Técnicas de Aproximação - Matemática Computacional

João Pedro Peres Bertoncelo - RA112650
João Gilberto Pelisson Casagrande - RA112684
Samuel Ferreira Amboni - RA100970

1. Introdução:

Estamos realizando o segundo trabalho da matéria de matemática computacional, com o tema relacionado à aproximação por diferentes métodos, no caso o método Taylor e o método Padé, depois de usar estes dois métodos vamos comparar os resultados com o número exato que foi dado pelo programa (que neste caso estamos usando a função seno).

2. Métodos:

Método de Taylor:

A técnica de aproximação de Taylor é uma ferramenta matemática que permite aproximar funções complicadas por meio de polinômios mais simples. Ela é chamada assim em homenagem ao matemático britânico Brook Taylor, que a desenvolveu no século XVIII.

Em geral, a técnica de aproximação de Taylor é usada para encontrar uma expressão aproximada de uma função em torno de um ponto específico. O polinômio resultante da aproximação é chamado de série de Taylor ou polinômio de Taylor da função. Esse polinômio pode ser usado para aproximar a função em pontos próximos ao ponto em que a série de Taylor foi calculada.

Para calcular a série de Taylor de uma função, é necessário escolher um ponto de partida, que geralmente é chamado de ponto de expansão. A série de Taylor é construída a partir das derivadas da função nesse ponto de expansão.

Aplicando o método de Taylor para o seno, até o sexto termo ($x^{11}/11!$) chega-se a função:

$f(x) = x * (1 + y * (a + y * (b + y * (c + y * (d + y * e)))))$

Onde $a = -1/6$; $b = 1/120$; $c = -1/5040$; $d = 1/362880$; $e = -1/39916800$ e $y = x^2$.

Método de Padé:

A técnica de aproximação de Padé é um método matemático utilizado para encontrar uma aproximação racional (ou fração contínua) de uma função complexa ou real, ou seja, uma função que pode ser escrita como a razão de dois polinômios.

A ideia básica da técnica de aproximação de Padé é que, para uma função f(z), pode-se encontrar uma aproximação racional da forma:

$R(z) = P(z) / Q(z)$

Isso onde P(z) e Q(z) são polinômios de grau m e n, respectivamente, e m + n é menor ou igual ao grau de f(z). Essa aproximação é construída de tal forma que ela concorda com f(z) em um certo número de pontos, geralmente os primeiros m + n + 1 pontos da expansão de Taylor de f(z) em torno de um ponto escolhido.

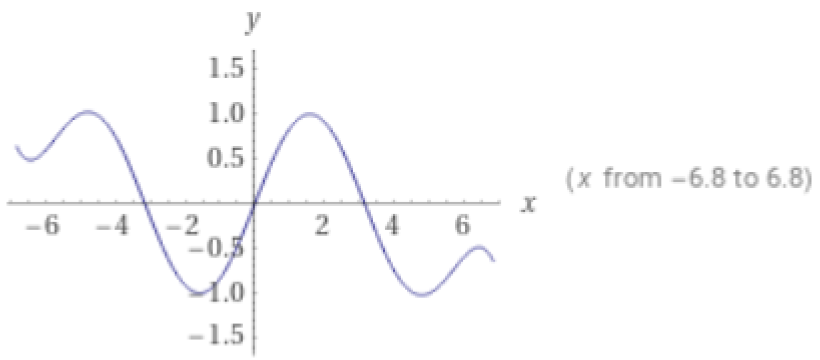
A escolha desse ponto é importante, pois determina a região onde a aproximação é mais precisa. Um ponto comum é o ponto em que a série de Taylor de f(z) converge mais rapidamente, mas outras escolhas também podem ser feitas dependendo do problema em questão.

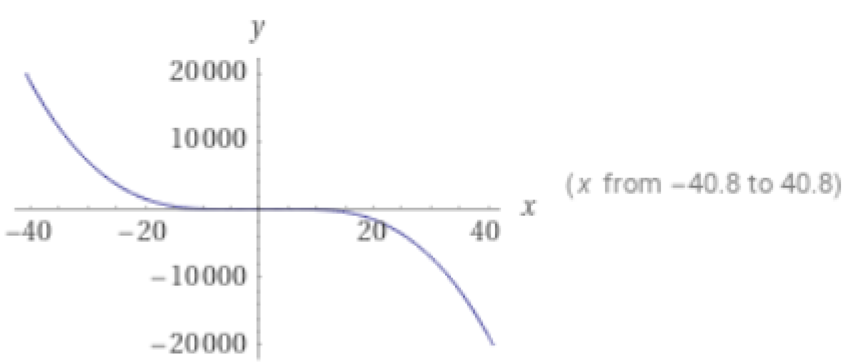
Uma vez que os polinômios P(z) e Q(z) são determinados, a aproximação racional R(z) pode ser usada para calcular valores de f(z) em pontos diferentes dos usados na construção da aproximação. Além disso, essa aproximação pode ser mais conveniente do que a expansão de Taylor em termos de potências da variável z, pois pode ser escrita de forma mais compacta e pode ser mais facilmente manipulada em cálculos.

ou seja, para os valores (7,4), temos a seguinte fórmula:

R(7,4) = (-1331x**7 + 126210x**5 - 36443920x**3 + 24948000x)/(3990x**4 + 514080x**2 + 24948000)

onde o seguinte gráfico é esperado:





3. Implementação:

Taylor:

Em Python:

```python
# Aproximação de Taylor com 6 termos
a = -1/6
b = 1/120
c = -1/5040
d = 1/362880
e = -1/39916800
def taylor(x):
    y = x * x
    return x * (1 + y * (a + y * (b + y * (c + y * (d + y * e)))))
```

Padé:

Em Python:

```python
# Aproximação de Padé de ordem (7,4) elementos
p = np.poly1d([-121/2268000, 0, 601/118800, 0, -241/1650, 0, 1, 0])
q = np.poly1d([19/118800, 0, 17/825, 0, 1])
def pade(x):
    return p(x)/q(x)
```

Análise dos erros:

```python
def erro_pade(x):
    return abs(f(x) - pade(x))

def erro_taylor(x):
    return abs(f(x) - taylor(x))
```

Onde f(x) é o seno correto.

4. Gráficos:

Gráfico encontrado para o intervalo de -π/4 até π/4:

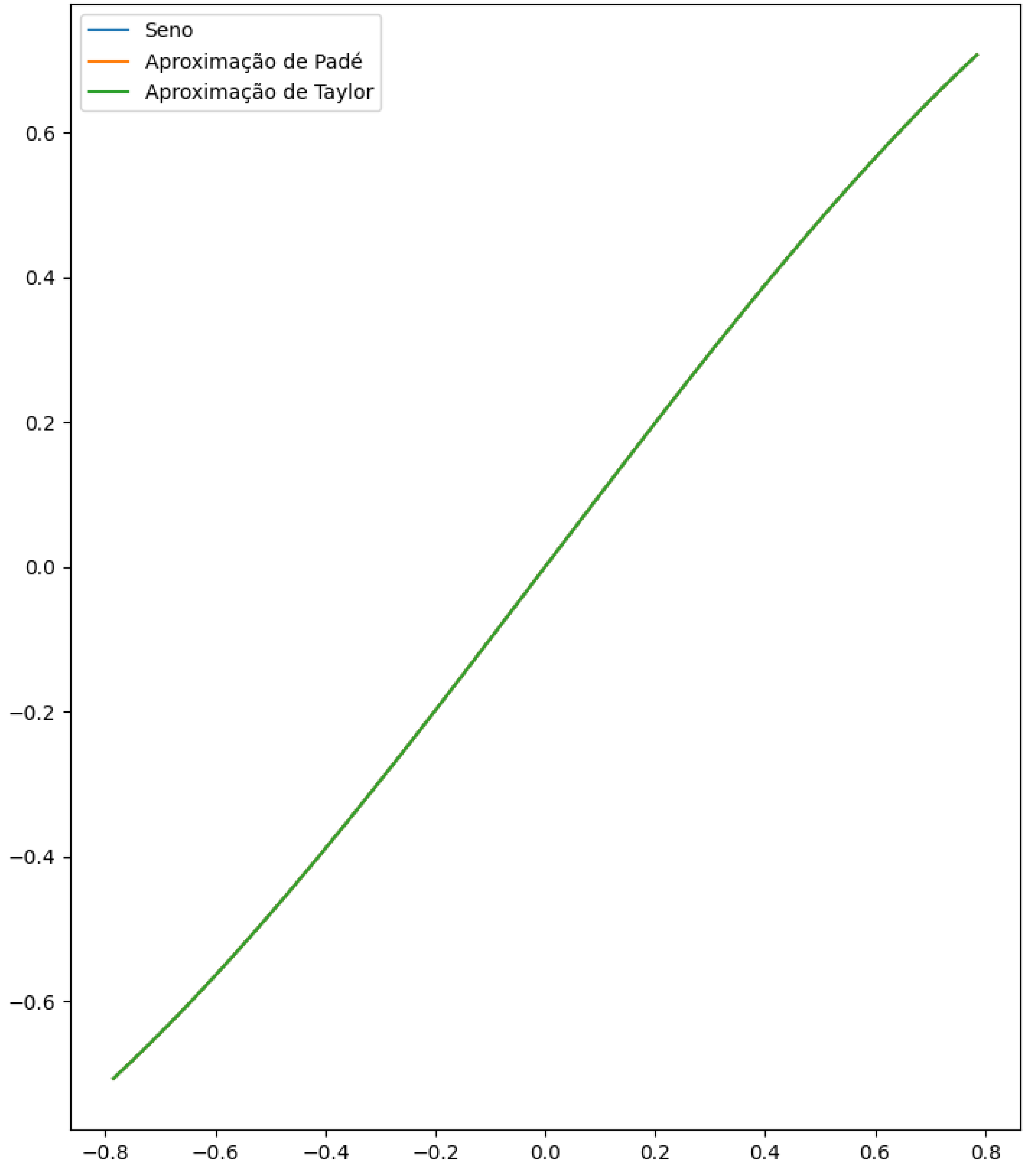


Gráfico encontrado para o intervalo de -π até π:

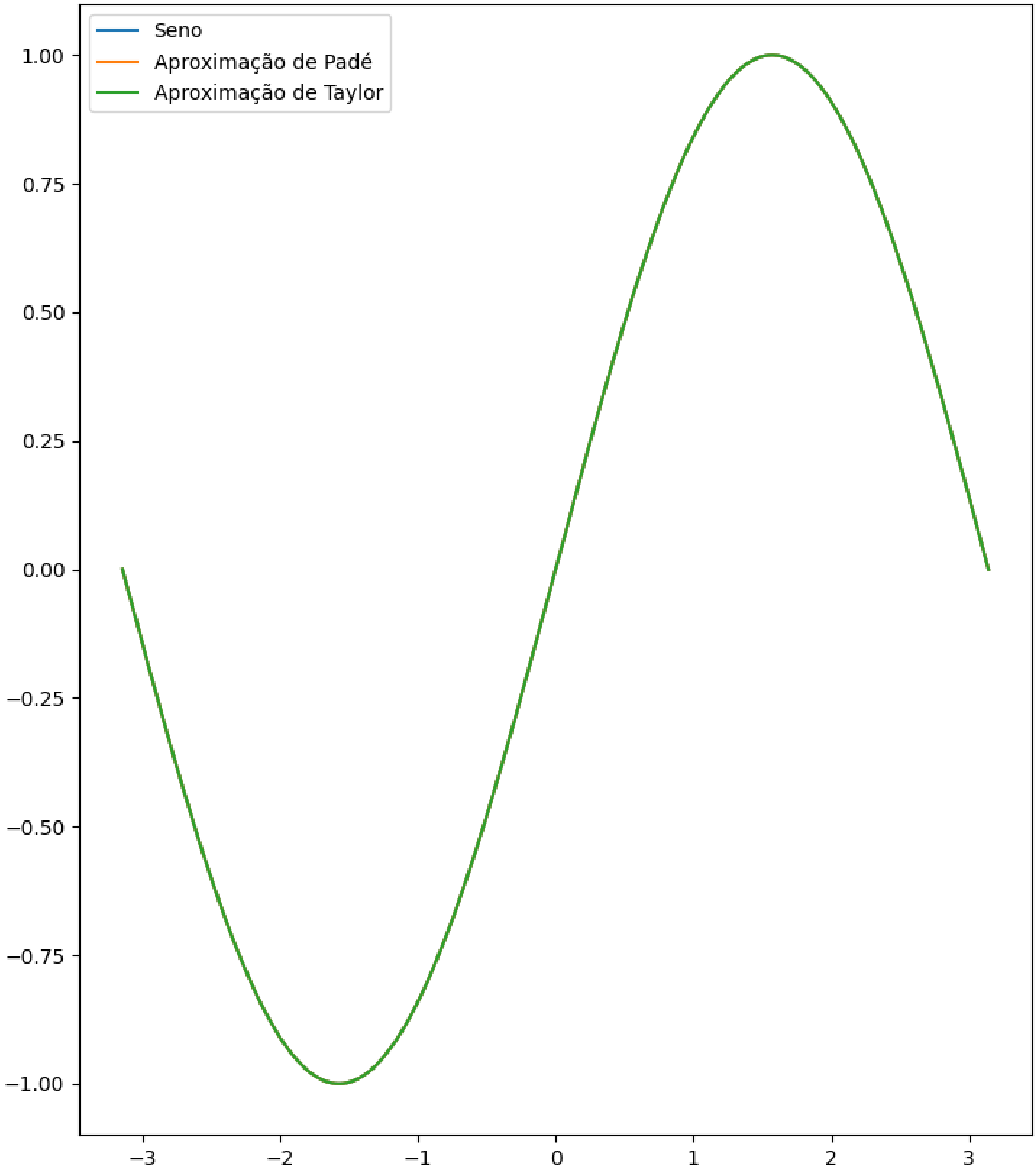
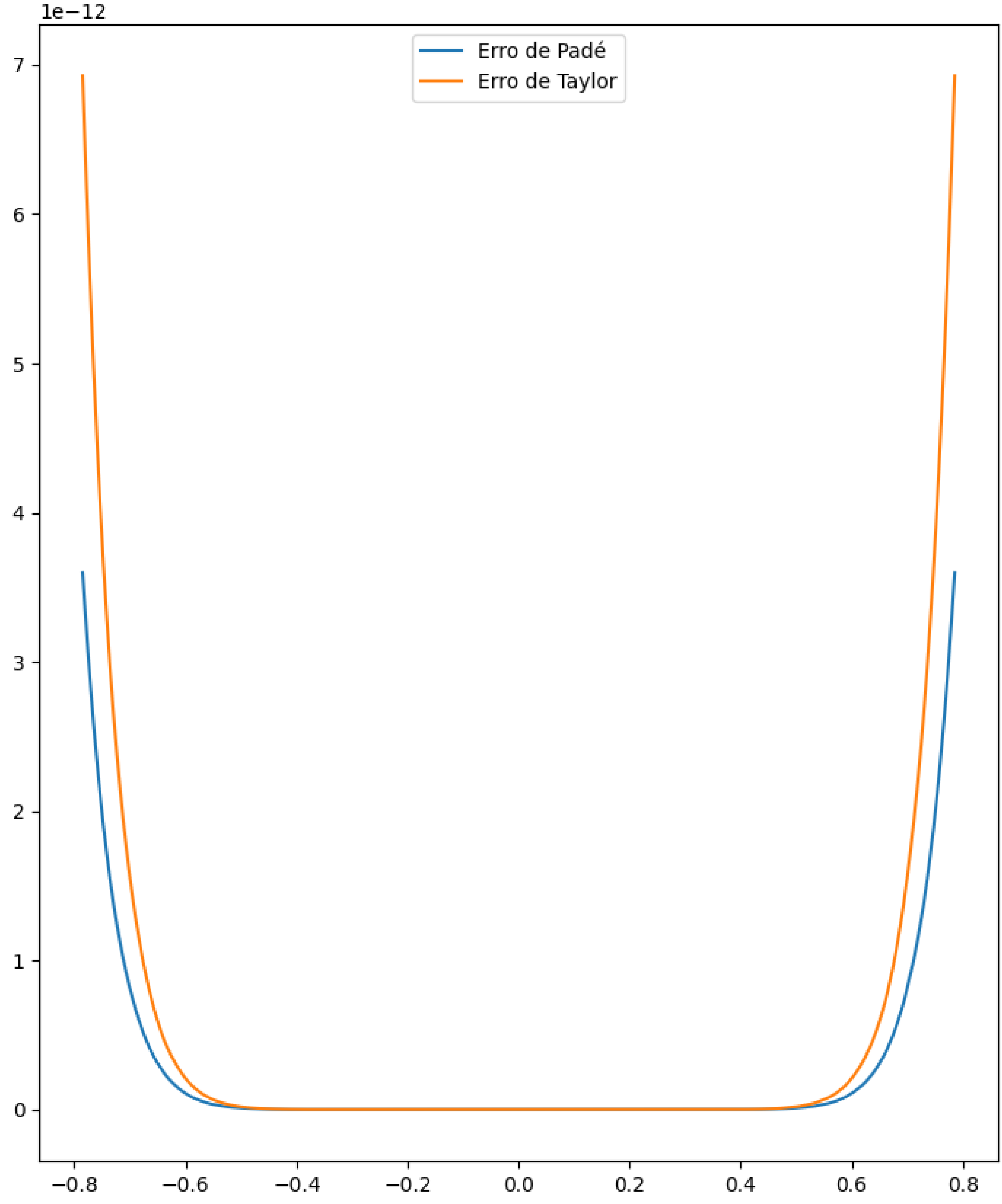


Gráfico dos erros no intervalo de -π/4 até π/4:



5. Conclusão:

Tanto a técnica de aproximação de Taylor quanto a técnica de aproximação de Padé são métodos matemáticos que permitem aproximar funções complicadas por meio de expressões mais simples. No entanto, a principal diferença entre as duas técnicas é que a aproximação de Taylor utiliza séries de potências, enquanto a aproximação de Padé utiliza frações racionais.

Enquanto a técnica de Taylor é mais adequada para aproximações locais, em que a função é aproximada em torno de um ponto específico, a técnica de Padé pode fornecer uma aproximação global mais precisa da função. Além disso, a técnica de Padé pode ser particularmente útil para funções com singularidades, pois pode produzir aproximações mais precisas perto desses pontos críticos.

Resumindo, ambas as técnicas de aproximação têm suas vantagens e desvantagens, e a escolha de uma técnica sobre a outra dependerá das características específicas da função em questão e do objetivo do problema em análise.

Neste caso, analisando os gráficos resultantes, pode-se perceber que ambos os métodos geram uma aproximação muito semelhante para os intervalos dados, começando a errar somente na décima segunda casa decimal para o intervalo de $-\pi/4$ até $\pi/4$.