

Projeto básico de controladores

- Introdução
- Projeto *ad hoc*
- Método Ziegler-Nichols
- Compensação em avanço
- Compensação em atraso

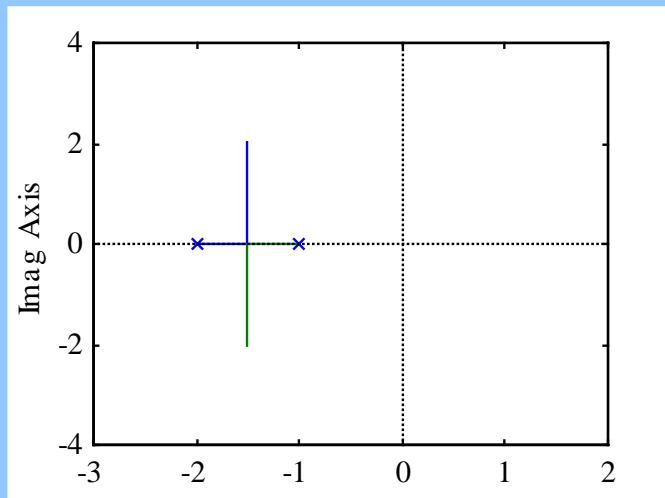
Introdução

- **Controle simples**
- **Um pólo e um zero**
- **Avanço: pólo maior que o zero**
- **Atraso: pólo menor que o zero**
- **Pode ser usado com avanço e atraso simultaneamente**

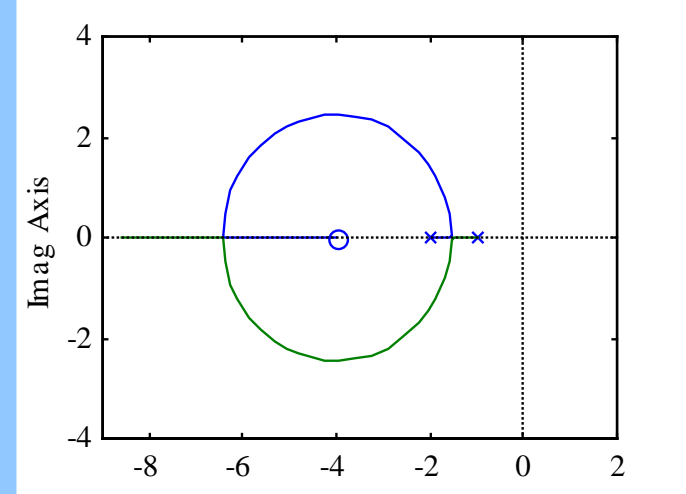
Consequências de acrescentar um zero

- Um zero corresponde a um avanço de 90°

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

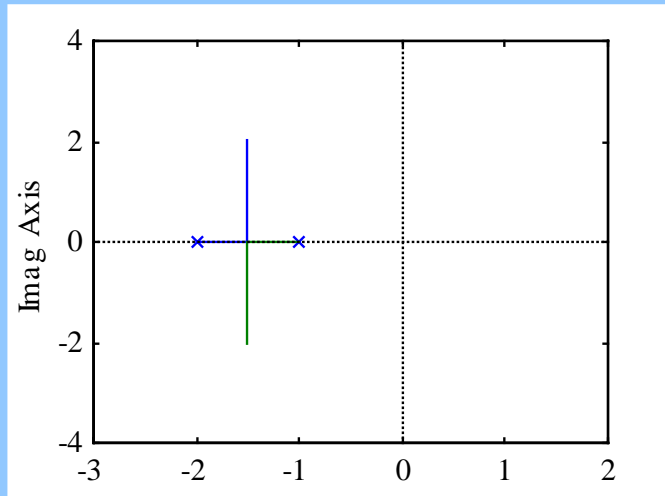


- Ocorreu um aumento da estabilidade

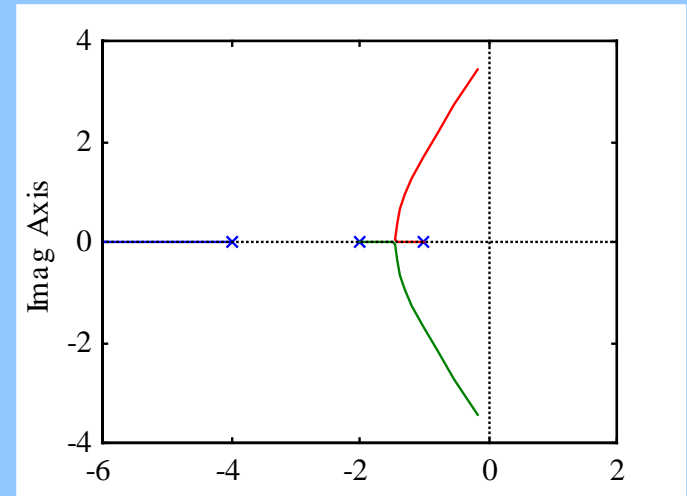
Consequências de acrescentar um pólo

- Um pólo corresponde a um atraso de 90°

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$



- Ocorreu uma diminuição da estabilidade

Compensação simples

O controle chamado de **avanço/atraso** é o mais simples normalmente usado, excetuando o proporcional, mas é bastante versátil. Possui um pólo e um zero, e pode ser configurado para provocar um avanço ou um atraso

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$

- $|z| < |p| \Rightarrow$ avanço
- $|z| > |p| \Rightarrow$ atraso

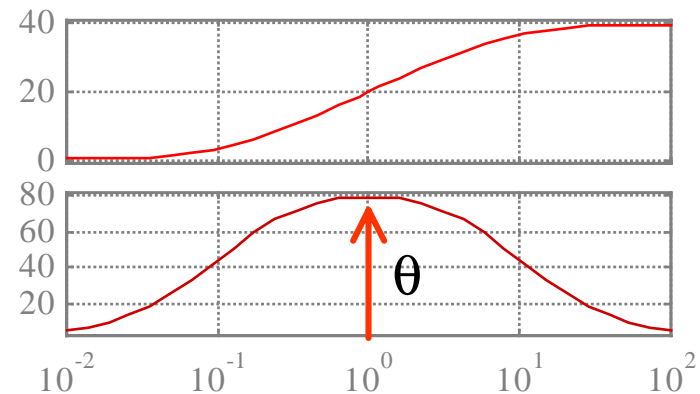
Atua principalmente na margem de fase

Aumento da margem de fase aumenta o amortecimento

Compensação em avanço

Na compensação em avanço o zero é menor que o pólo, em módulo, e corresponde a um passa-alta

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$

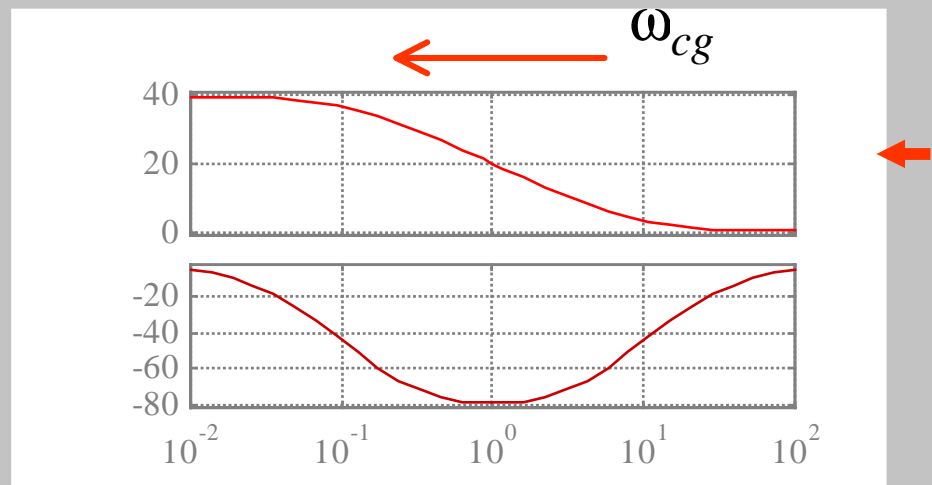


Procura-se somar uma fase na frequência de cruzamento de ganho (que se desloca um pouco)

Compensação em atraso

Na compensação em atraso o pólo é menor que o zero, em módulo, e corresponde a um passa-baixa

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$



Procura-se posicionar a freqüência de cruzamento de ganho na margem de fase desejada (atenua o ganho sem mexer praticamente na fase)

Configuração básica

A função de transferência é normalmente colocada na forma:

$$K(s) = K_c \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$$

Assim, através do ajuste dos três parâmetros acima (α, T, K_c) determina-se a configuração em avanço ou em atraso.

Formulação em avanço

- Função de transferência do controlador

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad |p| > |z|$$

$$K(s) = K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$

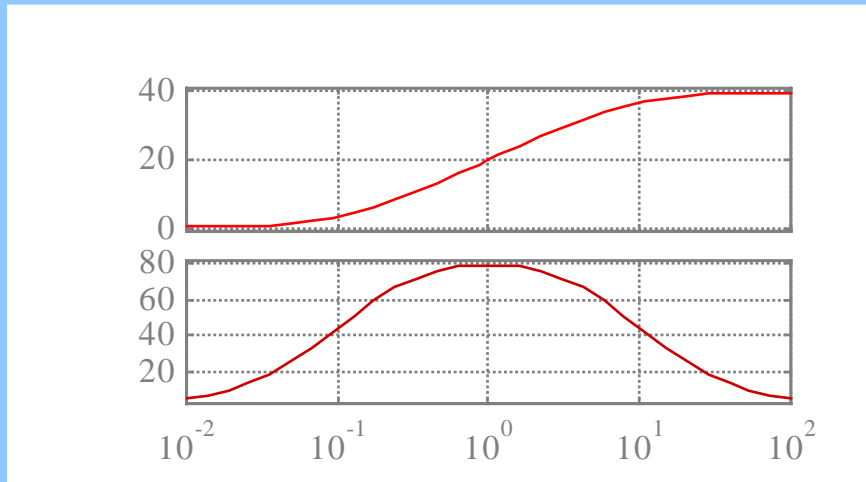
Formulação em atraso

- Função de transferência do controlador

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad |p| < |z|$$

$$K(s) = K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Fórmulas para o projeto em avanço



$$\frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} \quad \alpha > 1$$

$$s = j\omega$$

$$\frac{j\omega\alpha T + 1}{j\omega T + 1} = \frac{(1 + \alpha\omega^2 T^2) + j(\alpha - 1)\omega T}{\omega^2 T^2 + 1}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{(\alpha - 1)\omega T}{1 + \alpha\omega^2 T^2} \right)$$

$$\text{mod} = \frac{\sqrt{(1 + \alpha\omega^2 T^2)^2 + (\alpha - 1)^2 \omega^2 T^2}}{\omega^2 T^2 + 1}$$

Fórmulas para o projeto em avanço

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{(\alpha - 1)\omega T}{1 + \alpha \omega^2 T^2} \right) = 0$$



$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

Substituindo em :

$$\text{mod} = \frac{\sqrt{\left(1 + \alpha \omega^2 T^2\right)^2 + (\alpha - 1)^2 \omega^2 T^2}}{\omega^2 T^2 + 1}$$



$$\text{mod} = \sqrt{\alpha}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{(\alpha - 1)\omega T}{1 + \alpha \omega^2 T^2} \right)$$



$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} \right)$$

Rearranjando :

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

$$A_m = 10 \log \alpha$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_{fcg}}$$

Fórmulas para o projeto em avanço

- São necessárias três fórmulas. Encontrados ϕ e depois ω_{cg} dos diagramas de Bode, calculam-se:

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

$$A_m = 10 \log \alpha$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_{fcg}}$$

Metodologia geral

- **Considerando que o erro estacionário depende do valor do ganho estático da planta em malha aberta, o primeiro passo (independente de compensação em avanço ou atraso) é a determinação do ganho estático do controlador para satisfazer o erro estacionário**
- **Usar os diagramas de Bode para avaliar qual vai ser o novo ponto de cruzamento de ganho, onde determina-se a margem de fase, de modo a compensar o ganho neste ponto**
- **Através do ganho do controlador, pode-se fazer com que ele tenha ganho estático de 0 dB e apresente a margem de fase desejada.**

Metodologia para o projeto em avanço

- Determinar o ganho estático para satisfazer o erro estacionário, usando a constante de erro.
- Traçar o diagrama de Bode (função de malha aberta) incluindo o ganho estático do controlador.
- Achar a frequência de cruzamento de ganho no gráfico e determinar o ângulo ϕ da margem de fase
- Encontrar o valor de α .
- Encontrar o valor do ganho A_m e a frequência correspondente com ganho $-A_m$ no diagrama da amplitude. Esse ponto corresponde ao futuro cruzamento de ganho.
- Encontrar o valor de T . (Concluído o projeto.)
- Confirmar o desempenho através dos diagramas de Bode (e de Nyquist) de $K(s)P(s)$.
- Calcular a FT de malha fechada e os gráficos finais.

Metodologia para o projeto em avanço

- Determinar o ganho estático para satisfazer o erro estacionário (dado especificado), usando a constante de erro.

FT controlador

$$K(s) = K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

FT planta

$$P(s)$$

FTMA controlador+planta

$$G(s) = K(s)P(s)$$

calcula-se

$$K_c$$

O erro estacionário de malha fechada com realimentação unitária em função da malha aberta $G(s)$ depende das constantes de erro

especificado

$$\bullet \quad KC = \dots i$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

degrau

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)]$$

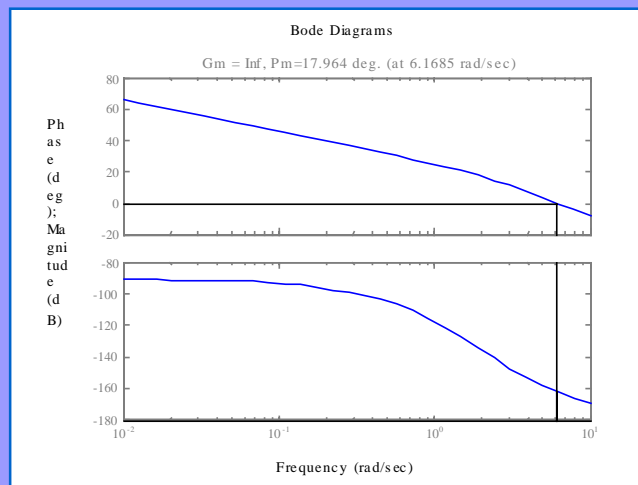
rampa

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 G(s)]$$

parábola

Metodologia para o projeto em avanço

- Traçar o diagrama de Bode de malha aberta incluindo o ganho estático do controlador.



```
np= ... ;  
dp= ... ;  
syskcp=tf(Kc*np,dp) ;  
margin(syskcp) ;
```

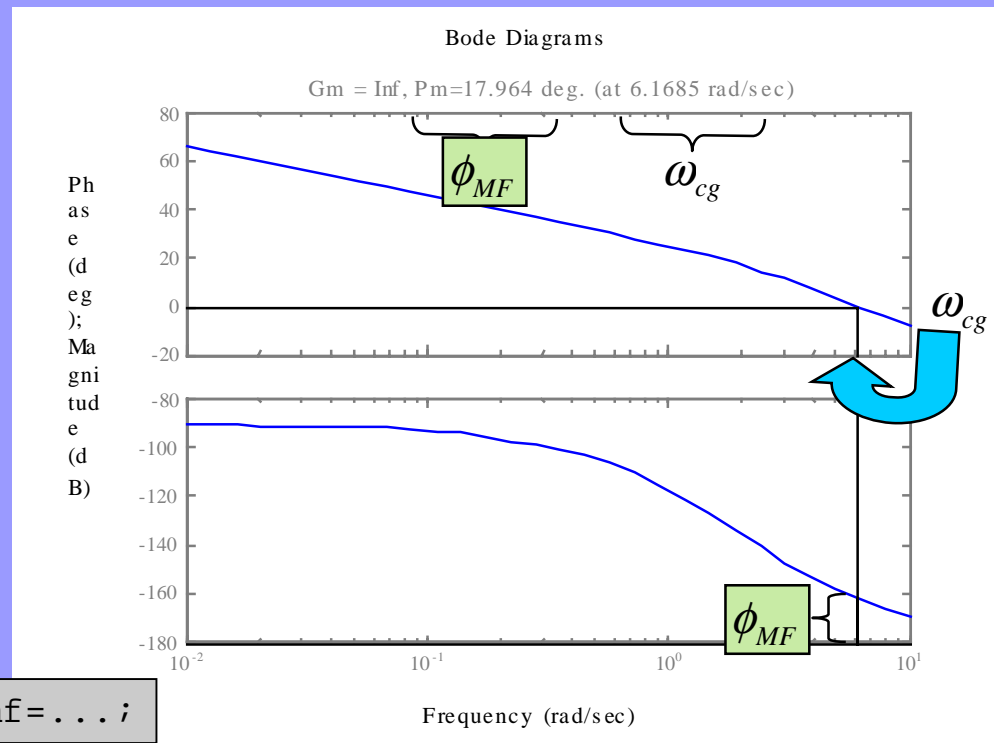
$$G'(s) = K_c \frac{N(s)}{D(s)}$$



margin

Metodologia para o projeto em avanço

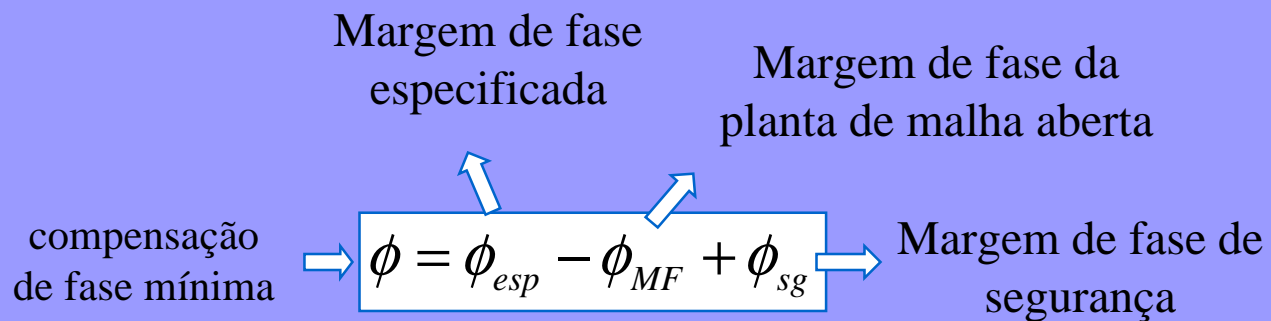
- Achar a frequência de cruzamento de ganho ω_{cg} do gráfico acima e determinar o ângulo ϕ na margem de fase.



• `phimf=...;`

Metodologia para o projeto em avanço

- Dada a margem de fase desejada, encontrar o valor de α



$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

calcula-se



α

- `phiesp=...;`
- `phiseg=...;`
- `phi=(phiesp-phimf+phiseg)*pi/180 ;`
- `alpha=(1+sin(phi))/(1-sin(phi));`

Metodologia para o projeto em avanço

- Encontrar o valor do ganho A_m e a frequência ω_{fcg} correspondente com ganho $-A_m$ no diagrama da amplitude. Esse ponto corresponde ao futuro cruzamento de ganho.

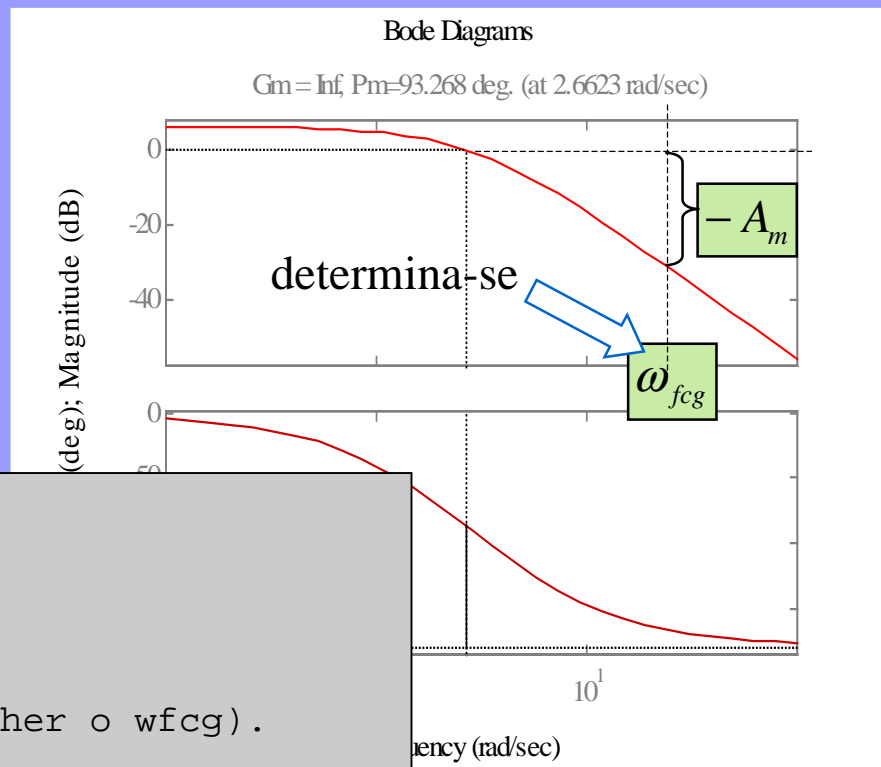
α



$$A_m = 10 \log \alpha$$



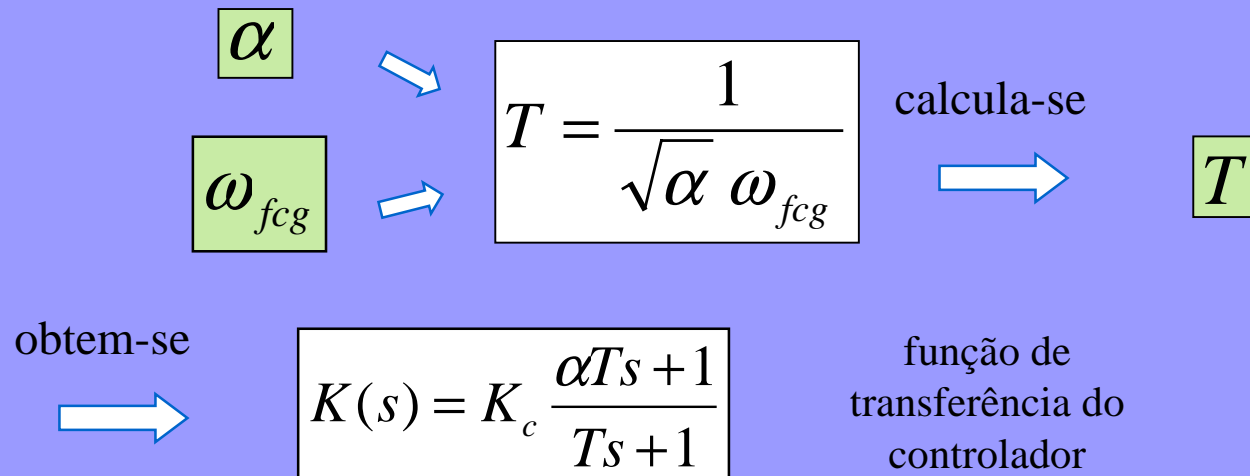
ω_{fcg}



- `am=-10*log10(alpha)`
- `zoom`
- `pause`
- `ginput`
- `%(tabela para escolher o wfcg).`
- `wfcg=...;`

Metodologia para o projeto em avanço

- Encontrar o valor de T . Fechado o projeto.



- $T = 1 / (\text{sqrt}(\alpha) * \omega_{fcg}) ;$
- $nk = K_c * [\alpha * T \ 1] ;$
- $dk = [T \ 1] ;$

Metodologia para o projeto em avanço

- Confirmar o desempenho através dos diagramas de margens (e de Nyquist) de $K(s)P(s)$

```
np= ...;  
dp= ...;  
nma=conv(nk,np);  
dma=conv(dk,dp);  
  
sysp=tf(np,dp);  
syskcp=tf(Kc*np,dp);  
syskap=tf(nma,dma);  
  
figure(1)  
margin(syskap);
```

```
w=linspace(0,2*pi,100);  
ejw=exp(j*w);  
re=real(ejw);  
im=imag(ejw);  
figure(2)  
plot(re,im), hold  
[r i]=nyquist(sysp);  
r1(1,:)=r(1,1,:);  
i1(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r1,i1,'-b')  
[r i]=nyquist(syskcp);  
r2(1,:)=r(1,1,:);  
i2(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r2,i2,'-g')  
[r i]=nyquist(syskap);  
r3(1,:)=r(1,1,:);  
i3(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r2,i2,'-k'), grid  
zoom
```

Metodologia para o projeto em avanço

- **Calcular a FT de malha fechada e os gráficos finais.**

```
● nmf=nma;  
● nmaa=[0... nma];  
● dmf=dma+nmaa;  
● sysmf=tf(nmf,dmf);
```

```
● %resposta ao degrau  
● step(sysmf);
```

```
● %resposta a rampa  
● t=0:0.1:10;  
● u=t;  
● lsim(sysmf,u,t);
```

Exemplo 20.1: Projeto em avanço

Para a planta cuja função de transferência está abaixo, determine a função de transferência de um compensador em avanço para que o erro estacionário na resposta à rampa unitária seja inferior a 5 %, e a margem de fase seja pelo menos 45°.

$$P(s) = \frac{2}{s(s + 2)}$$

Exemplo 20.1 - Solução:

- Determinar o ganho estático para satisfazer o erro estacionário (dado especificado), usando a constante de erro.


FT controlador


$$K(s) = K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

FT planta

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+2)}$$

$$e_{est} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)]} = 0.05$$


$$e_{est} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [sK(s)P(s)]} = 0.05$$


$$e_{est} = \frac{1}{K_c} = 0.05$$

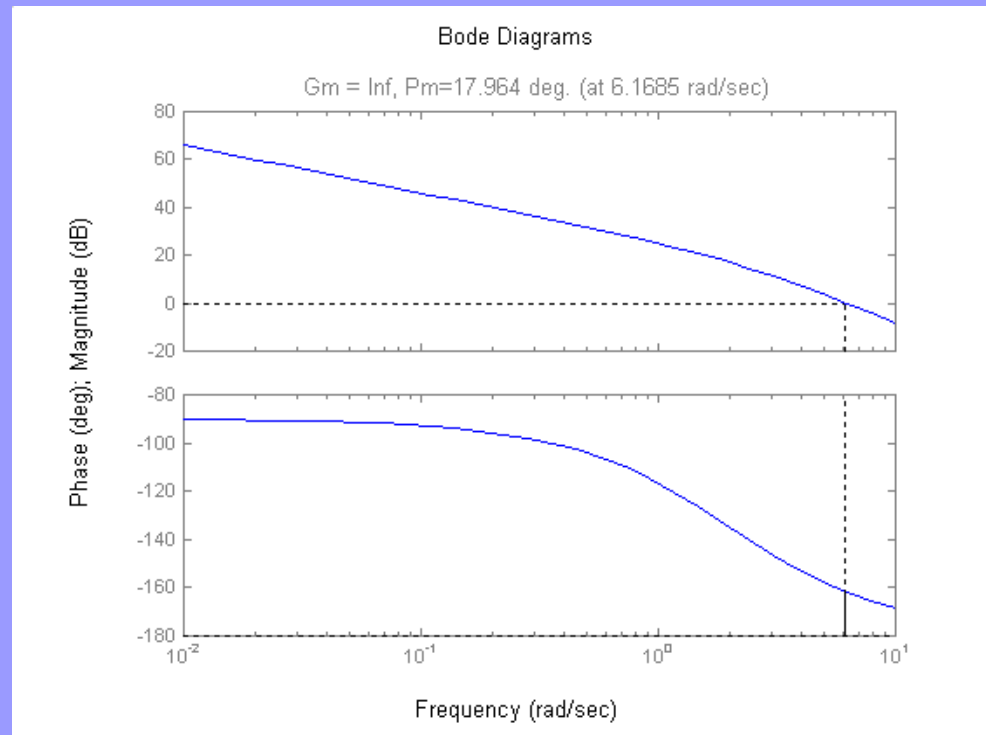
$$K_c = 20$$

kc=20;

Exemplo 20.1 - Solução:

- Traça o diagrama de Bode de malha aberta incluindo o ganho estático do controlador.

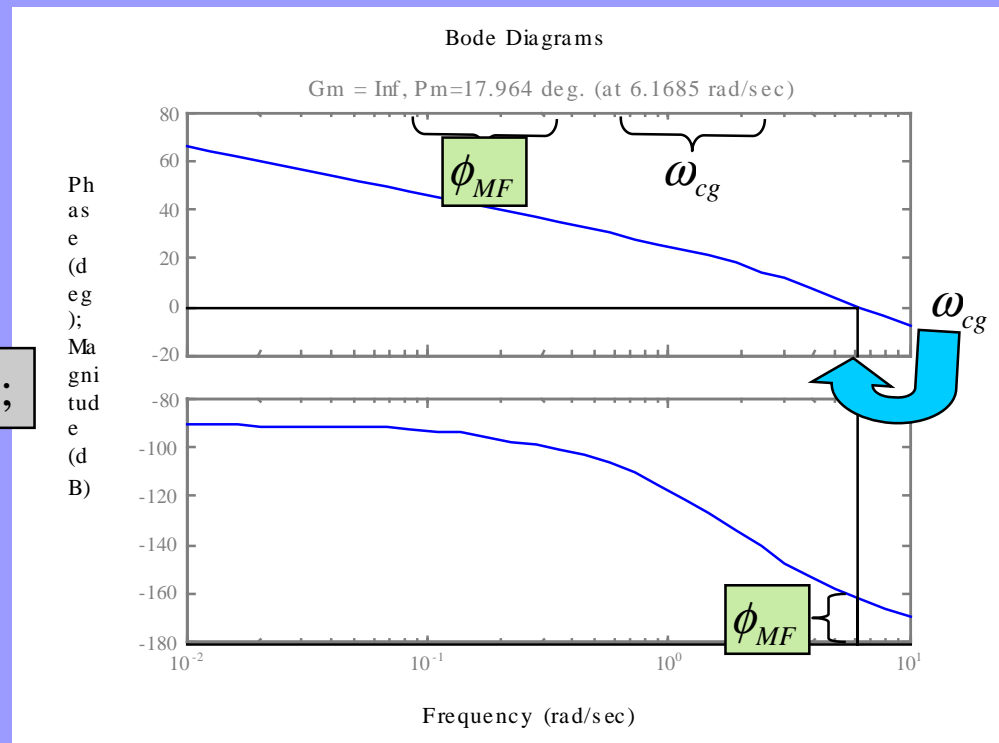
```
kc=20;  
np=2;  
dp=[1 2 0];  
margin(kc*np,dp);
```



Exemplo 20.1 - Solução:

- Achar a frequência de cruzamento de ganho ω_{cg} do gráfico acima e determinar o ângulo ϕ na margem de fase.

```
margin(kc*np,dp);
```



Exemplo 20.1 - Solução:

- Encontra o valor de α .

$$\phi = \phi_{esp} - \phi_{mf} + \phi_{sg}$$

$$\phi = 45 - 18 + 5 = 32$$



$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$



$$\alpha = 3.3$$

- `phiesp=...;`
- `phiseg=...;`
- `phi= phiesp-phimf+phiseg ;`
- `alpha=(1+sin(phi))/(1-sin(phi));`

Exemplo 20.1 - Solução:

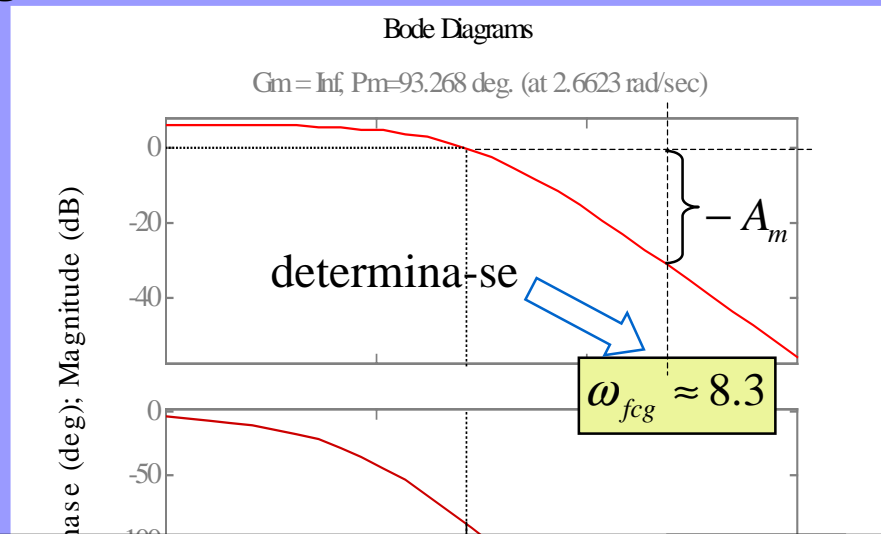
- Encontrar o valor do ganho A_m e a frequência ω_{cg} correspondente com ganho $-A_m$ no diagrama da amplitude. Esse ponto corresponde ao futuro cruzamento de ganho.

α



$$A_m = 10 \log \alpha$$

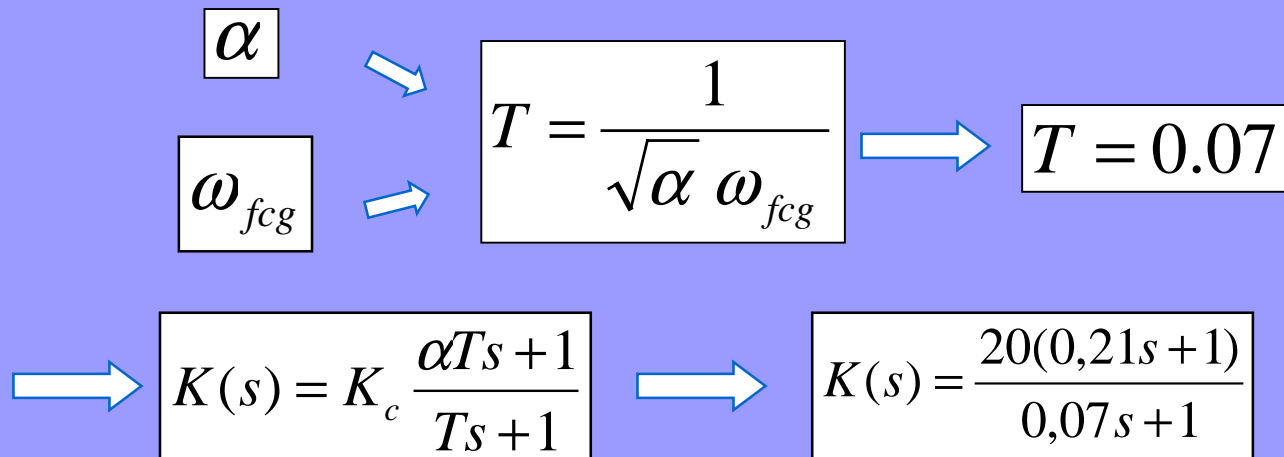
$$A_m = 5.12$$



```
w=linspace(0.1,10,500);  
[mag fase]=bode(np,dp,w);  
for i=find((20*log10(mag) <= -Am+1) & (20*log10(mag) >=-Am-1))  
    disp([fase(i) 20*log10(mag(i)) w(i)'])  
end
```

Exemplo 20.1 - Solução:

- Encontra o valor de **T**. Fechado o projeto.

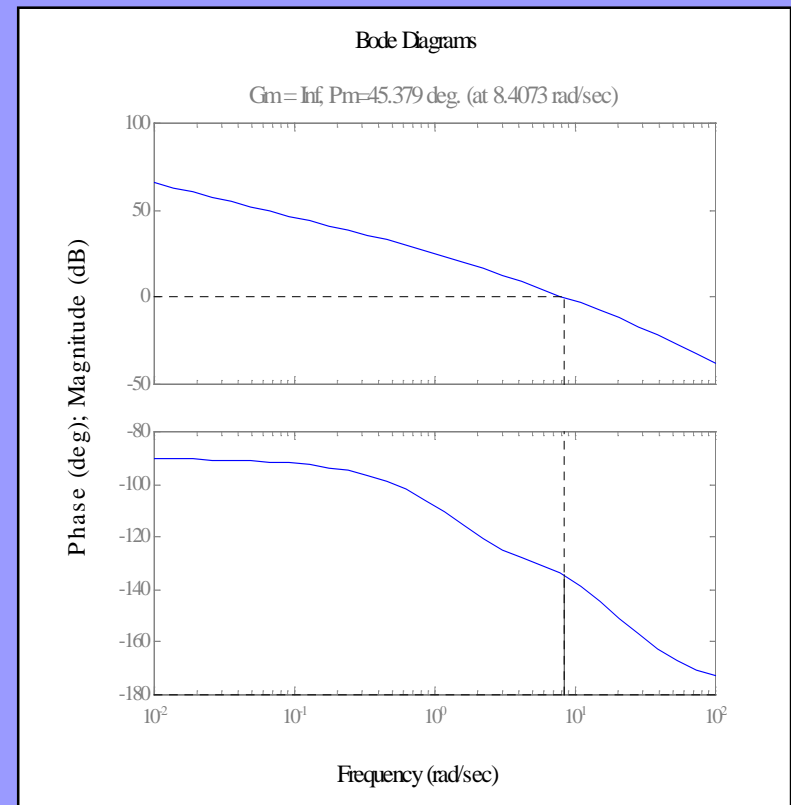


- $T = 1 / (\text{sqrt}(\alpha) * \omega_{fcg}) ;$
- $nk = Kc * [\alpha * T \ 1] ;$
- $dk = [T \ 1] ;$

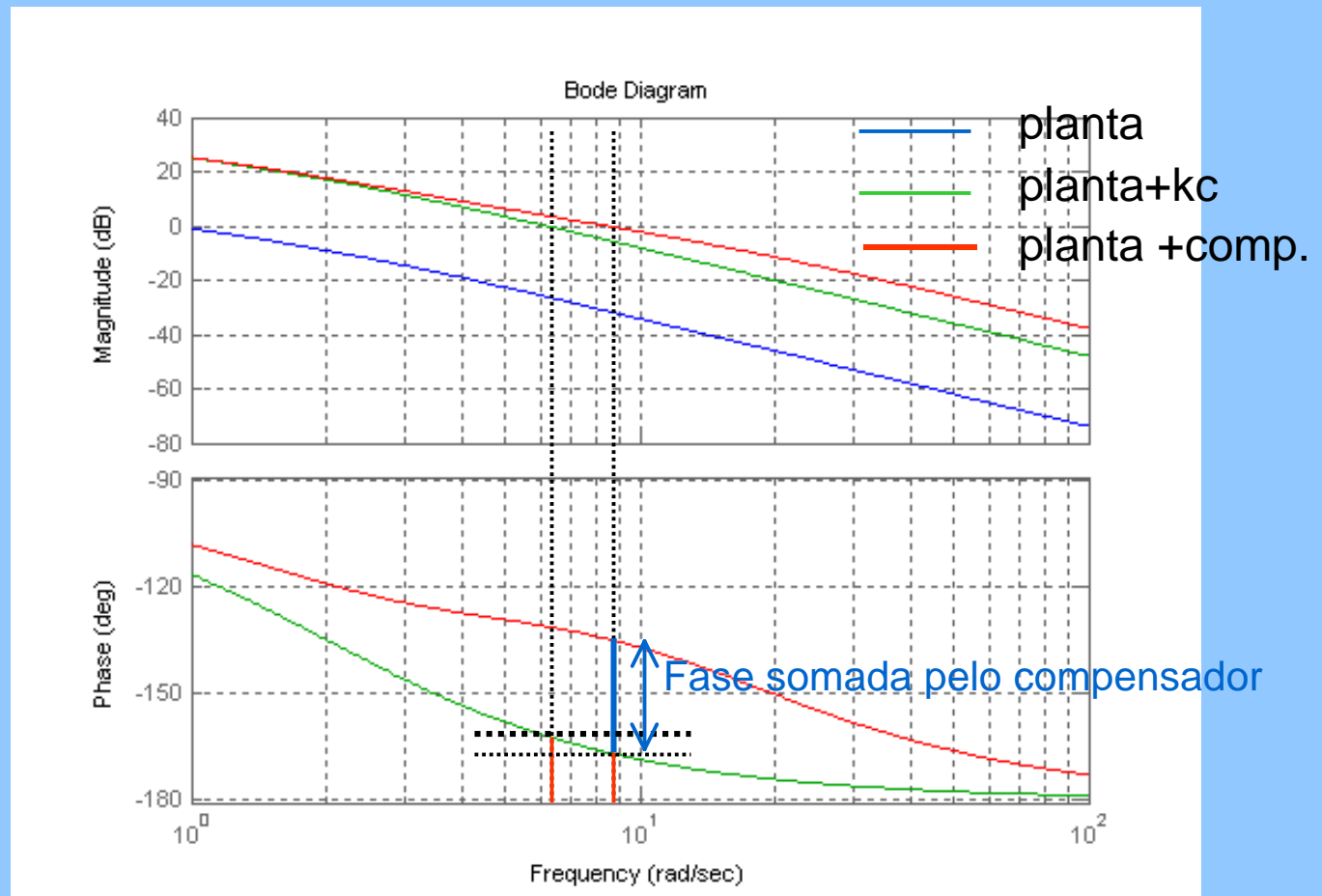
Exemplo 20.1 - Solução:

- Confirma o desempenho através dos diagramas de Bode (e de Nyquist) de $K(s)P(s)$.

```
np=2;  
dp=[1 2 0];  
kc=20;  
phi=(45+5-18)*pi/180;  
alfa=(1+sin(phi))/(1-sin(phi));  
Am=10*log10(alfa);  
wcg=8.3;  
T=1/(sqrt(alfa)*wcg);  
nk=kc*[alfa*T 1];  
dk=[T 1];  
nma=conv(nk,np);  
dma=conv(dk,dp);  
sysp=tf(np,dp);  
syskcp=tf(kc*np,dp);  
syskap=tf(nma,dma);  
figure(1)  
margin(syskap);  
w=linspace(0,2*pi,100);  
figure(2)  
bode(np,dp,w), hold on  
bode(kc*np,dp,w)  
bode(nma,dma,w), hold off
```



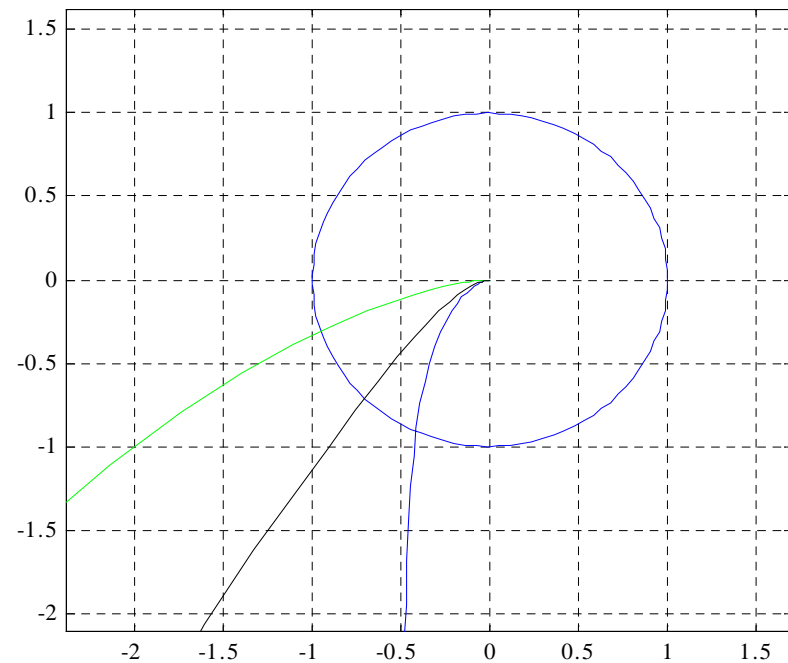
Exemplo 20.1-Solução: Efeito do compensador



Exemplo 20.1 - Solução:

- Confirmar o desempenho através dos diagramas de Bode (e de Nyquist) de $K(s)P(s)$.

```
ejw=exp(j*w);  
re=real(ejw);  
im=imag(ejw);  
figure(3)  
plot(re,im),axis equal, hold on  
[r i]=nyquist(sysp);  
r1(1,:)=r(1,1,:);  
i1(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r1,i1,'-b')  
[r i]=nyquist(syskcp);  
r2(1,:)=r(1,1,:);  
i2(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r2,i2,'-g')  
[r i]=nyquist(syskap);  
r2(1,:)=r(1,1,:);  
i2(1,:)=i(1,1,:);  
plot(r2,i2,'-k'), grid, hold off  
zoom
```



Exemplo 20.1 - Solução:

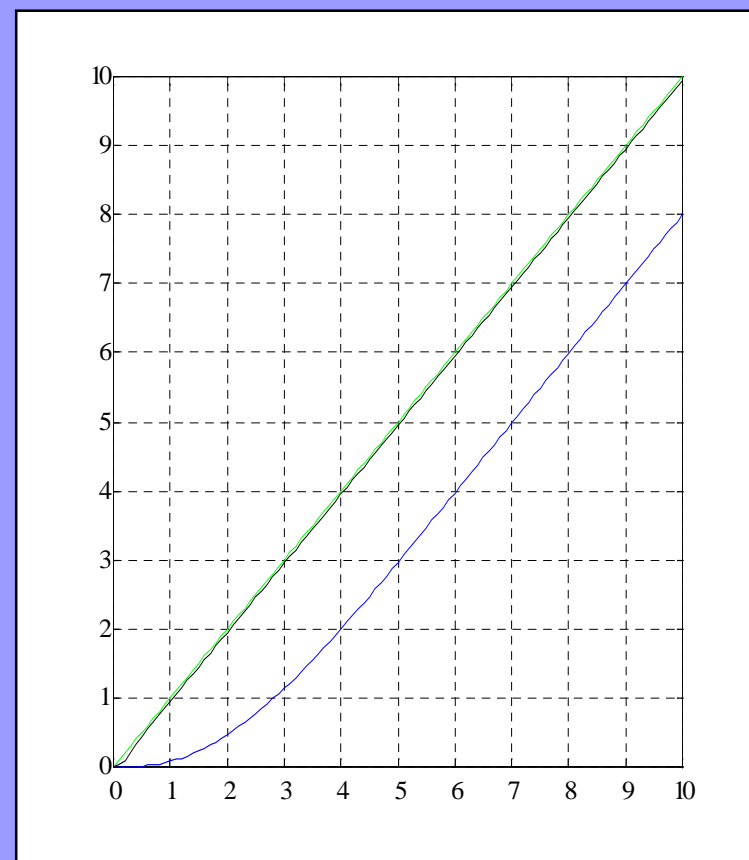
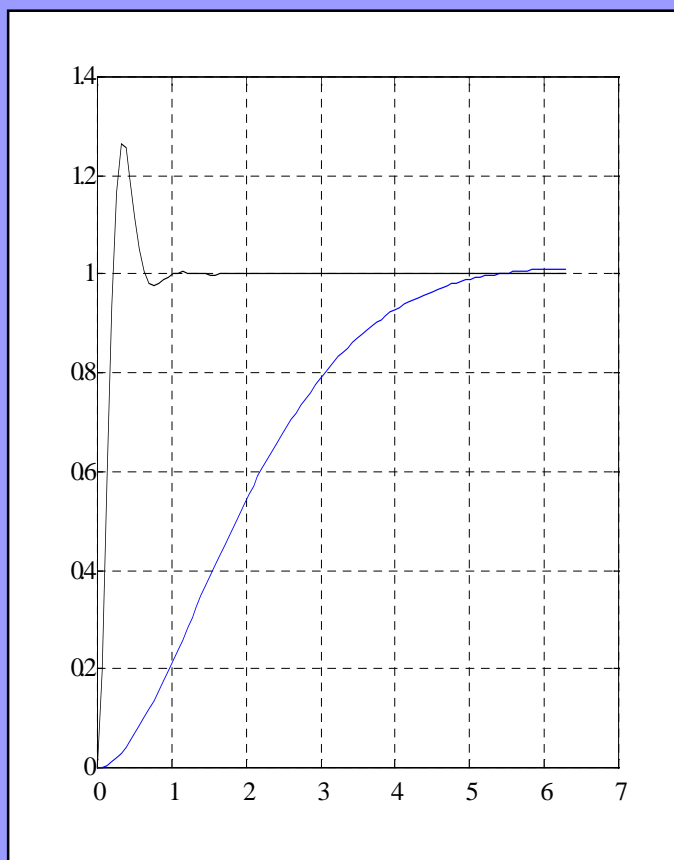
- **Calcular a FT de malha fechada e os gráficos finais.**

```
● nmaa=[0 0 nma]
● nmfkap=nma;
● dmfkap=dma+nmaa;
● sysmfkap=tf(nmfkap,dmfkap)
● nmfp=np;
● dmfp=dp+np;
● sysmfp=tf(nmfp,dmfp)

● %resposta ao degrau
● figure(4)
● [y1 t1]=step(sysmfp,w);
● [y2 t2]=step(sysmfkap,w);
● plot(t1,y1,'-b'),hold on
● plot(t2,y2,'-k')
● grid,hold off
```

```
● %resposta a rampa
● figure(5)
● t=0:0.1:10;
● u=t;
● plot(t,u,'-g'), hold on
● [y1 t1]=lsim(sysmfp,u,t);
● [y2 t2]=lsim(sysmfkap,u,t);
● plot(t1,y1,'-b')
● plot(t2,y2,'-k')
● grid, hold off
```

Exemplo 20.1 - Solução:



Exercício 20.1: Projetos propostos

Considerando a planta abaixo, projete um compensador avanço, atraso ou PID, para que o erro estacionário na resposta ao degrau seja de 1 %, o PSS menor que 10 % e o tempo de estabilização menor que 5 segundos.

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Características básicas

- **A compensação por avanço de fase atua principalmente no regime transitório, mas também acarreta consequências no estacionário (geralmente é preferível).**
- **A compensação por atraso de fase atua principalmente no regime estacionário, porém aumentando em geral o tempo de estabilização (o sistema em MF fica mais lento).**
- **O ganho estático é usado para assegurar uma resposta em baixa frequência adequada: ajusta o erro estacionário**

Características da configuração avanço

- **É usada para assegurar:**
 - **A velocidade de resposta: ajusta a frequência de cruzamento de ganho (aumenta a banda de passagem)**
 - **Margens de estabilidade especificadas**

Características da configuração atraso

- **É usada para assegurar:**
 - **Uma redução no ganho estático da planta**
 - **A velocidade de resposta, diminuindo a frequência de cruzamento de ganho (diminui a banda de passagem)**
 - **Margem de fase**

Exercício 20.2: Projetos propostos

Considerando a planta abaixo, projete um compensador em avanço e um PID para que o erro estacionário na resposta à rampa seja de 1 %, e a margem de fase seja de 45°.

$$P(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+20)}$$