ELT706 - Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá
Engenharia Elétrica

Aula 03

Sistemas a Tempo Discreto em Malha Aberta

Prof. Jeremias Barbosa Machado
jeremias@unifei.edu.br

07 de maio de 2020

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

- Relembrando a definição de transformada-Z de uma sequência numérica $\{e(k)\}$, tem-se:

$$E(z) = \mathcal{Z}[\{e(k)\}] = e(0) + e(1)z^{-1} + e(2)z^{-2} + e(3)z^{-3} + \dots$$

- Relembrando a definição de transformada estrela de uma função no tempo $e(t)$ amostrada com período T, tem-se:

$$E^*(s) = e(0) + e(T)\epsilon^{-Ts} + e(2T)\epsilon^{-2Ts} + e(3T)\epsilon^{-3Ts} + \dots$$

- A similaridade entre as duas transformadas é óbvia. De fato, se nós assumirmos que a sequência numérica $\{e(k)\}$ é gerada através da amostragem do sinal $e(t)$, isto é, $e(k)$ na primeira equação se transforma em $e(nT)$ da segunda, e se fizermos $e^{Ts} = z$ na segunda equação, então a segunda equação se transforma na transformada-Z! Ou seja:

$$E(z) = E^*(s)\Big|_{\epsilon^{Ts}=z}$$

- Desta forma, vemos que a transformada-Z pode ser considerada um caso particular da transformada de Laplace para os nossos propósitos. Sendo assim, empregaremos a transformada-Z na análise de sistemas a tempo discreto ao invés da transformada estrela. Podemos então, obter $E(z)$ a partir de $E(s)$ de acordo com o método dos resíduos visto na aula anterior, ou consultar tabelas de transformada-Z.

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Exemplo 3.0

Através do método dos resíduos, encontre $E^*(s)$ para $e(t) = u(t)$, o degrau unitário. Verifique se a transformada $E^*(s)$ encontrada é igual a transformada $E(z)$ obtida pela definição da Transformada Z.

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Exemplo 3.0

Através do método dos resíduos, encontre $E^*(s)$ para $e(t) = u(t)$, o degrau unitário. Verifique se a transformada $E^*(s)$ encontrada é igual a transformada $E(z)$ obtida pela definição da Transformada Z.

Resolução Exemplo 3.0

A transformada de Laplace do degrau unitário é:

$$E(s) = \frac{1}{s} \ .$$

Logo, avaliando a função, tem-se:

$$E(\lambda)\frac{1}{1-\epsilon^{-T(s-\lambda)}} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\epsilon^{-T(s-\lambda)}} \ .$$

Calculando o resíduo da equação anterior, tem-se:

$$r_1 = \left.\frac{1}{1-\epsilon^{-T(s-\lambda)}}\right|_{\lambda=0} = \frac{1}{1-\epsilon^{-Ts}} \ .$$

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Continuação Resolução Exemplo 3.0

Logo, como $E(\lambda)$ possui somente um pólo:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 - \epsilon^{-Ts}} \ .$$

Como era de se esperar, o resultado é idêntico ao do Exemplo 2.1. Substituindo-se $z = \epsilon^{Ts}$, tem-se:

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \ .$$

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Exemplo 3.1

Prove que a transformada-Z da função

$$E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

é:

$$E(z) = \frac{z\left(1-\epsilon^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-aT}\right)} .$$

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Exemplo 3.1

Prove que a transformada-Z da função

$$E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

é:

$$E(z) = \frac{z\left(1-\epsilon^{-aT}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-aT}\right)} .$$

Resolução Exemplo 3.1

Para determinar $E(z)$, precisamos primeiro determinar $E^*(s)$. De acordo com o método dos residuos visto na aula anterior:

$$E^*(s) = \sum_{\text{nos pólos de } E(\lambda)} \text{resíduos de} \left[E(\lambda) \frac{1}{1-\epsilon^{-T(s-\lambda)}} \right]$$

$$E(\lambda) = \frac{a}{\lambda(\lambda+a)} \frac{1}{1-\epsilon^{-T(s-\lambda)}}$$

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Continuação Resolução Exemplo 3.1

Calculando o primeiro resíduo:

$$r_1 = \frac{a}{\lambda + a}\frac{1}{1 - \epsilon^{-T(s-\lambda)}}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{1}{1 - \epsilon^{-Ts}}$$

Calculando o segundo resíduo:

$$r_2 = \frac{a}{\lambda}\frac{1}{1 - \epsilon^{-T(s-\lambda)}}\bigg|_{\lambda=-a} = -\frac{1}{1 - \epsilon^{-T(s+a)}} = -\frac{1}{1 - \epsilon^{-Ts}\epsilon^{-aT}}$$

Logo:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 - \epsilon^{-Ts}} - \frac{1}{1 - \epsilon^{-Ts}\epsilon^{-aT}}$$

$$E^*(s) = \frac{1 - \epsilon^{-Ts}\epsilon^{-aT} - 1 + \epsilon^{-Ts}}{\left(1 - \epsilon^{-Ts}\right)\left(1 - \epsilon^{-Ts}\epsilon^{-aT}\right)}$$

$$E^*(s) = \frac{\epsilon^{-Ts}\left(1 - \epsilon^{-aT}\right)}{\left(1 - \epsilon^{-Ts}\right)\left(1 - \epsilon^{-Ts}\epsilon^{-aT}\right)}$$

A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

Continuação Resolução Exemplo 3.1

Fazendo $\epsilon^{Ts} = z$, tem-se então:

$$E(z) = \frac{z^{-1}\left(1 - \epsilon^{-aT}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\epsilon^{-aT}\right)}$$

Multiplicando a equação acima por z^2 no numerador e denominador, tem-se finalmente:

$$E(z) = \frac{z\left(1 - \epsilon^{-aT}\right)}{\left(z - 1\right)\left(z - \epsilon^{-aT}\right)} \ .$$

- Note que neste exemplo $E^*(s)$ possui uma infinidade de pólos e zeros no plano-s. Entretanto, $E(z)$ possui apenas um zero e dois pólos. Desta forma, a análise baseada na abordagem de pólos e zeros torna-se muito mais simplificada com a utilização da transformada-Z, além de outras vantagens a serem vistas posteriormente.

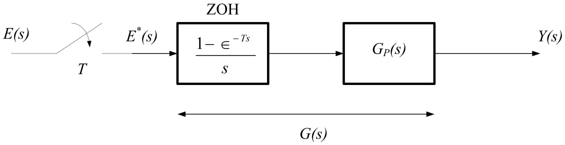
A Relação entre $E(z)$ e $E^*(s)$

- Substituindo-se $\epsilon^{Ts} = z$ na equação do método dos resíduos, pode-se calcular $E(z)$ diretamente através de:

$$E(z) = \sum_{\text{nos pólos de } E(\lambda)} \left[\text{resíduos de } E(\lambda) \frac{1}{1 - z^{-1}\epsilon^{T\lambda}} \right] .$$

A Função de Transferência ao impulso

- Um sistema de controle a dados amostrados, em malha aberta, possui o seguinte diagrama de blocos:



- O produto da planta $G_P(s)$ e do retentor de ordem zero (ZOH) é chamado de $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1-\epsilon^{-Ts}}{s} G_P(s)$$

- Desta forma, o sinal de saída $Y(s)$ é dado por:

$$Y(s) = G(s)E^*(s)$$

- Tomando a transformada estrela do sinal de saída $Y(s)$, tem-se:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) = [G(s)E^*(s)]^* \ ,$$

onde $[\ ]^*$ denota transformada estrela;

A Função de Transferência ao Impulso

- Podemos reescrever a expressão anterior como:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)E^*(s) \ ,$$

  já que $E^*(s + jn\omega_s) = E^*(s)$ (propriedade da periodicidade);
- Por definição:

$$G^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \ ,$$

  e então, tem-se que:

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s) \ ;$$

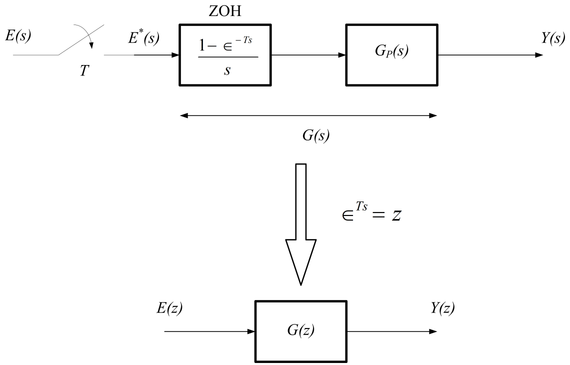
- Fazendo $\epsilon^{Ts} = z$, finalmente tem-se:

$$Y(z) = G(z)E(z) \ ;$$

- A função $G(z)$ é conhecida como *função de transferência ao impulso*, pois indica a função de transferência entre a saída e entrada amostrada *no exato instante de amostragem*.

A Função de Transferência ao Impulso

- Observe que $G(z)$ não fornece informações sobre o sinal de saída $y(t)$ entre os instantes de amostragem. Entretanto, a frequência de amostragem é escolhida de forma que a resposta dos instantes amostrados dê uma boa indicação da resposta entre os instantes de amostragem;



A Função de Transferência ao Impulso

Exemplo 3.2

Dada uma malha de controle digital em malha aberta, na qual a planta possui função de transferência

$$G_P(s) = \frac{1}{s+1} \; ,$$

1. Encontre $G(z)$;
2. Se $T = 0,1$ s, determine a equação a diferenças que expresse a saída $y(k)$ em função da entrada $e(k)$.

A Função de Transferência ao Impulso

Resolução Exemplo 3.2

1. A função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{1-\epsilon^{-Ts}}{s}\frac{1}{s+1} = \left(1-\epsilon^{-Ts}\right)\underbrace{\frac{1}{s(s+1)}}_{G'(s)}$$

Consultando a tabela de transformadas-Z, tem-se que a transformada-Z da função $G'(s)$ é:

$$G'(z) = \frac{z\left(1-\epsilon^{-T}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-T}\right)} \ ;$$

Logo:

$$G(z) = (1-z^{-1})\frac{z\left(1-\epsilon^{-T}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-T}\right)} = \frac{z-1}{z}\frac{z\left(1-\epsilon^{-T}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-T}\right)} \ ;$$

A Função de Transferência ao Impulso

Resolução Exemplo 3.2

1. Finalmente, chegamos a:

$$G(z) = \frac{1 - \epsilon^{-T}}{z - \epsilon^{-T}} \ .$$

2. Para $T = 0,1$ s, $G(z)$ é:

$$G(z) = \frac{0,0952}{z - 0,9048}$$

Multiplicando a equação anterior por z^{-1}, tem-se:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{0,0952z^{-1}}{1 - 0,9048z^{-1}}$$

$$Y(z) - 0,9048z^{-1}Y(z) = 0,0952z^{-1}E(z)$$

De acordo com a propriedade da translação real, $z^{-n}E(z) = e(k-n)$, logo:

$$y(k) = 0,9048y(k-1) + 0,0952e(k-1) \ .$$

A Função de Transferência ao Impulso