ECA706 - Sistemas de Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá

Engenharia Elétrica

Aula 04

Sistemas a Tempo Discreto em Malha Fechada

Prof. Jeremias Barbosa Machado
jeremias@unifei.edu.br

18 de maio de 2020

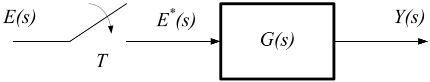
Determinando Funções em Malha Aberta

- Na aula anterior, vimos que o sinal de saída $Y(s)$ da malha aberta com um amostrador ideal é:

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \ ;$$

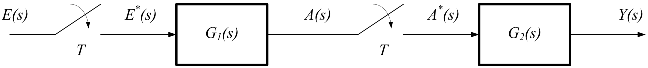
- Determinamos, então, a transformada estrela da saída $Y^*(s)$ e vimos que:

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s) \quad \longrightarrow \quad Y(z) = G(z)E(z) \ ;$$



Determinando Funções em Malha Aberta

- Para uma malha como descrita pela figura a seguir, qual deveria ser a transformada estrela do sinal de saída $Y^*(s)$?



- Determinando primeiro o sinal $A^*(s)$, tem-se:

$$A(s) = G_1(s)E^*(s)$$

Aplicando a transformada estrela na equação acima, tem-se:

$$A^*(s) = {G_1}^*(s)E^*(s) \quad \longrightarrow \quad A(z) = G_1(z)E(z) \ ;$$

- Derivando agora o sinal $Y^*(s)$, tem-se:

$$Y(s) = G_2(s)A^*(s)$$

Aplicando a transformada estrela na equação acima, tem-se:

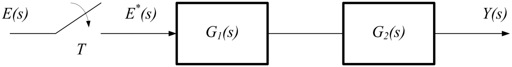
$$Y^*(s) = {G_2}^*(s)A^*(s) \quad \longrightarrow \quad Y(z) = G_2(z)A(z) \ ;$$

- Finalmente, vemos que:

$$Y(z) = G_2(z)G_1(z)E(z) \ .$$

Determinando Funções em Malha Aberta

- Agora considere a malha a seguir:



- Para determinar $Y^*(s)$, tem-se:

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)E^*(s)$$

Aplicando a transformada estrela na equação acima, tem-se:

$$Y^*(s) = [G_2(s)G_1(s)]^* \, E^*(s)$$

Logo:

$$Y(z) = \overline{G_2G_1}(z)E(z) \ ,$$

onde a barra sobre o produto acima indica que o produto deve ser feito primeiro em s antes da transformada-Z ser empregada.

Determinando Funções em Malha Aberta

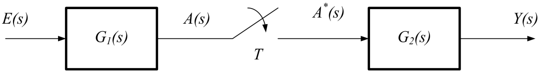
- Comparando este sistema com o anterior, fica claro que são malhas diferentes, e portanto concluímos que

$$\overline{G_2G_1}(z) \neq G_1(z)G_2(z) \ ,$$

  ou seja, a transformada-Z de um produto de funções não é o produto das transformadas-Z de cada função separadamente;
- Sem perda de generalidade, considere que $G_2(s) = G(s)$, ou seja, a planta numa malha de controle, e que $G_1(s) = K(s)$, ou seja, o controlador. Isso nos diz que não podemos simplesmente fazer o projeto do compensador no domínio contínuo e após isso discretizá-lo, esperando o mesmo desempenho que no domínio contínuo!;
- No entanto, pode-se fazer a análise da malha contínua sob o ponto de vista discreto, considerando $G(s)K(s)$ como apenas um bloco só;

Determinando Funções em Malha Aberta

- Agora considere a malha a seguir:



- Para determinar $Y^*(s)$, tem-se:

$$Y(s) = G_2(s)A^*(s) \ ,$$

e

$$A(s) = G_1(s)E(s) \ ;$$

- A transformada estrela de $A(s)$ é:

$$A^*(s) = \overline{G_1E}^*(s) \ ,$$

e portanto:

$$Y^*(s) = {G_2}^*(s)\overline{G_1E}^*(s) \ ;$$

Determinando Funções em Malha Aberta

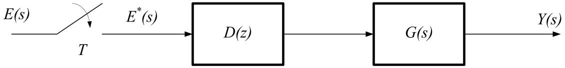
- Finalmente, tem-se que:

$$Y(z) = G_2(z)\overline{G_1E}(z) \ ;$$

- Para este sistema não é possível determinar uma função de transferência, uma vez que não conseguimos fatorar $E(z)$ fora de $\overline{G_1E}(z)$. Em geral, quando a entrada de um sistema a dados amostrados é aplicada diretamente a uma parte contínua deste sistema antes de ser amostrada, não é possível expressar a transformada-Z do sinal de saída diretamente em função da transformada-Z do sinal de entrada!

Determinando Funções em Malha Aberta

- Agora vamos considerar o caso em que a malha apresenta um filtro digital $D(z)$:



- Para determinar $Y^*(s)$, tem-se:

$$Y(s) = G(s)D(z)E^*(s)$$

- Por definição, podemos escrever $D(z) = D^*(s)$, logo:

$$Y(s) = G(s)\underbrace{D^*(s)E^*(s)}_{A^*(s)} = G(s)A^*(s) \; ;$$

- Logo, tem-se que:

$$Y^* = G^*(s)A^*(s) \quad \longrightarrow \quad Y(z) = G(z)A(z) \; ;$$

- Como $A(z) = D(z)E(z)$, finalmente tem-se que:

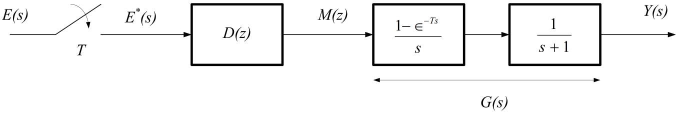
$$Y(z) = G(z)D(z)E(z) \; .$$

Determinando Funções em Malha Aberta

- Esta última malha é grande interesse para nós, uma vez que o amostrador representa o conversor A/D, o filtro digital representará o bloco controlador discreto e $G(s)$ contém o retentor de ordem zero, que representa o conversor D/A.

Exemplo 4.1

Encontre a função de transferência $L(z) = Y(z)/E(z)$ do seguinte sistema a dados amostrados, na qual o filtro $D(z)$ é descrito pela seguinte equação à diferenças: $m(k) = 2e(k) - e(k-1)$.



Determinando Funções em Malha Aberta

Resolução Exemplo 4.1

- Determinando $G(z)$ primeiro:

$$G(s) = (1 - \epsilon^{-Ts})\frac{1}{s(s+1)}$$

Através da tabela de transformada-Z:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\frac{z\left(1-\epsilon^{-T}\right)}{(z-1)\left(z-\epsilon^{-T}\right)} = \frac{1-\epsilon^{-T}}{z-\epsilon^{-T}}$$

- Determinando $D(z)$:

$$m(k) = 2e(k) - e(k-1)$$

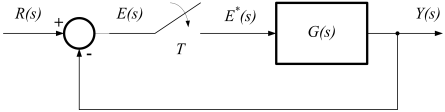
$$M(z) = 2E(z) - z^{-1}E(z) = E(z)\left(2 - z^{-1}\right) \longrightarrow \frac{M(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{2z-1}{z}$$

- Finalmente, sabendo que $Y(z) = G(z)D(z)E(z)$, tem-se:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = L(z) = G(z)D(z) = \frac{(2z-1)\left(1-\epsilon^{-T}\right)}{z\left(z-\epsilon^{-T}\right)}$$

Determinando Funções em Malha Fechada

- As funções de malha fechada podem ser encontradas utilizando-se o mesmo procedimento para as funções em malha aberta, tomando-se os devidos cuidados já vistos nos casos;
- Considere o seguinte sistema a dados amostrados em malha fechada:



- O sinal de erro $E(s)$ é dado por:

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

- Tomando a transformada estrela da equação acima, tem-se:

$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s)$$

- No entanto, sabemos que $Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$, logo:

$$E^*(s) = R^*(s) - G^*(s)E^*(s)$$

- Logo, tem-se que:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + G^*(s)} R^*(s) \quad \longrightarrow \quad E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z)$$

Determinando Funções em Malha Fechada

- Resolvendo para $Y(z)$, tem-se:

$$\frac{Y^*(s)}{G^*(s)} = \frac{1}{1+G^*(s)} R^*(s)$$

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)}{1+G^*(s)} R^*(s)$$

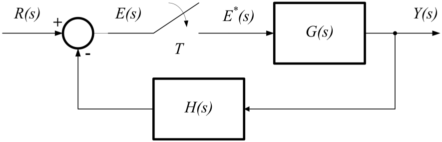
- Logo, tem-se:

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z)$$

- Neste sistema, aplicamos a transformada estrela na equação do erro diretamente porque uma vez que não há nenhuma função na realimentação;

Determinando Funções em Malha Fechada

- Considere o seguinte sistema a dados amostrados em malha fechada:



- O sinal de erro $E(s)$ é dado por:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

- Tomando a transformada estrela da equação acima, tem-se:

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{HY}^*(s)$$

- No entanto, sabemos que $Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$, logo:

$$Y^*(s) = G^*(s)\left(R^*(s) - \overline{HY}^*(s)\right)$$

$$Y^*(s) = G^*(s)R^*(s) - G^*(s)\overline{HY}^*(s)$$

- Na equação acima, a menos que $H(s)$ seja uma constante, é impossível fatorar $Y^*(s)$ fora de $\overline{HY}^*(s)$!

Determinando Funções em Malha Fechada

- Isso pode ser facilmente resolvido se substituirmos $Y(s) = G(s)E^*(s)$ na equação do erro $E(s)$ e tomarmos então a transformada estrela:

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{HG}^*(s)E^*(s)$$

- Então, teremos:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + \overline{HG}^*(s)} R^*(s)$$

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + \overline{HG}^*(s)} R^*(s)$$

- E, por consequência:

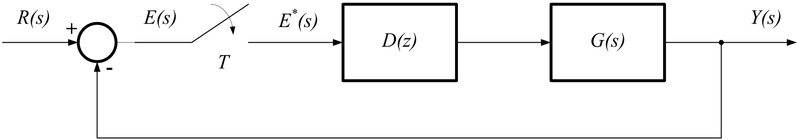
$$E(z) = \frac{1}{1 + \overline{HG}(z)} R(z)$$

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + \overline{HG}(z)} R(z) \ .$$

Determinando Funções em Malha Fechada

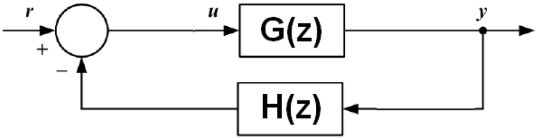
Exemplo 4.2

Encontre $E(z)/R(z)$ e $Y(z)/R(z)$ do sistema a dados amostrados em malha fechada dada pela figura a seguir.



Determinando Funções em Malha Fechada

- Considere o seguinte sistema discreto em malha fechada



- O sinal de saída $Y(z)$ é dado por:

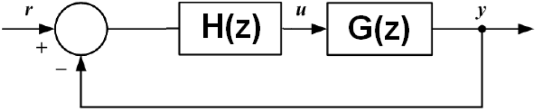
$$Y(z) = G(z)(R(z) - H(z)Y(z))$$

- Isolando-se os termos $R(z)$ e $Y(z)$, tem-se que:

$$\frac{Y(z)}{R(Z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Determinando Funções em Malha Fechada

- Considere o seguinte sistema discreto em malha fechada



- O sinal de saída $Y(z)$ é dado por:

$$Y(z) = G(z)H(z)E(z)$$

- com $E(z)$ dado por

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

- Substituindo-se $E(z)$ e isolando-se os termos $R(z)$ e $Y(z)$, tem-se que:

$$\frac{Y(z)}{R(Z)} = \frac{H(z)G(z)}{1 + H(z)G(z)}$$