ECAC01A - MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá
Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologias da Informação

Aula 03

Propriedades dos Sistemas Dinâmicos

Prof. Jeremias B. Machado
19 de agosto de 2019

Introdução

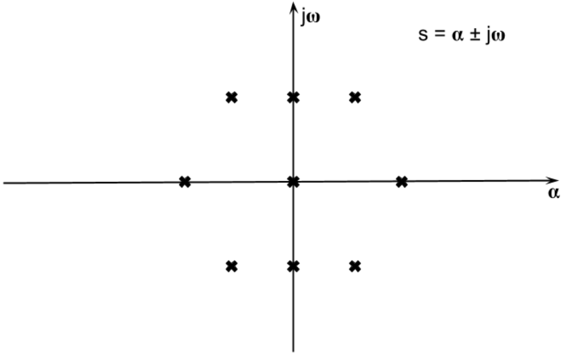
Nesta aula pretende-se investigar as propriedades de um sistema dinâmico:

- Estabilidade
- Componentes dinâmicos da resposta transitória
- Respostas Características: Sistemas de primeira e segunda-ordem.

Estabilidade

A estabilidade de um sistema dinâmico é dada pelo comportamento da resposta deste. Quanto à estabilidade há dois tipos de classificação:

- BIBO Estabilidade (*Bounded Input, Bounded Output*);
- Estabilidade Assintótica.

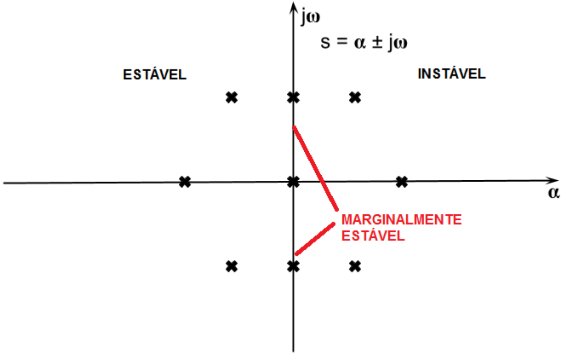


com a estabilidade ligada a solução genérica $y(t) = e^{-st}$.

Estabilidade

A estabilidade de um sistema dinâmico é dada pelo comportamento da resposta deste. Quanto à estabilidade há dois tipos de classificação:

- BIBO Estabilidade (*Bounded Input, Bounded Output*);
- Estabilidade Assintótica.



com a estabilidade ligada a solução genérica $y(t) = e^{-st}$.

Estabilidade

Considere um sistema dinâmico modelado pela seguinte Função de Transferência:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Será que há uma outra forma de se analisar a estabilidade do sistema dinâmico sem que seja necessário se calcular os polos do sistema?

Estabilidade

Uma forma de analisar a estabilidade de um sistema dinâmico é através do critério de Routh-Hurwitz:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}
$$

onde

$$
b_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad b_2 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad \cdots
$$

$$
c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots
$$

Resposta temporal

- A resposta temporal de um sistema dinâmico qualquer pode ser analisada como a soma da resposta de sistemas dinâmicos de 1ª e 2ª ordem, embora a maioria dos processos industriais possuam um sistema dinâmico de baixa ordem.

$$G(s) = K\frac{1}{\tau s + 1} \qquad G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Os parâmetros K, τ, ζ e ω_n podem possuir uma interpretação física relacionada ao comportamento do processo que está sendo descrito, sendo que processos de diferente naturezas podem vir a se comportarem de maneira análoga.
- A análise da resposta temporal de sistemas de 1ª e 2ª ordem é realizada para as entradas do tipo impulso, degrau ou rampa (no padrão unitário).

Sistema de 1ª ordem

- Seja o sistema de 1ª ordem, definido por um ganho K e uma constante de tempo τ:

$$Y(s) = K\frac{1}{\tau s + 1}U(s)$$

- A resposta temporal para uma entrada impulso unitário:

$$Y(s) = \frac{K/\tau}{s + (1/\tau)} \Rightarrow y(t) = \frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

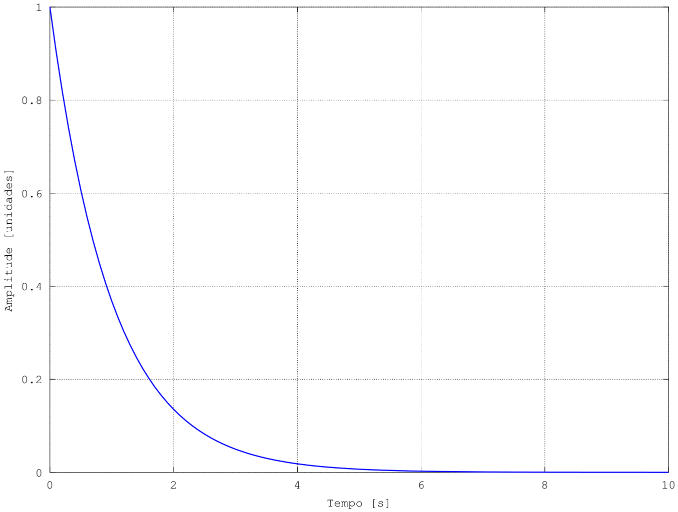
- Para uma entrada degrau unitário:

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + (1/\tau)} \Rightarrow y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

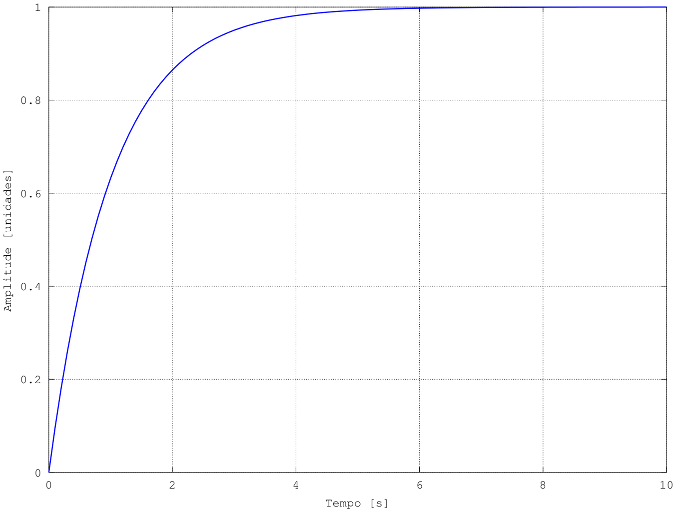
- Para uma entrada rampa unitária:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s + (1/\tau)} \Rightarrow y(t) = K\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

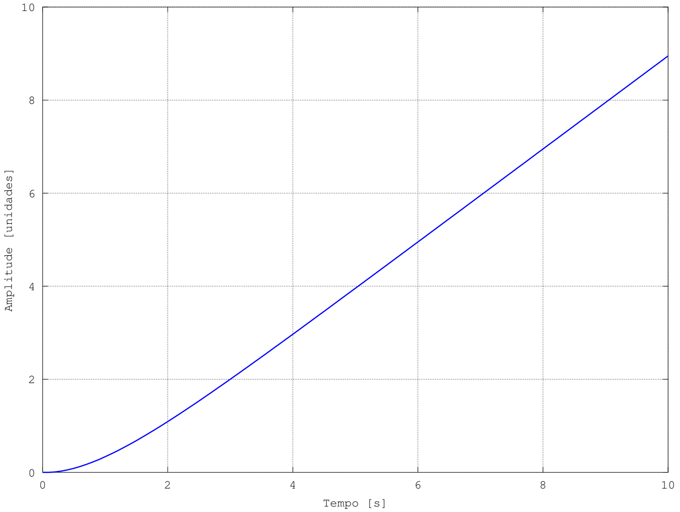
Sistema de 1ª ordem



Sistema de 1ª ordem



Sistema de 1ª ordem



Sistema de 1ª ordem

- A resposta temporal de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo pode ser divida em duas partes distintas independentemente do tipo de entrada aplicada: a **resposta estacionária** (a qual não deve ser confundida com uma possível resposta estática) e a **resposta transiente**.
- A resposta estacionária está relacionada aos pólos do tipo de entrada e se refere a resposta do sistema dinâmico em regime permanente. Já a resposta transiente está relacionada aos pólos da função de transferência e se refere a resposta do sistema dinâmico em regime transitório.
- A resposta transiente de um sistema dinâmico de 1ª ordem é dada por uma exponencial decrescente (se o sistema for estável), a qual decaí em função da constante de tempo.

Sistema de 1ª ordem

- O parâmetro K é o ganho do sistema (admensional) e representa o quanto a saída está amplificada em relação à entrada degrau em regime permanente.

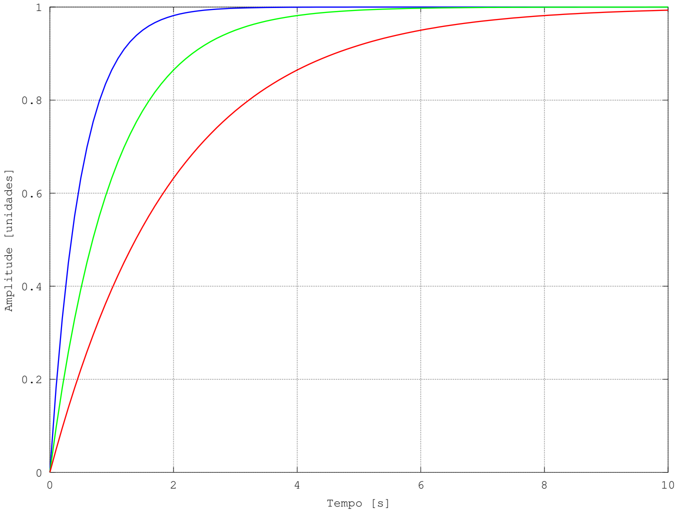
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = K$$

- O parâmetro τ é a constante de tempo do sistema (dada em segundos) e representa qual é o tempo gasto para a saída atingir 63% do valor final do degrau em regime permanente.

t	$1\ \tau$	$2\ \tau$	$3\ \tau$	$4\ \tau$	$5\ \tau$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	0.6321	0.8647	0.9502	0.9817	0.9933

- Assim, o sistema será considerado em regime permanente a partir de 4τ, com um erro em regime menor do que 2%.

Sistema de 1ª ordem



Sistema de 2ª ordem

- Seja o sistema de 2ª ordem, definido por um ganho K, um fator de amortecimento ζ e uma frequência natural ω_n:

$$Y(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}U(s)$$

- Dependendo do valor do fator de amortecimento ζ (admensional), o sistema de 2ª ordem assume os comportamentos:

não amortecido	$\zeta = 0$
subamortecido	$0 < \zeta < 1$
criticamente amortecido	$\zeta = 1$
sobreamortecido	$\zeta > 1$

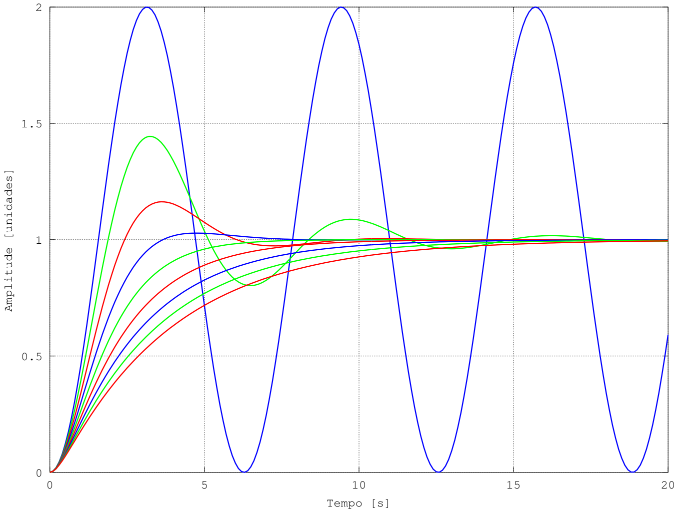
Sistema de 2ª ordem

- O comportamentos dinâmico pode ser analisado em função das raízes do sistema de 2ª ordem:

Caso	F. de Amort.	Raízes
não amortecido	$\zeta = 0$	$\pm j\omega_n$
subamortecido	$0 < \zeta < 1$	$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
criticamente amortecido	$\zeta = 1$	$-\omega_n$
sobreamortecido	$\zeta > 1$	$-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

- Note que só haverá oscilações se as raízes do sistema forem complexo-conjugadas, as quais sempre ocorrem aos pares.

Sistema de 2ª ordem



Sistema de 2ª ordem

- Assumindo o caso subamortecido, a resposta temporal para uma entrada impulso unitário:

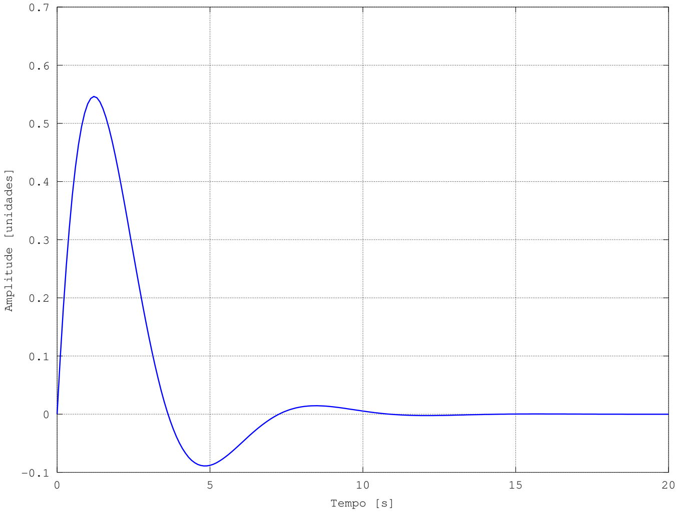
$$y(t) = K\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$$

- Para uma entrada degrau unitário:

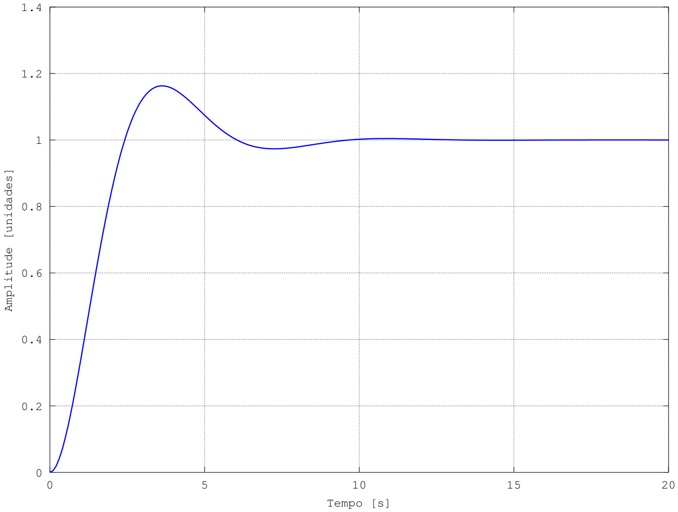
$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \cos^{-1}\zeta\right)\right]$$

- A resposta transiente de um sistema dinâmico de 2ª ordem é dada por um sinal oscilatório confinado a uma exponencial decrescente (se o sistema for estável).
- Assumindo o caso sobreamortecido, a resposta temporal para uma qualquer passa a ser dada pela soma de dois sistemas de 1ª ordem, predominando as constantes de tempo.

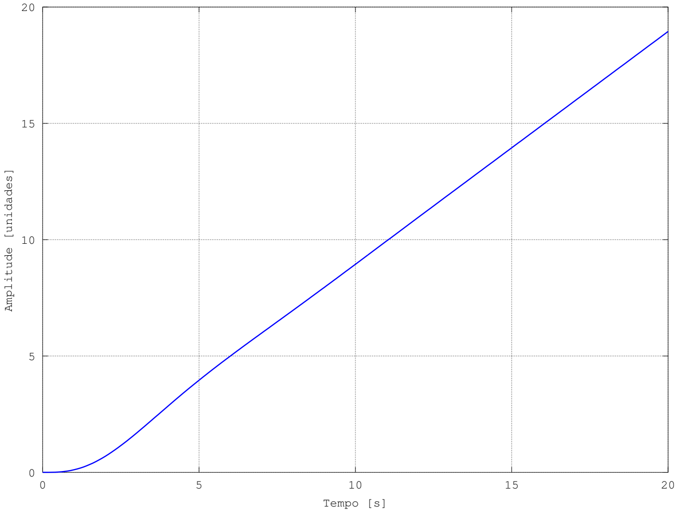
Sistema de 2ª ordem



Sistema de 2ª ordem



Sistema de 2ª ordem



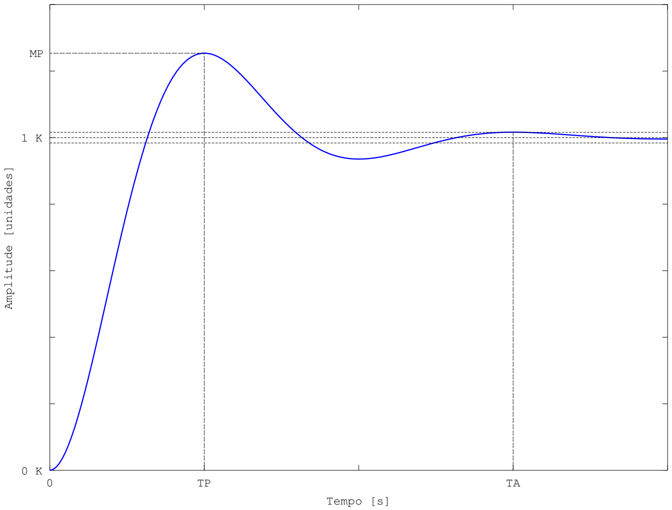
Sistema de 2ª ordem

- O parâmetro K é o ganho do sistema (admensional) e representa o quanto a saída está amplificada em relação à entrada degrau em regime permanente.

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)\frac{1}{s} = K$$

- O parâmetro ω_n é a frequência natural do sistema (dada em radianos por segundos), a qual também é chamada de frequência não-amortecida, e $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ é chamada de frequência amortecida, frequência na qual o sistema de fato oscila.
- O produto $\zeta\omega_n$ é o inverso da constante de tempo do sistema, na qual o sistema será considerado em regime permanente a partir de $\frac{4}{\zeta\omega_n}$, com um erro em regime menor do que 2%.

A resposta temporal e o sistema de 2ª ordem



A resposta temporal e o sistema de 2ª ordem

- Da resposta temporal para uma entrada degrau unitário, pode-se definir as figuras de mérito:

tempo de pico	T_P
máximo pico	M_P
valor em regime permanente	K
tempo de acomodação	T_A
ultrapassagem máxima	*overshoot*

$$overshoot = \frac{M_P - K}{K} \times 100\%$$

A resposta temporal e o sistema de 2ª ordem

- As relações entre as figuras de mérito e os parâmetros de um sistema de 2ª ordem são dadas por:

$$T_P = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

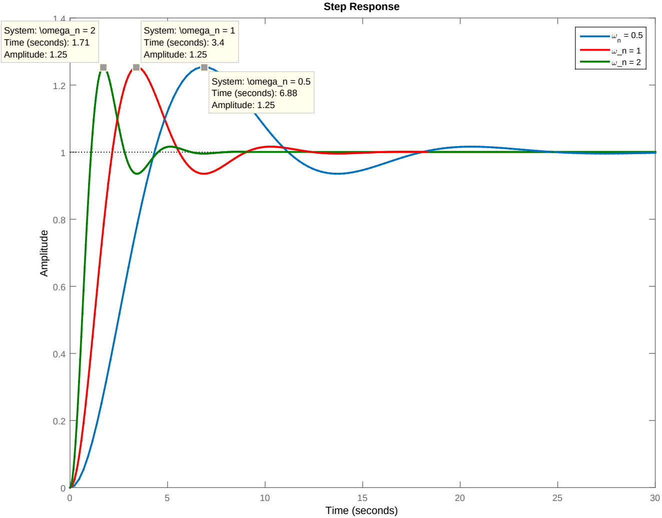
$$M_P = K\left[1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right]$$

$$overshoot = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- Note que estas relações somente são válidas para sistemas de 2ª ordem subamortecidos, os quais serão o objetivo a ser alcançado no projeto das malhas de controle.

Sistema de 2ª ordem



Sistema de 2ª ordem