ECAC01A - MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá
Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologias da Informação

Aula 02

Transformada de Laplace

Prof. Jeremias B. Machado
06 de fevereiro de 2019

Introdução

Sistemas dinâmicos podem ser descritos através de equações diferenciais ordinárias (EDO).

De maneira geral, as EDOs podem ser descritas como:

$$a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_{n-1} \frac{d^{(n-1)} u(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Introdução

Neste capítulo estudaremos as Transformadas de Laplace. Elas apresentam uma representação de sinais no domínio da frequência em função de uma variável "s" que é um complexo, "$s = \alpha + j\omega$".

A Transformada de Laplace foi desenvolvida pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Pierre Simon ***Laplace*** (1749-1827), francês.

Transformada de Laplace

Considere um sinal contínuo $x(t)$

$$x(t) \in \mathbb{C} \text{ conjunto dos números complexos}$$

ou seja, o sinal $x(t)$ pode ter valores complexos, i.e., valores com parte real e com parte imaginária.

A Transformada de Laplace deste sinal $x(t)$, normalmente simbolizada por:

$$\mathcal{L}[x(t)] \text{ ou } X(s)$$

sendo definida como:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$$

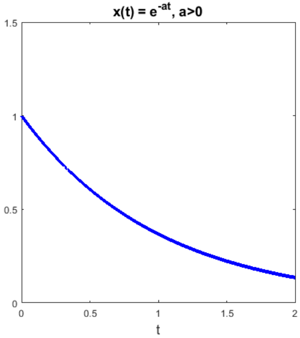
A equação acima é chamada de transformada unilateral pois é definida para sinais $x(t)$ onde $x = 0$ para $t < 0$.

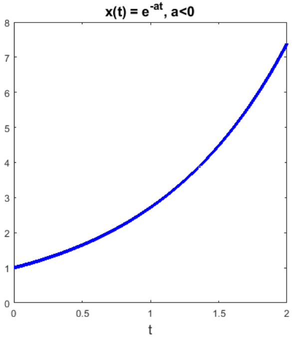
Transformada de Laplace - Função Exponencial

Sinal exponencial

Como primeiro exemplo vamos utilizar a função exponencial.

Para um dado valor de a este sinal $x(t)$ da acima está bem definido e assume o valor 0 (“zero”) à esquerda da origem, ou seja, para valores de tempo negativo. Entretanto muitas vezes apenas escrevemos $x(t) = e^{-at}, t > 0$ e já fica subentendido que é nulo para $t < 0$.





Transformada de Laplace - Função Exponencial

Calculando a Transformada de Laplace de $x(t)$, pela definição anterior tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t)] = X(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t(s+a)} dt = \frac{-1}{(s+a)} e^{-t(s+a)} \Big|_0^\infty\end{aligned}$$

ou seja, a Transformada de Laplace de uma função exponencial é dada por:

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = X(s) = \frac{1}{(s+a)}$$

Transformada de Laplace - Função Degrau

Função degrau unitário:

$$x(t) = 1, \forall t > 0$$

Pela definição da Transformada de Laplace tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x(t)] = X(s) &= \int_0^\infty e^{-st} 1 dt \\
&= \left. \frac{-1}{s} e^{-ts} \right|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Transformada de Laplace - Função Impulso

Função impulso unitário:

$$A(x(t)) = 1, \quad para \quad t = 0$$

ou seja, a área de $x(t) = 1$ somente em $t = 0$. Esta função é conhecida como função impulso ou delta de Dirac

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt$$

de fato, a integral acima está definida somente em $t = 0$, logo

$$\mathcal{L}[x(t)] = e^{-s.0} = e^0 = 1$$

Transformada de Laplace - Funções Trigonométricas

A Transformada de Laplace do seno é dada por:

$$\mathcal{L}[sen(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e a transformada de Laplace do cosseno é dada por:

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Transformada de Laplace - Propriedades

Considere que $x(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções contínuas.
A transformada de Laplace apresenta as seguintes propriedades:

- Homogenidade

$$\mathcal{L}[kx(t)] = k\mathcal{L}[x(t)]$$

- Aditividade

$$\mathcal{L}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{L}[x_1(t)] + \mathcal{L}[x_2(t)]$$

- Linearidade

$$\mathcal{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha\mathcal{L}[x_1(t)] + \beta\mathcal{L}[x_2(t)]$$

Transformada de Laplace - Propriedades

- Função transladada ("*time shifting*")

$$\mathcal{L}[x(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[x(t)] = e^{-as}X(s)$$

- Função multiplicada por exponencial e^{-at}:

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a)$$

Estas duas últimas propriedades são duais uma da outra pois: enquanto uma diz que a transformada da função transladada fica multiplicada por uma exponencial, a outra diz que a transformada de uma função multiplicado por uma exponencial é uma transformada transladada.

Transformada de Laplace - Propriedades

- Derivadas

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = s.X(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right] = s^2.X(s) - s.x(0) - x'(0)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n.X(s) \quad &- \quad s^{n-1}.x(0) - \cdots \\ \cdots \quad &- \quad s.x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

Note que, em geral, $x(t)$ tem condições iniciais nulas, isto é:

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0, \cdots, etc$$

Transformada de Laplace - Propriedades

- Integral

$$\mathcal{L}\left[\int x(t)dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int_{\infty}^{t} x(t)dt\right]_{t=0}$$

Neste caso, os resíduos são diferentes do caso da derivada. Entretanto, da mesma forma que derivar (em t) equivale a multiplicar por s (no domínio da frequência), sob certas condições integrar (em t) equivale a dividir por s (no domínio da frequência). Ou seja:

$$\mathcal{L}\left[\int x(t)dt\right] = \frac{1}{s}X(s)$$

Transformada de Laplace - Propriedades

- Convolução

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s).X_2(s)$$

Portanto, a Transformada de Laplace da convolução de duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o produto das transformadas $X_1(s)$ e $X_2(s)$ destas duas funções.

Recorde-se que a definição de convolução entre duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_0^t x_1(t-\tau).x_2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t x_1(\tau).x_2(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

ou seja, a Transformada de Laplace transforma esta complexa integral em um simples multiplicação no domínio de Laplace.

Transformada de Laplace - Função de Transferência

A definição de convolução no domínio da frequência nos permite definir o conceito de Função de Transferência.

Desta forma, há a possibilidade da utilização da FT ou das transformadas de Laplace na modelagem e análise de sistemas dinâmicos.

Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do Valor Final (TVF)

Os teoremas do valor inicial (TVI) e do valor final (TVF) permitem que se descubra o valor inicial $x(0^+)$ e o valor final $x(\infty)$ da função $x(t)$ cuja Transformada de Laplace $X(s)$ sejam conhecidas.

- Teorema do Valor Inicial (TVI)

$$x(0^+) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} s.X(s)$$

- Teorema do Valor Final (TVF)

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s.X(s)$$

A partir do teorema do valor final é possível se determinar qual o ganho estático de uma função de transferência.

Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do Valor Final (TVF)

Considere a função $x(t)$ cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 2s}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF, obtém-se:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s.X(s) = \lim_{s \to \infty} s.\frac{3}{s(s+2)} = \lim_{s \to \infty} \frac{3}{(s+2)} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} s.X(s) = \lim_{s \to 0} s.\frac{3}{s(s+2)} = \lim_{s \to 0} \frac{3}{(s+2)} = \frac{3}{2}$$

Tabela de Transformadas e Antitransformadas

As principais transformadas de Laplace pode sem resumidas das seguintes tabelas:

$x(t)$	$X(s) = \mathscr{L}\{ x(t) \}$
$x(t) = u_o(t)$	$X(s) = 1$
$x(t) = u_1(t)$	$X(s) = \frac{1}{s}$
$x(t) = u_2(t)$	$X(s) = \frac{1}{s^2}$
$x(t) = u_3(t)$	$X(s) = \frac{1}{s^3}$
$x(t) = u_n(t)$	$X(s) = \frac{1}{s^n}$
$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \frac{1}{(s+a)}$
$x(t) = t \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$

Tabela de Transformadas e Antitransformadas

As principais transformadas de Laplace pode sem resumidas das seguintes tabelas:

$x(t) = t^2 \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{2}{(s+a)^3}$
$x(t) = t^3 \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{3!}{(s+a)^4}$
$x(t) = t^n \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$x(t) = \text{sen}\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$x(t) = \cos\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$x(t) = e^{-at} \cdot \text{sen}\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$x(t) = e^{-at} \cdot \cos \cdot \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tabela de transformadas

Função	$f(t)$	$F(s)$
impulso unitário	$\delta(t)$	1
degrau unitário	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampa unitária	t	$\frac{1}{s^2}$
exponencial de n-ésima ordem	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
seno	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosseno	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
seno amortecido	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
cosseno amortecido	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Transformada Inversa de Laplace

Nesta seção são desenvolvidas as técnicas utilizadas para se encontrar a função $x(t)$ cuja Transformada de Laplace $X(s)$ é conhecida. Ou seja, vamos calcular a Transformada inversa de Laplace de X(s).

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = x(t)$$

Por definição, a Transformada Inversa é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Como se trata de uma operação complexa, usaremos propriedades das TL para obter os resultados da transformada inversa.

Expansão em Frações Parciais

Uma maneira prática de se obter a transformada inversa de Laplace de $X(s)$ é através da fatoração em frações parciais. O método de fatoração em frações parciais consiste em desmembrar a função $X(s)$ e frações mais simples e que já apresentam solução tabelada. Esta operação pode ser utilizada graças a propriedade de linearidade.

Os três casos que veremos são: polos reais e distintos, polos complexos e polos múltiplos. Os demais casos serão apenas combinações destes 3 casos.

Definição

Polos são as raízes dos polinômios presentes nos denominadores $A(s)$ das funções de transferência. Estão diretamente ligados à dinâmica do sistema. Zeros são as raízes dos polinômios nos numeradores $B(s)$ das funções de transferência.

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Expansão em Frações Parciais

Polos Reais e distintos

No caso de pólos reais e distintos o denominador $A(s)$ pode ser expresso como:

$$A(s) = s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = (s + p_1).(s + p_2). \cdots .(s + p_n)$$

onde $p_1, \ldots, p_n$ são as raízes do polinômio $A(s)$.

No caso de pólos reais e distintos a função de transferência $X(s)$ pode ser fatorada como:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R_1}{s + p_1} + \frac{R_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{R_n}{s + p_n}$$

Exemplo

Determine a solução temporal para as seguintes equações diferenciais e funções de transferência:

Expansão em Frações Parciais

Exemplo polos complexos

Dada a equação a seguir, determine a resposta temporal:

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que o polinômio do denominador pode ser fatorado como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)$$

Quando a função F(s) envolve um par de polos complexos conjugados, é conveniente não expandir nas frações parciais usais mais expandi-la na soma de termos referentes a uma senóide amortecida e a uma cossenóide amortecida.

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} sen(\omega t)] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} cos(\omega t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

Expansão em Frações Parciais

Cálculo dos Resíduos com Polos Repetidos de Multiplicidade q

Se a função $F(s)$ possuir um polo repetido p_i de multiplicidade q, existirá q resíduos r_i associados a esse polo. Estes polos são expressos na expansão por frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{R_{i,1}}{(s-p_i)^q} + \frac{R_{i,2}}{(s-p_i)^{q-1}} + \ldots + \frac{R_{i,j}}{(s-p_i)} \ .$$

Os resíduos são então calculados da seguinte forma:

$$r_{i,1} = (s-p_i)^q F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$r_{i,2} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}(s-p_i)^q F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$\vdots$$

$$r_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}(s-p_i)^q F(s)\Big|_{s=p_i}$$