ECA706 - Sistemas de Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá

Engenharia Elétrica

Aula 07

Alocação de Polos e Observadores de Estado

Prof. Jeremias Barbosa Machado
jeremias@unifei.edu.br
23 de junho de 2020

Introdução

- Como vimos na aula anterior, o projeto de compensadores discretos baseado em modelos dados através de funções de transferência é, de certa forma, limitado, uma vez que apenas uma informação (saída) do sistema é realimentada. Intuitivamente, se houvesse a realimentação de mais informações sobre o sistema, um resultado melhor poderia ser obtido;
- As *variáveis de estado* representam o conjunto mínimo de informação que é necessário para determinar, juntamente com as entradas, os estados futuros e as saídas de um determinado sistema dinâmico;
- O *espaço de estados* é o espaço n-dimensional cujos eixos são as n variáveis de estado de um sistema;
- Todos os métodos de análise e projeto que envolvem um sistema discreto modelado através de variáveis de estado é conhecido como *Controle Moderno*, embora seja datado de décadas passadas. Veremos nesta aula como obter modelos em variáveis de estado discreto, análise de estabilidade e a compensação mais simples que envolve o modelo em variáveis de estado: a alocação de polos.

Modelos em Variáveis de Estado

- A equação que descreve os estados de um sistema dinâmico discreto em qualquer tempo $(k+1)$ é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)\right] \ ,$$

  sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ o vetor de entradas do sistema dinâmico;

- Já a equação que descreve a saída $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ do sistema dinâmico em qualquer tempo k é

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}\left[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)\right] \ ;$$

- Se o sistema dinâmico discreto é linear, as equações se reduzem a

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \ ,$$

  onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ são matrizes que variam com o tempo k;

Modelos em Variáveis de Estado

- Finalmente, se o sistema dinâmico discreto é linear e invariante no tempo, então as equações são

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \ ,$$

- Se o sistema for do tipo SISO (entrada única e saída única), então temos

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \ ,$$

  já que $p = r = 1$;

- Modelar um sistema dinâmico discreto em variáveis de estado não é convencional. Geralmente, o modelo em variáveis de estado é obtido das seguintes formas:
  - A partir da equação à diferenças que rege o sistema;
  - A partir do modelo em função de transferência discreta (domínio z) - formas canônicas;
  - A partir do modelo em variáveis de estado contínuas;

Modelos em Variáveis de Estado

- Para obter o modelo em variáveis de estado a partir da equação à diferenças, é necessário que não haja instantes de tempo superiores à k para a entrada $u(k)$. Com isto, fazemos

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_1(k+1) = x_2(k) &= y(k+1) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) &= y(k+n-1) \end{aligned} \tag{4}$$

- Finalmente, temos

$$x_n(k+1) = y(k+n) = -a_{n-1}y(k+n-1) - a_{n-2}y(k+n-2) - \ldots - a_1 y(k+1) - a_0 y(k) + b_0 u(k)$$

$$x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \ldots - a_{n-2} x_{n-1}(k) - a_{n-1} x_n + b_0 u(k) \ ;$$

- Logo:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

Modelos em Variáveis de Estado

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Exemplo 8.1

Encontre um modelo em variáveis de estado para o sistema descrito pela seguinte equação à diferenças:

$$y(k+2) - 1,7y(k+1) + 0,72y(k) = u(k)$$

Modelos em Variáveis de Estado

- Os diagramas de simulação (diagrama de blocos) podem ser elaborados da mesma forma que para sistemas contínuos, substituindo-se o bloco padrão integrador pelo bloco T (atraso puro de tempo). Em funções de transferência no domínio z o bloco atraso de tempo é substituído por z^{-1};
- Os diagramas são facilmente construídos a partir das equações de estado do sistema e vice-versa. O objetivo principal é, dada uma função de transferência, obter um diagrama de simulação que a represente, e então obter um modelo em variáveis de estado;
- Derivar as equações de estado a partir da equação à diferenças que rege o sistema nem sempre é uma tarefa fácil, pois as substituições não são tão triviais quando a variável de entrada depende do tempo futuro $k + n$. No entanto, para uma função de transferência discreta é possível construir dois diagramas de simulação "especiais", os quais podem então ter uma representação em variáveis de estado simples de se obter. Tais diagramas são a forma canônica controlável e a forma canônica observável;

Modelos em Variáveis de Estado

Exemplo 8.2

Obter o diagrama de simulação do sistema do exemplo 8.1.

Exemplo 8.3

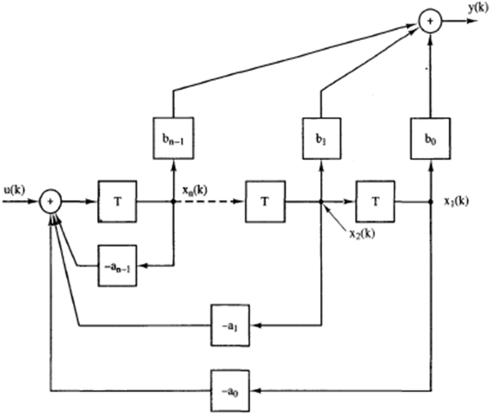
Obter o diagrama de simulação do sistema multivariável discreto descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Modelos em Variáveis de Estado

- Forma canônica controlável:



$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

Modelos em Variáveis de Estado

- Do diagrama de simulação da forma canônica controlável é possivel inferir que um modelo em variáveis de estado que represente o sistema é:

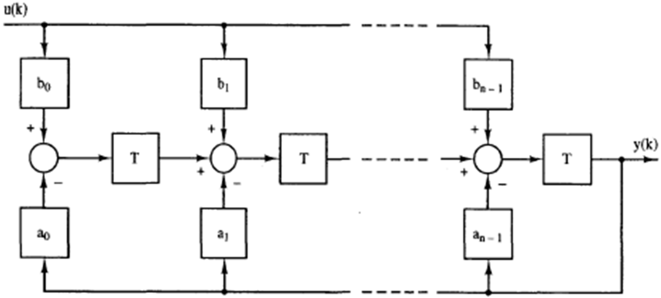
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

- Um sistema representado através das equações de estado deste tipo é controlável uma vez que, como veremos adiante, a controlabilidade de estados é garantida para esta representação.

Modelos em Variáveis de Estado

- Forma canônica observável:



$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

Modelos em Variáveis de Estado

- Do diagrama de simulação da forma canônica observável é possível inferir que um modelo em variáveis de estado que represente o sistema é:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

- Um sistema representado através das equações de estado deste tipo é observável uma vez que, como veremos adiante, a observabilidade de estados é garantida para esta representação.

Modelos em Variáveis de Estado

- Derivar os modelos em variáveis de estado a partir da função de transferência embora seja um procedimento simples tem duas limitações: a primeira é que os estados naturais de um determinado sistema físico, como tensão no capacitor, posição angular, etc., são perdidos, isto é, as variáveis de estado resultantes nem sempre possuem possuem significado físico. O segundo é que para sistemas de ordem elevada, encontrar uma função de transferência discreta nem sempre é possível;
- Vamos então ver um procedimento no qual é possível derivar um modelo discreto em variáveis de estado a partir do modelo contínuo em variáveis de estado;
- Para iniciar, considere e equação de estados de um sistema dinâmico SISO LTI contínuo

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_c u(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e resolvendo para $\mathbf{V}(s)$, temos

$$\mathbf{V}(s) = (\mathbf{I}s - \mathbf{A}_c)^{-1}\,\mathbf{v}(0) + (\mathbf{I}s - \mathbf{A}_c)^{-1}\,\mathbf{B}_c U(s) \ ;$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{\Phi}_c(t)\mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}_c u(\tau)d\tau \ ,$$

onde $\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(\mathbf{I}s - \mathbf{A}_c)^{-1}\right\}$ é conhecida como *matriz de transição de estados.*

Modelos em Variáveis de Estado

- Embora $\mathbf{\Phi}(t)$ possa ser calculada a partir da definição, outra forma de se obtê-la é a partir de

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}_c t + {\mathbf{A}_c}^2 \frac{t^2}{2!} + {\mathbf{A}_c}^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} {\mathbf{A}_c}^i \frac{t^i}{i!} \;;$$

- Assumindo que $t = kT + T$ e que $u(t)$ é a saída de um retentor de ordem zero, é possível provar que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_c(T)$$

$$\mathbf{B} = \left(\int_0^T \mathbf{\Phi}_c(\tau) d\tau \right) \mathbf{B}_c$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c \;;$$

- Alternativamente, a matriz $\mathbf{B}$ pode ser aproximada para

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{I}T + {\mathbf{A}_c}^2 \frac{T^2}{2!} + {\mathbf{A}_c}^3 \frac{T^3}{3!} + \ldots \right) \mathbf{B}_c \;.$$

Modelos em Variáveis de Estado

Exemplo 8.4

Um servomotor possui o seguinte modelo em variáveis de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \ ,$$

no qual $x_1(t)$ é a posição angular e $x_2(t)$ é a velocidade angular. Obtenha um modelo em variáveis de estado discretas para $T = 0,1$ s.

Modelos em Variáveis de Estado

- Considere a representação no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \;;$$

- Aplicando a transformada-z (com condições iniciais nulas) na equação de estado, temos:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\mathbf{U}(z) \;;$$

- Aplicando a transformada-z na equação de saída e substituindo $X(z)$ anterior nela, finalmente temos:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z)$$

$$\frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{G}(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D} \;.$$

Modelos em Variáveis de Estado

- Sabemos que para converter um sistema dinâmico discreto representado através de variáveis de estado em função de transferência utilizamos a seguinte equação

$$G(z) = \mathbf{C}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\ .$$

- Considere que a matriz $\mathbf{D}$ é nula (necessário para que o sistema seja estritamente próprio e, portanto, fisicamente real). Sabendo que a inversa de uma matriz pode ser decomposta da seguinte forma

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{X})}\ ,$$

  onde adj é a matriz adjunta (matriz de cofatores transposta), então podemos escrever a função de transferência da seguinte forma

$$G(z) = \frac{\mathbf{C}\ \mathrm{adj}\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{B}}{\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)}\ .$$

- No entanto, $\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$ são os autovalores (valores característicos) da matriz $\mathbf{A}$. Logo, conclui-se que *os polos da função de transferência $G(z)$ são iguais aos autovalores da matriz $\mathbf{A}$*;
- Desta forma, para analisar a estabilidade de um sistema discreto representado através de variáveis de estado, basta analisar os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ e analisar as mesmas condições de estabilidade dos polos de um sistema representado através de função de transferência.

Modelos em Variáveis de Estado

- Sabemos que um sistema dinâmico discreto pode apresentar infinitas representações em espaço de estados, bastando aplicar uma **transformação de similaridade** em um modelo em variáveis de estado qualquer. Considere, por exemplo, que foi aplicada uma transformação linear

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\mathbf{w}(k) \ ,$$

onde $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constante;

- Com isto, o modelo em variáveis de estado pode ser reescrito como

$$\mathbf{T}\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{w}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{w}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \ ,$$

- Multiplicando a equação de estados por $\mathbf{T}^{-1}$, temos

$$\mathbf{w}(k+1) = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{w}(k) + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{C}}}\mathbf{w}(k) + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}}\mathbf{u}(k) \ ;$$

- Desta forma, qualquer transformação linear $\mathbf{T}$ cuja inversa existe pode gerar um novo modelo em variáveis de estado.

Modelos em Variáveis de Estado

Algumas propriedades da transformação de similaridade:

- $|z\mathbf{I}-\mathbf{A}| = |z\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{A}}|$. Esta propriedade mostra que os valores característicos da matriz $\mathbf{A}$ não são alterados. Como veremos á frente, esta é uma propriedade importante para estabilidade;
- $|\mathbf{A}| = |\tilde{\mathbf{A}}|$, Uma vez que o determinante de $\mathbf{A}$ é o produto dos valores característicos e eles não se alteram;
- $\mathrm{tr}\ \mathbf{A} = \mathrm{tr}\ \tilde{\mathbf{A}}$, uma vez que o traço de $\mathbf{A}$ são a soma dos valores característicos;
- $\mathbf{C}\left(z\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{C}}\left(z\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}+\tilde{\mathbf{D}}$.

A última propriedade mostra que, embora existam infinitas representações de um mesmo sistema em variáveis de estado, a representação em função de transferência deste sistema é **única**.

Modelos em Variáveis de Estado

- **Definição:** um sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

  é dito *controlável* (ou de estados controláveis) se existe uma sequência de vetores de entrada $\mathbf{u}(k)$ ($\mathbf{u}(0)$, $\mathbf{u}(1)$, $\mathbf{u}(2)$, ..., $\mathbf{u}(N)$) que transfira o estado inicial do sistema $\mathbf{x}(0)$ para qualquer estado final $\mathbf{x}(N)$ com N finito;
- Um teste para determinar a controlabilidade de um sistema é verificar se o posto da matriz formada por

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} ,$$

  onde n é a ordem (número de estados) do sistema, possui posto completo, ou seja, possui posto igual a n. A matriz $\mathbf{M}_c$ é conhecida como *Matriz de Controlabilidade*;
- Para um sistema SISO, a matriz $\mathbf{B}$ é um vetor coluna, $\mathbf{M}_c$ por consequência é uma matriz quadrada e então o teste pode ser modificado para

$$\det(\mathbf{M}_c) \neq 0 ,$$

  ou seja, o determinante de $\mathbf{M}_c$ não pode ser nulo (garantindo que sua inversa exista);
- A controlabilidade tem papel importante na alocação de polos.

Modelos em Variáveis de Estado

- **Definição:** um sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

é dito *observável* (ou de estados observáveis) se o estado inicial $\mathbf{x}(0)$, sendo qualquer $\mathbf{x}(0)$, pode ser plenamente determinado através de uma sequência de medições do vetor de saída $\mathbf{y}(k)$ $\mathbf{u}(k)$ ($\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$, ..., $\mathbf{y}(N)$) com N finito;

- Um teste para determinar a observabilidade de um sistema é verificar se o posto da matriz formada por

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA}^2 & \ldots & \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^T ,$$

onde n é a ordem (número de estados) do sistema, possui posto completo, ou seja, possui posto igual a n. A matriz $\mathbf{M}_o$ é conhecida como *Matriz de Observabilidade*;

- Para um sistema SISO, a matriz $\mathbf{C}$ é um vetor linha, $\mathbf{M}_o$ por consequência é uma matriz quadrada e então o teste pode ser modificado para

$$\det(\mathbf{M}_o) \neq 0 ,$$

ou seja, o determinante de $\mathbf{M}_o$ não pode ser nulo (garantindo que sua inversa exista);

- A observabilidade tem papel importante no projeto de observadores de estado.

Modelos em Variáveis de Estado

Exemplo 8.5

Teste a controlabilidade e a observabilidade do seguinte sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ -1 & 0,8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \ .$$

Alocação de Polos

- Considere um sistema dinâmico SISO representado através do modelo em variáveis de estado discretas

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \ ;$$

- Suponha que a lei de controle

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

é aplicada a este sistema. Então a equação de estado em malha fechada é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$$

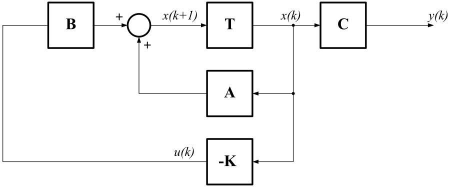
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\,\mathbf{x}(k) \ ;$$

- Os polos em malha fechada são os autolavores de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. Logo, é possível escolher os valores do vetor $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ \ldots \ K_n]$ de forma que os polos em malha fechada sejam iguais a polos especificados

$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\right) = (z - z_1)\,(z - z_2)\ldots(z - z_n) \ .$$

Alocação de Polos

- O sistema em malha fechada irá ter seus polos impostos arbitrariamente na posição desejada no plano complexo. Com isto, diz-se que há uma *alocação* ou posicionamento de polos;



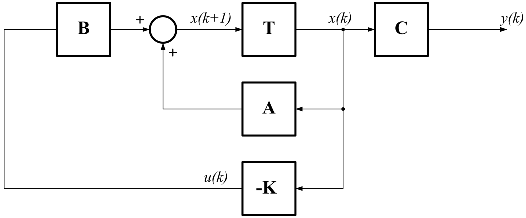
- Se o sistema é controlável, então os polos podem ser alocados em qualquer local do plano complexo. Embora isto teoricamente seja possível para um sistema controlável, alocar os polos em determinadas regiões do plano complexo que possuam características muito distantes das naturais de um sistema fará com que o sinal de controle gerado seja muito grande, acarretando problemas para a malha de controle (saturação de atuadores, etc). Desta forma, ao escolher os polos a serem alocados devemos nos atentar se eles fisicamente são compatíveis com o sistema físico;
- Podemos dividir a alocação de polos em três objetivos: sistemas reguladores (sem referência de entrada), sistemas servomecanismos (com referência de entrada) sem ação integral e sistemas servomecanismos (com referência de entrada) com ação integral.

Alocação de Polos

- Sistemas reguladores são aqueles nos quais não há uma entrada de referência, e o objetivo do controle é manter a saída $y(k)$ num determinado ponto de equilíbrio em face de perturbações externas. Exemplos: sistema de suspensão ativa e alguns tipos de pêndulos;
- Para sistemas deste tipo a lei de controle continua sendo

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \ ,$$

e a o diagrama de blocos do sistema também se mantém.



Alocação de Polos

Exemplo 8.6

Faça o projeto da alocação de polos de um sistema regulador cujo modelo em variáveis de estado discretas é

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,00484 \\ 0,0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \ ,$$

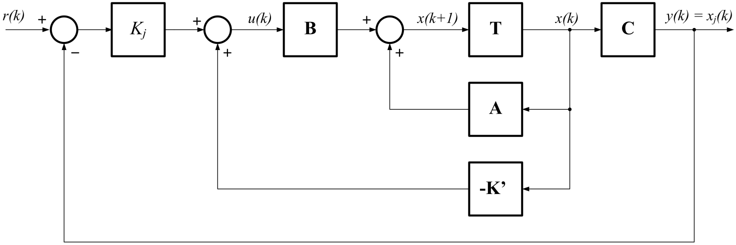
as raízes da equação característica devem ser $z^2 - 1,776z + 0,819$. Sabendo que o tempo de amostragem é $T = 0,1$ s, determine o desempenho esperado para este sistema em malha fechada. Desenhe o diagrama de blocos do sistema de controle resultante.

Alocação de Polos

- Em muitos sistemas de controle é desejado que a saída y siga, ou rastreie, uma determinada entrada que chamamos de referência r. Classicamente tais problemas de controle são chamados de *servomecanismos*, em alusão a uma das primeiras aplicações de sistemas de controle: controle de posição e velocidade com servomotor.
- Para sistemas deste tipo a lei de controle deve ser modificada para

$$u(k) = K_j e(k) - \mathbf{K}'\mathbf{x}'(k) \ ,$$

onde o erro é $e(k) = r(k) - y(k)$ e a saída $y(k) = x_j(k)$, ou seja, uma determinada variável de estado. O vetor $\mathbf{x}'(k)$ contém todas as variáveis de estado menos $x_j(k)$ e o vetor $\mathbf{K}'$ contém todos os ganhos da alocação menos o ganho K_j. O diagrama de blocos deste sistema é



Alocação de Polos

Exemplo 8.7

Faça o projeto da alocação de polos de um sistema servomecanismo (com entrada de referência) cujo modelo em variáveis de estado discretas é

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,00484 \\ 0,0952 \end{bmatrix} u(k)$$

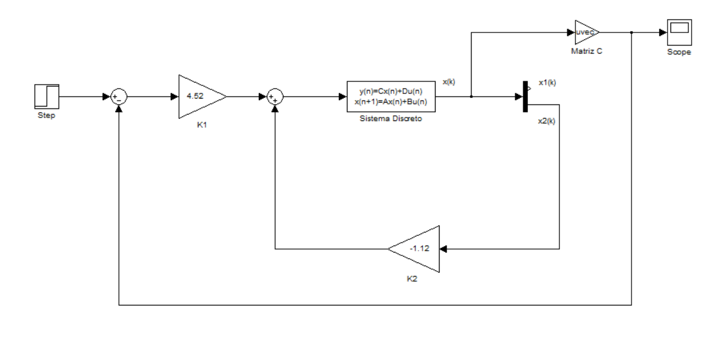
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \ ,$$

as raízes da equação característica devem ser $z^2 - 1,776z + 0,819$. Desenhe o diagrama de blocos do sistema de controle resultante. Dado: $T = 0,1$ s.

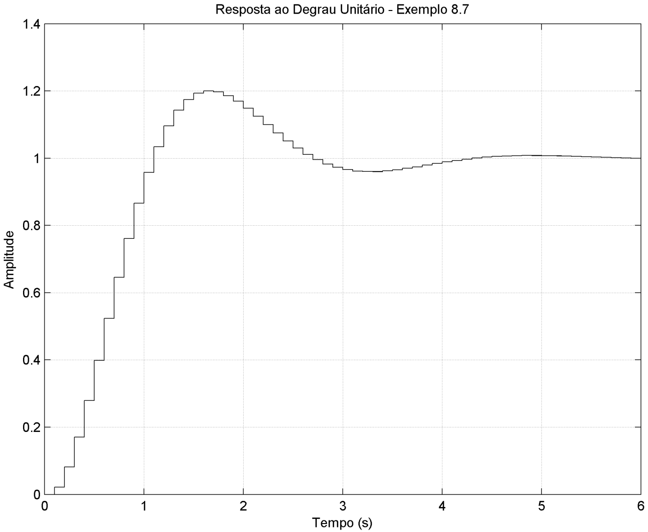
Modelos em Variáveis de Estado

Resolução do Exemplo 8.7

- Do exemplo anterior, $K = [4,52 \quad 1,12]$;
- Da equação de saída, vemos que $y(k) = x_1(k)$;
- Lei de controle: $u(k) = 4,52e(k) - 1,12x_2(k)$;
- Diagrama de Blocos (em Simulink):



Alocação de Polos



Alocação de Polos

- Em sistemas em que não há polo na origem é necessário realizar uma expansão na origem (z = 1) de forma a garantir a rastreabilidade do sinal de referência:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -TC & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{K} = [K_1 - K_i].$$

Alocação de Polos

Exemplo 8.7.1

Faça o projeto da alocação de polos de um sistema de Regulação de Tensão

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,18}{z - 0,82} = \frac{0,18z^{-1}}{1 - 0,82z^{-1}}$$

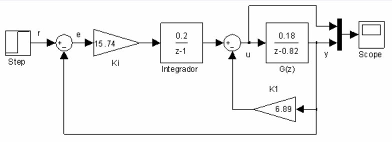
Especificações: $T = 0,2[s], \quad \zeta = 0,8; \omega_n = 6[rad/s](Mp \approx 1,5\% e Ta \approx 0,8[s])$.

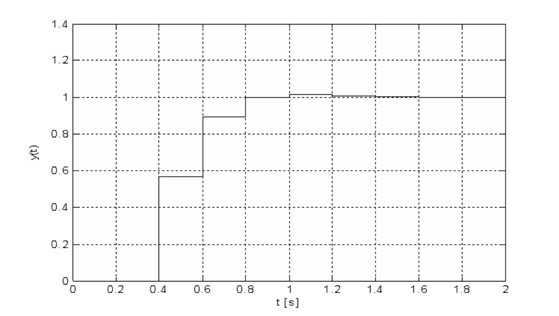
$$z^2 - 0,58z + 0,15 \rightarrow z_{1,2} = 0,29 \pm j0,25$$

Modelos em Variáveis de Estado

Resolução do Exemplo 8.7.1

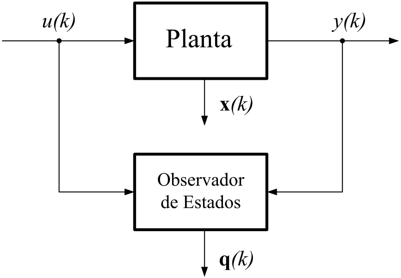
- Diagrama de Blocos (em Simulink):





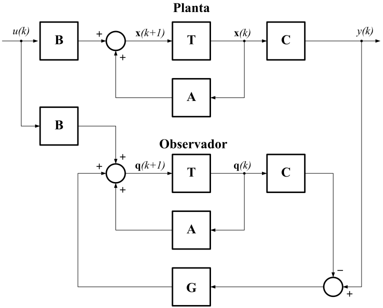
Observadores de Estado

- Até agora, vimos a técnica de alocação de polos no qual todos os estados da planta estavam disponíveis para realimentação. No entanto, a medição de todos os estados da planta é impraticável, se não impossível, a não ser no mais simples dos sistemas;
- Logo, precisamos obter uma forma de *estimar* as variáveis de estado de um sistema com as medições possíveis de serem feitas: a entrada e a saída da planta;
- Um sistema que estima as variáveis de estado de outro sistema é conhecido como *observador* ou *estimador* de estados;
- O objetivo do estimador é, dado a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ e conhecendo o modelo da planta (matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$), produzir uma estimativa $\mathbf{q}(k)$ dos estados $\mathbf{x}(k)$:



Observadores de Estado

- O observador de estados de ordem plena preditivo possui a seguinte equação de estado
$$\mathbf{q}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\,\mathbf{q}(k) + \mathbf{G}y(k) + \mathbf{B}u(k) \ ,$$
e é dito de ordem plena pois estima todas as variáveis de estado e dito preditivo pois a estimativa no tempo $(k+1)T$ é feita baseado nas medições no tempo kT;
- O vetor $\mathbf{G}$ é conhecido como vetor de ganhos do observador. De maneira geral, ele é responsável por "ponderar" o erro cometido pelo observador:



Observadores de Estado

- Uma vez que $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ é a matriz de estabilidade do observador, isto significa que
$$\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}\right)$$
fornece a dinâmica (polos) do observador de estados;
- Geralmente a dinâmica do observador de estados deve ser imposta de forma a ser duas a quatro vezes mais rápida que os polos do sistema em malha fechada (dadas pela alocação de polos);
- É importante ressaltar que os polos do observador de estados só podem ser alocados arbitrariamente se o sistema for observável;
- O erro cometido pelo observador é
$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k) \ ;$$
- Logo, a dinâmica do erro é
$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{q}(k+1) \ ;$$
$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{B}u(k) - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\mathbf{q}(k) - \mathbf{G}y(k) - \mathbf{B}u(k) \ ;$$
$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) - \mathbf{Aq}(k) + \mathbf{GCq}(k) - \mathbf{GCx}(k) \ ;$$
$$\mathbf{e}(k+1) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{GC}\right)\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k)\right)$$
$$\mathbf{e}(k+1) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{GC}\right)\mathbf{e}(k) \ ;$$
- Logo, a dinâmica do erro cometido pelo observador é igual à dinâmica do próprio observador.

Modelos em Variáveis de Estado

Exemplo 8.8

Faça o projeto de um observador de estados de ordem plena preditivo de um sistema cujo modelo em variáveis de estado discretas é

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,00484 \\ 0,0952 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \ ,$$

Considerando que a constante de tempo do sistema em malha fechada é de 1 seg, projete um observador de estados com constante de tempo igual a 0,5 seg ($T = 0,1$ s).

Observadores de Estado

- Embora o sistema de controle possa ser implementado da maneira vista até agora, uma forma mais usual é obter uma *função de transferência* que represente a alocação de polos e o observador de estados. Dado que a dinâmica do observador é

$$\mathbf{q}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\,\mathbf{q}(k) + \mathbf{G}y(k) + \mathbf{B}u(k) \ ,$$

e a lei de controle deve ser modificada para

$$u(k) = -\mathbf{Kq}(k)$$

temos que

$$\mathbf{q}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\,\mathbf{q}(k) + \mathbf{G}y(k) - \mathbf{BKq}(k) \ ,$$

$$\mathbf{q}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})\,\mathbf{q}(k) + \mathbf{G}y(k) \ ;$$

- Aplicando a transformada-z na equação acima, temos

$$z\mathbf{I}Q(z) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})\,Q(z) + \mathbf{G}Y(z) \ ;$$

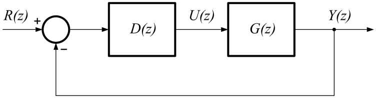
$$Q(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{GC})^{-1}\,\mathbf{G}Y(z) \ ;$$

- Aplicando a transformada-z na lei de controle e substituindo $Q(z)$ encontrado acima, finalmente temos

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = \mathbf{K}\,(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{GC})^{-1}\,\mathbf{G}$$

Observadores de Estado

- Lembre-se que para um controlador a saída da planta é a entrada e a entrada da planta é a saída. Como em geral trabalhamos com realimentação negativa e unitária, o sinal negativo na equação acima pode ser desprezado:



- Podemos então concluir que o controlador é um sistema dinâmico cuja representação em variáveis de estado é

$$\mathbf{q}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})\,\mathbf{q}(k) + \mathbf{G}y(k)$$

$$u(k) = \mathbf{Kq}(k) + 0y(k)\ ;$$

- Para a alocação e o observador de estados projetados nos Exemplos 8.7 e 8.8, a função de transferência do controlador é

$$D(z) = \frac{6,0175(z-0,8122)}{z^2 - 0,8715z + 0,2517}\ .$$

Observadores de Estado

- Vamos agora investigar os efeitos da inclusão do observador de estados nos polos do sistema em malha fechada. Sabemos que a equação de estado da planta é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \ ;$$

- Aplicando a lei de controle $u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{q}(k)$, temos

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{q}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{K}\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{e}(k)\right) \ ;$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}(k) \ ;$$

- Sabemos que a dinâmica do erro é

$$\mathbf{e}(k+1) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}\right)\mathbf{e}(k) \ ;$$

- Empilhando as duas variáveis das equações acima, de forma a criar um único vetor de estados, temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{cl}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \ ;$$

Observadores de Estado

- Os autovalores da matriz $\mathbf{A}_{cl}$ fornecem, então, os polos do sistema em malha fechada;
- Entretanto, a matriz $\mathbf{A}_{cl}$ é uma matriz bloco-triangular superior. Logo, seus autovalores são iguais aos autovalores de cada matriz bloco da diagonal principal. Ou seja, denotando por $p_{cl}(z)$ a equação característica da malha fechada (polos da malha fechada), temos:

$$p_{cl}(z) = \det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right)\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}\right)\ ;$$

- Logo, os polos em malha fechada são iguais aos polos da alocação mais os polos do observador de estados. Isto prova que o projeto da alocação de polos é independente do projeto do observador de estados, e a combinação de ambos resulta nos polos em malha fechada. Desta forma, os polos do observador e os demais polos da alocação devem ser suficientemente rápidos de forma a não interferir na dinâmica do sistema em malha fechada.

Fórmula de Ackermann

- A fórmula de Ackermann é um método muito útil para se calcular os vetores de ganho da alocação de polos e do observador de estados sem a necessidade de se aplicar a definição do cálculo de autovalor;
- Dado o polinômio de polos a serem alocados $\alpha(z)$ e o polinômio dos polos do observador $\beta(z)$

$$\alpha(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$\beta(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0 \ ;$$

- Os vetores de ganho da alocação $\mathbf{K}$ e do observador $\mathbf{G}$ são, respectivamente

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c{}^{-1}\phi_c$$

$$\mathbf{G} = \phi_o \mathbf{M}_0{}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \ ,$$

  onde $\mathbf{M}_c$ e $\mathbf{M}_o$ são, respectivamente, as matrizes de controlabilidade e observabilidade e as matrizes $\phi_c(\mathbf{A})$ e $\phi_o(\mathbf{A})$ são

$$\phi_c = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}$$

$$\phi_o = \mathbf{A}^n + \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \beta_1\mathbf{A} + \beta_0\mathbf{I}$$

- A fórmula de Ackermann é muito útil para se resolver os problemas computacionalmente.

Filtro de Kalman

- Nesta seção será apresentada a técnica de estimação ótima de estados conhecida como filtro de Kalman. O filtro de Kalman se assemelha ao estimador apresentado na seção anterior se diferenciando no cálculo da matriz G. Existe também a forma preditiva do filtro de Kalman mas esta não será considerada neste curso.
  Suponha uma planta linear discreta descrita pelas equações:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_1 w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \tag{17}$$

  onde $x(k)$ são os estados, $u(k)$ são as entradas conhecidas, $w(k)$ são distúrbios aleatórios que atuam na planta, $y(k)$ as saídas medidas e $v(k)$ são imprecisões aleatórias nas medidas. As entrada aleatórias $w(k)$ e $v(k)$ em (17) são descorrelacionadas e têm uma distribuição gaussiana com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E[w(k)] = 0, \qquad E[v(k)] &= 0 \\ cov[w(j), w(k)] = E[w(j)w^T(k)] &= R_w \delta_{jk} \\ cov[v(j), v(k)] = E[v(j)v^T(k)] &= R_v \delta_{jk} \end{aligned}$$

  onde $E[\cdot]$ é a esperança matemática e $cov[\cdot]$ denota a covariância.

Filtro de Kalman

- O operador δ_{jk} é o operador delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

Os estados estimados de $x(k)$ são denotados por $q(k)$ e os erros de estimação são dados por:

$$e(k) = x(k) - q(k)$$

A matriz de covariância do vetor de erro é denotada por:

$$P(k) = E[e(k)e^T(k)]$$

onde os elementos da diagonal de $P(k)$ são a média do erro quadrático de estimação. Sendo assim estabelece-se uma função de custo que é o traço da matriz $P(k)$.

$$\begin{aligned} J(k) = trP(k) &= E[e_1^2(k)] + E[e_2^2(k)] + \ldots + E[e_n^2(k)] \\ &= \sigma_{e_1}^2(k) + \sigma_{e_2}^2(k) + \ldots + \sigma_{e_n}^2(k) \end{aligned} \tag{18}$$

onde $\sigma_{e_1}^2(k)$ é a variância de $e_1(k)$.

Filtro de Kalman

- Minimizando-se a função de custo (18) obtém-se a seguinte solução para o filtro de Kalman que fornecerá o estado observado:

$$\begin{aligned} q(k) &= \bar{q}(k) + G(k)[y(k) - C(q)(k)] \\ \bar{q}(k+1) &= Aq(k) + Bu(k) \end{aligned} \tag{19}$$

onde $\bar{q}(k)$ é a predição do estado estimado no instante k e $q(k)$ é o estado estimado em k. A matriz de ganho $G(k)$ é conhecida como ganho de Kalman e é calculada a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} G(k) &= M(k)C^T[CM(k)C^T + R_v]^{-1} \\ M(k+1) &= A[I - G(k)C]M(k)A^T + B_1 R_w B_1^T \end{aligned} \tag{20}$$

onde a parcela $[I - G(k)C]M(k)$ é igual a $P(k)$.

Controle Quadrático Ótimo

- Considere o problema do controlador quadrático ótimo para o sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{21}$$

com a lei de controle ótimo:

$$u(k) = -Kx(k) \tag{22}$$

onde K é a matriz de ganhos que é determinada de maneira a minimizar o índice de desempenho dado por:

$$J = \sum_{k=0}^{N} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) \tag{23}$$

sendo $Q(k)$ uma matriz definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e $R(k)$ é uma matriz definida positiva ou real simétrica e N o número de instantes k. As matrizes $Q(k)$ e $R(k)$ determinam a importância relativa do erro e o consumo de energia associado ao sinal de controle respectivamente.

Controle Quadrático Ótimo

- Dada a lei de controle em (22) aplicada ao sistema (21) tem-se que:

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \tag{24}$$

Da mesma maneira, substituindo-se a lei de controle (22) na função de custo (23) tem-se:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{N} (x^T(k)Q(k)x(k) + x^T(k)K^T(k)R(k)K(k)x(k)) \\ &= \sum_{k=0}^{N} x^T(k)[Q(k) + K^T(k)R(k)K(k)]x(k) \end{aligned} \tag{25}$$

Minimizando-se a função de custo (25) e otimizando-a com relação aos estados $x(k)$ e à entrada $u(k)$ que a solução para a matriz de ganhos K será dada por:

$$K(k) = [B^T P(k+1)B + R]^{-1} B^T P(k+1)A \tag{26}$$

$$P(k) = A^T P(k+1)[A - BK] + Q \tag{27}$$

com $P(N) = Q$ e $K(N) = 0$. A matriz R é escolhida arbitrariamente, com valor valor padrão dado por $R = I$.

Controle Quadrático Ótimo

- Como pode ser verificado na equação (23) o processo de otimização apresentado se dá para um sistema de controle finito (com N finito) com a matriz de ganhos $K(k)$ variando no tempo. No entanto, em aplicações reais, na maioria das vezes, o problema de controle é aplicado a processos sem limite de tempo onde $N \to \infty$. Para estes processos a matriz de ganhos $K(k)$ deixa de ser variante no tempo e se torna constante. Com o objetivo de se obter a matriz $\hat{K}$ utiliza-se a equação algébrica de Riccati:

$$\hat{P} = A^T \hat{P} A + Q - A^T \hat{P} B [B^T \hat{P} B + R]^{-1} B^T \hat{P} A \tag{28}$$

onde $\hat{P}$ se diferencia de $P(k)$ por ser constante.
Resolvendo-se a equação de Riccati (28) tem-se que a matriz de ganhos $\hat{K}$ será dada por

$$\hat{K} = [R + B\hat{P}B^T]^{-1} B^T \hat{P} A \tag{29}$$

Controle Quadrático Ótimo

- **Exemplo**

O exemplo a seguir ilustra a utilização do MATLAB para se resolver o problema de controle ótimo quadrático para sistemas discretos no tempo. Considere o seguinte sistema dinâmico:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A função de custo quadrático que se deseja minimizar é dada por:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k))$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

A lei de controle que minimiza J pode ser dada por:

$$u(k) = -Kx(k)$$

Determine a matriz de ganhos K em um programa de MATLAB.

Controle Quadrático Ótimo

- **Solução**

  A solução do problema se dá pela obtenção da matriz P e sua utilização no cálculo de K, sendo que P é obtida de maneira iterativa até que convirja.

```
A = [0.2 0; 0 0.4];
B = [1; 1];
Q = [1 0;0 0.5];
R = 1;
% Inicialização da matriz P
P = [0 0; 0 0];
P = Q + A'*P*A - A'*P*B*inv(R+B'*P*B)*B'*P*A;
for i = 1:10
    P = Q + A'*P*A - A'*P*B*inv(R+B'*P*B)*B'*P*A;
end
P
j = 0;
while j==0
    for i = 1:10
        P = Q + A'*P*A - A'*P*B*inv(R + B'*P*B)*B'*P*A;
    end
    P
    j = input('A Matriz P convergiu? (Sim = 1; Não = 0)')
end
K = inv(R + B'*P*B)*B'*P*A
```