ECAC01A - MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Universidade Federal de Itajubá - Campus Itajubá
Instituto de Engenharia de Sistemas e Tecnologias da Informação

Aula 04

Resposta em Frequência

Prof. Jeremias B. Machado
12 de maio de 2020

Resposta em frequência (Introdução)

- Como a função de transferência de um sistema é obtida para condições inciais nulas, o operador s pode ser substituído por $j\omega$, definindo o conceito da **resposta em frequência**.
- A resposta em frequência pode ser utilizada para descrever: (i) a saída de um sistema dinâmico quando é aplicado um sinal senoidal na sua entrada; (ii) o espectro de frequência de um sinal determinístico via a sua transformada de Fourier; (iii) o espectro de frequência de um sinal estocástico via a sua densidade espectral.
- A primeira abordagem será a utilizada na análise de sistemas, pois possui a vantagem de estar diretamente relacionada com a resposta temporal ao ponto que, para o caso monovariável, o conceito de resposta em frequência e o de função de transferência acabam se confundindo.

Resposta em frequência (Introdução)

- Considere um sistema dinâmico linear e invariante no tempo descrito pela relação entre o sinal de entrada $u(t)$ e o sinal de saída $y(t)$.

- Uma vez que o sistema dinâmico é linear, então se na entrada $u(t)$ for aplicado um sinal senoidal persistente (aplicado desde $t = -\infty$) com amplitude A, frequência ω e fase α, a saída $y(t)$ também será um sinal senoidal de mesma frequência ω, mas com amplitude B e fase β.

$$u(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$y(t) = B\sin(\omega t + \beta)$$

Resposta em frequência (Introdução)

- A análise dos sinais senoidais de entrada e saída indica que há uma relação (razão) entre as amplitudes A e B e que há uma defasagem em eles de $\beta - \alpha$.
- De posse da função de transferência do sistema, a saída está relacionada a entrada por:

$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

- Recordando as propriedades dos números complexos:

$$\mid Y(j\omega) \mid = \mid G(j\omega) \mid . \mid U(j\omega) \mid$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega)$$

- Então:

$$\mid G(j\omega) \mid = \frac{B}{A} \qquad \angle G(j\omega) = \beta - \alpha$$

Resposta em frequência (Introdução)

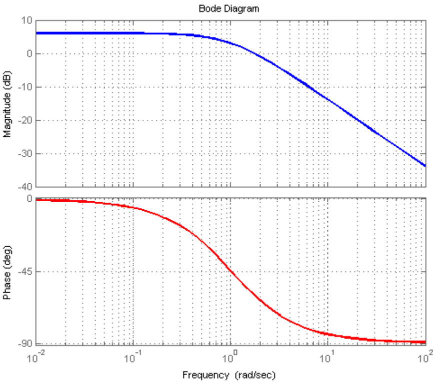
- Fisicamente, um sinal senoidal que passa através de um sistema dinâmico linear tem a sua amplitude amplificada (ou atenuada) por um fator de $\mid G(j\omega) \mid$ e a sua fase deslocada por um fator $\angle G(j\omega)$.
- Observe que a razão entre as amplitudes e a defasagem angular podem ser obtidas diretamente da função de transferência avaliando o seu módulo e a sua fase para cada frequência ω. Assim, o conceito de resposta em frequência e o de função de transferência acabam se confundindo.

Diagrama de Bode

É uma forma de se expressar a resposta em frequência por um gráfico de módulo e de fase em função da frequência, no qual, geralmente, se emprega uma escala logarítmica para a frequência e o módulo e uma escala linear para a fase.

Resposta em frequência (Introdução)

Diagrama de Bode



Módulo - dB $= 20log_{10}(x)$ Fase - medida em graus

Resposta em frequência (Introdução)

Sistema de fase mínima ou não-mínima

Um sistema é dito de fase mínima se a sua relação entre módulo e fase é única para toda a resposta em frequência. Caso contrário, ele é dito de fase não-mínima.

- A *fase mínima* se refere ao fato de um sistema possuir o mínimo atraso de fase possível para um dado módulo.

$$G_1(s) = 1 \qquad G_2(s) = \frac{s-a}{s+a} \qquad G_3(s) = e^{-\tau s}$$

- Oberve que os três sistemas acima apresentam o módulo igual unitário. Contudo, zeros no semi-plano à direita ou atrasos de transporte contribuem com um atraso de fase adicional para o sistema quando comparado à um sistema de fase-mínima com o mesmo módulo.

Considerações iniciais

- Sendo assim, um sinal senoidal que passa através de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é amplificado (ou atenuado) pelo ganho $|G(j\omega)|$ e deslocado pela fase $\angle G(j\omega)$, permanecendo com a mesma frequência.

- O ganho e a fase são obtidos da função de transferência pela troca de s por $j\omega$, definindo a **resposta em frequência**.

$$G(s) \Rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| \; \angle G(j\omega)$$

- Dessa maneira, a resposta em frequência representa o comportamento de um sistema dinâmico quando a frequência do sinal senoidal de entrada varia de zero a infinito.

Diagrama de Bode

- Uma vez que a função de transferência passa a ser expressa por um número complexo, a resposta em frequência pode ser representada pelo módulo e fase como uma função *explícita* da frequência em uma escala logarítmica na base 10 (décadas de frequência); a representação é conhecida como **diagrama de Bode**, na qual o módulo é expresso na escala em decibel. A principal vantagem de se utilizar a escala em decibel é que a multiplicação dos módulos é convertida em uma adição, o que já ocorre com as fases.
- Os fatores que mais ocorrem em uma função de transferência arbitrária são:
  - Ganhos.
  - Pólos e zeros na origem.
  - Pólos e zeros reais no semi-plano à esquerda.
  - Pólos e zeros complexo-conjugados no semi-plano à esquerda.

Diagrama de Bode

- Para um ganho K, tem-se:

$$G(s) = K$$

$$|G(j\omega)| = K \qquad \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

- O módulo é constante (o valor do ganho) e a fase permanece inalterada com o aumento da frequência.
- Caso o ganho K seja proveniente da multiplicação de funções de transferências, a representação do módulo total em decibéis é dada pela adição de cada módulo individualmente, simplificando a composição do diagrama de Bode.

$$G(s) = K_1 K_2$$

$$|G(j\omega)| = 20\log(K_1 K_2) = 20\log K_1 + 20\log K_2$$

Diagrama de Bode

- Para um pólo na origem, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$|G(j\omega)| = \omega^{-1} \qquad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

- O módulo é atenuado de 20 dB por década e a fase atrasada de 90° com o aumento da frequência.
- Para um zero na origem, tem-se:

$$G(s) = s$$

$$|G(j\omega)| = \omega \qquad \angle G(j\omega) = +90^\circ$$

- O módulo é amplificado de 20 dB por década e a fase adiantada de 90° com o aumento da frequência.

Diagrama de Bode

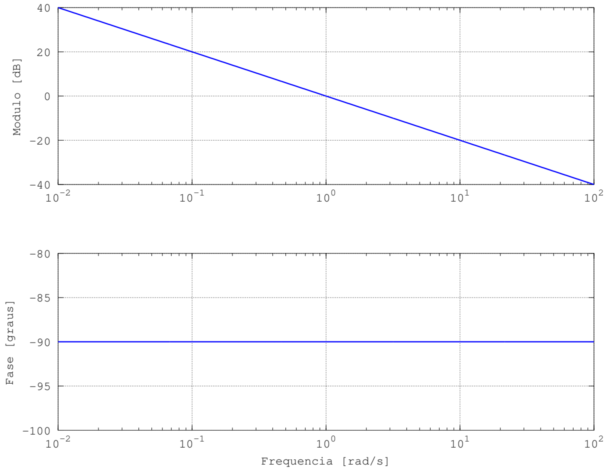


Diagrama de Bode

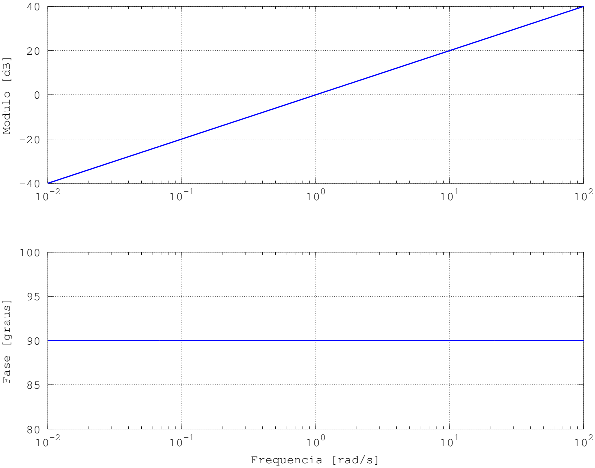


Diagrama de Bode

- Para um pólo real no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{-1/2} \qquad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

	$\omega \to 0$	$\omega = \tau^{-1}$	$\omega \to \infty$
módulo	1	0.707	$(\omega\tau)^{-1}$
fase	$0°$	$-45°$	$-90°$

- Assim, o módulo é atenuado de 20 dB por década a partir da frequência de corte (o inverso da constante de tempo) e a fase atrasada de até $90°$ com aumento da frequência.

Diagrama de Bode

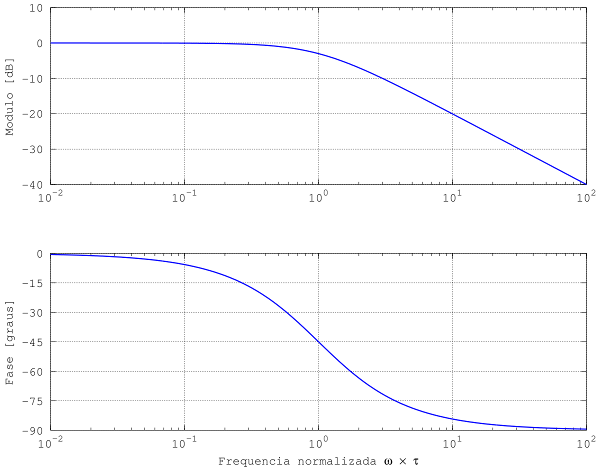


Diagrama de Bode

- Para um zero real no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \tau s + 1$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{1/2} \qquad \angle G(j\omega) = +\tan^{-1}\omega\tau$$

	$\omega \to 0$	$\omega = \tau^{-1}$	$\omega \to \infty$
módulo	1	1.414	$\omega\tau$
fase	$0°$	$+45°$	$+90°$

- Assim, o módulo é amplificado de 20 dB por década a partir da frequência de corte (o inverso da constante de tempo) e a fase adiantada de até $90°$ com aumento da frequência.

Diagrama de Bode

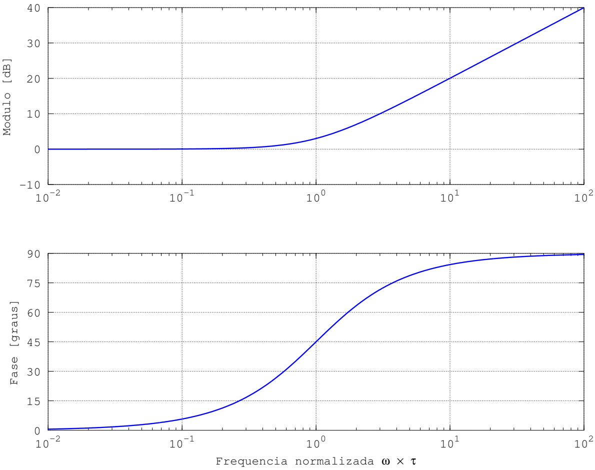


Diagrama de Bode

- O módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos para um pólo real: é constante até a frequência de corte e atenuado de 20 dB por década a partir dessa frequência. Por sua vez, a fase de um pólo real no semi-plano a esquerda é atrasada de 45° na frequência de corte, sendo praticamente 0° a uma década abaixo e praticamente -90° a uma década acima da frequência de corte.
- O módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos para um zero real: é constante até a frequência de corte e amplificado de 20 dB por década a partir dessa frequência. Por sua vez, a fase de um zero real no semi-plano a esquerda é adiantada de 45° na frequência de corte, sendo praticamente 0° a uma década abaixo e praticamente $+90^\circ$ a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

- Para um par de polos complexo-conjugados no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \left[\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Diagrama de Bode

- Dessa maneira:

	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_n$	$\omega \to \infty$
módulo	1	$(2\zeta)^{-1}$	$(\omega/\omega_n)^{-2}$
fase	$0°$	$-90°$	$-180°$

- Em torno da frequência de corte (a frequência natural), há o efeito da ressonância, o qual amplifica o módulo. Para $0.3 \leq \zeta \leq 1$, o módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos: é constante até a frequência de corte e atenuado de 40 dB por década a partir dessa frequência. Já a fase é atrasada de $90°$ na frequência de corte, sendo praticamente $0°$ a uma década abaixo e praticamente $-180°$ a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

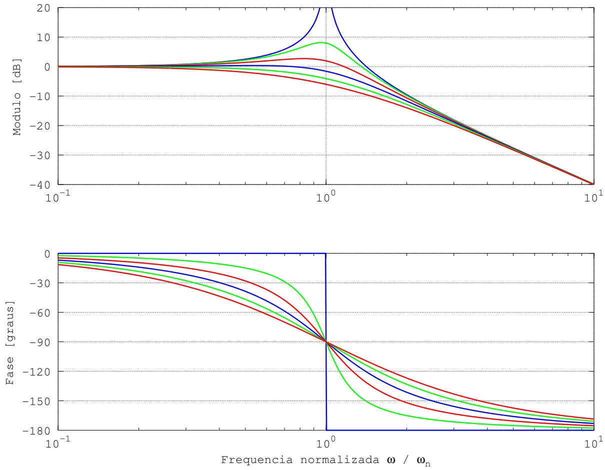


Diagrama de Bode

- Para um par de zeros complexo-conjugados no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$|G(j\omega)| = \left[\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\angle G(j\omega) = +\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Diagrama de Bode

- Dessa maneira:

	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_n$	$\omega \to \infty$
módulo	1	2ζ	$(\omega/\omega_n)^2$
fase	$0°$	$+90°$	$+180°$

- Em torno da frequência de corte (a frequência natural), há o efeito da ressonância, o qual atenua o módulo. Para $0.3 \leq \zeta \leq 1$, o módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos: é constante até a frequência de corte e amplificado de 40 dB por década a partir dessa frequência. Já a fase é adiantada de $90°$ na frequência de corte, sendo praticamente $0°$ a uma década abaixo e praticamente $+180°$ a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

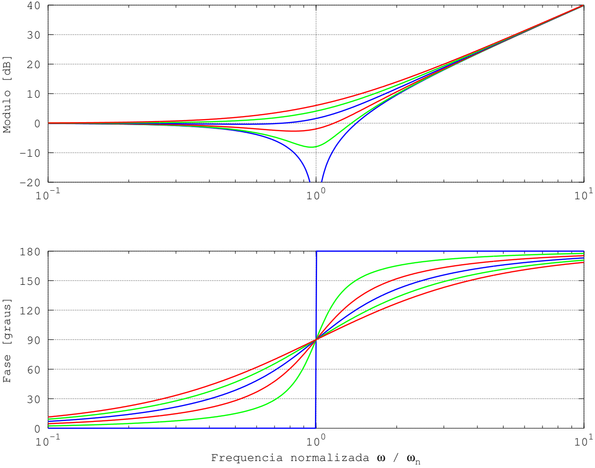


Diagrama de Bode

- Para um sistema dinâmico de fase não-mínima, os zeros no semi-plano à direita ou os atrasos de transporte contribuem com um atraso de fase adicional quando comparado à um sistema dinâmico de fase-mínima com o mesmo módulo.
- Para um zero real no semi-plano à direita, tem-se:

$$G(s) = \tau s - 1$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{1/2} \qquad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

- Para um atraso de transporte, tem-se:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \qquad \angle G(j\omega) = -\omega\tau$$

Diagrama de Bode

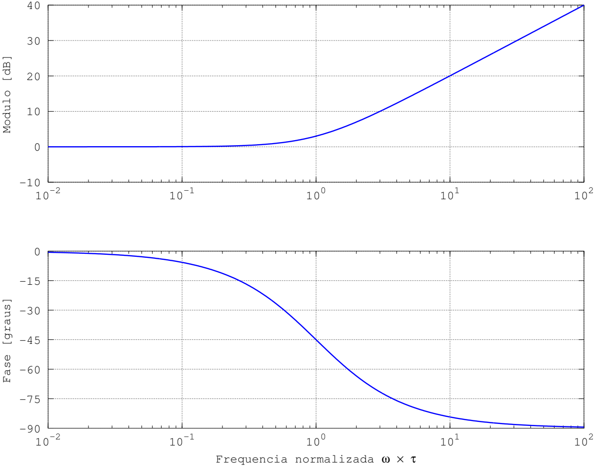


Diagrama de Bode

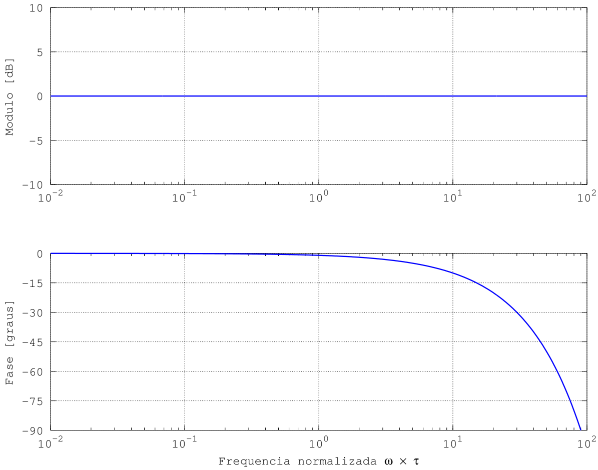


Diagrama de Bode

- Como exemplo, faça o esboço da resposta em frequência das seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = 100\frac{1}{s(s+10)} = 10\frac{1}{s(s/10+1)}$$

$$G_2(s) = 10000\frac{s+1}{(s+10)(s+100)} = 10\frac{s+1}{(s/10+1)(s/100+1)}$$

$$G_3(s) = 1000\frac{s+1}{s^2+4s+100} = 10\frac{s+1}{(s/10)^2+2(0.2)(s/10)+1}$$

$$G_4(s) = 1000\frac{s-1}{(s+10)^2} = 10\frac{s-1}{(s/10+1)^2}$$

Diagrama de Bode

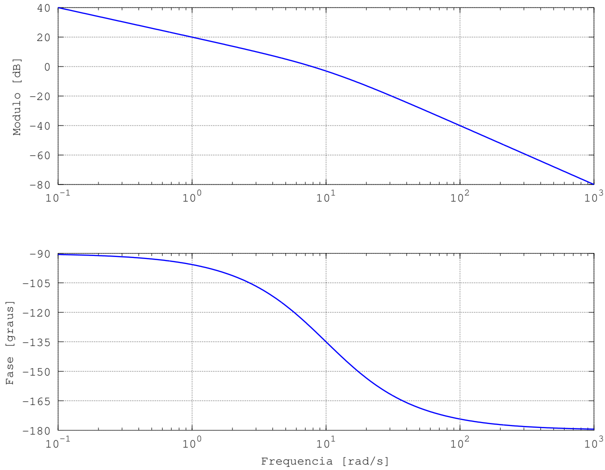


Diagrama de Bode

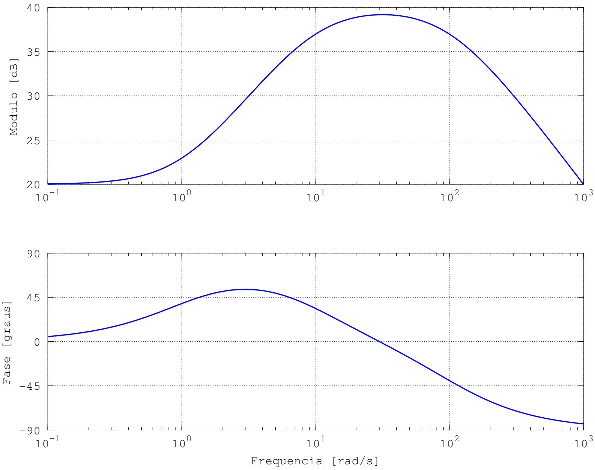


Diagrama de Bode

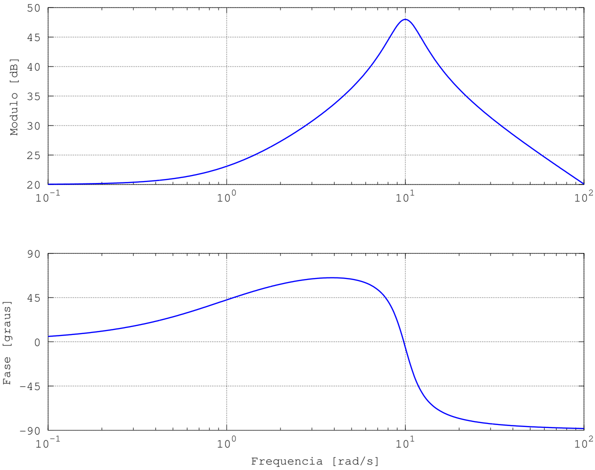


Diagrama de Bode