

ECA706 - Sistemas de Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá

Engenharia Elétrica

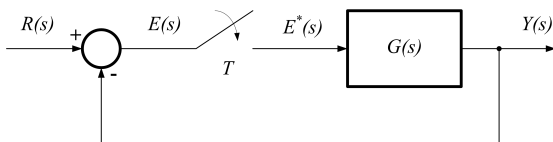
Aula 05

Características da Resposta Temporal de Sistemas a Tempo Discreto

Prof. Jeremias Barbosa Machado
jeremias@unifei.edu.br
25 de maio de 2020

Resposta Temporal

- Vimos na aula anterior que o sistema a tempo discreto cujo diagrama de blocos é:



possui função de transferência, no domínio z , igual a

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} ;$$

- A resposta temporal pode ser obtida substituindo-se $R(z)$ pela entrada correspondente (degrau, rampa, etc.), e então aplicando-se a transformada-Z inversa na função resultante;
- Lembrar que para sistemas discretos este procedimento só define a saída nos exatos instantes de amostragem $y(nT)$. Obter a saída exata $y(t)$ é um procedimento muito complicado e geralmente feito através de simulação;
- Na grande maioria das vezes obter $y(nT)$ é suficiente.

Resposta Temporal

- Um problema que surge na discretização de sistemas é: qual taxa (período) de amostragem é necessário utilizar?
- Obviamente, a frequência mínima de amostragem deve ser a frequência de Nyquist, ou seja, no mínimo duas vezes maior que a maior frequência contida no sinal. Mas será que o mínimo é suficiente?
- Existem diversos critérios e recomendações para a escolha da frequência de amostragem, as quais se baseiam na aplicação desejada, na característica da resposta do sistema (se é subamortecido, sobreamortecido, etc.), no compromisso entre desempenho e complexidade do *hardware*, entre outras;
- Em geral, em aplicações em malha fechada, a frequência de amostragem deve ser em torno de 6 a 10 vezes a largura de banda do sistema (lembrar que largura de banda é a maior frequência na qual o sistema em malha fechada possui módulo igual a -3 dB);
- Para sistemas subamortecidos, a recomendação anterior em tempo de amostragem corresponde de 0,3 a 0,5 vezes o tempo de subida;

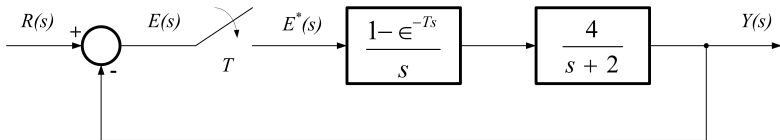
Resposta Temporal

- Para sistemas de primeira-ordem ou sistemas que possuam comportamento criticamente-amortecido ou sobre-amortecido, em geral o tempo de amostragem deve ser em torno de 0,2 vezes a constante de tempo;
- Alguns autores recomendam que a frequência de amostragem adequada deve ser de 15 a 20 vezes a largura de banda do sistema. No entanto, frequências de amostragem muito elevadas tendem, entre outros fatores, aumentar em muito o custo do hardware de implementação do sistema, sem que isso acarrete em maiores benefícios para o desempenho;
- O aumento do tempo de amostragem (diminuição da frequência de amostragem) tem efeito desestabilizante sobre o sistema. Veremos isso com mais detalhes adiante.

Resposta Temporal

Exemplo 5.1

Para o sistema de controle digital a seguir, determine o tempo de amostragem mínimo e máximo segundo as regras vistas, e com um tempo de amostragem adequado realizar a discretização do sistema.



Resposta Temporal

Resolução Exemplo 5.1

- A função de transferência do sistema contínuo em malha fechada é:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{s + 6} ;$$

- Sendo assim, o sistema contínuo em malha fechada possui uma constante de tempo igual a 0,1667 s;
- Portanto, um período de amostragem adequado para este sistema deveria ser algo próximo de 0,03334 s;
- Iremos escolher, portanto, $T = 0,03$ s;
- O sistema discreto, em malha fechada, possui função de transferência:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} ,$$

onde $G(z)$ já contém a função do retentor de ordem zero (ZOH);

Resposta Temporal

Continuação da Resolução Exemplo 5.1

- Através de tabelas, podemos determinar $G(z)$:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ (1 - e^{-Ts}) \frac{4}{s(s+2)} \right\}$$

$$G(z) = 2 \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{z - e^{-2T}};$$

- Considerando $T = 0,03$ s, tem-se:

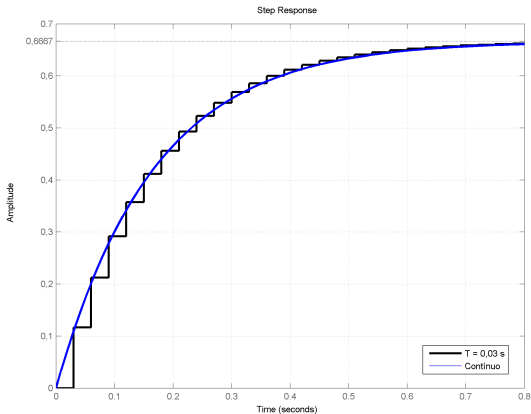
$$G(z) = \frac{0,1165}{z - 0,9418};$$

- Função de malha fechada:

$$T(z) = \frac{0,1165}{z - 0,8253};$$

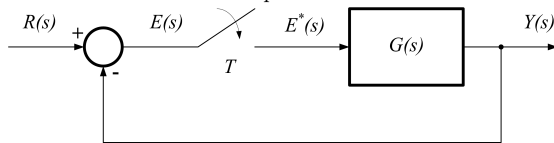
Resposta Temporal

Continuação da Resolução Exemplo 5.1



Resposta Temporal

- Voltando a nossa malha de controle padrão:



sabemos que a saída, no domínio z , é dada por:

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} R(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} R(z) ;$$

- Tomando a expansão em frações parciais, podemos expressar $Y(z)$ como:

$$Y(z) = \frac{r_1 z}{z - z_1} + \frac{r_2 z}{z - z_2} + \dots + \frac{r_n z}{z - z_n} + Y_R(z) ,$$

onde $Y_R(z)$ contém os termos de $Y(z)$ que se originam nos pólos de $R(z)$;

- Os n primeiros termos de $Y(z)$ são chamados de resposta natural de $Y(z)$, ou seja, são termos que estão sempre presentes em $Y(z)$. Se o sistema é estável, estes termos também são chamados de *resposta transitória* (ou resposta transiente);

Resposta Temporal

- Uma vez que p_i se origina nas raízes de:

$$1 + G(z) = 0 ,$$

a equação acima é chamada de *equação característica*, ou seja, são os pólos do sistema à malha fechada. Se uma função de transferência não puder ser determinada, as raízes da equação característica são os pólos de $Y(z)$ que são independentes da entrada $R(z)$;

- Se a realimentação não é unitária, então a equação característica deve ser reescrita para:

$$1 + \overline{GH}(z) = 0 ,$$

onde H representa a função de transferência da realimentação;

- Uma importante propriedade é que, se o sistema é estável, o ganho em regime permanente, que iremos chamar de *ganho dc*, é dado por:

$$\text{ganho dc} = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) ;$$

- Em outras palavras, o ganho dc do sistema contínuo é igual ao ganho dc do sistema discreto (com o retentor de ordem zero), esteja o sistema em malha aberta ou malha fechada;

Mapeando o Plano-s no Plano-z

- No estudo de sistemas contínuos, frequentemente nós atribuímos as características da resposta temporal à localização dos pólos à malha fechada (raízes da equação característica). Para sistemas discretos, desejamos fazer o mesmo;
- Considere uma função contínua $e(t)$, a qual é idealmente amostrada e gera uma função $E^*(s)$. Nos exatos instantes de amostragem, o sinal amostrado possui exatamente os mesmos valores do sinal contínuo. Sem perda de generalidade, considere que o sinal contínuo é uma exponencial $e(t) = e^{-at}$. Então tem-se que:

$$E(s) = \frac{1}{s+a}, \quad E^*(s) = \frac{e^{Ts}}{e^{Ts} - e^{-aT}}, \quad E(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}};$$

- Desta forma, vemos que um pólo no plano-s em $s = -a$ resulta em um pólo no plano-z em $z = e^{-aT}$. Generalizando, a observação da tabela de transformadas-Z mostra que um pólo de $E(s)$ em $s = s_1$ resulta em um pólo de $E(z)$ em $z = e^{s_1 T}$.
- Desta forma, dado um pólo no plano-z em $z = z_1$, quais as características da resposta transitória nos exatos instantes de amostragem equivalentes no plano-s em $s = s_1$? Para isto, usaremos a relação $z_1 = e^{s_1 T}$.

Mapeando o Plano-s no Plano-z

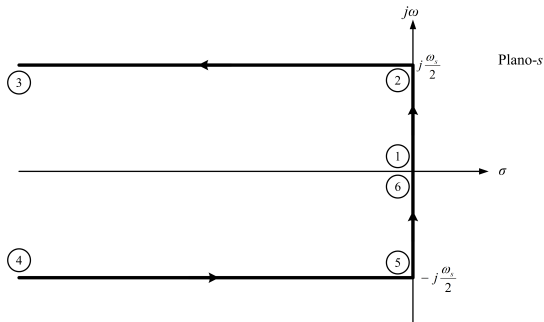
- Sabendo que $s = \sigma + j\omega$, tem-se:

$$z = e^{Ts} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T};$$

- Entretanto, segundo a identidade de Euler:

$$z = e^{\sigma T} [\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)] = e^{\sigma T} \angle \omega T;$$

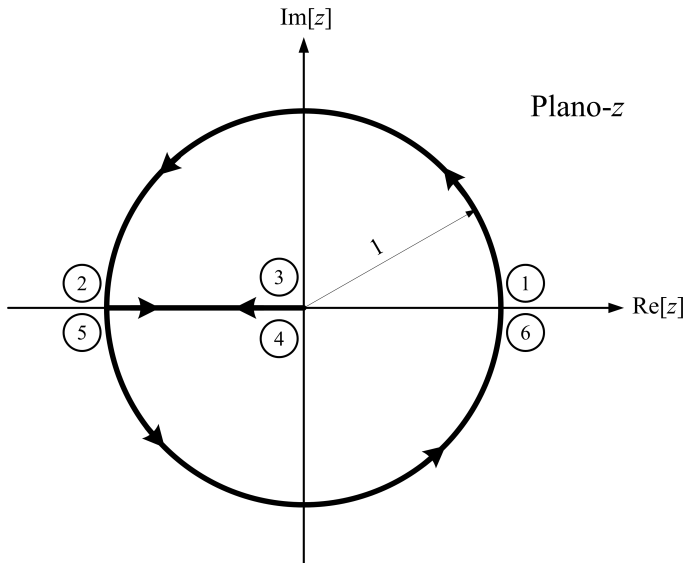
- Para começar, vamos mapear o semiplano à esquerda da faixa primária do plano-s no plano-z. Graficamente, tem-se:



Mapeando o Plano-s no Plano-z

- Em 1, $\sigma = \omega = 0$, e então $z = 1\angle 0$ [rad], ou seja, $z = 1 + j0$. Em 2, $\sigma = 0$ e $\omega = \omega_s/2$, logo $z = 1\angle \pi$ [rad], ou seja, $z = -1 + j0$. Desta forma, vemos que entre 1 e 2, o módulo de z é sempre 1, e o ângulo varia de 0 até π [rad] (uma vez que ω é positivo e crescente). Logo, o lugar geométrico formado pelo caminho 1 a 2 é um semicírculo de raio unitário e centro na origem com início em $z = 1$ e término em $z = -1$;
- Em 3, $\sigma = -\infty$ e $\omega = \omega_s/2$, e então $z = 0\angle \pi$ [rad], ou seja, $z = 0$. Desta forma, vemos que entre 2 e 3, o módulo de z decresce de 1 até 0 (pois σ é negativo e decrescente), enquanto o ângulo permanece constante em π [rad]. Logo, o lugar geométrico formado pelo caminho 2 a 3 é um segmento de reta sobre o eixo real com início em $z = 1$ e término em $z = 0$;
- Em 4, $\sigma = -\infty$ e $\omega = -\omega_s/2$, e então $z = 0\angle -\pi$ [rad], ou seja, $z = 0$. Em 5, $\sigma = 0$ e $\omega = -\omega_s/2$, logo $z = 1\angle -\pi$ [rad]. Desta forma, vemos que entre 4 e 5, o módulo de z cresce de 0 até 1 (pois σ é negativo e crescente) enquanto o ângulo permanece constante em $-\pi$ [rad]. Logo, o lugar geométrico formado pelo caminho 4 a 5 é um segmento de reta sobre o eixo real com início em $z = 0$ e término em $z = 1$;
- Em 6, $\sigma = \omega = 0$, e então $z = 1\angle 0$ [rad]. Desta forma, vemos que entre 5 e 6, o módulo de z é sempre 1, e o ângulo varia de $-\pi$ até 0 [rad] (uma vez que ω é negativo e crescente). Logo, o lugar geométrico formado pelo caminho 5 a 6 é um semicírculo de raio unitário e centro na origem com início em $z = -1$ e término em $z = 0$;

Mapeando o Plano-s no Plano-z



Mapeando o Plano-s no Plano-z

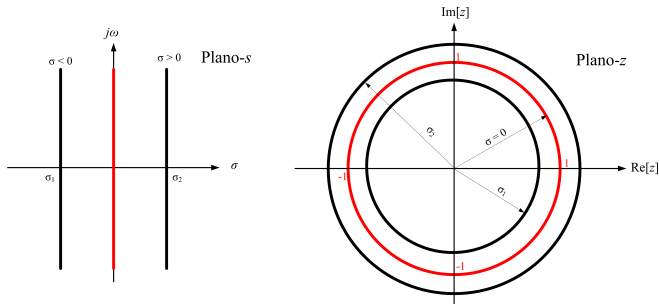
- Desta forma, vemos que pólos localizados sobre o círculo unitário no plano-z são equivalentes a pólos localizados no eixo imaginário no plano-s. Ou seja, pólos localizados sobre o círculo de raio unitário no plano-z possuem característica oscilatória na resposta temporal, com frequência de oscilação dada pelo ângulo do pólo (em radianos) dividido por T ;
- Vemos também que toda a região compreendida pelo semiplano à esquerda da faixa primária no plano-s é mapeada pelo interior do círculo unitário no plano-z, e toda a região do semiplano à direita da faixa primária é mapeada pelo exterior do círculo unitário no plano-z;
- Uma vez que pelo teorema da amostragem de Shannon não podemos ter pólos fora da faixa primária no plano-s, a região de estabilidade no plano-s é dada pelo SPE da faixa primária. Logo, **a região de estabilidade no plano-z é o interior do círculo de raio unitário!**;
- O aumento do tempo de amostragem T diminui a frequência (angular) de amostragem ω_s e consequentemente reduz a largura da faixa primária. Desta forma, o aumento do tempo de amostragem pode fazer com que pólos que inicialmente estavam localizados dentro da faixa primária no plano-s possam eventualmente ficar de fora da faixa primária.

Mapeando o Plano-s no Plano-z

- Agora que mapeamos a faixa primária no plano-z, vamos mapear outras regiões de interesse do plano-s no plano-z;
- Os lugares geométricos de amortecimento constante no plano-s, isto é, retas com σ constante, são mapeados no plano-z como círculos de raio $r = e^{\sigma T}$. Isto pode ser visto através da relação:

$$z = e^{\sigma T} \angle \omega T$$

- Se $\sigma < 0$, então os círculos possuem raio menor que 1 e consequentemente estão dentro do círculo unitário. Se $\sigma > 0$, então os círculos possuem raio maior que 1 e consequentemente estão fora do círculo unitário;
- Considere $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$. Então:

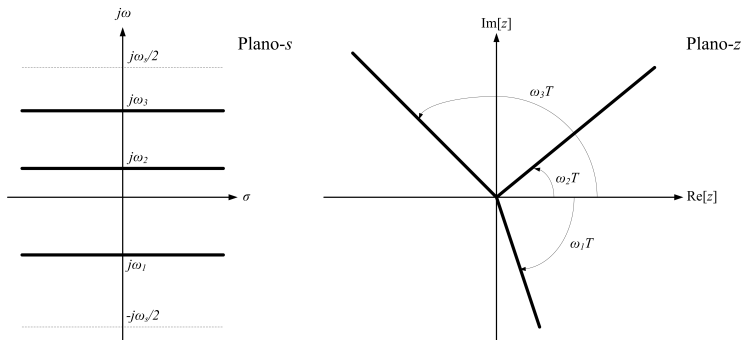


Mapeando o Plano-s no Plano-z

- Os lugares geométricos de frequência constante no plano-s, isto é, retas com ω constante, são mapeados no plano-z como retas que partem da origem e tem coeficiente angular $\alpha = \omega T$. Isto pode ser visto através da relação:

$$z = e^{\sigma T} \angle \omega T$$

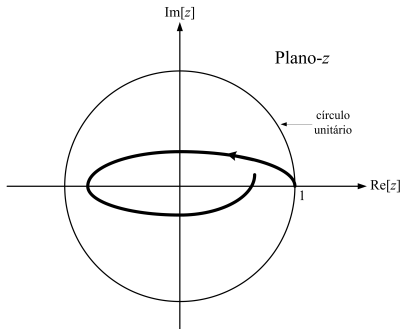
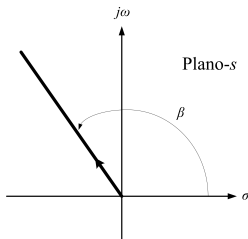
- Quanto mais próximo do eixo real a reta estiver no plano-s, menor será o ângulo da reta;
- Considere $\omega_1 < 0 < \omega_2 < \omega_3$. Então:



Mapeando o Plano-s no Plano-z

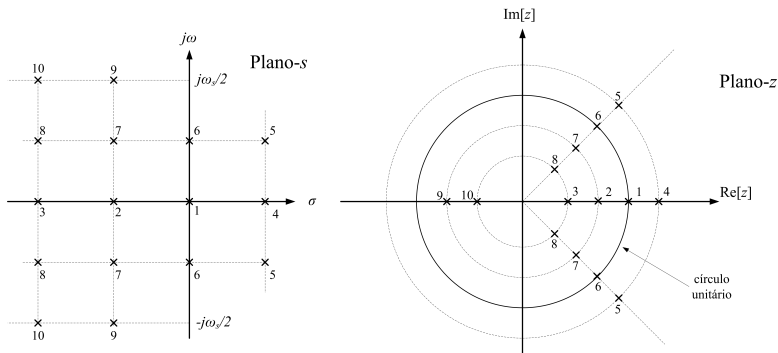
- Os lugares geométricos de coeficiente de amortecimento constante no plano-s, isto é, retas no plano-s com ângulo $\beta = \tan^{-1}(\omega/\sigma)$, são mapeados no plano-z como uma espiral logarítmica cuja amplitude inicial é unitária e decresce com o aumento de σ em magnitude (tomando σ negativo). Isto pode ser visto através da relação:

$$z = e^{\sigma T} \angle \sigma T \tan \beta$$



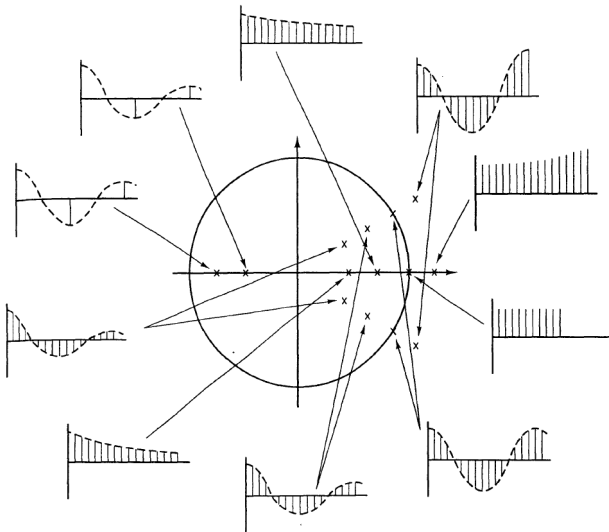
Mapeando o Plano-s no Plano-z

Conforme comentado anteriormente, as características de uma função amostrada no tempo nos exatos instante de amostragem são as mesmas da função no tempo antes da amostragem. Com isto, utilizando os mapeamentos descritos anteriormente, é possível determinar as características da resposta temporal de acordo com a localização das raízes da equação característica no plano-z. A figura a seguir ilustra o mapeamento de pólos no plano-s no plano-z:



Mapeando o Plano-s no Plano-z

Já a figura a seguir ilustra a característica da resposta transitória baseada na localização dos pólos no plano-z:

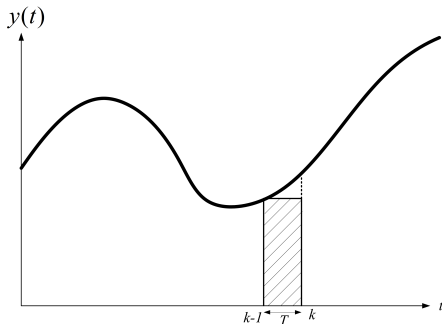


Simulação

- Até agora, obtivemos a resposta temporal de um sistema através da abordagem via transformada. Uma técnica diferente para se obter a resposta de um sistema é através da simulação;
- Um sistema de controle contínuo (analogico) pode ser simulado através da integração da equação diferencial que rege o sistema por meio de circuitos eletrônicos. O circuito que realiza esta tarefa normalmente é conhecido como *computador analógico*;
- A combinação de um computador analógico com um computador digital é conhecida como *computador híbrido*, e é útil para simular sistemas de controle digital;
- Se um algoritmo numérico é utilizado para realizar a integração da equação diferencial do sistema analógico, então tem-se o que é chamado de *simulação digital*;
- Existem diversas regras (ou aproximações) para a integração numérica, como a retangular para trás (Euler), retangular para frente, trapezoidal, métodos de Runge-Kutta, etc. Veremos as três primeiras;

Simulação

- Considere um sinal contínuo $e(t)$, como mostrado na figura abaixo.



- A integral pode ser definida como a área embaixo da curva de $y(t)$. Denotaremos a integral de $y(t)$ por $x(t)$. Desta forma, vemos que a área da curva embaixo de $y(t)$ é a área até o instante $k-1$ mais a área hachurada (a qual pode ser aproximada por um retângulo), ou seja:

$$x(k) = x(k-1) + Ty(k-1)$$

Simulação

- Aplicando a transformada-z na equação anterior, tem-se:

$$X(z) = z^{-1}X(z) + Tz^{-1}Y(z) \quad \longrightarrow \quad \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{T}{z-1}$$

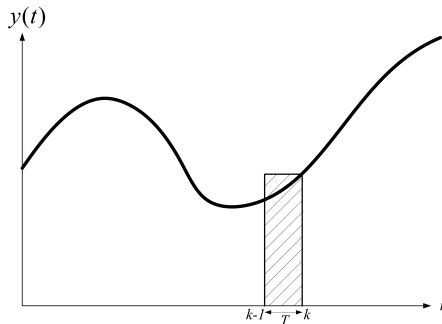
- Desta forma, vemos que uma aproximação numérica para a integral é dada por:

$$\frac{1}{s} \longleftrightarrow \frac{T}{z-1}$$

- Esta aproximação é conhecida como *aproximação retangular para frente* ou *aproximação de Euler*;

Simulação

- Considere um sinal contínuo $e(t)$, como mostrado na figura abaixo.



- A integral pode ser definida como a área embaixo da curva de $y(t)$. Denotaremos a integral de $y(t)$ por $x(t)$. Desta forma, vemos que a área da curva embaixo de $y(t)$ é a área até o instante $k - 1$ mais a área hachurada (a qual pode ser aproximada por um retângulo), ou seja:

$$x(k) = x(k - 1) + Ty(k)$$

Simulação

- Aplicando a transformada-z na equação acima, tem-se:

$$X(z) = z^{-1}X(z) + TY(z) \qquad \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{Tz}{z-1}$$

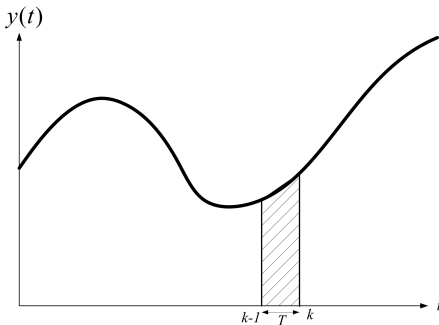
- Desta forma, vemos que uma aproximação numérica para a integral é dada por:

$$\frac{1}{s} \longleftrightarrow \frac{Tz}{z-1}$$

- Esta aproximação é conhecida como *aproximação retangular para trás*;

Simulação

- Considere um sinal contínuo $e(t)$, como mostrado na figura abaixo.



- A integral pode ser definida como a área embaixo da curva de $y(t)$. Denotaremos a integral de $y(t)$ por $x(t)$. Desta forma, vemos que a área da curva embaixo de $y(t)$ é a área até o instante $k-1$ mais a área hachurada (a qual pode ser aproximada por um trapézio), ou seja:

$$x(k) = x(k-1) + \frac{[y(k-1) + y(k)] T}{2}$$

Simulação

- Aplicando a transformada-z na equação acima, tem-se:

$$X(z) = z^{-1} X(z) + \frac{T}{2} (z^{-1} + 1) Y(z) \qquad \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

- Desta forma, vemos que uma aproximação numérica para a integral é dada por:

$$\frac{1}{s} \longleftrightarrow \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$

- Esta aproximação é conhecida como *aproximação trapezoidal*;