ECA706 - Sistemas de Controle Digital

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá

Engenharia Elétrica

Aula 06

Técnicas de Análise de Estabilidade de Sistemas a Tempo Discreto

Prof. Jeremias Barbosa Machado
jeremias@unifei.edu.br
02 de junho de 2020

Introdução

- Na aula anterior vimos que a faixa primária no plano-s é mapeada no plano-z através de um círculo unitário com centro na origem. Se os pólos do sistema no plano-s devem estar dentro da faixa primária para que o sistema seja assintoticamente estável, isto significa que no plano-z os pólos devem estar todos dentro do círculo unitário;
- Isto também pode ser verificado ao se fazer a expansão em frações parciais da função de transferência da saída $Y(z)$ em relação à entrada $R(z)$:

$$Y(z) = \frac{r_1 z}{z-p_1} + \frac{r_2 z}{z-p_2} + \ldots + \frac{r_n z}{z-p_n} + Y_R(z)$$

$$y(k) = r_1(p_1)^k + r_2(p_2)^k + \ldots + r_n(p_n)^k + y_R(k)$$

- Logo, o módulo do pólo deve ser menor que a unidade de forma que a saída não cresça para o infinito conforme k tende ao infinito;
- Se um pólo está sobre o círculo unitário, então haverá um termo que é limitado em magnitude mas não diminui com o tempo. Diz-se então que o sistema é *marginalmente estável* (se todos os outros estiverem dentro do círculo unitário);
- Em geral, as técnicas de análise de estabilidade para sistemas contínuos podem ser aplicadas para sistemas discretos fazendo-se uma modificação: a transformação bilinear;
- Existem técnicas para a análise de estabilidade de sistemas discretos direto no plano-z: o critério de Jury e o lugar das raízes discreto (no plano-z).

Critério de Jury

- Para sistemas contínuos de ordem pequena, o critério de Routh-Hurwitz oferece uma maneira rápida e simples de se analisar a estabilidade;
- No entanto, para sistemas discretos o critério de Routh-Hurwitz não pode ser diretamente aplicado no plano-z, uma vez que os limites de estabilidade são diferentes;
- Um critério semelhante ao de Routh-Hurwitz e que pode ser aplicado a sistemas discretos diretamente no domínio-z é o critério de Jury;
- Considere então a equação característica de um sistema discreto no plano-z:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad a_n > 0$$

Critério de Jury

- Para sistemas contínuos de ordem pequena, o critério de Routh-Hurwitz oferece uma maneira rápida e simples de se analisar a estabilidade;
- No entanto, para sistemas discretos o critério de Routh-Hurwitz não pode ser diretamente aplicado no plano-z, uma vez que os limites de estabilidade são diferentes;
- Um critério semelhante ao de Routh-Hurwitz e que pode ser aplicado a sistemas discretos diretamente no domínio-z é o critério de Jury;
- Considere então a equação característica de um sistema discreto no plano-z:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad a_n > 0$$

Critério de Jury

- Construímos a tabela da seguinte forma:

z^0	z^1	z^2	$\dots$	z^{n-k}	$\dots$	z^{n-1}	z^n
a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-k}	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-k}	$\dots$	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_{k-1}	$\dots$	b_0	
c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-k}	$\dots$		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\dots$	c_{k-2}	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
l_0	l_1	l_2	l_3				
l_3	l_2	l_1	l_0				
m_0	m_1	m_2					

- Note que os elementos das linhas pares são os elementos da linha anterior em ordem reversa;

Critério de Jury

- Os elementos das linhas ímpares são definidos da seguinte forma:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \qquad \dots$$

- Na tabela não pode existir nenhum elemento com índice (subscrito) negativo!;
- A última linha da tabela deve possuir sempre três elementos;

Critério de Jury

- As condições suficientes e necessárias para que o polinômio $Q(z)$ não possua raízes fora ou sobre o círculo unitário são:
  - $Q(1) > 0$
  - $(-1)^n Q(-1) > 0$
  - $|a_0| < a_n$
  - $|b_0| > |b_{n-1}|$
  - $|c_0| > |c_{n-2}|$
  - $|d_0| > |d_{n-3}|$
  - $\vdots$
  - $|m_0| > |m_2|$
- Para um sistema de segunda ordem, a tabela conterá apenas uma única linha. Para cada ordem adicional, mais duas linhas deverão ser inseridas;
- Note também que, para um sistema de n-ésima ordem, $n+1$ restrições deverão ser checadas;
- Se as três primeiras condições não forem atendidas, o algoritmo já pode ser parado;
- Para cada linha construída, teste a restrição equivalente e, caso não seja satisfeita, parar o algoritmo.

Critério de Jury

Exemplo 6.1

Suponha que a equação característica de um determinado sistema discreto em malha fechada possua a seguinte expressão:

$$Q(z) = z^4 - 1,05z^3 + 2,2z^2 - 0,05z + 0,75 \ .$$

Através do critério de Jury, analise a estabilidade deste sistema.

Critério de Jury

Resolução Exemplo 6.1

- Primeiro vamos analisar $Q(1)$:

$$Q(1) = 1^4 - 1,05.1^3 + 2,2.1^2 - 0,05.1 + 0,75 = 2,85 > 0 \qquad \text{OK!}$$

- Agora vamos analisar $(-1)^4 Q(-1)$:

$$(-1)^4 Q(-1) = (-1)^4 - 1,05.(-1)^3 + 2,2.(-1)^2 \\ - 0,05.(-1) + 0,75 = 5,05 > 0 \qquad \text{OK!}$$

- Analisando agora $|a_0| < a_4$:

$$|0,75| < 1 \qquad \longrightarrow \qquad 0,75 < 1 \qquad \text{OK!}$$

- Podemos então começar a aplicar o algoritmo;

Critério de Jury

Continuação da Resolução Exemplo 6.1

- Tabela:

z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
0,75	−0,05	2,2	−1,05	1
1	−1,05	2,2	−0,05	0,75
b_0	b_1	b_2	b_3	
b_3	b_2	b_1	b_0	
c_0	c_1	c_2		

- Calculando os coeficientes b_i:

$$b_0 = a_0.a_0 - a_4.a_4 = -0,4375 \qquad b_1 = a_0.a_1 - a_4.a_3 = 1,0125$$

$$b_2 = a_0.a_2 - a_4.a_2 = -0,55 \qquad b_3 = a_0.a_3 - a_4.a_1 = -0,7375$$

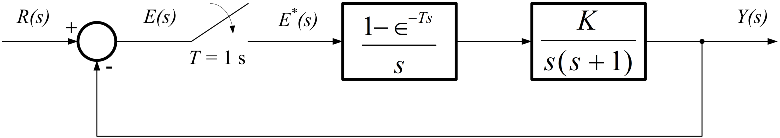
- Testando a quarta restrição:

$$|-0,4375| > |-0,7375| \qquad \longrightarrow \qquad 0,4375 < 0,7375 \qquad \text{INSTÁVEL!}$$

Critério de Jury

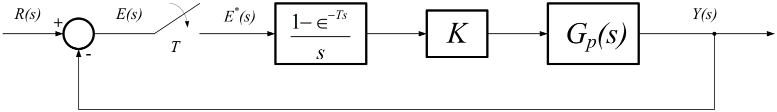
Exemplo 6.2

Para a malha de controle da figura a seguir, determine a faixa de valores de K para o qual o sistema é estável através do critério de Jury.



Lugar das Raízes no Plano-z

- Considere o sistema em malha fechada da figura a seguir:



- A função de transferência da malha fechada é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}$$

- A equação característica é:

$$1 + KG(z) = 0$$

- O lugar das raízes é o lugar geométrico formado pelas raízes da equação característica em função do parâmetro K (real e positivo).

Lugar das Raízes no Plano-z

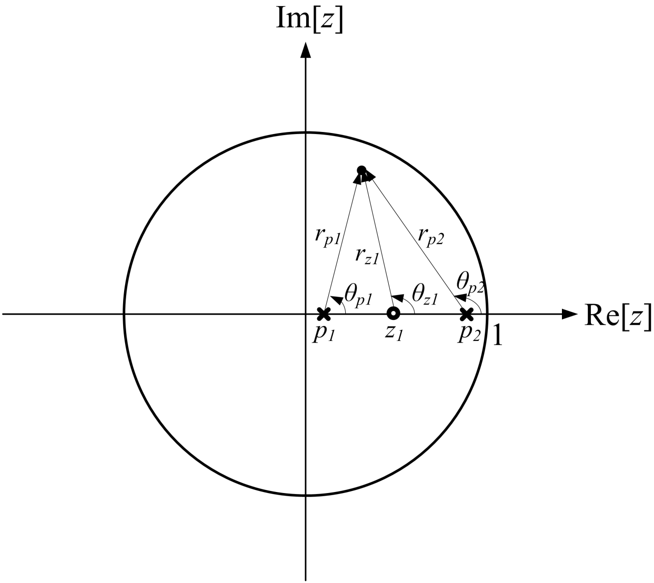
- As regras de construção do lugar das raízes para sistemas discretos no tempo são as mesmas que para sistemas contínuos no tempo, uma vez que as raízes de uma equação dependem apenas dos coeficientes e não da designação das variáveis em si. No entanto, convém lembrar que a região estável no plano-z é o círculo unitário;
- Da mesma forma, o critério de ângulo para determinar se um ponto faz parte do lugar das raízes de um determinado sistema também é válido:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{p_i} - \sum_{j=1}^{m} \theta_{z_j} = \pi \text{ [rad]}$$

- E, se um determinado ponto faz parte do lugar das raízes, o critério de módulo para determinar o valor do ganho K também é válido:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} r_{p_i}}{\prod_{j=1}^{m} r_{z_i}}$$

Lugar das Raízes no Plano-z



Lugar das Raízes no Plano-z

Regras de Construção do Lugar das Raízes

Para a equação característica

$$1 + KG(z) = 0$$

1. O lugar das raízes começa nos pólos de $G(z)$ e termina nos zeros de $G(z)$;
2. Um determinado trecho sobre o eixo real só faz parte do lugar das raízes se a soma do número de pólos e zeros de $G(z)$ à direita de um ponto no trecho for ímpar;
3. O lugar das raízes é sempre simétrico em relação ao eixo real;
4. O número de assíntotas α é igual ao número de pólos n_p de $G(z)$ menos o número de zeros n_z de $G(z)$;
5. O ângulo das assintotas é dado por:

$$\varphi = \pm \frac{2k+1}{\alpha}\pi \text{ [rad]} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \alpha - 1\ ;$$

Lugar das Raízes no Plano-z

Regras de Construção do Lugar das Raízes

6 O ponto de intersecção das assíntotas no eixo real é:

$$\tau = \frac{\sum \text{pólos de } G(z) - \sum \text{zeros de } G(z)}{\alpha} \; ;$$

7 Os pontos de separação são dados pelas raízes de:

$$\frac{d}{dz} G(z) = 0 \; ;$$

8 Os pontos nos quais o lugar das raízes cruza o círculo unitário podem ser encontrados através do critério de Jury;

9 Os ângulos de partida, se existentes e forem desejados, podem ser calculados diretamente através do critério de ângulo;

10 Os ângulos de chegada, se existentes e forem desejados, podem ser calculados também diretamente através do critério de ângulo;

Lugar das Raízes no Plano-z

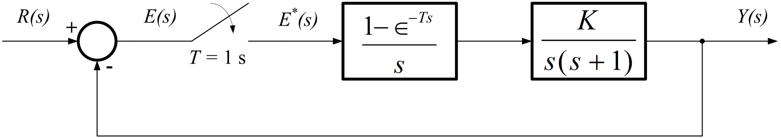
Exemplo 6.3

Para a malha de controle da figura a seguir:

a Determine se o ponto $z = 0,545 \pm j0,512$ faz parte do lugar das raízes. Caso afirmativo, calcule o ganho K que impõe estes pólos em malha fechada;

b Determine se o ponto $z = 0,2 \pm j0,85$ faz parte do lugar das raízes. Caso afirmativo, calcule o ganho K que impõe estes pólos em malha fechada;

c Esboce o lugar das raízes deste sistema.



Lugar das Raízes no Plano-z

Resolução do Exemplo 6.3

$$G(z) = \frac{0,3679z + 0,2642}{z^2 - 1,3679z + 0,3679} = \frac{0,3679(z + 0,7183)}{(z-1)(z-0,3679)} \ ;$$

- Pólos em $p_1 = 1$ e $p_2 = 0,3679$ e zeros em $z_1 = -0,7183$;
- Analisando o primeiro ponto $z = 0,545 + j0,512$, temos:

$$\theta_{p_1} = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{0,512}{1-0,545}\right) = 2,2973 \text{ [rad]}$$

$$\theta_{p_2} = \tan^{-1}\left(\frac{0,512}{0,545-0,3679}\right) = 1,2378 \text{ [rad]}$$

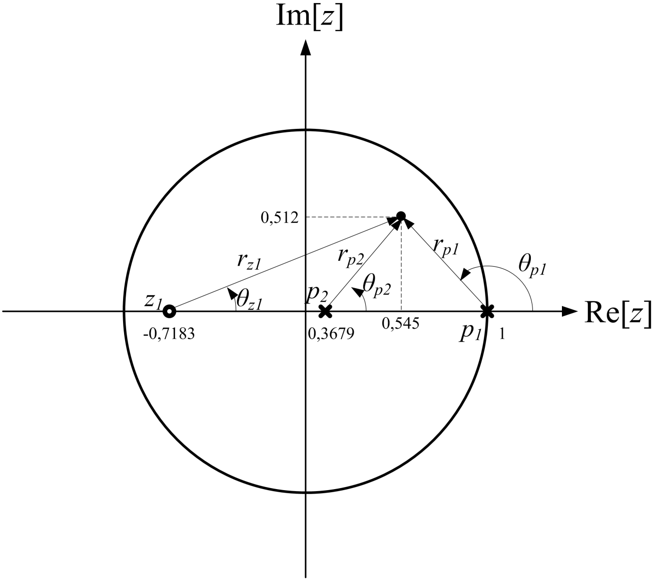
$$\theta_{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{0,512}{0,545-(-0,7183)}\right) = 0,3851 \text{ [rad]}$$

- Logo, pelo critério de ângulo:

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} - \theta_{z_1} = 2,2973 + 1,2378 - 0,3851 = 3,15 \text{ [rad]}$$

- Portanto, o ponto analisado faz parte do lugar das raízes;

Lugar das Raízes no Plano-z



Lugar das Raízes no Plano-z

Continuação da Resolução do Exemplo 6.3

- Analisando os módulos em relação ao ponto $z = 0,545 + j0,512$, temos:

$$r_{p_1} = \frac{0,512}{\sin(\pi - \theta_{p_1})} = 0,6849$$

$$r_{p_2} = \frac{0,512}{\sin\theta_{p_2}} = 0,5418$$

$$r_{z_1} = \frac{0,512}{\sin\theta_{z_1}} = 1,3630$$

- Logo, pelo critério de módulo:

$$K = \frac{r_{p_1}.r_{p_2}}{r_{z_1}} = \frac{0,6849.0,5418}{1,3630} = 0,2723$$

- Como o sistema já possui um ganho de 0,3679, devemos dividir o valor de K encontrado anteriormente por esse ganho para encontrar o verdadeiro valor de K:

$$K = \frac{0,2723}{0,3679} = 0,7401$$

Lugar das Raízes no Plano-z

Continuação da Resolução do Exemplo 6.3

- Analisando o segundo ponto $z = 0,2 + j0,85$, temos:

$$\theta_{p_1} = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{0,85}{1 - 0,2}\right) = 2,3259 \text{ [rad]}$$

$$\theta_{p_2} = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{0,85}{0,3679 - 0,2}\right) = 1,7658 \text{ [rad]}$$

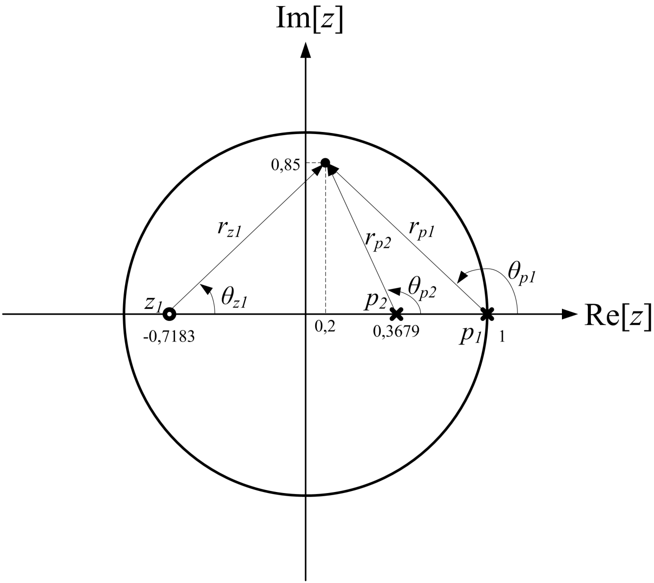
$$\theta_{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{0,85}{0,2 - (-0,7183)}\right) = 0,7468 \text{ [rad]}$$

- Logo, pelo critério de ângulo:

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} - \theta_{z_1} = 2,3259 + 1,7658 - 0,7468 = 3,3449 \text{ [rad]}$$

- Portanto, o ponto analisado não faz parte do lugar das raízes;

Lugar das Raízes no Plano-z



Lugar das Raízes no Plano-z

Continuação da Resolução do Exemplo 6.3

- Pelas regras de construção do lugar das raízes, temos:
  1. Início: $z = 1$ e $z = 0,3679$. Final: $z = -0,7183$ e $z = -\infty$;
  2. Trechos do eixo real: entre $z = 1$ e $z = 0,3679$ e à esquerda de $z = -0,7183$;
  3. Simetria em relação ao eixo real;
  4. Número de assíntotas: $\alpha = 2 - 1 = 1$;
  5. Ângulo das assíntotas: $\varphi = \pi$;
  6. Intersecção das assíntotas no eixo real:

$$\tau = \frac{1 + 0,3679 - (-0,7183)}{1} = 2,0862$$

  7. Pontos de separação:

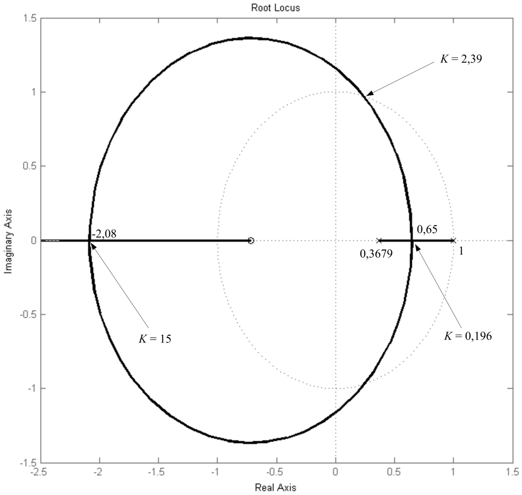
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{0,3679z + 0,2642}{z^2 - 1,3679z + 0,3679}\right) = 0$$

$$0,3679(z^2 - 1,3679z + 0,3679) - (0,3679z + 0,2642)(2z - 1,3679) = 0$$

$$z = 0,65\ (K = 0,196) \qquad \text{e} \qquad z = -2,08\ (K = 15)\ ;$$

  8. Pontos de intersecção: $z = 0,244 \pm j0,970\ (K = 2,39)$;

Lugar das Raízes no Plano-z



Transformação Bilinear

- A *transformação bilinear* é definida da seguinte forma:

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \ ;$$

- Resolvendo para w, temos:

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \ ;$$

- A transformação bilinear é útil pois permite transformar todo o círculo unitário no plano-z (discreto) de volta ao eixo imaginário no plano-w (contínuo). Isso pode ser visto da seguinte forma:

$$w = \frac{2}{T}\frac{\epsilon^{j\omega T} - 1}{\epsilon^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T}\frac{\epsilon^{j\omega T/2} - \epsilon^{-j\omega T/2}}{\epsilon^{j\omega T} + \epsilon^{-j\omega T/2}}$$

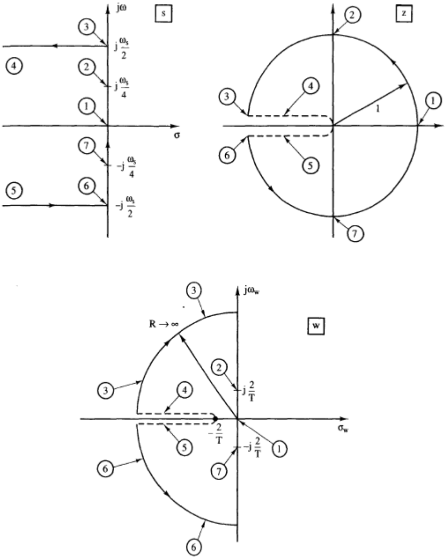
$$w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- Denotando $w = \sigma_w + j\omega_w$, temos que:

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- A expressao acima mostra a relação entre as frequências no plano-s e as frequências no plano-w. Observe que para baixas frequências, as frequências no plano-s e plano-w são iguais.

Transformação Bilinear



Critério de Routh-Hurwitz

- Uma vez que a transformação bilinear converte a região de estabilidade no plano-z, que é o círculo unitário, de volta ao SPE no plano-w, podemos utilizar as técnicas de análise de estabilidade de sistemas contínuos normalmente para o sistema no domínio w, incluindo o critério de Routh-Hurwitz;
- O critério de Routh-Hurwitz é um algoritmo utilizado para determinar se as raízes de uma equação possuem parte real positiva;
- Considere então um polinômio $Q(w)$ da seguinte forma:

$$Q(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0 \ ,$$

  onde $a_n \neq 0$;
- Construímos a tabela da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}$$

Critério de Routh-Hurwitz

- Os elementos das linhas b, c e assim por diante são calculados da seguinte forma:

$$b_k = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2k} \\ a_{n-1} & a_{n-1-2k} \end{vmatrix}$$

$$c_k = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-1-2k} \\ b_1 & b_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$d_k = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_{k+1} \\ c_1 & c_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

- Os elementos de uma determinada linha são calculados com base nas duas linhas anteriores;
- Um elemento de uma linha não existirá se no determinante que calcula seu valor possui uma coluna com elementos que não existem (a_{-1}, a_{-2}, etc...);
- Lembrar que sempre a última linha, a penúltima linha e a antepenúltima linha possuem, respectivamente, um, um e dois elementos;
- **O número de raízes com parte real positiva (no SPD) é igual ao número de trocas de sinal nos elementos da primeira coluna**;

Critério de Routh-Hurwitz

Na análise via critério de Routh-Hurwitz podem ocorrer três situações

- Caso 1 - Todos os elementos existem. Este é o caso padrão. Nenhum problema ocorre na aplicação do algoritmo;
- Caso 2 - Um elemento da primeira coluna é nulo sendo que ao menos um elemento da mesma linha não é nulo. Neste caso, substituímos o valor zero da primeira coluna por uma valor muito pequeno (infinitesimal) ε, e continuamos o algoritmo, sabendo que alguns elementos estarão em função de ε, e analisamos normalmente se há troca de sinal. Outra alternativa é, no polinômio a ser analisado, substituir $w = 1/x$, gerando um polinômio $x^{-n}Q(x)$. Sendo assim, analisamos $Q(x)$ normalmente;

Critério de Routh-Hurwitz

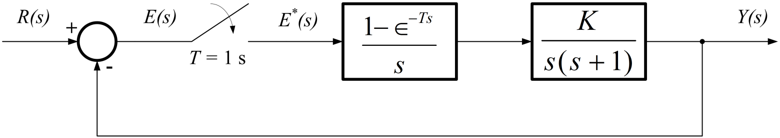
- Caso 3 - Todos os elementos de uma determinada linha são nulos. Este é o caso mais complexo. Neste caso, o polinômio $Q(w)$ contém um “polinômio par” como fator. Um polinômio par é aquele no qual os expoentes de w são números inteiros pares ou zero. Os coeficientes deste polinômio par são dados pelos coeficientes da linha imediatamente anterior. Uma opção, quando este polinômio surge, é separá-lo de $Q(w)$, fazendo $Q(w) = Q_a(w)Q_p(w)$, onde $Q_p(w)$ é o polinômio par, e analisa-se separadamente $Q_a(w)$ e $Q_p(w)$. A dificuldade desta abordagem é fatorar os polinômios caso eles sejam de alta ordem. Um método mais eficaz e universal de ser aplicado é substituir a linha nula pelos coeficientes da derivada do polinômio par, ou seja, $dQ_p(w)/dw$, e continuar o algoritmo. Uma observação importante é que o fato de existir o polinômio par implica que as raízes deste polinômio serão simétricas em relação à origem. Neste caso, podem ocorrer ainda três casos: as raízes são reais e distintas, puramente imaginária ou complexo-conjugadas (4 raízes, no mínimo). Isto significa dizer que o sistema é, no mínimo, marginalmente estável, podendo ser até instável, a depender da continuação do algoritmo;

Lembrar que se for desejado saber se as raízes estão à esquerda de um determinado ponto σ no eixo real, deve-se fazer $w = \hat{w} - \sigma$ e então analisar $Q(\hat{w})$.

Critério de Routh-Hurwitz

Exemplo 6.4

Para a malha de controle da figura a seguir, determine a faixa de valores de K para o qual o sistema é estável através do critério de Routh-Hurwitz.



Critério de Nyquist

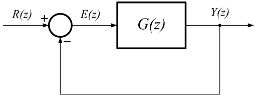
- O critério de Nyquist é baseado no princípio do argumento de Cauchy. Resumidamente, o princípio do argumento de Cauchy é: se temos uma função polinomial $f(x)$, uma curva fechada C no plano-x e então mapeamos esta curva C através da função $f(x)$ (de modo que $f(x)$ seja analítica em C), então o número de circulações em torno da origem N_0 é dado por:

$$N_0 = Z_0 - P_0$$

  onde Z_0 é o número de pontos no qual $f(x)$ é nula (zeros) dentro ou em C e P_0 é o número de pontos no qual $f(x)$ não é analítica (pólos) dentro de C;
- A ideia principal, no controle contínuo, é utilizar a resposta em frequência da malha aberta para criar um mapeamento da região instável no plano-s de forma que o critério determine o número de zeros da equação característica (pólos em malha fechada) situados nesta região instável a partir do número de circulações em torno do ponto $-1 + j0$ e dos pólos em malha aberta situados também na região instável;
- No controle digital a ideia continua sendo a mesma, fazendo-se as adaptações necessárias: a região de estabilidade agora é determinada pelo círculo unitário e a curva C deverá agora estar nesta região. Isto é facilmente verificado sabendo-se que $z = \epsilon^{j\omega T}$, e o mapeamento de $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$ (região estável em s) gera esta curva!

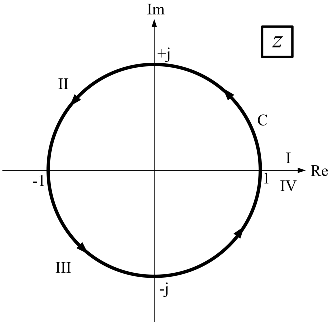
Critério de Nyquist

- Malha de controle:



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{\underbrace{1+G(z)}_{\text{Equação Característica}}}$$

- Caminho de Nyquist no plano-z:



Critério de Nyquist

- Logo, o critério de Nyquist pode ser enunciado da seguinte forma: Seja Z o número de zeros da equação característica fora do círculo unitário, N o número de circulações em torno do ponto $-1 + j0$ do diagrama de Nyquist de $G(z)$ (positivo se horário) e P o número de pólos de $G(z)$ fora do círculo unitário. Então, pelo critério de Nyquist, temos que:

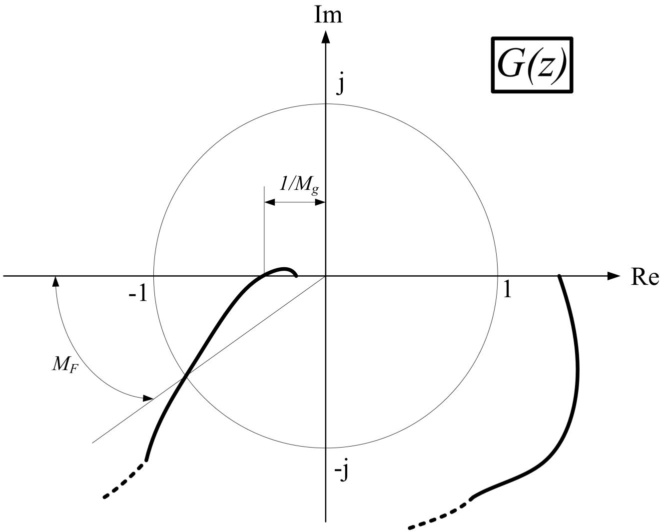
$$Z = P + N$$

- Na realidade o diagrama de Nyquist pode ser obtido de três formas: a partir de $G^*(s)$, de $G(z)$ e $G(w)$, na qual em cada uma delas a faixa de valores que a variável assume é diferente, **mas o diagrama de Nyquist resultante não é!**

Função de Malha Aberta	Faixa de Valores da Variável
$G^*(s)$	$s = j\omega$, $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$
$G(z)$	$z = \epsilon^{j\omega T}$, $0 \leq \omega T \leq \pi$
$G(w)$	$w = j\omega_w$, $0 \leq \omega_w \leq \infty$

- A margem de ganho no plano z será o inverso da distância entre o ponto no qual o diagrama de Nyquist cruza o eixo real e a origem, e a margem de fase continua sendo o ângulo formado pelo eixo real e a reta que passa pelo ponto no qual o diagrama de Nyquist cruza o círculo unitário.

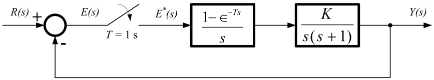
Critério de Nyquist

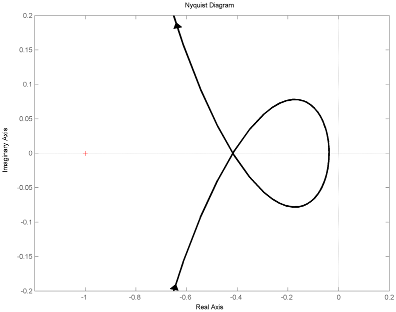


Critério de Nyquist

Exemplo 6.7

Dada a malha de controle abaixo e o respectivo diagrama de Nyquist de $G(z)$ para $K = 1$, analise a estabilidade deste sistema em malha fechada de acordo com o critério de Nyquist. Determine a faixa de valores de K para os quais o sistema é estável em malha fechada.





Diagramas de Bode

- Assim como nos sistemas contínuos, é possível construir um diagrama de módulo e fase em função da frequência nos sistemas discretos;
- Para construir o diagrama de Bode de um sistema discreto, temos duas opções:
  - Analisar módulo e fase de $G^*(s)$ ou $G(z)$, respectivamente para $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$ e $0 \leq \omega T \leq \pi$, para cada frequência $s = j\omega$, e então obter a frequência no plano-w correspondente através de

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \; ;$$

  - Diretamente, como nos sistemas contínuos, a partir de $G(w)$;
- O critério de estabilidade de Bode é controverso e gera discussões sobre as condições suficientes e necessárias, e por isso raramente é utilizado para determinar estabilidade, sendo preferível o critério de Nyquist;
- Uma forma alternativa de se apresentar o diagrama de Bode é, na primeira opção apresentada anteriormente, utilizar a frequência "normalizada", isto é, obter o diagrama de Bode até $\omega = \omega_s/2$. Isto geralmente resulta em diagramas de Bode menos "complexos" de se analisar.

Diagramas de Bode

- Exemplo do diagrama de Bode com frequência não-normalizada (plano-w) $G(w) = \dfrac{-0,0259w^2 - 0,2642w + 0,6321}{0.6839w^2 + 0.6321w}$ da função $G(z) = \dfrac{0,3679z + 0,2642}{z^2 - 1,368z + 0,3679}$ e com frequência normalizada (plano-z) da função com $T = 1$ s: