ECA602 – Sistemas de Controle

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia Elétrica

Aula 05

Projeto de controladores - Resposta em Frequência

Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado

Notas de Aula – 2016

Compensação analítica

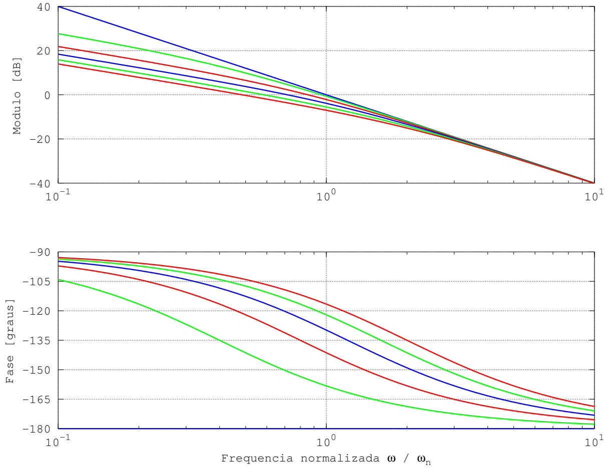
- Para se obter um sistema de 2ª ordem em malha fechada, a função de transferência em malha aberta deve ser dada por (considerando a realimentação unitária):

$$C(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

- Assim, as figuras de mérito definidas para o sistema dinâmico de 2ª ordem serão válidas para quantificar as características da resposta temporal da malha de controle.
- Para o sistema dinâmico em questão, a equação característica vista pelo critério de Bode pode ser expressa por:

$$C(j\omega)G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} = 1\angle -180^\circ$$

Compensação analítica



Compensação analítica

- A frequência de ganho unitário ω_u é definida por:

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2\omega_u^2 + \omega_u^4}} = 1$$

- A qual está relacionada com os parâmetros de um sistema dinâmico de 2ª ordem por:

$$\omega_u = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}$$

- A margem de fase ϕ_m é definida por:

$$\phi_m = 180^\circ + \angle C(j\omega_u)G(j\omega_u)$$

$$\phi_m = 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_u}{2\zeta\omega_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_u}\right)$$

Compensação analítica

- Assim:

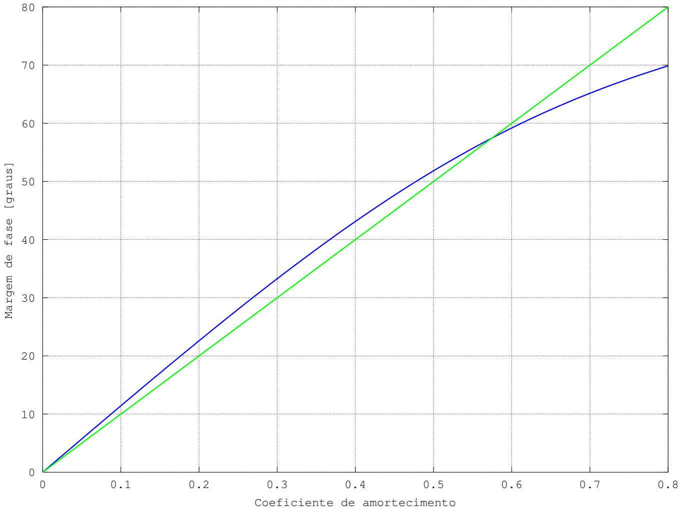
$$\phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}\right) \approx 100\zeta$$

- Note que a margem de fase depende do coeficiente de amortecimento (com uma aproximação linear para $\zeta \leq 0.7$), estando diretamente relacionada com o *overshoot* do sistema dinâmico de 2ª ordem. Já o tempo de acomodação pode ser definido por:

$$\zeta\omega_n = \frac{\omega_u \tan\phi_m}{2}$$

$$T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{8}{\omega_u \tan\phi_m}$$

Compensação analítica



Compensação analítica

- Recordando a **aula 01**, há duas figuras de mérito para a resposta transiente de um sistema de 2ª ordem subamortecido.

$$\textit{overshoot} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

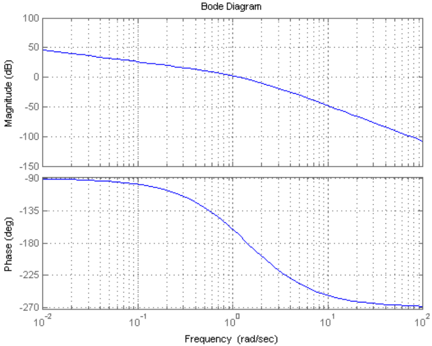
- Em suma, as figuras de mérito no tempo estão relacionadas com a resposta em frequência por:

$$T_A = \frac{8}{\omega_u \tan\phi_m} \qquad \zeta \approx \frac{\phi_m}{100}$$

- Assim, o *overshoot* e o tempo de acomodação podem ser utilizados como as especificações da resposta em frequência. O problema de controle se redefine na utilização de um controlador que faça com que a reposta em frequência tenha uma dada frequência de ganho unitário e uma margem de fase.

Controlador Proporcional

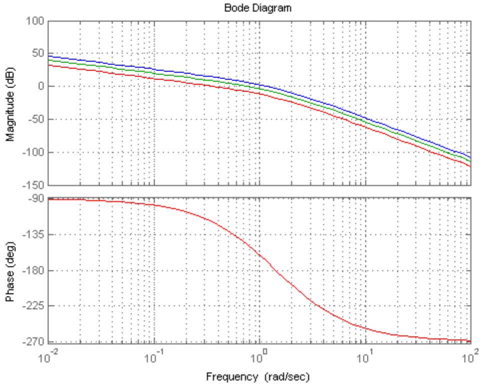
Para um controlador proporcional tem-se o seguinte efeito sobre a resposta em frequência do sistema:



$$\frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

Controlador Proporcional

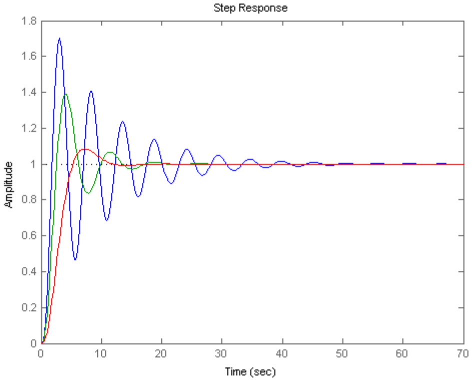
Resposta em frequência do sistema controlado



Kp = 1; Kp = 0,5 e Kp = 0,2

Controlador Proporcional

Resposta temporal do sistema controlado



Kp = 1; Kp = 0,5 e Kp = 0,2

Controlador lead/lag

A equação de um controlador de avanço ou atraso de fase é representada genericamente por

$$\frac{1 + s/\omega_0}{1 + s/\omega_p}$$

O projeto do controlador consiste então em determinar o zero, $-\omega_0$, e o polo - ω_p, de forma que o sistema em malha fechada tenha as características desejadas.
Se $\omega_0 > \omega_p$ o sistema de controle é chamado de atraso de fase. Caso $\omega_0 < \omega_p$ então o sistema é chamado de avanço de fase.

Controlador lead/lag

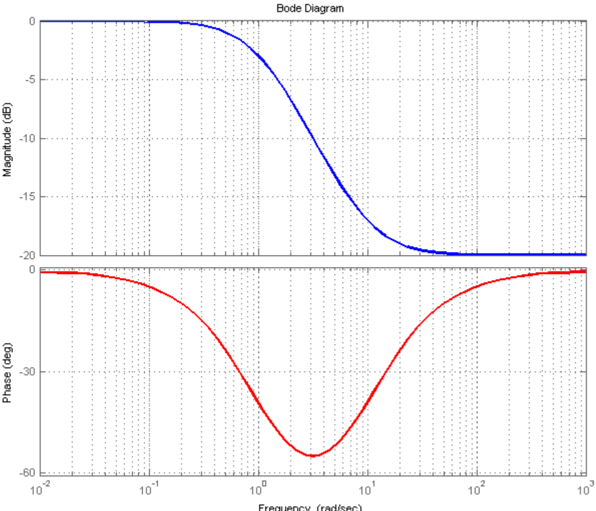
A equação de um controlador de avanço ou atraso de fase é representada genericamente por

$$\frac{1 + s/\omega_0}{1 + s/\omega_p}$$

O projeto do controlador consiste então em determinar o zero, $-\omega_0$, e o polo - ω_p, de forma que o sistema em malha fechada tenha as características desejadas.
Se $\omega_0 > \omega_p$ o sistema de controle é chamado de atraso de fase. Caso $\omega_0 < \omega_p$ então o sistema é chamado de avanço de fase.

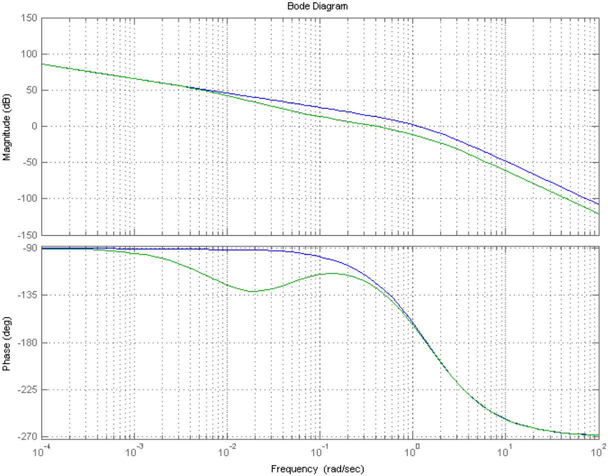
Controlador lead/lag

Para um controlador tipo Lag a resposta em frequência é dada por:



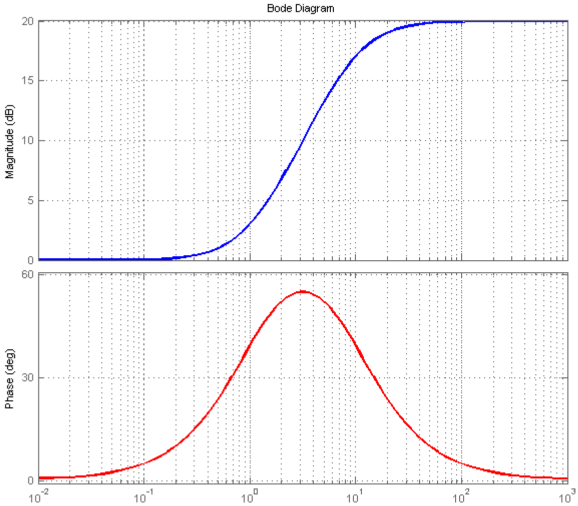
Controlador lead/lag

Para um controlador tipo Lag + planta a resposta em frequência é dada por:



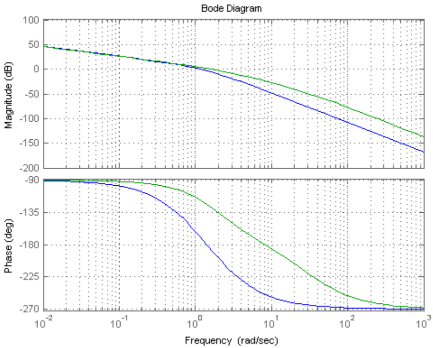
Controlador lead/lag

Para um controlador tipo Lead a resposta em frequência é dada por:



Controlador lead/lag

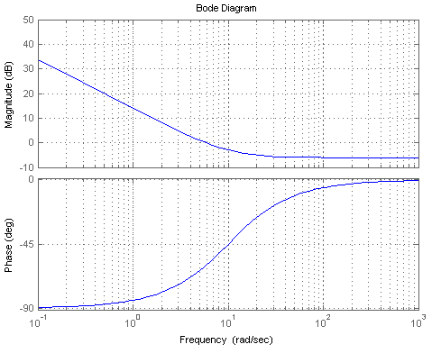
Para um controlador tipo Lead + planta a resposta em frequência é dada por:



Controlador PID / Controlador PI

A equação do controlador PI é dada por

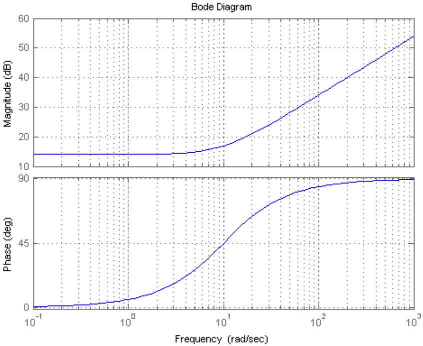
$$C(s) = K_P\text{‘} + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s K_I}{s}$$



Controlador PID / Controlador PD

A equação do controlador PD é dada por

$$C(s) = K_P + K_D s$$



Controlador PID / Compensação analítica

- Para o controlador PID e suas variantes, busca-se os ganhos que fazem com que a frequência de ganho unitário e a margem de fase sejam vistas no diagrama de Bode.

$$\left[K_P + j\left(K_D\omega - \frac{K_I}{\omega}\right)\right] G(j\omega) = -1$$

- As especificações podem ser satisfeitas por três parâmetros, desde que a solução sejam ganhos reais positivos:

$$\theta \triangleq \angle K(j\omega_u) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_u)$$

$$K_P = \frac{\cos\theta}{|G(j\omega_u)|} \qquad K_D\omega_u - \frac{K_I}{\omega_u} = \frac{\sin\theta}{|G(j\omega_u)|}$$

- O controlador altera o tipo do sistema dinâmico em malha aberta, no qual o valor do ganho K_I pode ser adotado.