PCO119 - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS E CONTROLE

Atividade 7

Formulário

- Equação genérica de um filtro IIR no domínio *Z*:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}.$$

- Equação genérica de um filtro IIR em tempo discreto (onde a_n e b_m são coeficientes do filtro):

$$y[k] = \sum a_n y[k-n] + \sum b_m x[k-m].$$

- Equação genérica de um filtro FIR no domínio *Z*:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}.$$

- Equação genérica de um filtro FIR em tempo discreto (onde b_m são coeficientes do filtro):

$$y[k] = \sum b_m x[k-m].$$

- Exemplo da resposta ao impulso de um filtro passa-baixas (FPB) ideal:

$$h(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H(W)e^{jWi}\,dW = \frac{1}{2\pi}\int_{-Wi}^{+Wi} e^{jWi}\,dW = \frac{\sin(W_1.i)}{\pi.i} = \frac{W_1}{\pi}SINC(\frac{W_1}{\pi}i)$$

Obs: sinc(0) = 1.

- Resultados de respostas de filtros ideais:

$$h(i) = \frac{\sin(2\pi f_1 i)}{\pi i}\ \text{[FPB]}; \qquad h(0) = W_1/\pi;$$

$$h(i) = -\frac{\sin(2\pi f_4 i)}{\pi i}\ \text{[FPA]}; \qquad h(0) = 1 - W_4/\pi;$$

$$h(i) = \frac{\sin(2\pi f_7 i)}{\pi i} - \frac{\sin(2\pi f_6 i)}{\pi i}\ \text{[FPF]}; \qquad h(0) = (W_7 - W_6)/\pi;$$

$$h(i) = \frac{\sin(2\pi f_9 i)}{\pi i} - \frac{\sin(2\pi f_{12} i)}{\pi i} \text{ [FRF]}; \qquad h(0) = 1 - (W_{12} - W_9)/\pi;$$

Obs: As informações das frequências são normalizadas: $f_n = f_x /(fa/2)$; $W_n = \pi f_n$.

- Exemplos de algumas funções tipo janela (window): N=Nº coeficientes; β=Atenuação;

$$J(i) = 1 \text{ [Retangular} \rightarrow \beta = 21\text{[dB]]};$$

$$J(i) = 0{,}5 + 0{,}5\cos(2\pi \frac{i}{N}) \text{ [Hanning} \rightarrow \beta = 44\text{[dB]]};$$

$$J(i) = 0{,}54 + 0{,}46\cos(2\pi \frac{i}{N}) \text{ [Hamming} \rightarrow \beta = 53\text{[dB]]};$$

$$J(i) = 0{,}42 + 0{,}5\cos(2\pi \frac{i}{N}) + 0{,}08\cos(4\pi \frac{i}{N}) \text{[Blackman} \rightarrow \beta = 74\text{[dB]]};$$

- Cálculo dos coeficientes do filtro:

$b(i) = J(i).h(i)$, p/ $-(N-1)/2 \leq i \leq (N-1)/2$;

$b(i) = b(i-(N-1)/2)$, p/ $i = 0, 1, 2, ..., N-1$.

- Expressões para Filtros Adaptativos:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M} W_m(k).x(k-m); \qquad \varepsilon(k) = d(k) - y(k); \qquad W_m(k+1) = W_m(k) + \eta \sum x(k).\varepsilon(k).$$

Procedimento geral

Parte I – Projetos (por métodos algébricos) de filtros IIR baseados em Modelos Analógicos

1) Obter os coeficientes de um filtro digital passa-baixas baseado no modelo analógico $Y(s)/X(s) = 1/(s/Wc + 1)$. Usar a aproximação retangular $s = (1 - Z^{-1})/TZ^{-1}$.

Solução Analítica

Da função do modelo contínuo, usando a aproximação retangular (ou de Euler) tem-se:

$Y(Z)[\ (1 - Z^{-1})/\ TZ^{-1} + Wc] = WcX(Z)$; $Y(Z)[(1 - Z^{-1}) + TZ^{-1}Wc] = TWcZ^{-1}X(Z)$;

$Y(Z)[1 + (TWc - 1)Z^{-1}] = TWcZ^{-1}X(Z)$.

Denotando $a_1 = TWc - 1$ e $b_1 = TWc$ vem $Y(Z)[1 + a_1Z^{-1}] = b_1Z^{-1}X(Z)$, ou então a equação de diferenças resultante: $Y(n) = b_1X(n-1) - a_1Y(n-1)$.

a) Admitindo que a frequência de corte ($Wc = 2\pi fc$) do filtro seja fc = 1 [Hz], e utilizando um tempo de amostragem/processamento T = 0,02 [s], calcular os coeficientes do filtro digital correspondente anotando os valores na área de resposta a seguir.
Resposta: a_1= ________________; b_1= _________________ .

b) Usando os coeficientes calculados no item anterior, simular o filtro digital correspondente para uma entrada composta por um sinal contínuo de nível em 1,5 sobreposto a um sinal senoidal (ruído) de 10 [Hz] com amplitude unitária. Usar os comandos abaixo para simular o sinal de entrada (*x*) do filtro.

```
t = 0:0.02:2;  x = 1.5 + 0.5*sin(2*pi*10*t);
plot(t,x,'b'); grid ;xlabel('t[s]'); ylabel('x(t)');
title('Simulação do sinal de entrada do Filtro')
```

c) Anotar o valor médio do sinal de entrada do filtro.
Resposta: ____ .

d) Para simular o filtro digital no MATLAB basta executar os comandos de linha abaixo.

```
a =[1  a1]; b=[0  b1];
y = filter(b,a,x);
stairs(t,y,'r'); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)');
title('Simulação do sinal Filtrado Digitalmente')
```

e) Anotar o valor médio da saída (*y*) do filtro digital, ou seja, o sinal filtrado.
Resposta: ____ .

f) Considerando o valor da frequência de corte (Wc) do modelo do filtro, qual seria a estimativa da atenuação do sinal (ruído) na frequência de 10 [Hz]? Lembrar que o modelo apresenta o comportamento do módulo com uma inclinação de −20 [dB]/década de frequência.
Resposta: ____ .

g) Observando o gráfico do sinal (*y*) filtrado, pode-se dizer que o sinal (ruído) de 10 [Hz] foi atenuado adequadamente? Justificar a resposta.

Respostas: ____
____ .

2) Projetar os coeficientes de um filtro digital passa-baixas baseado no modelo analógico $Y(s)/X(s)= W^2 / (s^2 + 2.\zeta.W.s + W^2)$. Usar a transformação bilinear $s = 2/T(1 - Z^{-1})/(1 + Z^{-1})$. As especificações são as mesmas da questão anterior e o fator de amortecimento é unitário.

a) O MatLab possui comando próprio para a aproximação especificada:

*W = 2*pi*1; T = 0.02; Fa = 1/T;*
*Ns = W^2; Ds = [1 2*1*W W^2];*
[b,a] = bilinear(Ns,Ds,Fa)

b) Anotar os coeficientes obtidos.

a = [ ];
b = [ ].

c) Simular a resposta do filtro para a entrada mencionada anteriormente.

y = filter(b,a,vx);
plot(vt,vx,'b'); hold
stairs(vt,y,'r'); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('x(t) = Azul ; y(t) = Vermelho');

d) Em relação às respostas obtidas na questão anterior, o resultado da filtragem agora foi melhor, ou seja, o sinal senoidal do ruído foi mais atenuado? Justificar.
Respostas: ____
____ .

3) Projetar os coeficientes de um filtro digital passa-faixa baseado no modelo analógico $Y(s)/X(s)=(W/Q)s / (s^2 + (W/Q)s + W^2)$. Usar a transformação bilinear $s = 2/T(1 - Z^{-1})/(1 + Z^{-1})$.

<u>Solução Analítica</u>

$Y(Z)[(2/T(1-Z^{-1})/(1+Z^{-1}))^2+(W/Q) (2/T(1-Z^{-1})/(1+Z^{-1}))+ W^2]=X(Z)[(W/Q)(2/T(1-Z^{-1})/(1+Z^{-1}))]$.

$Y(Z)[(1+KT/2+(WT)^2/4)+((WT)^2/2-2)Z^{-1}+(1-KT/2+(WT)^2/4)Z^{-2}] = X(Z)[(KT/2)+(KT/2)Z^{-2}]$.

Para: $K = W/Q$; $C_0 = 1+KT/2+(WT)^2/4$; $a_1 = ((WT)^2/2-2)/C_0$; $a_2 = (1-KT/2+(WT)^2/4)/C_0$;
$b_0 = (KT/2)/C_0$;
$b_2 = (-KT/2)/C_0$;

vem: $Y(Z)[1 + a_1Z^{-1} + a_2Z^{-2}] = X(Z)[b_0 + b_2Z^{-2}]$.

A equação de diferenças resultante do filtro é: $Y(n) = b_0X(n) + b_2X(n-2) - a_1Y(n-1) - a_2Y(n-2)$.

a) Admitindo que os parâmetros do filtro analógico sejam Q = 8, W = 2π100 [rd/s] e que o tempo de amostragem/processamento do filtro digital seja T = 0,0001 [seg], calcular os coeficientes do mesmo e anotar os valores nos espaços correspondentes abaixo.
Resposta: a_1 = ____________; a_2 = ____________ ; b_0 = ___________; b_2 = _____________ .

b) Este item mostra a utilização de um comando do MatLab para calcular os coeficientes com a transformação solicitada (bilinear ou de Tustin). Executar os comandos a seguir.

```
Q=8; W=2*pi*100; T=0.0001;
Ns=[0  (W/Q)  0]; Ds=[1  (W/Q)  (W*W)];
[b,a]=c2dm(Ns,Ds,T,'tustin')
```

c) Anotar os coeficientes obtidos:

a = [ ];
b = [ ].

d) Os valores do item (a) e do item (c) são próximos? Justificar.
Respostas: ____ .

e) Será simulada a atuação do filtro digital projetado. O sinal de entrada (*x*) será exemplificado por um sinal senoidal original de 100 [Hz] e amplitude unitária que está sobreposto a sinais (ruídos) de 60 e 1000 [Hz] com as respectivas amplitudes de 20% e 30% do sinal original. Usar os comandos a seguir.

```
t=0:T:0.1;  x=sin(2*pi*100*t)+0.2*sin(2*pi*60*t)+0.3*sin(2*pi*1000*t);
plot(t,x); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('x(t)'); title('Sinal de entrada do Filtro');
y=filter(b,a,x); figure
stairs(t,y); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)'); title('Sinal Filtrado Digitalmente')
```

f) O sinal (*y*) de saída do filtro foi adequadamente filtrado após alguns ciclos de processamento? O sinal original de 100 [Hz] foi recuperado? Justificar.
Repostas: ____
____ .

Parte II – Projetos de filtros IIR utilizando comandos específicos do MATLAB

1ª) Obter os coeficientes de um filtro de Butterworth passa-faixa de segunda ordem com banda passante entre 80 e 120 [Hz] e tempo de amostragem T = 0,0001 [s].

a) Usar o comando abaixo, onde a frequência de 5000 [Hz] é a metade da frequência de amostragem (critério de Nyquist), e é utilizada para normalizar a banda passante.

```
[b,a] = butter(2,[80   120]/5000)
```

b) Anotar os coeficientes do filtro:
a = ___________________________________ ; b = ___________________________________ .

c) Obter a resposta em frequência deste filtro usando o comando a seguir.

freqz(b,a,[10:1:400],10000)

d) Obter a resposta temporal deste filtro para o mesmo sinal de entrada do item (e) da questão anterior. Usar os comandos a seguir.

y=filter(b,a,x);
stairs(t,y); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)'); title('Sinal Filtrado Digitalmente')

e) Verificando o gráfico obtido, o sinal de 100 [Hz] foi recuperado? Justificar.
Respostas: ____ .

2ª) Outra forma de realizar o projeto da questão anterior é determinar qual o grau mínimo do filtro para cumprir determinadas especificações de filtragem. Para tanto usar o comando abaixo, onde na faixa de frequência de 60 a 140 [Hz] são especificadas as atenuações desejadas para a faixa da banda passante (80 e 120 [Hz]) e a faixa de corte com os valores de 1 e de 10 [dB], respectivamente.

[N,Wn]=buttord([80   120]/5000,[60   140]/5000,1,10)

a) Anotar o grau resultante:
N = ____ .

b) Obter os coeficientes do filtro com o comando:

[b,a]=butter(N,Wn)

c) Anotar os coeficientes obtidos:
a = ___________________________________ ; b = __________________________________ .

d) Obter a resposta em frequência do filtro resultante usando o comando:

freqz(b,a,[10:1:400],10000)

c) Obter a resposta deste filtro para o mesmo sinal de entrada anterior:
y=filter(b,a,x);
stairs(t,y); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)'); title('Sinal Filtrado Digitalmente');

d) Verificando o gráfico obtido pode-se afirmar que o sinal de 100 Hz foi recuperado? Justificar.
Respostas: ____ .

3ª) É possível implementar outros tipos de filtros (Bessel, Chebyshev, Elíptico, etc.) em função das características de atenuação desejadas nas filtragens. Nesta questão serão obtidos os coeficientes de um filtro elíptico e sua resposta em frequência. Executar os comandos abaixo para obter a resposta em frequência do filtro digital correspondente.

```
[N,Wn]=elliptord([80   120]/5000, [60   140]/5000, 1, 10)
[b,a]=ellip(N,1,10,Wn)
freqz(b,a,[10:1:400],10000)
```

a) Obter a resposta em frequência do filtro passa-faixa com os parâmetros do item (b) da primeira questão da parte II por meio dos comandos abaixo:

```
figure
a=[1   -1.988   0.9922];  b=[0.0039   0   -0.0039];
freqz(b,a,[10:1:400],10000)
```

b) Comparando as curvas dos módulos dos gráficos, dizer qual tipo de filtro apresenta o melhor desempenho. Justificar a resposta.
Respostas: ____
____ .

c) Observando as curvas de fase dos filtros IIR, pode-se dizer que as mesmas apresentam variações lineares com a frequência? Justificar.
Respostas: ____ .

Parte III – Projeto e simulação de filtros digitais FIR

1) Obter os coeficientes de um filtro passa-baixas FIR com 51 coeficientes usando uma janela tipo Blackman, que foi especificado para filtrar um sinal de 10 [Hz] na presença de um ruído de 50 [Hz] com 25% da amplitude do sinal original. A frequência de corte especificada é de 40 [Hz] e a de amostragem é de 200 [Hz]. Usando os comandos do MATLAB, vem:

```
N=51;f1=40; fa=200;
fn=f1/(fa/2); Wn=pi*fn;
i= -(N-1)/2:(N-1)/2;
h =(Wn/pi)*sinc((Wn/pi)*i);
J=0.42+0.5*cos(2*pi*i/N)+0.08*cos(4*pi*i/N);
b=J.*h;
```

a) Traçar o gráfico de h(i) com o comando *plot(i,h)* . Qual é o seu significado?
Resposta: ____ .

b) Obter o gráfico da janela especificada com o comando *plot(i,J)* . Anotar o valor máximo e o valor mínimo da função correspondente à janela. Qual é a finalidade da mesma?
Respostas: ____ .

c) Obter a resposta em frequência do filtro com o comando abaixo.

freqz(b,1,[0:1:100],fa)

d) Anotar o valor da atenuação típica da curva de módulo. O mesmo corresponde à especificação desejada? Justificar.
Respostas: ____ .

e) Obter a resposta do sinal de saída do filtro para o sinal de entrada descrito anteriormente.

```
t=0:(1/fa):1;
x=sin(2*pi*10*t)+0.25*sin(2*pi*50*t);
plot(t,x); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('x(t)'); title('Sinal de entrada do Filtro')
figure
y=filter(b,1,x);
stairs(t,y); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)'); title('Sinal Filtrado Digitalmente')
```

f) Verificando o gráfico obtido, o sinal original de 10 [Hz] foi recuperado? Justificar.
Respostas: ____ .

2) Obter os coeficientes de um filtro passa-faixa FIR com 51 coeficientes usando uma janela tipo Hamming, que foi especificado para filtrar um sinal de 20 [Hz] na presença de ruídos em 4 [Hz] e 60 [Hz]. A banda passante deve estar de 10 a 30 [Hz] e a frequência de amostragem em 200 [Hz]. Usar os comandos abaixo:

```
W6=0.1*pi;W7=0.3*pi;
h =(W7/pi)*sinc((W7/pi)*i) - (W6/pi)*sinc((W6/pi)*i);
J=0.54+0.46*cos(2*pi*i/N);
b=J.*h;
```

(Obs: A janela em questão também pode ser obtida pelo comando *J=hamming(N) ';*)

a) Obter o gráfico da função da janela especificada com o comando *plot(i,J)* . Anotar o valor máximo e o mínimo da mesma. Os valores são diferentes aos do item (b) anterior?
Respostas: ____ .

b) Obter a resposta em frequência do filtro.

freqz(b,1,[0:1:100],fa)

c) Anotar a atenuação típica da curva de módulo.
Resposta: ____ .

d) Simular o sinal de entrada do filtro por meio dos comandos:

```
x=0.1*sin(2*pi*4*t)+sin(2*pi*20*t)+0.5*sin(2*pi*60*t);
plot(t,x); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('x(t)'); title('Sinal de entrada do Filtro')
figure
```

e) Obter a resposta do sinal de saída do filtro.

```
y=filter(b,1,x);
stairs(t,y); grid; xlabel('t [s]'); ylabel('y(t)'); title('Sinal Filtrado Digitalmente')
```

f) Verificando o gráfico obtido, o sinal original de 20 [Hz] foi recuperado? Justificar.
Respostas: ____ .

3ª) Existem funções específicas do MATLAB para projetar filtros FIR (p. ex, *fir1, fir2*, etc). Seja obter os coeficientes de um filtro passa-baixas com 20 coeficientes para filtrar um sinal contínuo na presença de um ruído de 3500 [Hz] com 1/4 da amplitude do sinal original. O sistema deve apresentar ganho unitário de 0 até 800 [Hz] e atenuação máxima a partir de 1000 [Hz]. A frequência de amostragem é 8000 [Hz]. Usando os comandos abaixo:

```
N=20; f=[0   800   1000   4000]/4000; m=[1  1  0  0];
b=fir2(N,f,m);
freqz(b)
```

a) Obter a resposta em frequência do filtro:

```
[H,w]=freqz(b);
plot(8000*(w/pi),20*log10(abs(H)));
grid; xlabel('F[Hz]'); ylabel('dB');
```

b) Simular o sinal de entrada do filtro:

```
t=0:(1/8000):0.0125;
x=1+0.25*sin(2*pi*3500*t);
plot(t,x)
grid; xlabel('t[s]') ;ylabel('Amplitude'); title('Sinal com ruído');
```

c) Obter a resposta temporal do sinal de saída do filtro:

```
y=filter(b,1,x);
plot(t,y)
xlabel('t[s]'); ylabel('Amplitude'); title('Sinal Filtrado');
```

d) Verificando o gráfico obtido, o sinal original contínuo foi recuperado? Justificar.
Respostas: ____ .