Introdução à Análise Combinatória

25 de setembro de 2018

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

$$ab \tag{6.1}$$

$$cd \tag{6.2}$$

$n-3$ é ímpar (resp., par). Aplicando a equação de recorrência a t_{n-3} e usando a informação já adquirida sobre o valor de t_n para $n = 3, 4$ e 5, reformulamos (6.2) como segue:

$$
\begin{aligned}
&t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 0, \quad t_5 = 1 \\
&t_n = \begin{cases} \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor + t_{n-6}, & \text{se } n \text{ é par, } n \geq 6. \\ \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + t_{n-6}, & \text{se } n \text{ é ímpar, } n \geq 6. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

Torna-se claro pela relação acima que a sequência (t_n) é na verdade composta por 6 sequências independêntes: (i) $(t_0, t_6, t_{12}, \dots)$, (ii) $(t_1, t_7, t_{13}, \dots)$, (iii) $(t_2, t_8, t_{14}, \dots)$, (iv) $(t_3, t_9, t_{15}, \dots)$, (v) $(t_4, t_{10}, t_{16}, \dots)$, (vi) $(t_5, t_{11}, t_{17}, \dots)$. Introduzindo a notação $t_{l+6j} = \triangle\!\!\!\!\!\!\;\,l_j$, temos que a $l^{\underline{ésima}}$ sequência especificada é igual à sequência $(\triangle\!\!\!\!\!\!\;\,l_0, \triangle\!\!\!\!\!\!\;\,l_1, \triangle\!\!\!\!\!\!\;\,l_3, \dots)$. Reduzimos, então o problema de calcular uma fórmula fechada para t_n a calcular fórmulas fechadas para cada uma das seis sequências. A vantagem dessa abordagem é que cada uma das novas sequências tem uma relação de recorrência mais simples que (6.2) e que pode, portanto, ser resolvida com facilidade, tanto pelas técnicas da presente seção, quanto pelas da próxima seção. Ilustramos o procedimento calculando uma fórmula fechada para $\triangle\!\!\!\!\!\!\;\,0_j = t_{0+6j} = t_{6j}$. Substituindo os valores apropriados em (6), obtendo a seguinte relação de recorrência <:

$$
\begin{aligned}
\triangle\!\!\!\!\!\!\;\,0_0 &= 0 \\
\triangle\!\!\!\!\!\!\;\,0_j &= \lfloor \frac{6j-2}{4} \rfloor + \triangle\!\!\!\!\!\!\;\,0_{j-1} \\
&= \frac{3j}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(-1)^j + \triangle\!\!\!\!\!\!\;\,0_{j-1}, \quad \text{para } j \geq 1.
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

Calculamos agora as funções particulares $f(j), d(j)$ e $b(j)$, associados aos termos $\frac{3j}{2}, -\frac{3}{4}$ e $-\frac{1}{4}(-1)^j$, respectivamente. Para tal, observamos que 1 é a única raiz da equação característica da equação homogênea associada a (6.4).

$$
\begin{cases} A_0 - A_1 = 0 \\ \phantom{A_0 - {}} 2A_1 = \frac{3}{2}. \end{cases}
$$