# Introdução à Análise Combinatória

29 de agosto de 2018

# Capítulo 1

# Capítulo 2

# Capítulo 3

# Capítulo 4

# Capítulo 5

# Funções geradoras

**Exemplo 5.1.** *asdasd*

**Exemplo 5.2.** *asdasd*

**Exemplo 5.3.** *asdasd*

a

mas sempre que estivermos pedindo a função geradora (ordinária) estaremos interessados numa expressão simples (que comumente chamamos de "forma fechada") para a resposta. Neste caso, é fácil ver que

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \\ &= x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) \\ &= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemplo 5.4.** *Encontrar a sequência cuja função geradora é dada por:*

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots .$$

Logo, basta substituirmos $x$ por $x^2$ nesta última expressão, obtendo:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots .$$

Portanto $g(x)$ é a fução geradora da sequência $(a_r) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.$\blacksquare$

**Exemplo 5.5.** *Encontrar a função geradora para a sequência*

$$(a_r) = \left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots\right).$$

Sabemos que a exámção em série de potência da função exponencial é igual a:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots .$$

Logo, a função procurada é $e^x$.$\blacksquare$

**Exemplo 5.6.** *Encontrar a sequência cuja função geradora ordinária é* $x^2 + x^3 + e^x$.

Como

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 + e^x &= x^2 + x^3 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= 1 + x + \left(1 + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots , \end{aligned}$$

a sequência gerada por essa função é:

$$(a_r) = \left(1, 1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \cdots, \frac{1}{r!}, \cdots\right). \blacksquare$$

**Exemplo 5.7.** *Encontrar a função geradora ordinária para a sequência*

$$(a_r) = \left(\frac{2^r}{r!}\right).$$

Observando-se os coeficientes de $x^r$ em

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots ,$$

é fácil ver que a substituição de $x$ por $2x$, isto é, calculando-se $e^2x$, teremos

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{2^1}{1!}\right) x + \left(\frac{2^2}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{2^3}{3!}\right) x^3 + \cdots + \left(\frac{2^r}{r!}\right) x^r + \cdots , \end{aligned}$$

o que nos mostra ser $e^{2x}$ a função geradora procurada. ■

**Exemplo 5.8.** *Qual o coeficiênte de* $x^{23}$ *na expanção de* $(1 + x^5 + x^9)^6$*?*

Soma de cincos e noves totalizando 23 só pode ser obtida somando-se 2 noves e um 5, isto é, $5 + 9 + 9$. Como são 6 fatores iguais a $(1 + x^5 + x^9)$, devemos escolher dois fatores, tomando $x^9$ em ambos, e

Como vimos no exmeplo 5.5