ECA602 – Sistemas de Controle

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia Elétrica

Aula 02

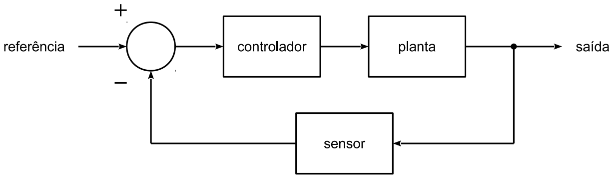
Características dos Sistemas de Controle

Prof. Dr. Jeremias Barbosa Machado

Notas de Aula – 2017

Malha de controle

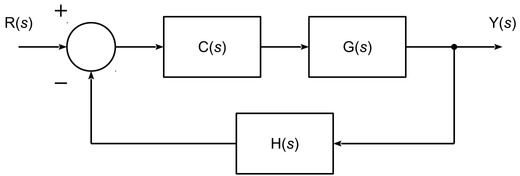
- Um sistema de controle em malha fechada utiliza-se da medida da saída para ajustar a próxima ação sobre o processo, em um conceito denominado **realimentação negativa**.



- Uma informação de erro é gerada ao se comparar uma dada referência com a saída da planta do processo, medida através do sensor. O sinal de erro é então processado pelo controlador (ou compensador), que por sua vez será o responsável por atuar sobre a planta, gerando assim a resposta desejada.

Malha de controle

- Dessa forma, é possível modificar o comportamento em malha fechada de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo manipulando as funções de transferência dos blocos.

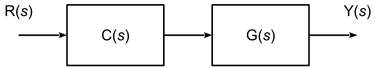


- O objetivo da malha de controle é fazer a saída se comportar como a referência manipulando a entrada da planta. A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$T(s) \triangleq \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

Malha de controle

- O numerador $C(s)G(s)$ é chamado de função de transferência em malha aberta, na qual é impossível distinguir se o ganho, os pólos ou os zeros são oriundos do controlador ou da planta analisando apenas a sua resposta temporal.
- Contudo, se for possível fazer o controlador igual ao inverso da planta, então para que realimentar?



- Os distúrbios ou possíveis variações de parâmetros da planta nem sempre são conhecidos ou constantes ao longo do tempo. Assim, aplica-se a realimentação negativa de forma a tornar o sistema relativamente insensível a essas perturbações.

Malha de controle

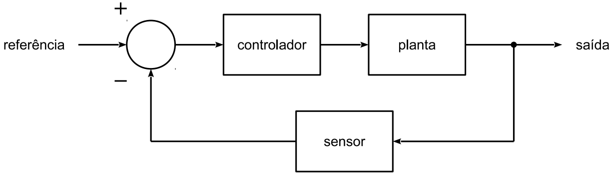
Postulado de Ziegler e Nichols

É importante considerar o controlador e a planta como uma unidade na aplicação de uma malha de controle, na qual o seu desempenho é atribuído à unidade, tanto a um quanto ao outro. Um controlador simples terá um desempenho aceitável caso a planta possua uma dinâmica *bem comportada*. Um controlador elaborado será exigido para um desempenho aceitável caso a planta possua uma dinâmica *mal comportada*.

- As finalidades de uma malha de controle são:
  1. Estabilidade;
  2. Rejeitar distúrbios;
  3. Diminuir a sensibilidade às variações de parâmetros;
  4. Modificar a resposta transiente;
  5. Diminuir ou mesmo eliminar o erro em regime permanente.

Ações de controle típicas

- O controlador é o elemento responsável por gerar uma ação de controle (a variável manipulada $u(t)$ em função do erro) que seja capaz de atingir os objetivos traçados.



- Há duas estruturas de controladores interessantes na análise das malhas de controle: o controlador PID (e suas variantes) e o controlador de avanço ou atraso de fase, dados por:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \qquad C(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}$$

Controlador proporcional integral derivativo

- As variantes usuais do controlador PID, definido pelos ganhos proporcional K_P, integral K_I e derivativo K_D, são:

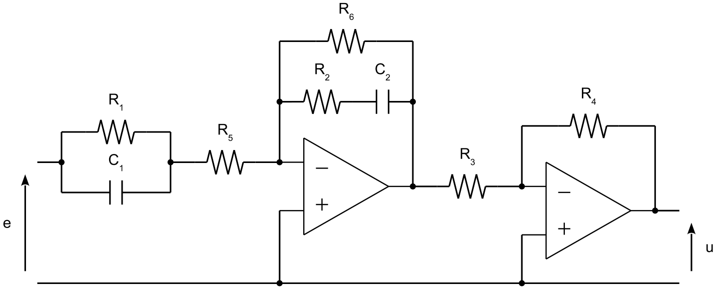
	$C(s)$	Tempo
P	K_P	$u(t) = K_P e(t)$
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$	$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt$
PD	$K_P + K_D s$	$u(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt}$
PID	$K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$

- O controlador PID também pode ser definido pelos tempos de integração T_I e de derivação T_D, dados por:

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Controlador proporcional integral derivativo

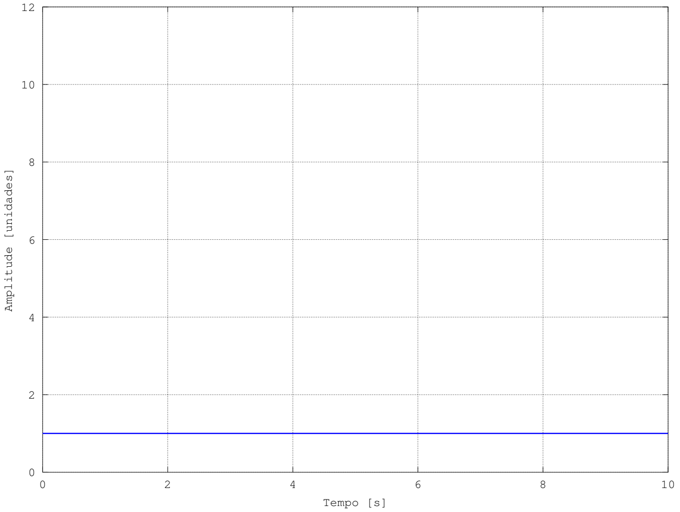
- A implementação do controlador PID pode ser obtida através de um circuito com amplificadores operacionais:



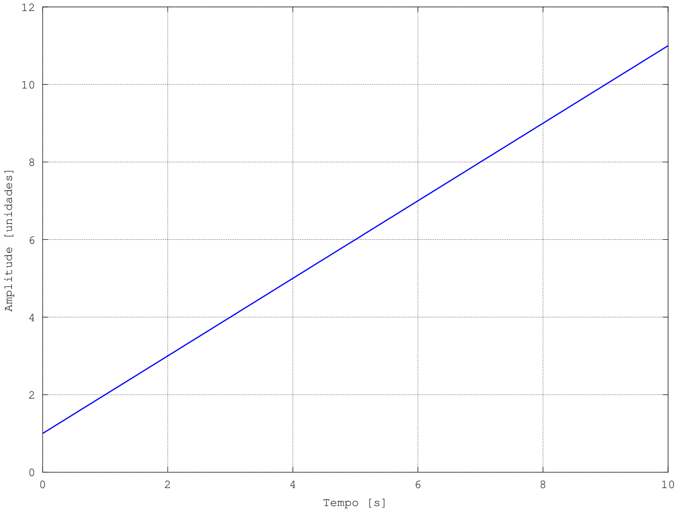
- Para R_5 igual a zero e R_6 infinito, a função de transferência do circuito acima é dada por:

$$C(s) = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{C_2 R_1 s} + C_1 R_2 s\right)$$

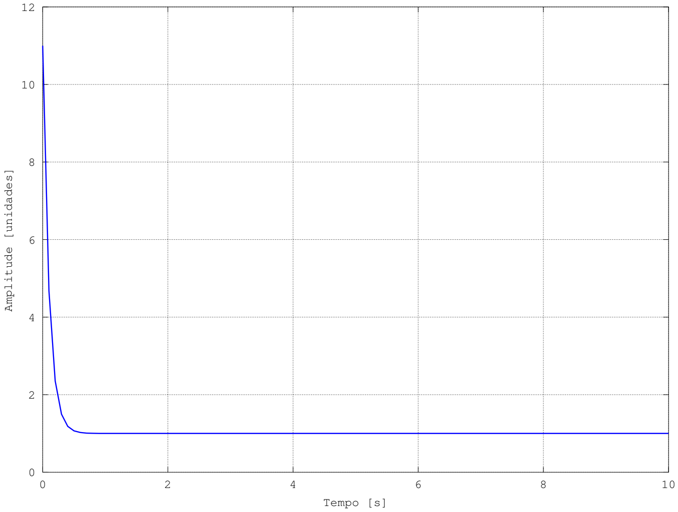
Controlador proporcional



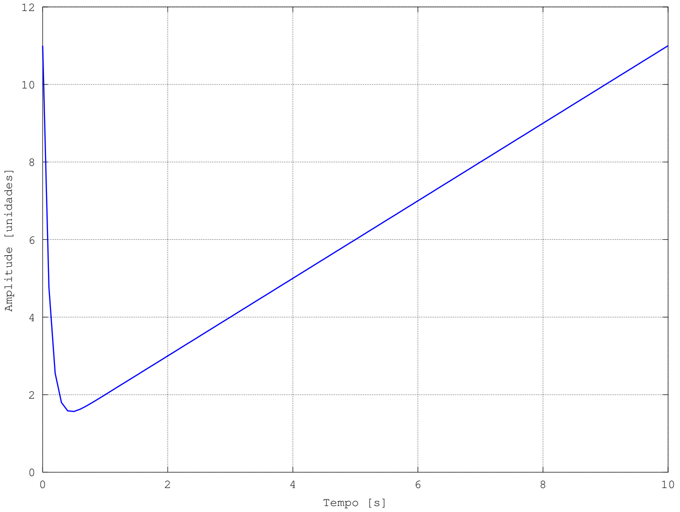
Controlador proporcional integral



Controlador proporcional derivativo



Controlador proporcional integral derivativo



Controlador de avanço ou atraso de fase

- O controlador de avanço ou atraso de fase (*phase lead/phase lag*), definido pelo ganho a_0 e pelos tempos a_1 e b_1, tem a sua função de transferência dada por:

$$C(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}$$

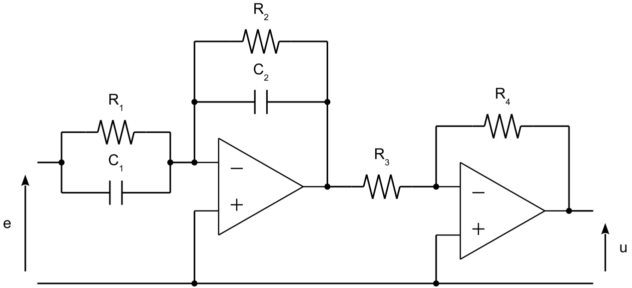
- Analisando a fase da sua resposta em frequência, pode-se concluir que:

$$\angle C(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_0}\omega\right) - \tan^{-1}(b_1\omega)$$

- Dessa forma, caso a_1/a_0 for maior do que b_1, o controlador acima é dito de avanço de fase. Caso contrário, ele é dito de atraso de fase.

Controlador de avanço ou atraso de fase

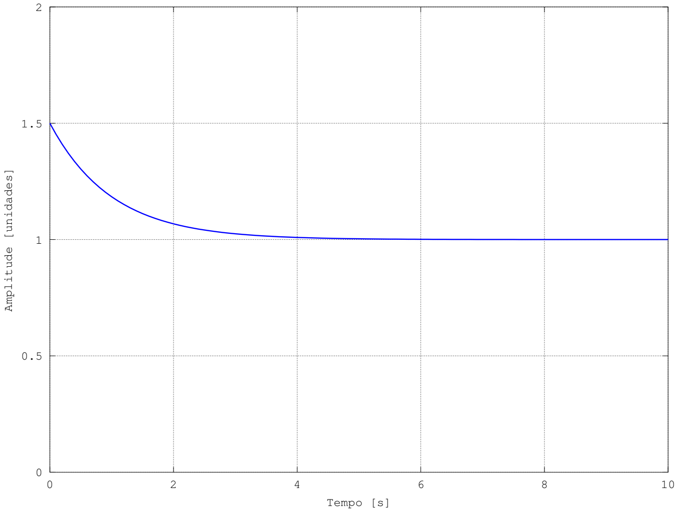
- A implementação do controlador de avanço ou atraso de fase pode ser obtida através de um circuito com amplificadores operacionais:



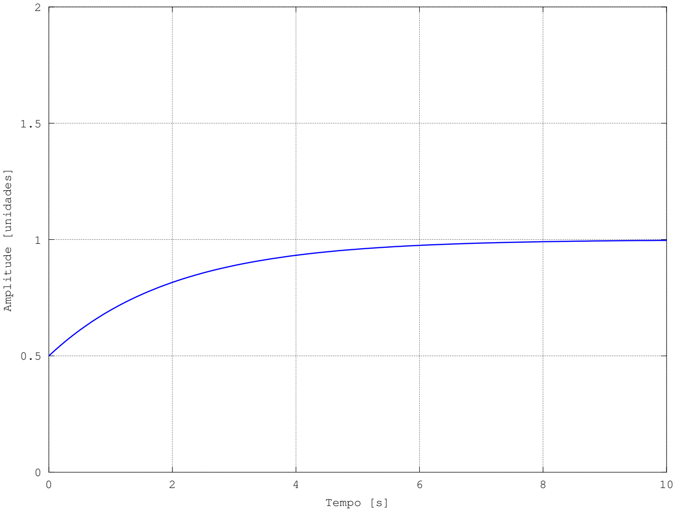
- A função de transferência do circuito acima é dada por:

$$C(s) = \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{C_1 R_1 s + 1}{C_2 R_2 s + 1}$$

Controlador de avanço de fase



Controlador de atraso de fase



Estabilidade

- Uma das questões mais difícies de se responder sobre os sistemas dinâmicos é sobre a sua estabilidade. Em linhas gerais, se entende por estabilidade a capacidade de se permanecer sob controle.

Estabilidade BIBO

Um sistema dinâmico é dito BIBO (*bounded input, bounded output*) estável se, para toda entrada limitada em magnitude a saída também permanece limitada em magnitude por todo o tempo.

- A estabilidade BIBO de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo está relacionada à posição dos seus pólos no plano complexo. Tal sistema dinâmico será BIBO estável se e somente se **todos** os seus pólos possuírem a parte real negativa, isto é, pertencerem ao semi-plano à esquerda do plano complexo.

Equação característica

- Da função de transferência em malha fechada:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

- A análise de estabilidade de um sistema dinâmico em malha fechada é dada pela **equação característica**, a qual é definida pelo denominador da função de transferência em malha fechada igualado a zero.

$$1 + C(s)G(s)H(s) = 0$$

- Dessa maneira, tanto os pólos quanto os zeros em malha aberta possuem influência nos pólos em malha fechada. E mais, com base nas informações providas pela equação característica surgem os métodos de compensação (a escolha do controlador).

Critério de Routh-Hurwitz

- O cálculo das raízes da equação característica pode ser numericamente dispendioso e a localização exata das raízes não é necessária para se concluir sobre a estabilidade BIBO.
- O **critério de Routh-Hurwitz** fornece as condições suficientes e necessárias para testar se um polinômio possui (ou não) todas as raízes com a parte real negativa, sem calcular explicitamente as suas raízes.

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

- A equação característica é geralmente um polinômio, exceto para os casos em que o sistema dinâmico possua um atraso de transporte (uma exponencial em s). Nestes casos, o critério de Routh-Hurwitz não pode ser utilizado.

Critério de Routh-Hurwitz

- A partir dos coeficientes do polinômio, obtém-se o arranjo de Routh, dado por:

$$
\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}
$$

- O número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinais na primeira coluna do arranjo. A realimentação será estável se todos os termos da equação característica e da primeira coluna do arranjo forem positivos.

Critério de Routh-Hurwitz

- Os termos do arranjo são calculados por:

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Como exemplo, considere as três equações características dadas pelos polinômios abaixo:

$$Q_1(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$Q_2(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

$$Q_3(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$$

Critério de Routh-Hurwitz

- Considere o sistema dinâmico modelado por:

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

- Utilizando-se de um controlador P em realimentação unitária, para que valores do ganho K_P o sistema dinâmico é estável em malha fechada?

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 4 & 2 + 2K_P \\ s^1 & \dfrac{18 - 2K_P}{4} & \\ s^0 & 2 + 2K_P & \end{array}$$

- Para qualquer ganho $-1 < K_P < 9$, o sistema dinâmico será estável em malha fechada.

Critério de Routh-Hurwitz

- Substituindo o controlador P por um PI, para que valores do ganho K_I o sistema dinâmico é estável em malha fechada (adote o ganho K_P que maximiza o valor do ganho K_I)?

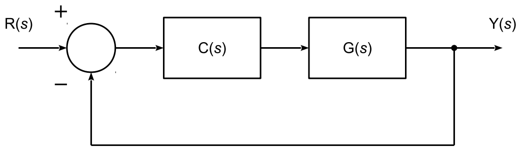
$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & 2K_I \\
s^3 & 4 & 2+2K_P & \\
s^2 & \dfrac{18-2K_P}{4} & 2K_I & \\
s^1 & c_1 & & \\
s^0 & 2K_I & &
\end{array}
$$

$$
c_1 = -\frac{4}{18-2K_P}\left[8K_I - \frac{(2+2K_P)(18-2K_P)}{4}\right]
$$

- Para K_P igual a 4, para qualquer ganho $0 < K_I < 3.125$, o sistema dinâmico será estável em malha fechada.

Critério de estabilidade

- Os critérios de estabilidade comumente definidos na resposta em frequência são o **critério de Nyquist** e o **critério de Bode**, os quais permitem analisar a estabilidade em malha fechada através da resposta em frequência em malha aberta. Sem perda de generalidade, a malha de controle será feita com a realimentação unitária.



- A equação característica pode ser expressa por:

$$C(s)G(s) = -1 \Rightarrow C(j\omega)G(j\omega) = -1$$

- Os critérios permitem investigar tanto a estabilidade absoluta quanto a estabilidade relativa em malha fechada.

Critério de Nyquist

- A resposta em frequência também pode ser representada por um diagrama real *vs* imaginário como uma função *implícita* da frequência; a representação é conhecida como **diagrama de Nyquist**, o qual é obtido variando a frequência de zero a infinito e espelhando o mesmo em relação ao eixo real. A equação característica pode ser expressa por:

$$C(j\omega)G(j\omega) = -1 + j0$$

- A estabilidade absoluta é analisada em torno do ponto real -1 pelo critério de estabilidade de Nyquist, definida por:

$$Z = P + N$$

- Z e P são os números de pólos com parte real positiva em malha fechada e em malha aberta, respectivamente, e N é o número de contornos em torno do ponto real -1 (positivo no sentido horário e negativo no sentido anti-horário).

Critério de Nyquist

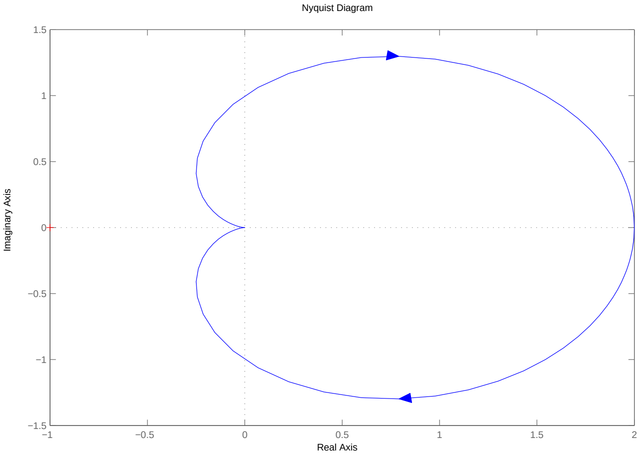
- Um sistema dinâmico instável em malha aberta será estável em malha fechada se o número de contornos em torno do ponto -1 no sentido anti-horário for igual ao número de pólos instáveis em malha aberta. Ou seja, Z deve ser igual a zero. Como exemplo, analise a estabilidade das seguintes funções de transferência:

$$C_1(s)G_1(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 1}$$

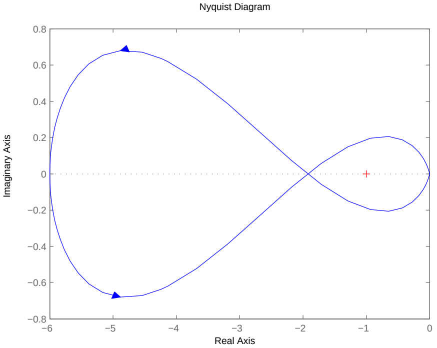
$$C_2(s)G_2(s) = \frac{s + 60}{s^3 + 6s^2 + 3s - 10}$$

$$C_2(s)G_2(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.1s^2 + s + 1}$$

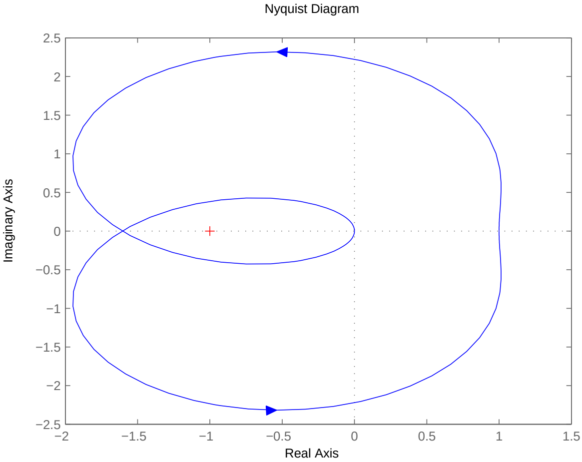
Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



Critério de Nyquist

Margens de ganho e de fase

Na análise da estabilidade relativa, a **margem de ganho** é definida como o fator pelo qual o ganho (dado em decibéis) em malha aberta pode variar sem tornar a realimentação instável. Por sua vez, a **margem de fase** é definida como o fator pelo qual a fase em malha aberta pode variar sem tornar a realimentação instável, tendendo o sistema dinâmico à estabilidade marginal.

- Pelo diagrama de Nyquist, a margem de ganho é dada pelo inverso da distância entre a origem e o ponto em que a curva intercepta o eixo real. A margem de fase é dada pelo ângulo entre o eixo real e o segmento de reta que passa pela origem e o ponto em que a curva intercepta o círculo de raio unitário (centrado na origem). Essas definições são mais intuitivas se vistas a partir do diagrama de Bode.

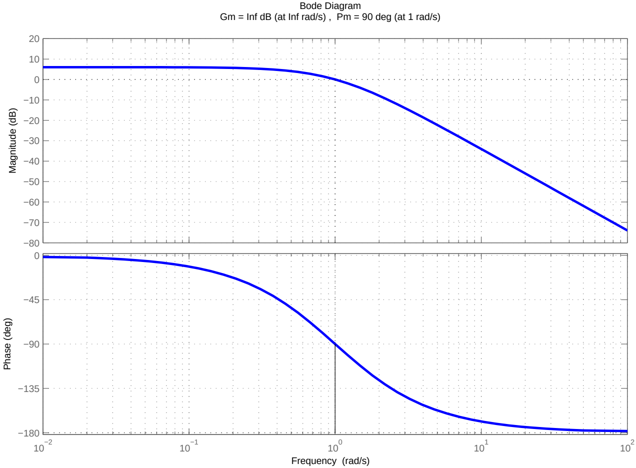
Critério de Bode

- Para um sistema de fase-mínima, as informações do critério de Nyquist podem ser analisadas diretamente pelo diagrama de Bode. A equação característica pode ser expressa por:

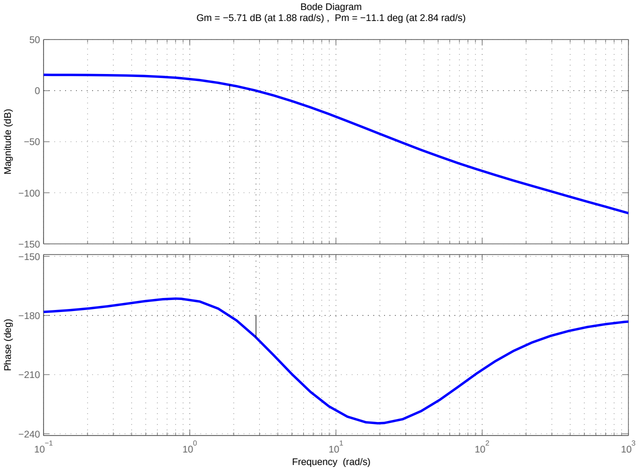
$$C(j\omega)G(j\omega) = 1 \angle -180^\circ$$

- A estabilidade absoluta é analisada para a frequência na qual o módulo é igual a 1 (ou 0 dB) pelo critério de estabilidade de Bode. Para que o sistema dinâmico seja estável em malha fechada, a fase deve estar acima da linha de -180° na frequência de cruzamento de ganho (ou de ganho unitário).
- A margem de ganho é dada pela diferença entre o módulo e a linha de 0 dB na frequência na qual a fase é de -180°. A margem de fase é dada pela diferença entre a fase e a linha de -180° na frequência de ganho unitário. Como exemplo, analise a estabilidade das funções de transferência anteriores.

Critério de Bode



Critério de Bode



Critério de Bode