ECA602 – Sistemas de Controle

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia Eletrônica

Aula 05

Resposta em Frequência

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2013

Considerações iniciais

- Recordando a **aula 01**, um sinal senoidal que passa através de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é amplificado (ou atenuado) pelo ganho $|G(j\omega)|$ e deslocado pela fase $\angle G(j\omega)$, permanecendo com a mesma frequência.

- O ganho e a fase são obtidos da função de transferência pela troca de s por $j\omega$, definindo a **resposta em frequência**.

$$G(s) \Rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| \ \angle G(j\omega)$$

- Dessa maneira, a resposta em frequência representa o comportamento de um sistema dinâmico quando a frequência do sinal senoidal de entrada varia de zero a infinito.

Diagrama de Bode

- Uma vez que a função de transferência passa a ser expressa por um número complexo, a resposta em frequência pode ser representada pelo módulo e fase como uma função *explícita* da frequência em uma escala logarítmica na base 10 (décadas de frequência); a representação é conhecida como **diagrama de Bode**, na qual o módulo é expresso na escala em decibel. A principal vantagem de se utilizar a escala em decibel é que a multiplicação dos módulos é convertida em uma adição, o que já ocorre com as fases.
- Os fatores que mais ocorrem em uma função de transferência arbitrária são:
  - Ganhos.
  - Pólos e zeros na origem.
  - Pólos e zeros reais no semi-plano à esquerda.
  - Pólos e zeros complexo-conjugados no semi-plano à esquerda.

Diagrama de Bode

- Para um ganho K, tem-se:

$$G(s) = K$$

$$|G(j\omega)| = K \qquad \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

- O módulo é constante (o valor do ganho) e a fase permanece inalterada com o aumento da frequência.
- Caso o ganho K seja proveniente da multiplicação de funções de transferências, a representação do módulo total em decibéis é dada pela adição de cada módulo individualmente, simplificando a composição do diagrama de Bode.

$$G(s) = K_1 K_2$$

$$|G(j\omega)| = 20\log(K_1 K_2) = 20\log K_1 + 20\log K_2$$

Diagrama de Bode

- Para um pólo na origem, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$|G(j\omega)| = \omega^{-1} \qquad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

- O módulo é atenuado de 20 dB por década e a fase atrasada de 90° com o aumento da frequência.
- Para um zero na origem, tem-se:

$$G(s) = s$$

$$|G(j\omega)| = \omega \qquad \angle G(j\omega) = +90^\circ$$

- O módulo é amplificado de 20 dB por década e a fase adiantada de 90° com o aumento da frequência.

Diagrama de Bode

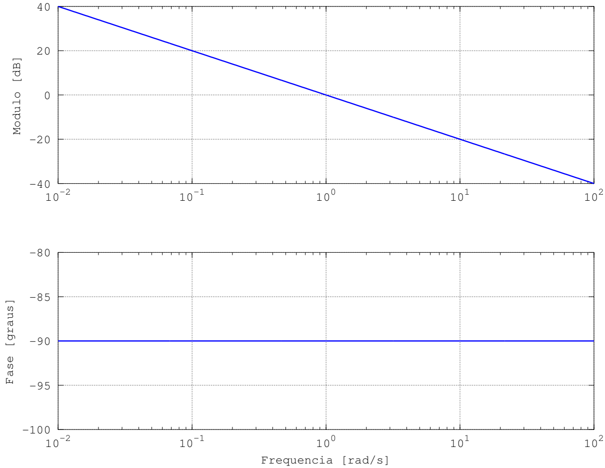


Diagrama de Bode

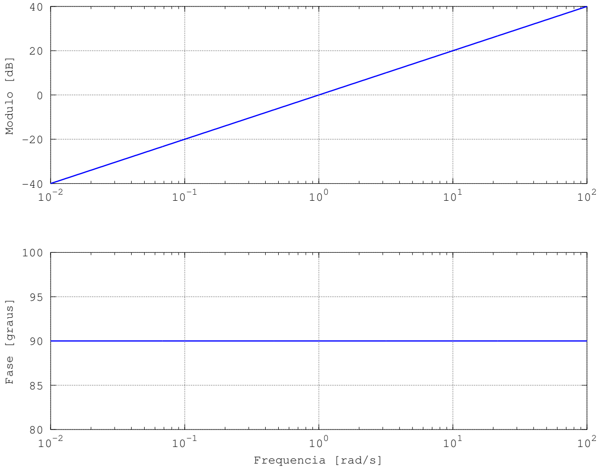


Diagrama de Bode

- Para um pólo real no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{-1/2} \qquad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

	$\omega \to 0$	$\omega = \tau^{-1}$	$\omega \to \infty$
módulo	1	0.707	$(\omega\tau)^{-1}$
fase	$0°$	$-45°$	$-90°$

- Assim, o módulo é atenuado de 20 dB por década a partir da frequência de corte (o inverso da constante de tempo) e a fase atrasada de até $90°$ com aumento da frequência.

Diagrama de Bode

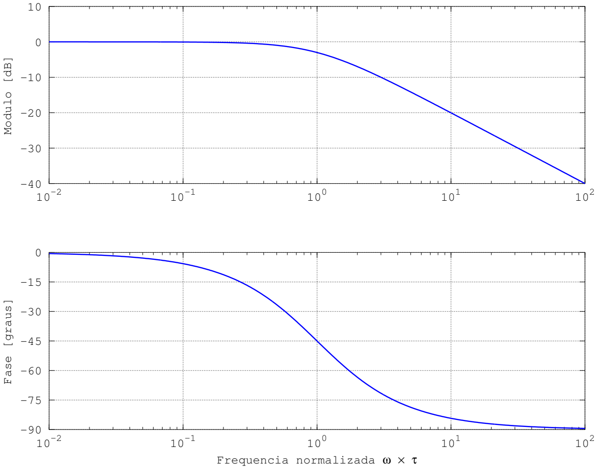


Diagrama de Bode

- Para um zero real no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \tau s + 1$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{1/2} \qquad \angle G(j\omega) = +\tan^{-1}\omega\tau$$

	$\omega \to 0$	$\omega = \tau^{-1}$	$\omega \to \infty$
módulo	1	1.414	$\omega\tau$
fase	$0°$	$+45°$	$+90°$

- Assim, o módulo é amplificado de 20 dB por década a partir da frequência de corte (o inverso da constante de tempo) e a fase adiantada de até $90°$ com aumento da frequência.

Diagrama de Bode

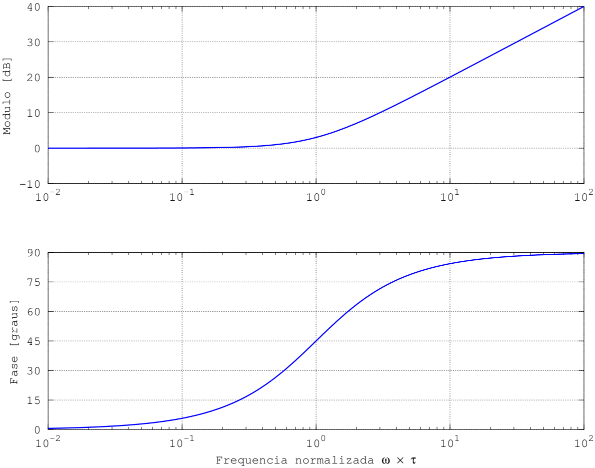


Diagrama de Bode

- O módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos para um pólo real: é constante até a frequência de corte e atenuado de 20 dB por década a partir dessa frequência. Por sua vez, a fase de um pólo real no semi-plano a esquerda é atrasada de $45°$ na frequência de corte, sendo praticamente $0°$ a uma década abaixo e praticamente $-90°$ a uma década acima da frequência de corte.
- O módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos para um zero real: é constante até a frequência de corte e amplificado de 20 dB por década a partir dessa frequência. Por sua vez, a fase de um zero real no semi-plano a esquerda é adiantada de $45°$ na frequência de corte, sendo praticamente $0°$ a uma década abaixo e praticamente $+90°$ a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

- Para um par de pólos complexo-conjugados no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \left[\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Diagrama de Bode

- Dessa maneira:

	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_n$	$\omega \to \infty$
módulo	1	$(2\zeta)^{-1}$	$(\omega/\omega_n)^{-2}$
fase	0°	-90°	-180°

- Em torno da frequência de corte (a frequência natural), há o efeito da ressonância, o qual amplifica o módulo. Para $0.3 \leq \zeta \leq 1$, o módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos: é constante até a frequência de corte e atenuado de 40 dB por década a partir dessa frequência. Já a fase é atrasada de 90° na frequência de corte, sendo praticamente 0° a uma década abaixo e praticamente -180° a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

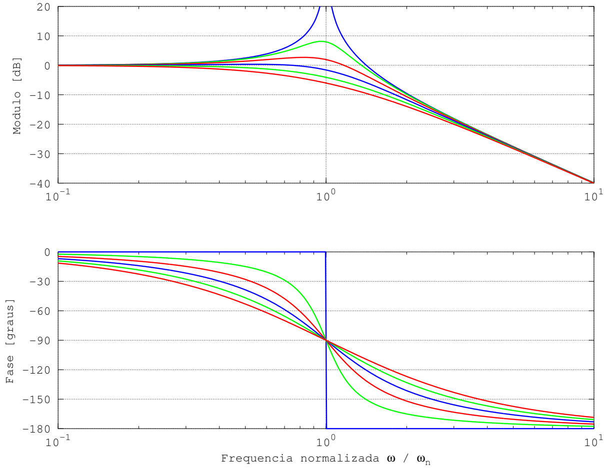


Diagrama de Bode

- Para um par de zeros complexo-conjugados no semi-plano à esquerda, tem-se:

$$G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$$

$$|G(j\omega)| = \left[\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\angle G(j\omega) = +\tan^{-1}\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Diagrama de Bode

- Dessa maneira:

	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_n$	$\omega \to \infty$
módulo	1	2ζ	$(\omega/\omega_n)^2$
fase	0°	$+90^\circ$	$+180^\circ$

- Em torno da frequência de corte (a frequência natural), há o efeito da ressonância, o qual atenua o módulo. Para $0.3 \leq \zeta \leq 1$, o módulo possui dois comportamentos assintóticos distintos: é constante até a frequência de corte e amplificado de 40 dB por década a partir dessa frequência. Já a fase é adiantada de 90° na frequência de corte, sendo praticamente 0° a uma década abaixo e praticamente $+180^\circ$ a uma década acima da frequência de corte.

Diagrama de Bode

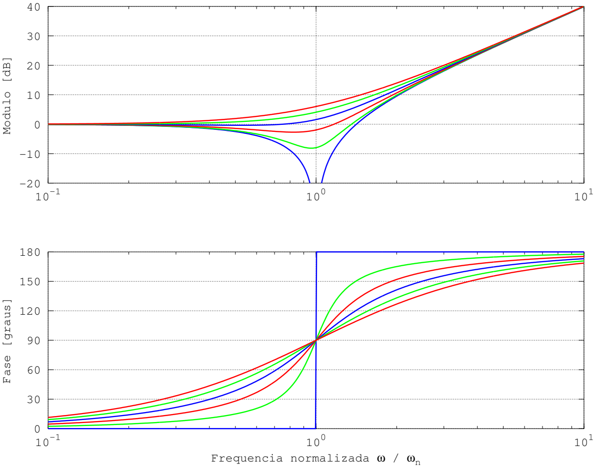


Diagrama de Bode

- Para um sistema dinâmico de fase não-mínima, os zeros no semi-plano à direita ou os atrasos de transporte contribuem com um atraso de fase adicional quando comparado à um sistema dinâmico de fase-mínima com o mesmo módulo.
- Para um zero real no semi-plano à direita, tem-se:

$$G(s) = \tau s - 1$$

$$|G(j\omega)| = \left(\omega^2\tau^2 + 1\right)^{1/2} \qquad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

- Para um atraso de transporte, tem-se:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \qquad \angle G(j\omega) = -\omega\tau$$

Diagrama de Bode

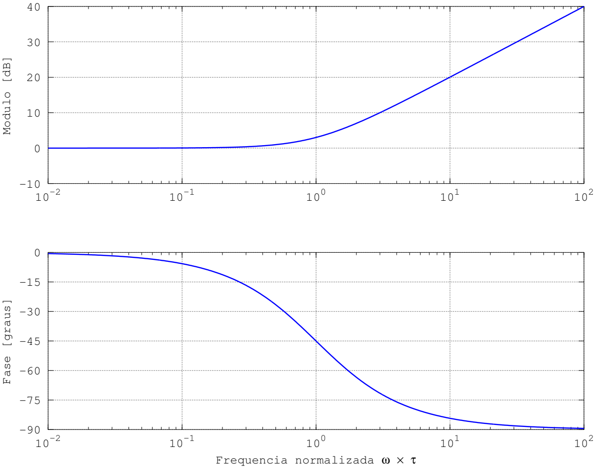


Diagrama de Bode

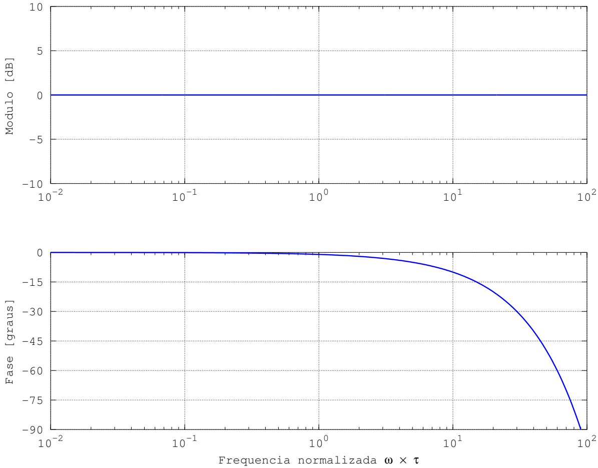


Diagrama de Bode

- Como exemplo, faça o esboço da resposta em frequência das seguintes funções de transferência:

$$G_1(s) = 100\frac{1}{s(s+10)} = 10\frac{1}{s(s/10+1)}$$

$$G_2(s) = 10000\frac{s+1}{(s+10)(s+100)} = 10\frac{s+1}{(s/10+1)(s/100+1)}$$

$$G_3(s) = 1000\frac{s+1}{s^2+4s+100} = 10\frac{s+1}{(s/10)^2+2(0.2)(s/10)+1}$$

$$G_4(s) = 1000\frac{s-1}{(s+10)^2} = 10\frac{s-1}{(s/10+1)^2}$$

Diagrama de Bode

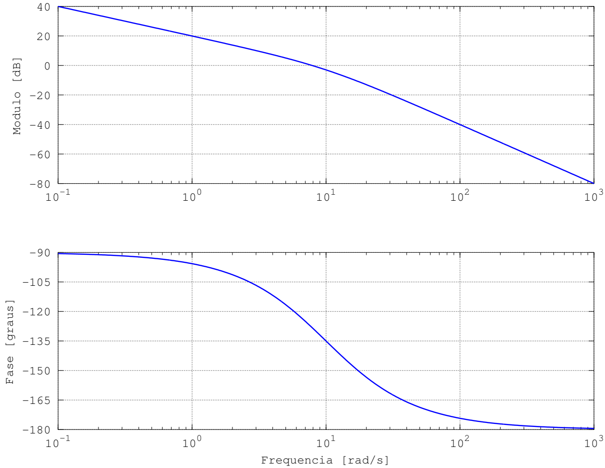


Diagrama de Bode

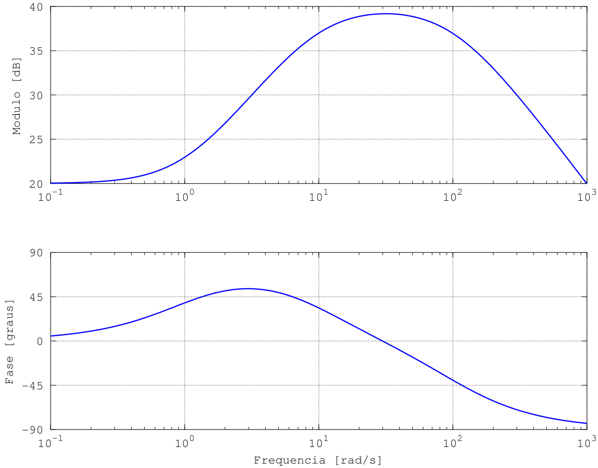


Diagrama de Bode

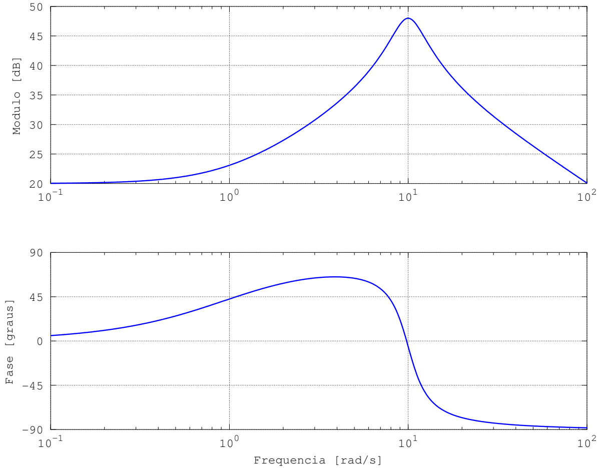
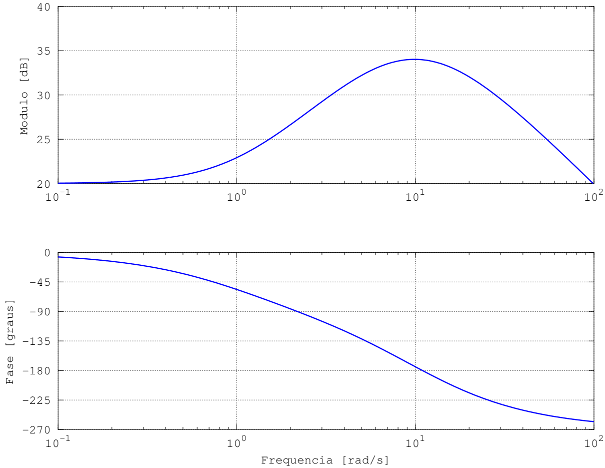
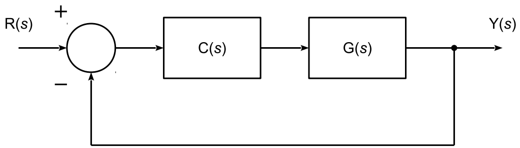


Diagrama de Bode



Critério de estabilidade

- Os critérios de estabilidade comumente definidos na resposta em frequência são o **critério de Nyquist** e o **critério de Bode**, os quais permitem analisar a estabilidade em malha fechada através da resposta em frequência em malha aberta. Sem perda de generalidade, a malha de controle será feita com a realimentação unitária.



- A equação característica pode ser expressa por:

$$C(s)G(s) = -1 \Rightarrow C(j\omega)G(j\omega) = -1$$

- Os critérios permitem investigar tanto a estabilidade absoluta quanto a estabilidade relativa em malha fechada.

Critério de Nyquist

- A resposta em frequência também pode ser representada por um diagrama real *vs* imaginário como uma função *implícita* da frequência; a representação é conhecida como **diagrama de Nyquist**, o qual é obtido variando a frequência de zero a infinito e espelhando o mesmo em relação ao eixo real. A equação característica pode ser expressa por:

$$C(j\omega)G(j\omega) = -1 + j0$$

- A estabilidade absoluta é analisada em torno do ponto real -1 pelo critério de estabilidade de Nyquist, definida por:

$$Z = P + N$$

- Z e P são os números de pólos com parte real positiva em malha fechada e em malha aberta, respectivamente, e N é o número de contornos em torno do ponto real -1 (positivo no sentido horário e negativo no sentido anti-horário).

Critério de Nyquist

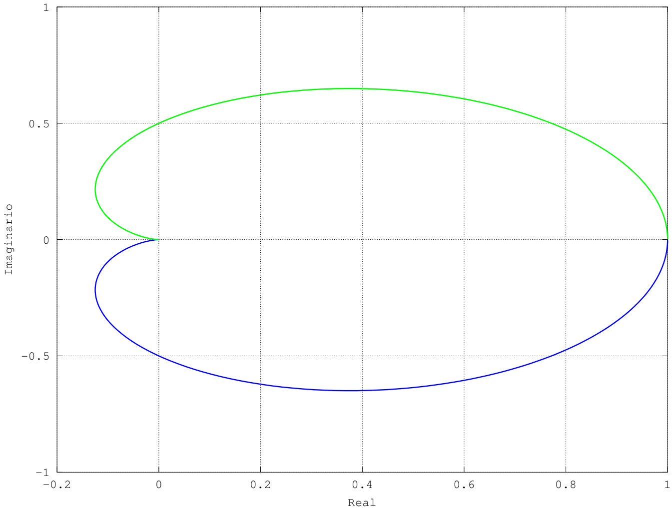
- Um sistema dinâmico instável em malha aberta será estável em malha fechada se o número de contornos em torno do ponto -1 no sentido anti-horário for igual ao número de pólos instáveis em malha aberta. Ou seja, Z deve ser igual a zero. Como exemplo, analise a estabilidade das seguintes funções de transferência:

$$C_1(s)G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

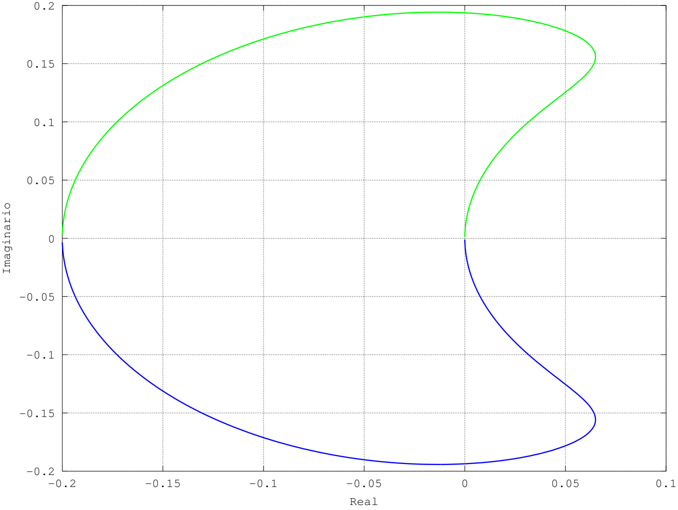
$$C_2(s)G_2(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 4s - 5}$$

$$C_3(s)G_3(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.1s^2 + s + 1}$$

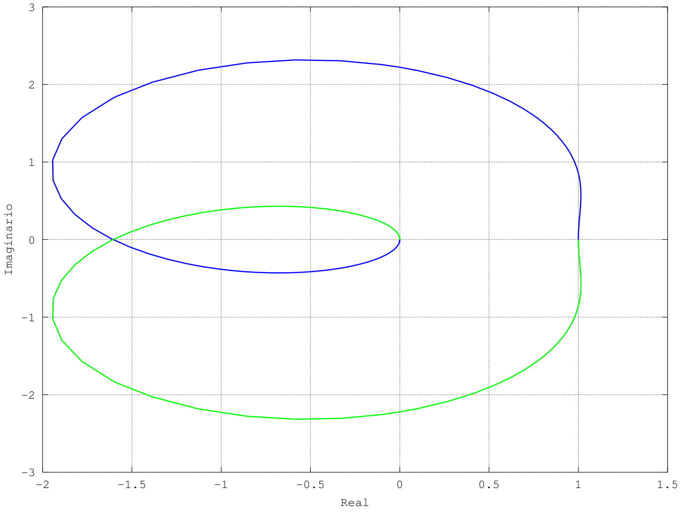
Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



Critério de Nyquist

Margens de ganho e de fase

Na análise da estabilidade relativa, a **margem de ganho** é definida como o fator pelo qual o ganho (dado em decibéis) em malha aberta pode variar sem tornar a realimentação instável. Por sua vez, a **margem de fase** é definida como o fator pelo qual a fase em malha aberta pode variar sem tornar a realimentação instável, tendendo o sistema dinâmico à estabilidade marginal.

- Pelo diagrama de Nyquist, a margem de ganho é dada pelo inverso da distância entre a origem e o ponto em que a curva intercepta o eixo real. A margem de fase é dada pelo ângulo entre o eixo real e o segmento de reta que passa pela origem e o ponto em que a curva intercepta o círculo de raio unitário (centrado na origem). Essas definições são mais intuitivas se vistas a partir do diagrama de Bode.

Critério de Nyquist

- Como exemplo, considere as funções de transferência em malha aberta utilizadas na **aula 04**, nas quais os ganhos foram ajustados para que o sistema dinâmico seja estável em malha fechada (vide o lugar das raízes):

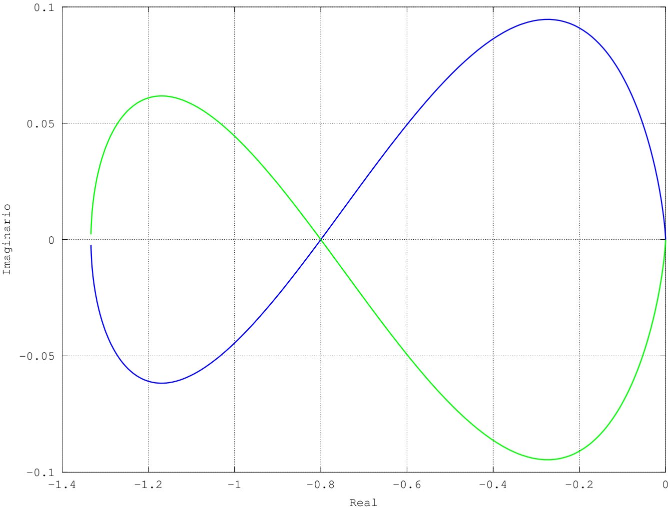
$$C_1(s)G_1(s) = \frac{8}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

$$C_2(s)G_2(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

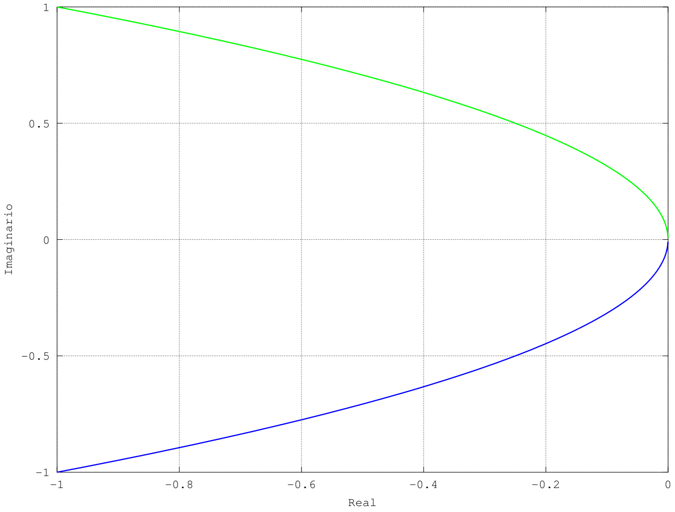
$$C_3(s)G_3(s) = 30\frac{s+1}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

- Note que não é possível distinguir se os pólos ou os zeros são provenientes da planta ou do controlador.

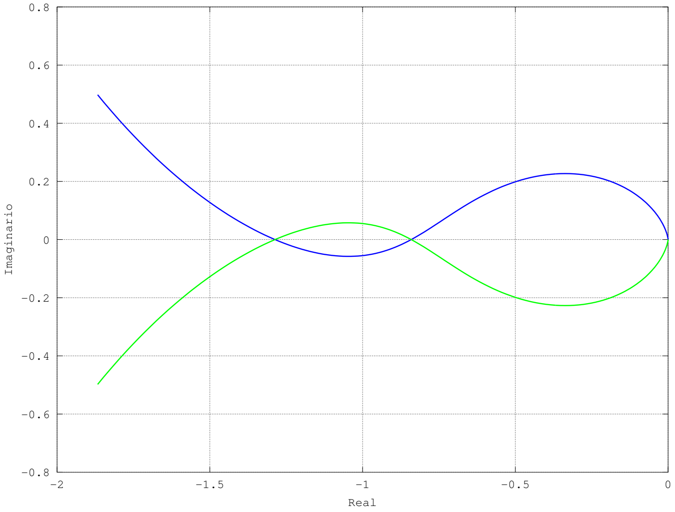
Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



Critério de Nyquist



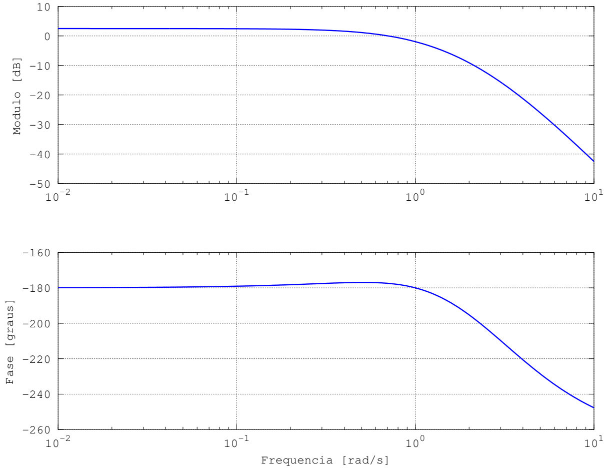
Critério de Bode

- Para um sistema de fase-mínima, as informações do critério de Nyquist podem ser analisadas diretamente pelo diagrama de Bode. A equação característica pode ser expressa por:

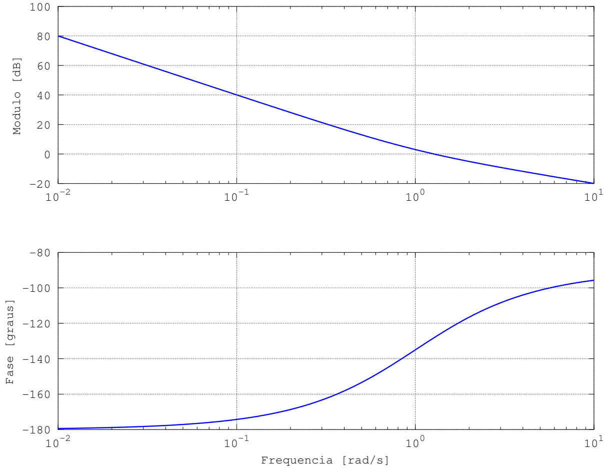
$$C(j\omega)G(j\omega) = 1\angle -180^\circ$$

- A estabilidade absoluta é analisada para a frequência na qual o módulo é igual a 1 (ou $0\ \mathrm{dB}$) pelo critério de estabilidade de Bode. Para que o sistema dinâmico seja estável em malha fechada, a fase deve estar acima da linha de -180° na frequência de cruzamento de ganho (ou de ganho unitário).
- A margem de ganho é dada pela diferença entre o módulo e a linha de $0\ \mathrm{dB}$ na frequência na qual a fase é de -180°. A margem de fase é dada pela diferença entre a fase e a linha de -180° na frequência de ganho unitário. Como exemplo, analise a estabilidade das funções de transferência anteriores.

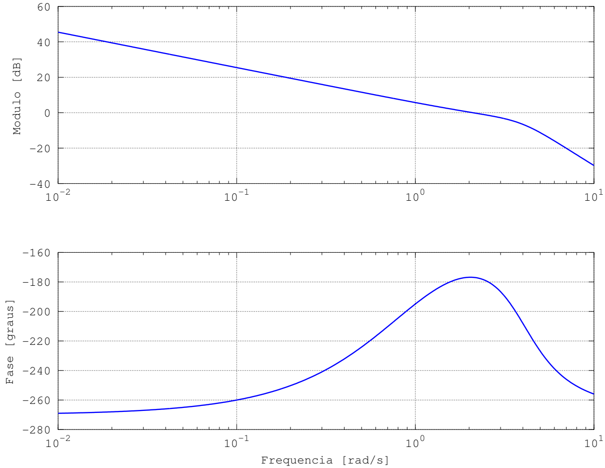
Critério de Bode



Critério de Bode



Critério de Bode



Compensação analítica

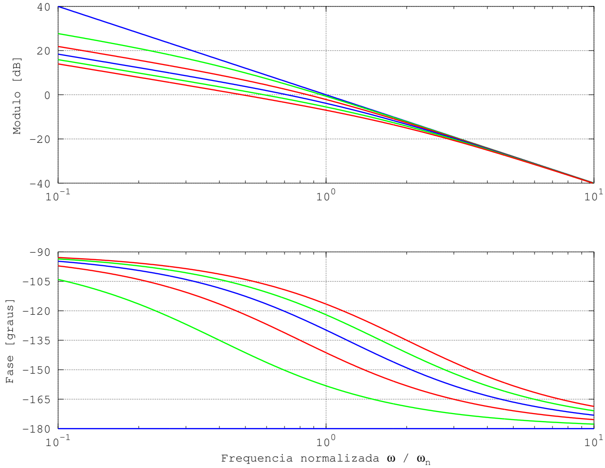
- Para se obter um sistema de 2ª ordem em malha fechada, a função de transferência em malha aberta deve ser dada por (considerando a realimentação unitária):

$$C(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

- Assim, as figuras de mérito definidas para o sistema dinâmico de 2ª ordem serão válidas para quantificar as características da resposta temporal da malha de controle.
- Para o sistema dinâmico em questão, a equação característica vista pelo critério de Bode pode ser expressa por:

$$C(j\omega)G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} = 1\angle -180^\circ$$

Compensação analítica



Compensação analítica

- A frequência de ganho unitário ω_u é definida por:

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2\omega_u^2 + \omega_u^4}} = 1$$

- A qual está relacionada com os parâmetros de um sistema dinâmico de 2ª ordem por:

$$\omega_u = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}$$

- A margem de fase ϕ_m é definida por:

$$\phi_m = 180^\circ + \angle C(j\omega_u)G(j\omega_u)$$

$$\phi_m = 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_u}{2\zeta\omega_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_u}\right)$$

Compensação analítica

- Assim:

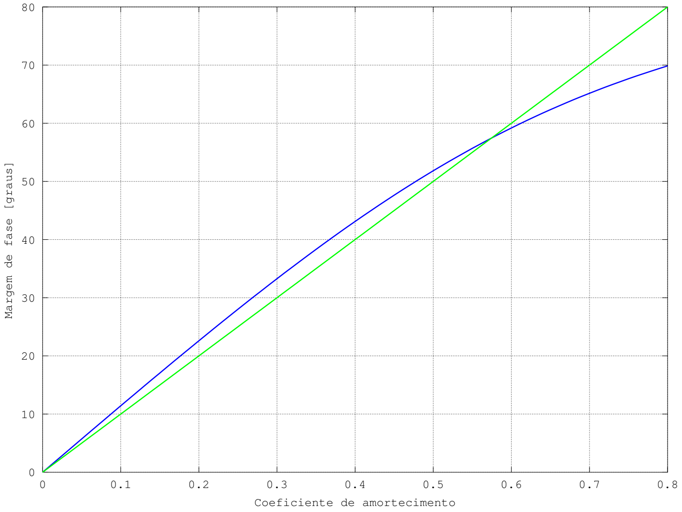
$$\phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}\right) \approx 100\zeta$$

- Note que a margem de fase depende do coeficiente de amortecimento (com uma aproximação linear para $\zeta \leq 0.7$), estando diretamente relacionada com o *overshoot* do sistema dinâmico de 2ª ordem. Já o tempo de acomodação pode ser definido por:

$$\zeta\omega_n = \frac{\omega_u \tan\phi_m}{2}$$

$$T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{8}{\omega_u \tan\phi_m}$$

Compensação analítica



Compensação analítica

- Recordando a **aula 01**, há duas figuras de mérito para a resposta transiente de um sistema de 2ª ordem subamortecido.

$$\textit{overshoot} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- Em suma, as figuras de mérito no tempo estão relacionadas com a resposta em frequência por:

$$T_A = \frac{8}{\omega_u \tan\phi_m} \qquad \zeta \approx \frac{\phi_m}{100}$$

- Assim, o *overshoot* e o tempo de acomodação podem ser utilizados como as especificações da resposta em frequência. O problema de controle se redefine na utilização de um controlador que faça com que a reposta em frequência tenha uma dada frequência de ganho unitário e uma margem de fase.

Compensação analítica

- Para o controlador PID e suas variantes, busca-se os ganhos que fazem com que a frequência de ganho unitário e a margem de fase sejam vistas no diagrama de Bode.

$$\left[K_P + j\left(K_D\omega - \frac{K_I}{\omega}\right)\right] G(j\omega) = -1$$

- As especificações podem ser satisfeitas por três parâmetros, desde que a solução sejam ganhos reais positivos:

$$\varphi \triangleq \angle K(j\omega_u) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_u)$$

$$K_P = \frac{\cos\varphi}{|G(j\omega_u)|} \qquad K_D\omega_u - \frac{K_I}{\omega_u} = \frac{\sin\varphi}{|G(j\omega_u)|}$$

- O controlador altera o tipo do sistema dinâmico em malha aberta, no qual o valor do ganho K_I pode ser adotado.

Compensação analítica

- Para o controlador de avanço ou atraso de fase, busca-se os ganhos que fazem com que a frequência de ganho unitário e a margem de fase sejam vistas no diagrama de Bode.

$$\frac{j\omega a_1 + a_0}{j\omega b_1 + 1} G(j\omega) = -1$$

- As especificações podem ser satisfeitas por três parâmetros, desde que a solução sejam ganhos reais positivos:

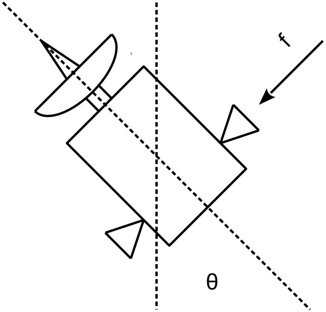
$$\varphi \triangleq \angle K(j\omega_u) = -180^\circ + \phi_m - \angle G(j\omega_u)$$

$$a_1 = \frac{1 - a_0 \left|G(j\omega_u)\right| \cos\varphi}{\omega_u \left|G(j\omega_u)\right| \sin\varphi} \qquad b_1 = \frac{\cos\varphi - a_0 \left|G(j\omega_u)\right|}{\omega_u \sin\varphi}$$

- O controlador mantém o tipo do sistema dinâmico em malha aberta, no qual o valor do ganho a_0 pode ser adotado.

Controle de posicionamento de um satélite

- O funcionamento de um satélite requer um controle de posicionamento para que as antenas, sensores e painéis solares sejam corretamente orientados.



- O ângulo $\theta(t)$, medido em radianos, descreve a orientação do satélite em relação ao referencial inercial e pode ser alterado pela ação da força $f(t)$ do propulsor, medida em Newtons.

Controle de posicionamento de um satélite

- O vento solar agindo sobre os painéis solares é modelado por um torque de distúrbio $m(t)$ sobre o centro de massa. Assim:

$$Df(t) - m(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

- A função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{D}{Js^2}$$

- Adotando a distância D igual a $1\ \mathrm{m}$ e o momento de inércia J igual a $1\ \mathrm{Nms^2/rad}$, qual o controlador PD capaz de impor a frequência de ganho unitário em $2.7\ \mathrm{rad/s}$ e a margem de fase em 30°? Qual o *overshoot* e o tempo de acomodação previsto para esse sistema em malha fechada? Qual o controlador de avanço de fase capaz de impor essas mesmas especificações?

Diagrama de Bode $G(s)$

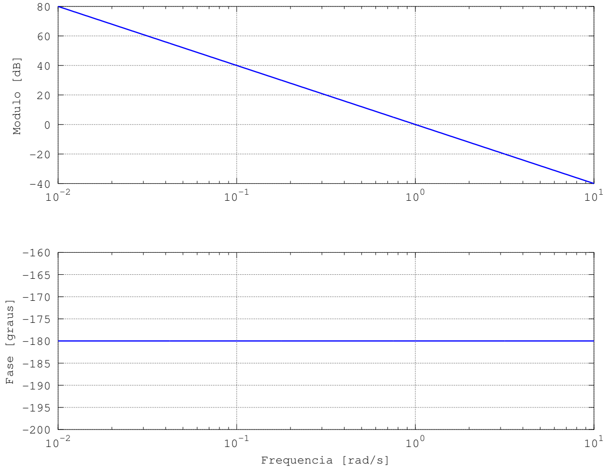


Diagrama de Bode ($K_P = 6.31$ e $K_D = 1.35$)

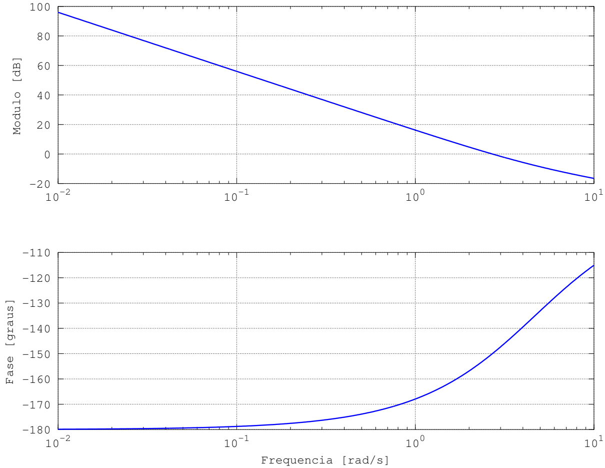
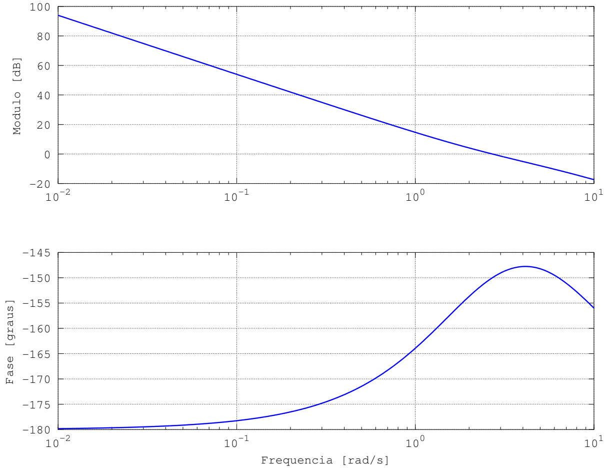
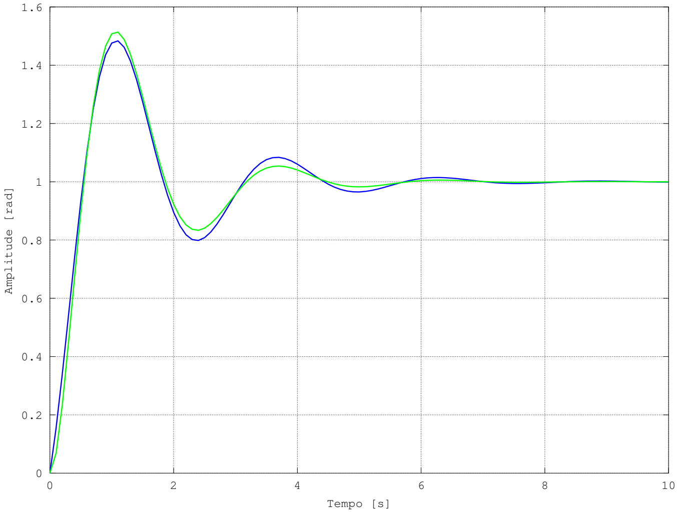


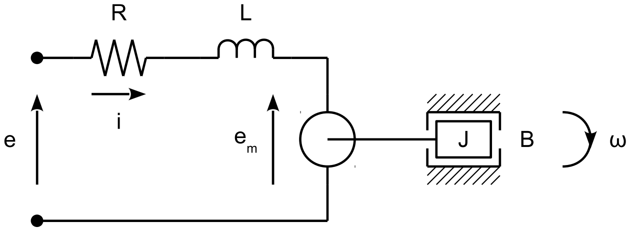
Diagrama de Bode ($a_0 = 5.00$, $a_1 = 2.19$ e $b_1 = 0.13$)



Resposta temporal em malha fechada



Controle de velocidade de um motor DC



- A função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{E(s)} = \frac{59.29}{s^2 + 6.98s + 15.12}$$

- Qual o controlador PID capaz de impor a frequência de ganho unitário em $15\ \mathrm{rad/s}$ e a margem de fase em 70° com um erro em regime permanente menor do que 2% para a entrada do tipo rampa? Qual o *overshoot* e o tempo de acomodação previsto em malha fechada?

Diagrama de Bode $G(s)$

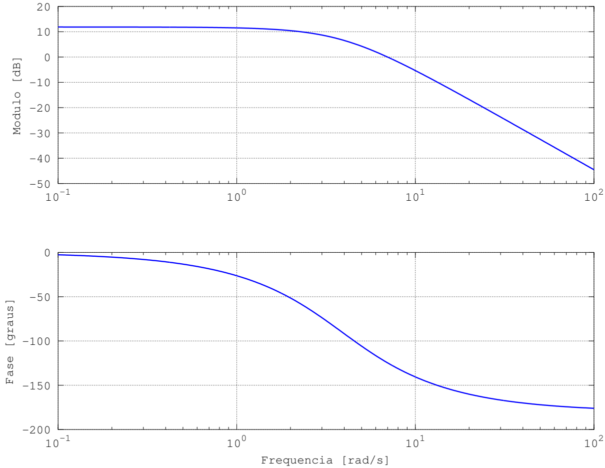
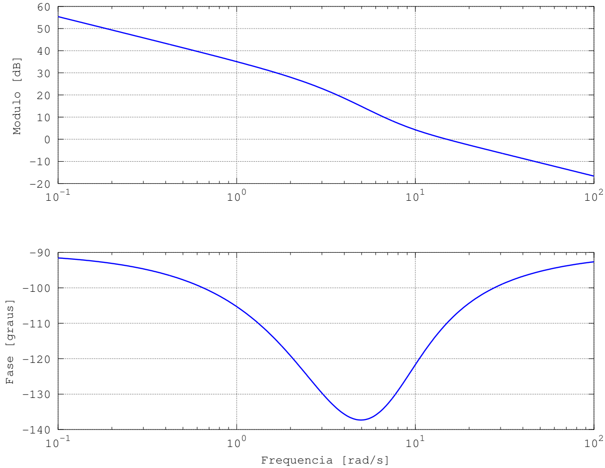
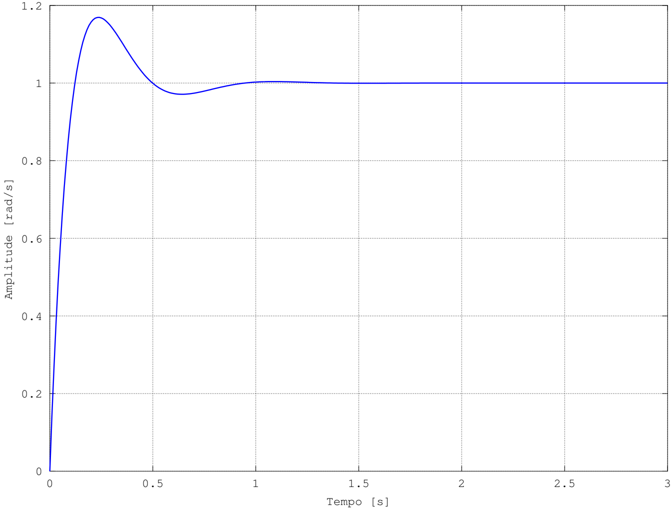


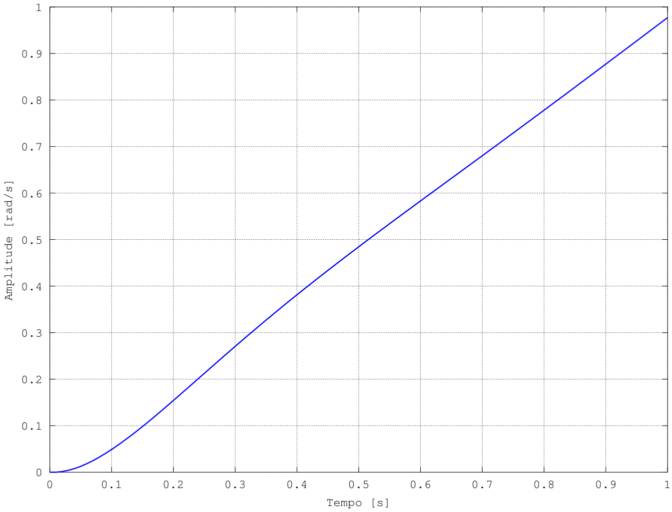
Diagrama de Bode ($K_P = 2.87$, $K_I = 15.00$ e $K_D = 0.25$)



Resposta temporal em malha fechada



Resposta temporal em malha fechada



Controle de arfagem de um piloto automático

- O Piper Dakota (desenvolvido pela Piper Aircraft e licenciado pela Embraer) é um avião civil de pequeno porte idealizado na década de 1960. O ângulo de arfagem $\theta(t)$, medido em graus, descreve o ângulo do nariz da aeronave em relação ao solo e pode ser alterado pelo ângulo do elevador $\delta(t)$ (superfície aerodinâmica na cauda), também medido em graus.
- A função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{\Delta(s)} = 160\frac{(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}$$

- É desejável um *overshoot* menor do que 10% e um tempo de acomodação menor do que 2 segundos. Embora seja um sistema de ordem superior, qual o controlador capaz de impor essa dinâmica (ou seja, a frequência de ganho unitário em $20 \ \mathrm{rad/s}$ e a margem de fase em 75°)?

Controle de arfagem de um piloto automático

Diagrama de Bode $G(s)$

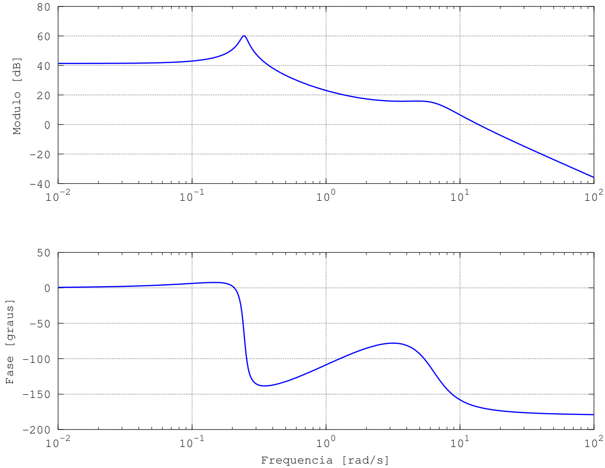
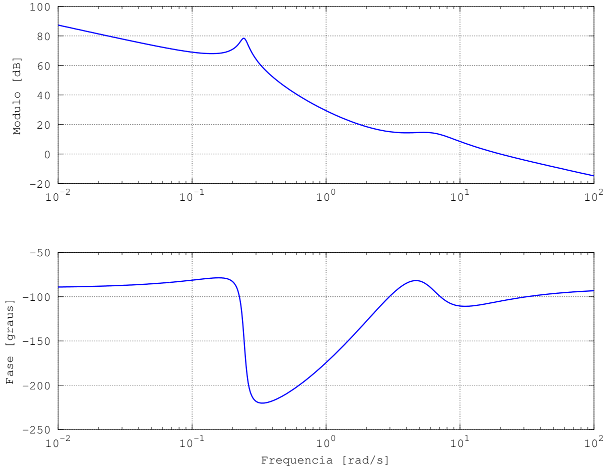


Diagrama de Bode ($K_P = 0.85$, $K_I = 2.00$ e $K_D = 0.11$)



Resposta temporal em malha fechada