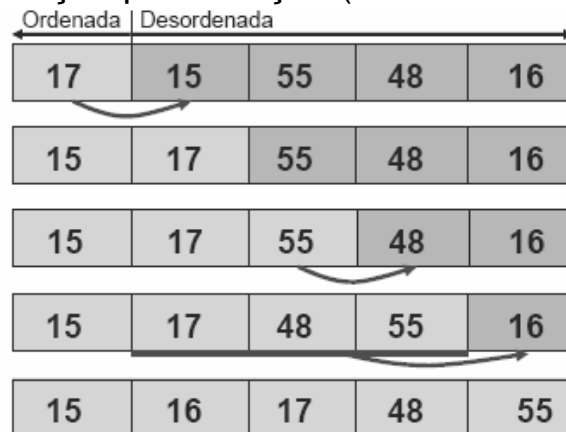
Funciona de forma idêntica à ordenação das cartas na nossa mão num qualquer jogo de cartas.

Para colocar uma nova carta na posição correcta temos que afastar as outras para arranjar espaço para ela.



# Insertion Sort

## ■ Ordenação por inserção (Insertion Sort):



# Algoritmos de Ordenação

Ordenação por inserção (Insertion Sort):

```
void OrdenacaoInsercao(int Tab[],int Comp)
{
    int I,J;
    int Aux;
    for (I = 1; I < Comp; I++) {
        Aux = Tab[I];
        for (J = I; (J > 0) && (Aux < Tab[J - 1]); J - -)
            Tab[J] = Tab[J-1];
        Tab[J] = Aux;
    }
}
```

# Algoritmos de Ordenação

- O número de comparações necessárias para ordenar uma tabela com N elementos é no pior dos casos (tabela ordenada pela ordem inversa):

$$\text{Comp} = 1 + 2 + \dots + (N-2) + (N-1)$$

$$\text{Nº de Comp} = \frac{N * (N-1)}{2} = O(N^2)$$

- O número de deslocamentos (não existem trocas) no pior dos casos é igual ao número de comparações.

## 3.2 Ordenação

1. Ordenação por seleção (Selection Sort)
2. Ordenação por bolha (Bubble Sort)
3. Ordenação por Inserção (Insertion Sort)
4. Ordenação “rápida” (Quick Sort)

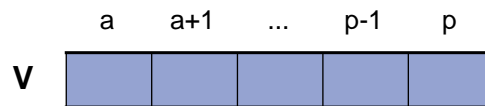
### 3.2.4 Quicksort

- Proposto em 1959
- Tempos de execução:
  - $O(N^2)$  operações, no pior caso
  - no caso médio, é esperado que execute  $O(N \cdot \lg N)$  operações
- O Quicksort, como o próprio nome diz, é um algoritmo rápido: apesar do pior caso ser lento, isto na prática não ocorre



## 3.2.4 Quicksort

- Método baseado no princípio de “divisão e conquista”, com as 3 fases:
  - Dividir
  - Conquistar
  - Combinar
- Entrada: o vetor  $V[a..p]$ , a ser ordenado

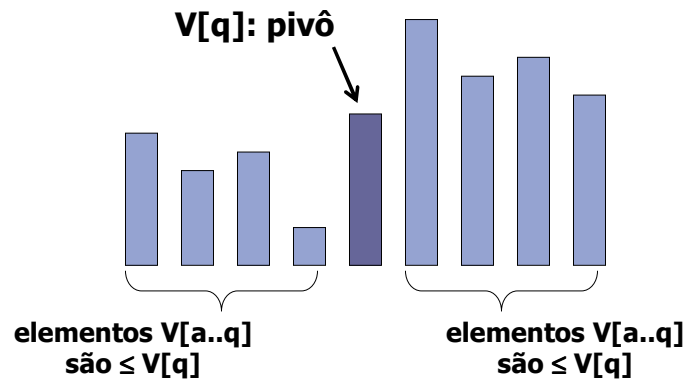


## Quicksort – 1a fase

- **Dividir:**
  - Se o tamanho do vetor for 1 ou 0, então nada resta a ser feito (Caso trivial)
  - Se tiver 2 ou mais elementos, escolha um elemento **x**, chamado de **pivô** (geralmente é o primeiro ou o último elemento do vetor).  
Reorganizar o vetor, de modo que:
    - todos os elementos menores ou iguais que o pivô fiquem à sua esquerda; e
    - todos os elementos maiores ou iguais ao pivô fiquem à sua direita

## Quicksort – 1a fase:

- Resultado: vetor  $V$  reorganizado



Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

51

## Quicksort – 2a e 3a fases

- **Conquistar:**
  - ordenar o subintervalo esquerdo do vetor  $V[a..q-1]$ , chamando o quicksort recursivamente
  - ordenar o subintervalo direito do vetor  $V[q+1..r]$ , chamando o quicksort recursivamente
- **Combinar:** como os subintervalos já foram ordenados no próprio vetor, nada mais resta a ser feito:  $V[p..r]$  já está ordenado

Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

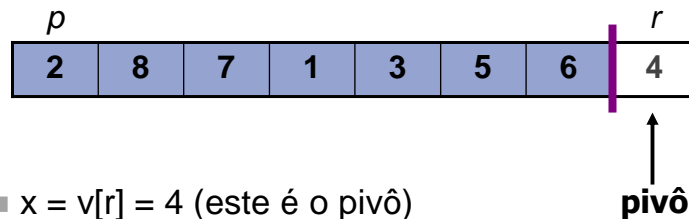
52

## Um algoritmo de particionamento

- Escolha um pivô (vamos chamá-lo de  $x$ ). Posicione as variáveis **esq** e **dir** nos dois extremos de  $V$ , movendo-os um em direção ao outro da seguinte forma:
  1. faça **esq** avançar para a direita, até encontrar o primeiro valor maior que o pivô
  2. faça **dir** avançar para a esquerda, até encontrar o primeiro valor menor ou igual ao pivô
  3. se **esq** < **dir**, então troque  $V[\text{esq}] \leftrightarrow V[\text{dir}]$
- quando **esq** e **dir** se cruzarem, o algoritmo termina, retornando **dir** como resposta

## 1a Fase: O Particionamento

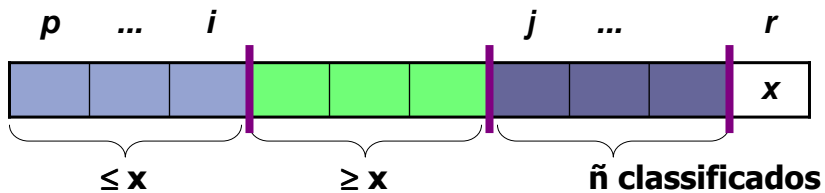
- Primeiramente, escolha um pivô (o último elemento é um bom candidato):



- $x = v[r] = 4$  (este é o pivô)

## Particionamento

- Em seguida, particione o vetor em 4 intervalos
  - elementos menores que o pivô  $V[p..i]$
  - elementos maiores que o pivô  $V[i+1..j-1]$
  - elementos ainda não classificados  $V[j..r-1]$
  - o pivô  $V[r]$



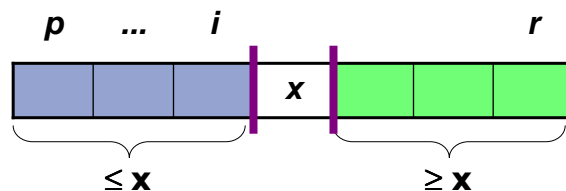
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

55

## Particionamento

- O algoritmo termina quando o terceiro intervalo for nulo, isto é, todos os elementos tiverem sido classificados
- O vetor ficará assim:

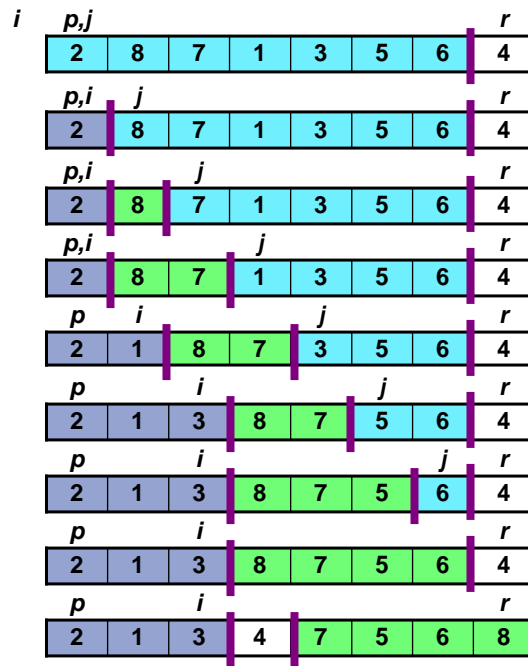


Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

56

## Exemplo



Profa. Dra. Laura Rodríguez

## Algoritmo Particionamento

```
int Partition (int V[], int p, int r)
{
    int x, i, aux, j;
    x = V[r];
    i = p-1;
    for (j=p; j<r; j++)
        if (V[j] <= x) {
            i++;
            // troque v[i] e v[j]
            aux = V[i];
            V[i] = V[j];
            V[j] = aux;
        }
    // troque v[i+1] e v[r]
    aux = V[i+1];
    V[i+1] = V[r];
    V[r] = aux;
    return i+1;
}
```

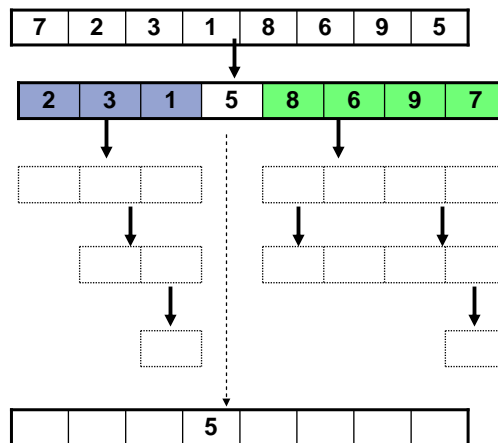
## 2a Fase: Conquista

- O vetor ainda não foi ordenado, mas se esse mesmo procedimento for aplicado recursivamente a cada um de seus subintervalos ...

```
void Quicksort (int V[], int p, int r)
{
    if (p < r) {
        int q = Partition (V, p, r);
        Quicksort (V, p, q-1);
        Quicksort (V, q+1, r);
    }
}
```

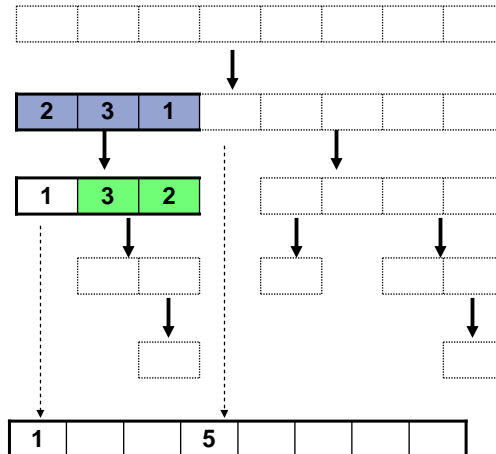
## Um exemplo completo

- O valor 5 é escolhido como pivô
- Em seguida, o quicksort será aplicado a cada um dos subintervalos



## Exemplo

- O primeiro subintervalo é pivoteado ...
- E dividido:
  - intervalo esquerdo vazio
  - intervalo direito com 2



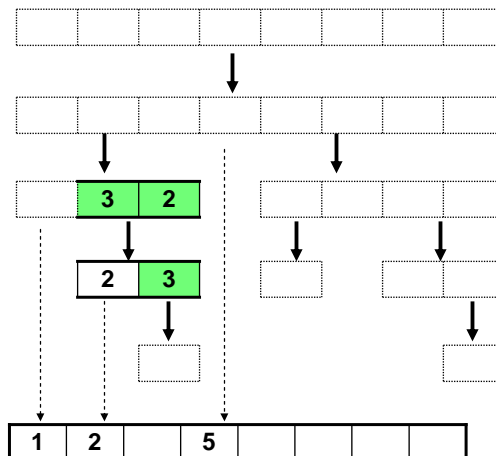
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

61

## Exemplo

- 2 é o pivô
- intervalo esquerdo é vazio
- e o direito tem um elemento...



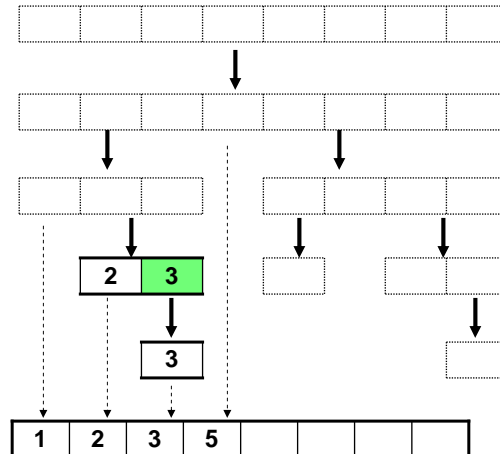
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

62

## Exemplo

- finalmente, o ultimo intervalo é resolvido



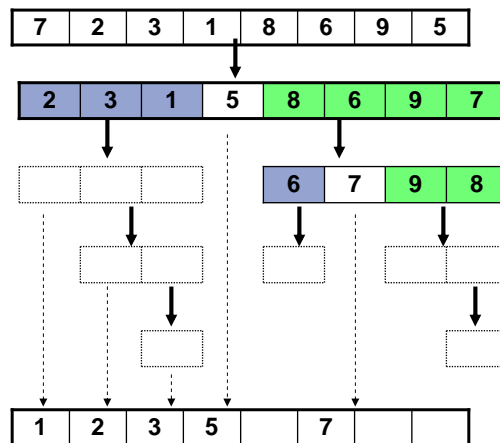
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

63

## Exemplo

- Agora, resta o lado direito do vetor ...
- O pivô é 7



Profa. Dra. Laura Rodríguez

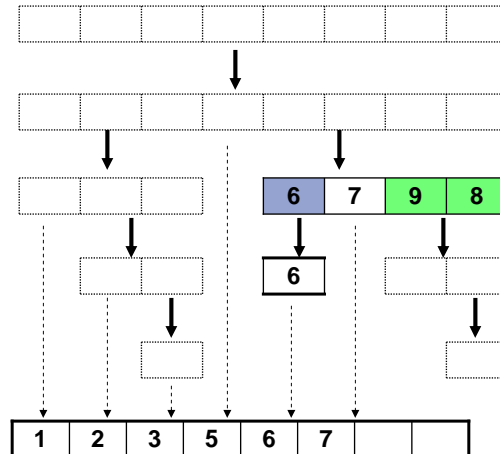
Estruturas de dados e algoritmos

64



## Exemplo

- o subintervalo esquerdo possui um unico elemento



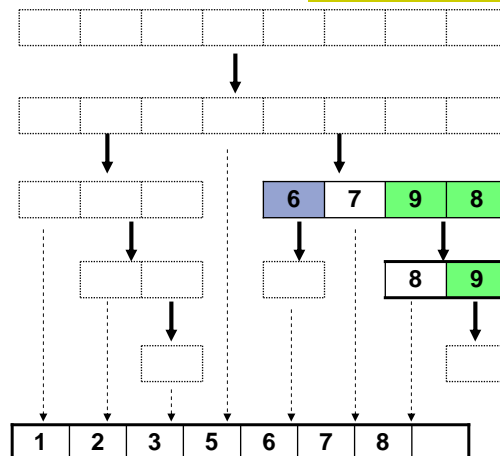
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

65

## Exemplo

- no subintervalo direito, 8 é o pivô



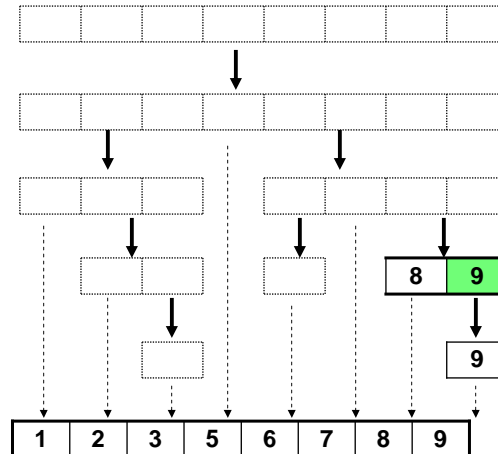
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

66

## Exemplo

- o subintervalo direito tem um único elemento
- o algoritmo termina



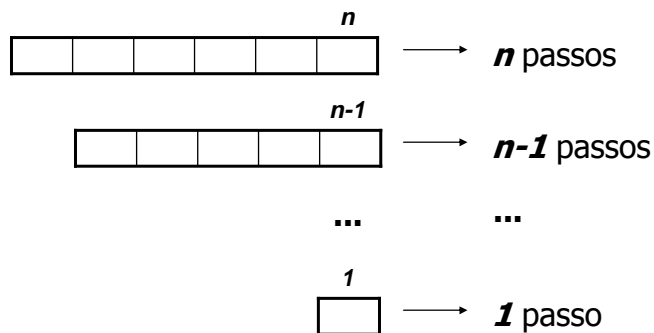
Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

67

## Eficiência do Quicksort

- **Pior caso:** o pior caso ocorre quando o pivô escolhido ocasiona uma divisão em dois intervalos de tamanhos **ZERO** e **N-1**



Profa. Dra. Laura Rodríguez

Estruturas de dados e algoritmos

68

## Eficiência do Quicksort

- Assim:

$$T(n) = \sum_{i=1}^n i$$

$$T(n) = \frac{1+n}{2} n = \frac{n^2 + n}{2}$$

- Portanto, no pior caso,  $T(N) = O(N^2)$

## Eficiência do Quicksort

- No melhor caso**, o algoritmo irá dividir em dois subintervalos de tamanhos iguais (cada um com aproximadamente  $n/2$  operações)
  - e cada um dos subintervalos será dividido em dois outros de igual tamanho ...
  - como o número de particionamentos é dado por  $\log_2 N$  e cada nível da árvore do quicksort faz  $N$  operações, então  $T(N) = N \cdot \log_2 N$

## Eficiência do quicksort

- Na prática, o comportamento esperado do quicksort (**caso médio**) se aproxima muito mais do melhor caso, que do pior caso, isto é,  $T(N) = N \cdot \log_2 N$
- Em resumo, apesar do Quicksort, no pior caso ser  $O(N^2)$ , isso na prática não ocorre, e ele tem comportamento próximo de  $N \cdot \log_2 N$ , o que é bem eficiente.

## 3. Recursividade e algoritmos de busca e ordenação

1. Recursão
2. Ordenação
3. Busca

## 3.3 Busca

1. Busca sequencial
2. Busca Binária

### 3.3.1 Busca Sequencial

- Problema:
  - Determinar se um certo valor  $x$  encontra-se entre os elementos de um dado vetor  $V[0..n-1]$ .
  - Em outras palavras, verificar se existe um certo  $i$ , tal que  $x = V[i]$ , para algum  $0 \leq i \leq N-1$

	0	1	2	3	4		n-1	...	...
$x = 498$	253	781	215	398	442	...	327		

## Primeira tentativa

- O que voce acha desta solução?

```
BUSCA(x, V[1..n])  
  i ← 1;  
  enquanto i ≤ n  
    se x = V[i]  
      então escreva "ACHOU"  
      senão escreva "NÃO ACHOU"
```

## Primeira solução

- Uma forma bastante simples (e elegante) de resolver esse problema:

```
BUSCA(x, V[1..n])  
  i ← 1;  
  enquanto i ≤ n e V[i] ≠ x  
    faça i ← i + 1  
  se i > n  
    então devolva NÃO ACHOU  
    senão devolva ACHOU
```

## Busca em vetor ordenado

- Escreva um algoritmo para procurar um dado  $x$  em um vetor  $V[1..n]$ , considerando que o vetor já foi previamente ordenado, isto é :  $V[1] \leq V[2] \leq \dots \leq V[n]$ .
- **Dica:** O fato de o vetor estar ordenado ajuda bastante, e reduz o tempo de busca. O algoritmo percorre o vetor até que uma das condições abaixo aconteça :
  - Encontrar o fim do vetor (ou seja, a posição  $n$ ) sem ter encontrado  $x$ .
  - Encontrar  $x$  em uma posição qualquer do vetor ( $V[i]=x$ , para algum  $i$ )
  - Encontrar um elemento  $V[i] > x$ , o que significa que  $x$  não pode mais ser encontrado no vetor, pois  $x < V[i] \leq V[i+1] \leq \dots \leq V[n]$

## Eficiência de Busca

- Analise os algoritmos anteriores, e determine quantas tentativas (comparações) o algoritmo deverá fazer para encontrar  $x$ :
  - no melhor caso
  - no pior caso
  - no caso médio

## Eficiência de Busca

- Mas afinal, qual seria esse melhor caso?
  - No melhor caso, podemos imaginar que o valor  $x$  encontra-se logo na primeira posição do vetor  $\Rightarrow$  e portanto, uma única comparação será suficiente
- E no pior caso?
  - No pior caso,  $x$  não existe em  $V[0..N-1]$ , e portanto, o algoritmo precisa procurar  $x$  em todas as posições do vetor  $\Rightarrow$  fazendo, portanto,  $N$  tentativas

## Eficiência de Busca

- E no caso médio?
  - Supondo que todos os elementos do vetor tenham a mesma probabilidade de acesso, o número médio de comparações pode ser assim definido:

$$C = \sum_{i=1}^n i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left[ \frac{1+n}{2} \cdot n \right] = \frac{1+n}{2}$$

onde:

$i$  é o número de comparações

$P(i)$  é a probabilidade de fazermos  $i$  comparações

$n$  é o comprimento do vetor



## 3.3 Busca

1. Busca sequencial
2. Busca Binária

### 3.3.2 Busca Binária

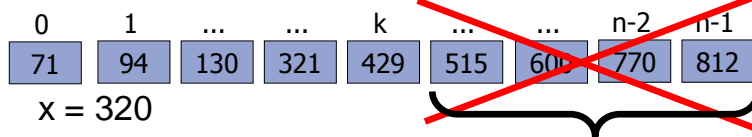
- Considere o vetor inicialmente ordenado, isto é,  $v[0] \leq v[1] \leq \dots \leq v[n-1]$
- Verifique qual a posição situada “no meio” do vetor  $V$  – chamemos de posição  $k$

0	1	...	...	k	...	...	n-2	n-1
71	94	130	321	429	515	600	770	812

$$x = 320$$

### 3.3.2 Busca Binária

- Compare  $x$  com o valor da posição  $k$ . Há 3 possíveis situações:
  - $x = V[k] \Rightarrow$  ACHOU
  - $x < V[k] \Rightarrow$  descarte a metade direita de  $V$
  - $x > V[k] \Rightarrow$  descarte a metade esquerda de  $V$



### 3.3.2 Busca Binária

- Repita o processo, reduzindo o vetor pela metade, até que:
  - $x$  seja encontrado, ou
  - que o intervalo de busca termine

# Busca Binária

```
inf = 0;
sup = N-1;
med = (inf+sup)/2;
enquanto (inf <= sup && x!=v[med])
    inicio
        se (x<v[med])
            sup = med - 1;
        senão se (x>v[med])
            inf = med + 1;
        med = (inf+sup)/2;
    fim;
se (inf > sup)
    exibir(" \n  VALOR NAO ENCONTRADO !!!");
senão exibir("\n ENCONTRADO NA POSICAO ", med);
```

# Eficiência

- Vamos medir a eficiência desse algoritmo
- Para um vetor de **N** elementos, quantas comparações são esperadas?
  - vamos analisar o pior caso: teremos de ir dividindo o vetor ao meio, por diversas vezes, até que o intervalo de busca tenha 1 elemento (e eu encontre o valor **x**), ou que ele se anule.
  - assim, o número de comparações é igual ao número de sucessivas divisões pela metade, até que o intervalo de busca se anule:  $\log_2^N$

## Exercícios

1. Escreva um programa em C, que implementa a busca binária.
2. Faça uma estimativa sobre o número máximo de tentativas (comparações) desse algoritmo

## Exercícios

3. Já vimos que a busca binária é melhor que a busca sequencial. Mas afinal, quanto ela é melhor? Faça uma estimativa, supondo que o comprimento do vetor seja:

N	Sequencial	Binária
10	5	
1.000		
$10^6$		
$10^9$		
$10^{12}$		