ECA706 - Sistemas de Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá
Engenharia Elétrica

Aula 01

Transformada Z

Prof. Jeremias B. Machado
jeremias@unifei.edu.br

04 de março de 2022

Equações a Diferenças

- Assim como a equação diferencial em sistemas contínuos LTI no tempo, em sistemas discretos no tempo a ferramenta básica de modelagem é a **equação a diferenças** LTI. De forma geral, tais equações podem ser descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \ldots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = \\ b_{n-1}u[k+n-1] + \ldots + b_1 u[k-1] + b_0 u[k] \ , \end{aligned}$$

onde a_i, b_i são constantes e reais, k denota a amostra (tempo discreto) e $y[0] = y_0$, $y[1] = y_1$, ..., $y[n-1] = y_{n-1}$ são as condições iniciais. Se a função forçante $u[k]$ é nula, diz-se então que a equação a diferenças é *homogênea*.

Equações a Diferenças

- Assim como a equação diferencial em sistemas contínuos LTI no tempo, em sistemas discretos no tempo a ferramenta básica de modelagem é a **equação a diferenças** LTI. De forma geral, tais equações podem ser descritas da seguinte forma:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \ldots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = b_{n-1}u[k+n-1] + \ldots + b_1 u[k-1] + b_0 u[k] \ ,$$

  onde a_i, b_i são constantes e reais, k denota a amostra (tempo discreto) e $y[0] = y_0$, $y[1] = y_1$, ..., $y[n-1] = y_{n-1}$ são as condições iniciais. Se a função forçante $u[k]$ é nula, diz-se então que a equação a diferenças é *homogênea*.
- A modelagem de sistemas discretos no tempo é relativamente simples para alguns sistemas (de pouca complexidade).

Equações a Diferenças

Exemplo 1.1

Determine o modelo de um sistema de que simule o estoque de um determinado produto de uma empresa, sabendo que $e[k]$ é o estoque deste produto no início do mês k, $v[k]$ é o total de produtos vendidos no mês k e $c[k]$ é a ordem de compra do produto com o fornecedor no mês k.

Equações a Diferenças

Exemplo 1.1

Determine o modelo de um sistema de que simule o estoque de um determinado produto de uma empresa, sabendo que $e[k]$ é o estoque deste produto no início do mês k, $v[k]$ é o total de produtos vendidos no mês k e $c[k]$ é a ordem de compra do produto com o fornecedor no mês k.

Resolução Exemplo 1.1

A lei geral que rege este sistema é simples de compreender: dado o estoque do mês atual, subtraia os produtos vendidos neste mês e some os produtos comprados com o fornecedor, e este será o estoque do início do próximo mês. Logo:

$$e[k+1] = e[k] + c[k] - v[k] \ .$$

Equações a Diferenças

Exemplo 1.2

Determine o modelo que rege a dinâmica da massa de um composto radioativo sabendo que a meia vida deste composto é de 2 anos. Escreva os três primeiros termos desta sequência se a massa inicial deste composto é $m[0] = m_0$.

Equações a Diferenças

Exemplo 1.2

Determine o modelo que rege a dinâmica da massa de um composto radioativo sabendo que a meia vida deste composto é de 2 anos. Escreva os três primeiros termos desta sequência se a massa inicial deste composto é $m[0] = m_0$.

Resolução Exemplo 1.2

A lei geral que rege este sistema tamém é simples de compreender: a cada período k (neste caso, 2 anos), o composto perde metade de sua massa. Logo:

$$m[k+1] = \frac{1}{2}m[k] \ .$$

Os três primeiros termos desta sequência são $m[1] = 0,5m_0$, $m[2] = 0,25m_0$ e $m[3] = 0,125m_0$.

Equações a Diferenças

Exemplo 1.3

Determine o modelo que descreve a evolução da dívida de um empréstimo a juros compostos sabendo que a cada período k a taxa de juros é de t %.

Equações a Diferenças

Exemplo 1.3

Determine o modelo que descreve a evolução da dívida de um empréstimo a juros compostos sabendo que a cada período k a taxa de juros é de t %.

Resolução Exemplo 1.3

A lei geral que rege este sistema tamém é simples de compreender: a cada período k a dívida anterior é multiplicada por 1 mais a taxa de juros. Logo:

$$d[k] = \left(1 + \frac{t}{100}\right) d[k-1] \; .$$

Definições da Transformada Z

Definição de Transformada Z

Dada uma sequência:

$$x[k] = x[0] + x[1] + x[2] + \dots \ ,$$

a **Transformada Z** da sequência $\{x[k]\}$, denotada por $\mathcal{Z}[\{x[k]\}]$, é definida como sendo

$$X(z) = \mathcal{Z}[\{x[k]\}] = x[0] + z^{-1}x[1] + z^{-2}x[2] + \dots \ .$$

Definições da Transformada Z

Definição de Transformada Z

Dada uma sequência:

$$x[k] = x[0] + x[1] + x[2] + \dots \ ,$$

a **Transformada Z** da sequência $\{x[k]\}$, denotada por $\mathcal{Z}[\{x[k]\}]$, é definida como sendo

$$X(z) = \mathcal{Z}[\{x[k]\}] = x[0] + z^{-1}x[1] + z^{-2}x[2] + \dots \ .$$

Forma Fechada

$$\mathcal{Z}[\{x[k]\}] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} \ .$$

Definições da Transformada Z

- A Transformada Z é uma importante ferramenta na análise e projeto de sistemas discretos. Ela simplifica os problemas discretos convertendo equações à diferenças lineares em equações algébricas e convolução em multiplicação. Desta maneira, ela tem um papel semelhante à Transformada de Laplace em sistemas contínuos.

Definições da Transformada Z

- A Transformada Z é uma importante ferramenta na análise e projeto de sistemas discretos. Ela simplifica os problemas discretos convertendo equações à diferenças lineares em equações algébricas e convolução em multiplicação. Desta maneira, ela tem um papel semelhante à Transformada de Laplace em sistemas contínuos.
- A Transformada Z definida anteriormente é a transformada *single-sided*. Para a transformada *double-sided*, k varia de $-\infty$ até $+\infty$. Neste curso, utilizaremos apenas a transformada *single sided*.

Definições da Transformada Z

- A Transformada Z é uma importante ferramenta na análise e projeto de sistemas discretos. Ela simplifica os problemas discretos convertendo equações à diferenças lineares em equações algébricas e convolução em multiplicação. Desta maneira, ela tem um papel semelhante à Transformada de Laplace em sistemas contínuos.
- A Transformada Z definida anteriormente é a transformada *single-sided*. Para a transformada *double-sided*, k varia de $-\infty$ até $+\infty$. Neste curso, utilizaremos apenas a transformada *single sided*.
- Também é assumido que os sinais que estamos interessados são **causais**, isto é, sinais com valores nulos para tempo negativo.

Definições da Transformada Z

- A Transformada Z é uma importante ferramenta na análise e projeto de sistemas discretos. Ela simplifica os problemas discretos convertendo equações à diferenças lineares em equações algébricas e convolução em multiplicação. Desta maneira, ela tem um papel semelhante à Transformada de Laplace em sistemas contínuos.
- A Transformada Z definida anteriormente é a transformada *single-sided*. Para a transformada *double-sided*, k varia de $-\infty$ até $+\infty$. Neste curso, utilizaremos apenas a transformada *single sided*.
- Também é assumido que os sinais que estamos interessados são **causais**, isto é, sinais com valores nulos para tempo negativo.
- Assim como a Transformada de Laplace, a Transformada Z possui uma região de existência no plano complexo. Esta região é de importância apenas se a integral for utilizada para se obter a Transformada Z Inversa. No entanto, utilizaremos tabelas para aplicar a Transformada Z direta e inversa, e esta região de existência não será de importância direta e portanto não será mencionada.

Definições da Transformada Z

Exemplo 1.4

Determine a Transformada Z de um sinal amostrado proveniente de um degrau unitário, isto é, $x[k] = 1$.

Definições da Transformada Z

Exemplo 1.4

Determine a Transformada Z de um sinal amostrado proveniente de um degrau unitário, isto é, $x[k] = 1$.

Resolução Exemplo 1.4

Aplicando a definição de Transformada Z, temos que:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \ .$$

Sabendo que a seguinte série de potência é convergente se $|y| < 1$:

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \ ,$$

Podemos expressar a Transformada Z na forma fechada da seguinte forma:

$$X(z) = 1 + \left(z^{-1}\right)^1 + \left(z^{-1}\right)^2 + \left(z^{-1}\right)^3 + \dots$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z^{-1}| < 1$$

Definições da Transformada Z

Exemplo 1.5

Dada uma sequência gerada por $x[k] = e^{-akT}$, encontre $X(z)$.

Definições da Transformada Z

Exemplo 1.5

Dada uma sequência gerada por $x[k] = e^{-akT}$, encontre $X(z)$.

Resolução Exemplo 1.5

Aplicando a definição de Transformada Z, temos que:

$$X(z) = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} + \dots \ .$$

Utilizando a série de potência vista no exercício anterior, podemos expressar a Transformada Z na forma fechada da seguinte forma:

$$X(z) = 1 + \left(e^{-aT}z^{-1}\right)^1 + \left(e^{-aT}z^{-1}\right)^2 + \left(e^{-aT}z^{-1}\right)^3 + \dots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \qquad |e^{-aT}z^{-1}| < 1$$

Observe que a sequência $\{x[k]\}$ pode ser gerada amostrando-se a função $x(t) = x^{-at}$ com período de amostragem igual a T segundos.

Propriedades da Transformada Z

Adição e Subtração

A Transformada Z da soma (ou subtração) de duas sequências é igual a soma (ou subtração) da Transformada Z das sequências. Isto é:

$$\mathcal{Z}\left[x_1[k] \pm x_2[k]\right] = X_1(z) \pm X_2(z) \ .$$

Propriedades da Transformada Z

Adição e Subtração

A Transformada Z da soma (ou subtração) de duas sequências é igual a soma (ou subtração) da Transformada Z das sequências. Isto é:

$$\mathcal{Z}\left[x_1[k] \pm x_2[k]\right] = X_1(z) \pm X_2(z)\ .$$

Multiplicação por Constante Real

A Transformada Z de uma sequência cujos números são multiplicados por uma constante real é igual a multiplicação da constante real pela Transformada Z da sequência. Isto é:

$$\mathcal{Z}\left[ax[k]\right] = aX(z)\ .$$

Propriedades da Transformada Z

Adição e Subtração

A Transformada Z da soma (ou subtração) de duas sequências é igual a soma (ou subtração) da Transformada Z das sequências. Isto é:

$$\mathcal{Z}\left[x_1[k] \pm x_2[k]\right] = X_1(z) \pm X_2(z) \ .$$

Multiplicação por Constante Real

A Transformada Z de uma sequência cujos números são multiplicados por uma constante real é igual a multiplicação da constante real pela Transformada Z da sequência. Isto é:

$$\mathcal{Z}\left[ax[k]\right] = aX(z) \ .$$

- Observação: as duas propriedades anteriores formam a *Propriedade da Linearidade* da Transformada Z.

Propriedades da Transformada Z

Translação Real

Seja n um número inteiro, $u[k]$ a função degrau unitário discreto e $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então as seguintes equações são válidas:

$$\mathcal{Z}\left[x[k-n]u[k-n]\right] = z^{-n}X(z) \qquad n \geq 0$$

$$\mathcal{Z}\left[x[k+n]u[k]\right] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k}\right] \qquad n \geq 1 \ .$$

Propriedades da Transformada Z

Translação Real

Seja n um número inteiro, $u[k]$ a função degrau unitário discreto e $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então as seguintes equações são válidas:

$$\mathcal{Z}\left[x[k-n]u[k-n]\right] = z^{-n}X(z) \qquad n \geq 0$$

$$\mathcal{Z}\left[x[k+n]u[k]\right] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k}\right] \qquad n \geq 1 \ .$$

Translação Complexa

Seja $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então a seguinte equação é válida:

$$\mathcal{Z}\left[\epsilon^{ak}x[k]\right] = X\left(z\epsilon^{-a}\right) \ .$$

Propriedades da Transformada Z

Diferenciação Complexa

Seja k a amostra e $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então a seguinte equação é válida:

$$\mathcal{Z}\left[k^m x[k]\right] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)\ .$$

Propriedades da Transformada Z

Diferenciação Complexa

Seja k a amostra e $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então a seguinte equação é válida:

$$\mathcal{Z}\left[k^m x[k]\right] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \ .$$

Convolução

Sejam $X_1(z)$ e $X_2(z)$ respectivamente as Transformadas Z das sequências $\{x_1[k]\}$ e $\{x_2[k]\}$. Então:

$$\mathcal{Z}\left[x_1[k] * x_2[k]\right] = X_1(z)X_2(z) \ .$$

- Observação: a convolução discreta de dois sinais é

$$x_1[k] * x_2[k] = \sum_{n=0}^{k} x_1[n]x_2[k-n] = \sum_{n=0}^{k} x_1[k-n]x_2[k] \ .$$

Propriedades da Transformada Z

Valor Inicial

Seja $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \ .$$

Propriedades da Transformada Z

Valor Inicial

Seja $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \ .$$

Valor Final

Seja $X(z)$ a Transformada Z da sequência $\{x[k]\}$. Então:

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z) \ .$$

- O limite acima existe se todos os polos de $X(z)$ estiverem dentro de um círculo unitário, exceto por um possível polo único em $z = 1$.

Solução de Equações a Diferenças

Existem basicamente três métodos para a solução de equações a diferenças lineares:

- Abordagem clássica: consiste em encontrar a solução homogênea a solução particular da equação a diferenças, de maneira semelhante ao caso das equações diferenciais lineares. Este método não será visto aqui;

Solução de Equações a Diferenças

Existem basicamente três métodos para a solução de equações a diferenças lineares:

- Abordagem clássica: consiste em encontrar a solução homogênea a solução particular da equação a diferenças, de maneira semelhante ao caso das equações diferenciais lineares. Este método não será visto aqui;
- Procedimento sequencial: consistem em computar, passo a passo, o valor das amostras. Mais indicado para ser aplicado via computador;

Solução de Equações a Diferenças

Existem basicamente três métodos para a solução de equações a diferenças lineares:

- Abordagem clássica: consiste em encontrar a solução homogênea a solução particular da equação a diferenças, de maneira semelhante ao caso das equações diferenciais lineares. Este método não será visto aqui;
- Procedimento sequencial: consistem em computar, passo a passo, o valor das amostras. Mais indicado para ser aplicado via computador;
- Transformada Z: consiste em aplicar a Transformada Z, expandir a função em frações parciais e então aplicar a Transformada Z inversa. Este método é semelhante ao caso das equações diferenciais via Transformada de Laplace.

Solução de Equações a Diferenças

Tabela de Transformadas Z de algumas sequências:

Sequência	Transformada Z
$\delta[k-n]$	z^{-n}
1	$\dfrac{z}{z-1}$
k	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$

Solução de Equações a Diferenças

Continuação da Tabela de Transformadas Z:

Sequência	Transformada Z
$\sin ak$	$\dfrac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$\cos ak$	$\dfrac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
$a^k \sin bk$	$\dfrac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
$a^k \cos bk$	$\dfrac{z^2 - az \cos b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$

Solução de Equações a Diferenças

Para o cálculo dos resíduos, temos três casos:

- Polos reais e distintos;
- Polos complexos e distintos;
- Polos de multiplicidade i.

Solução de Equações a Diferenças

Para o cálculo dos resíduos, temos três casos:

- Polos reais e distintos;
- Polos complexos e distintos;
- Polos de multiplicidade i.

Cálculo dos Resíduos com Polos Reais e Distintos

Seja r_i o resíduo associado ao polo p_i de uma função $F(z)$. Então:

$$r_i = (z - p_i)F(z)\Big|_{z=p_i} \,.$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.6

Calcule a sequência $\{x(k)\}$ cuja Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \; .$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.6

Calcule a sequência $\{x(k)\}$ cuja Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \ .$$

Resolução Exemplo 1.6

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

$$x[k] = 2^k - 1$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.7

Calcule a sequência $\{x[k]\}$ cuja Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \, .$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.7

Calcule a sequência $\{x[k]\}$ cuja Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \; .$$

Resolução Exemplo 1.7

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

$$x[k] = \frac{1}{2}\delta[k] + \frac{1}{2}2^k - 1$$

- Observação: $\delta[k] = 1$ somente para $k = 0$.

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.8

Encontre a Transformada Z da seguinte sequência causal:

$$\{x[k]\} = \{4,\ 8,\ 16,\ \ldots\}\ .$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.8

Encontre a Transformada Z da seguinte sequência causal:

$$\{x[k]\} = \{4,\ 8,\ 16,\ \ldots\}\ .$$

Resolução Exemplo 1.8

$$x[k] = 2^{k+2} = x_1[k+2]\ ,$$

onde $x_1[k] = 2^k$. Logo, usando a propriedade da Translação Real:

$$X(z) = z^2\left(X_1(z) - x_1[0] - x_1[1]z^{-1}\right)$$

$$X(z) = z^2\left(\frac{z}{z-2} - 1 - \frac{2}{z}\right)$$

$$X(z) = 4\frac{z}{z-2}$$

Solução de Equações a Diferenças

Resolução Alternativa do Exemplo 1.8

$$x[k] = 2^{k+2} = 2^k 2^2 = 4.2^k$$

Usando a propriedade da multiplicação por constante real:

$$X(z) = 4\mathcal{Z}\left[2^k\right]$$

$$X(z) = 4\frac{z}{z-2}$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.9

Encontre a solução da seguinte equação a diferenças:

$$x[k+2] + 0,1x[k+1] - 0,06x[k] = u[k] \ ,$$

onde $u[k] = 1$ para todo $k \geq 0$, $x[0] = 0$ e $x[1] = 0$.

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.9

Encontre a solução da seguinte equação a diferenças:

$$x[k+2] + 0,1x[k+1] - 0,06x[k] = u[k] \ ,$$

onde $u[k] = 1$ para todo $k \geq 0$, $x[0] = 0$ e $x[1] = 0$.

Resolução Exemplo 1.9

Aplicando a Transformada Z na EaD, temos:

$$z^2\left(X(z) - x[0] - x[1]z^{-1}\right) + 0,1z\left(X(z) - x[0]\right) - 0,06X(z) = U(z)$$

$$X(z)\left(z^2 + 0,1z - 0,06\right) = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,2)(z+0,3)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0,2)(z+0,3)}$$

Solução de Equações a Diferenças

Continuação da Resolução Exemplo 1.9

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0,96}{z-1} - \frac{2,5}{z-0,2} + \frac{1,54}{z+0,3}$$

$$X(z) = 0,96\frac{z}{z-1} - 2,5\frac{z}{z-0,2} + 1,54\frac{z}{z+0,3}$$

$$x[k] = 0,96 - 2,5.0,2^k + 1,54.(-0,3)^k$$

Solução de Equações a Diferenças

Cálculo dos Resíduos com Polos Complexo-Conjugados

Seja r_i o resíduo associado ao polo complexo p_i de uma função $F(z)$. Se esta função apresenta somente coeficientes reais, então r_i^* é o resíduo conjugado de r_i, e r_i^* é resíduo de p_i^*. Estes dois polos devem então estar sob a seguinte forma na expansão em frações parciais:

$$\frac{r_i z}{z - p_i} + \frac{r_i^* z}{z - p_i^*} \ .$$

Queremos expressar estes polos da seguinte forma na Transformada Z inversa:

$$\alpha \epsilon^{ak} \cos\left(bk + \beta\right) \ .$$

Para, isto, devemos ter:

$$\begin{aligned} a &= \ln |p_i| \\ b &= \arg\, p_i \\ \alpha &= 2\, |r_i| \\ \beta &= \arg\, r_i \end{aligned}$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.10

Calcule a Transformada Z inversa da seguinte função:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2+4z+8)} \; .$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.10

Calcule a Transformada Z inversa da seguinte função:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2+4z+8)} .$$

Resolução Exemplo 1.10

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)(z+2-j2)(z+2+j2)} = \frac{r_1}{z-1} + \frac{r_2}{z+2-j2} + \frac{r_2^*}{z+2+j2}$$

$$r_1 = \left.\frac{z+1}{z^2+4z+8}\right|_{z=1} = \frac{1+1}{1+4+8} \approx 0,154$$

$$r_2 = \frac{z+1}{(z-1)(z+2+j2)}_{z=-2+j2} = \frac{-1+j2}{-8-j12} \approx -0,0769 - j0,1346$$

$$H(z) = \frac{0,154z}{z-1} + \frac{(-0,0769-j0,1346)z}{z+2-j2} + \frac{(0,0769+j0,1346)z}{z+2+j2}$$

Solução de Equações a Diferenças

Continuação do Exemplo 1.10

$$a = \ln\ |-2+j2| = \ln\ 2,8284 = 1,04$$
$$b = \arg\ (-2+j2) = 2,356\ [\mathrm{rad}]$$
$$\alpha = 2|-0,0769 - j0,1346| = 0,31$$
$$\beta = \arg\ (-0,0769 - j0,1346) = -2,09\ [\mathrm{rad}]$$

Logo:

$$h[k] = 0,154 + 0,31\epsilon^{1,04k}\cos\left(2,356k - 2,09\right)\ .$$

Solução de Equações a Diferenças

Cálculo dos Resíduos com Polos Repetidos de Multiplicidade q

Se a função $F(z)$ possuir um polo repetido p_i de multiplicidade q, existirá q resíduos r_i associados a esse polo. Estes polos são expressos na expansão por frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{r_{i,1}}{(z-p_i)^q} + \frac{r_{i,2}}{(z-p_i)^{q-1}} + \ldots + \frac{r_{i,j}}{(z-p_i)} \, .$$

Os resíduos são então calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_{i,1} &= (z-p_i)^q F(z)\Big|_{z=p_i} \\ r_{i,2} &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}(z-p_i)^q F(z)\Big|_{z=p_i} \\ &\vdots \\ r_{i,j} &= \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(z-p_i)^q F(z)\Big|_{z=p_i} \end{aligned}$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.11

Calcule a Transformada Z inversa da seguinte função:

$$H(z) = \frac{1}{z^2(z-0,5)} \; .$$

Solução de Equações a Diferenças

Exemplo 1.11

Calcule a Transformada Z inversa da seguinte função:

$$H(z) = \frac{1}{z^2(z-0,5)} \, .$$

Resolução Exemplo 1.11

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z^3(z-0,5)} = \frac{r_{1,1}}{z^3} + \frac{r_{1,2}}{z^2} + \frac{r_{1,3}}{z} + \frac{r_2}{z-0,5}$$

$$r_{1,1} = z^3 \frac{H(z)}{z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{0-0,5} = -2$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz} z^3 \frac{H(z)}{z}\bigg|_{z=0} = \frac{d}{dz}\frac{1}{z-0,5}\bigg|_{z=0} = \frac{-1}{(z-0,5)^2}\bigg|_{z=0} = -4$$

$$r_{1,3} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{H(z)}{z}\bigg|_{z=0} = 0,5\frac{d}{dz}\frac{-1}{(z-0,5)^2}\bigg|_{z=0} = 0,5\frac{2}{(z-0,5)^3}\bigg|_{z=0} = -8$$

$$r_2 = (z-0,5)\frac{H(z)}{z}\bigg|_{z=0,5} = \frac{1}{0,5^3} = 8$$

Solução de Equações a Diferenças

Continuação do Exemplo 1.11

$$H(z) = \frac{-2}{z^2} + \frac{-4}{z} - 8 + \frac{8z}{z - 0,5}$$

Logo:

$$h[k] = -2\delta(k-2) - 4\delta(k-1) - 8\delta(k) + 8(0,5)^k \ .$$

Solução de Equações a Diferenças

Obtenção Equações a Diferenças a partir de FT

Seja a função de transferência $F(z)$ dada por:

$$F(Z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}.$$

obtenha a equação a diferenças equivalente.

Solução de Equações a Diferenças

Obtenção Equações a Diferenças a partir de FT

Seja a função de transferência $F(z)$ dada por:

$$F(Z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}.$$

obtenha a equação a diferenças equivalente.

Obtenção Equações a Diferenças a partir de FT

Multiplique o denominador e numerador pela potência negativa da variável z de maior potência:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0) \cdot z^{-m}}{(z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0) \cdot z^{-m}} \\ F(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^{n-m} + b_{n-1} z^{n-1-m} + \cdots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}}{z^0 + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}} \end{aligned}$$

Solução de Equações a Diferenças

Obtenção Equações a Diferenças a partir de FT

Seja a função de transferência $F(z)$ dada por:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^{n-m} + b_{n-1} z^{n-1-m} + \cdots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}}{z^0 + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}$$

por definição $z^{-n} F(z) \to \mathcal{Z}\left[f(k-n)\right]$, logo

$$\begin{aligned} & Y(Z)(z^0 + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}) = \\ & \qquad U(z)(b_n z^{n-m} + b_{n-1} z^{n-1-m} + \cdots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}) \end{aligned}$$

o que equivale, tomando-se a transformada inversa, a:

$$\begin{aligned} y[k] + a_{m-1} y[k-1] + \cdots + a_0 y[k-m] &= \\ b_n u[k+n-m] + \cdots &+ b_1 u[k+1-m] + b_0 u[k-m] \end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned} y[k] = & -a_{m-1} y[k-1] - \cdots - a_0 y[k-m] + \\ & b_n u[k+n-m] + \cdots + b_1 u[k+1-m] + b_0 u[k-m] \end{aligned}$$