Matemática Discreta II

Prova 2 parte 1

João Pedro T. Bertoncelo
RA112650

1. a) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ Associatividade

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$
$$(x + y + 1) + z + 1 = x + (y + z + 1) + 1$$
$$x + y + z + 2 = x + y + z + 2$$

É Associativa ✓

Comutatividade: $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x * y = y * x \ ?$$
$$x + y + 1 = y + x + 1 \ \checkmark$$

O que nos mostra que é comutativa

Elemento neutro: $x, e \in \mathbb{Z}$

$$e * x = x = x * e$$

como é comutativa, sabemos que $e * x = x * e$, portanto;

$$e + x + 1 = x \Rightarrow e = -1$$

portanto, o elemento neutro é -1

Elemento simétrico: $x, x' \in \mathbb{Z}$

$$x * x' = e = -1$$
$$x + x' + 1 = -1 \Rightarrow \underline{x' = -2 - x}$$

Portanto, $(\mathbb{Z}, *)$ é um grupo abeliano

b) Como sabemos que $H \subset \mathbb{Z}$, devemos conferir se o elemento neutro e simétrico de $(\mathbb{Z}, *)$ pertencem a H

Elemento simétrico: $(-x-2)$

sabemos que: $-1 \equiv 2 \pmod{3}$

$x + (-y-2) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

$x - y - 1 \equiv 2 \pmod{3}$

$x - y - 1(-1) \equiv 2(+2) \pmod{3}$

$x - y - 2 \equiv 4 \pmod{3}$

$x - y \equiv 6 \pmod{3}$

$x - y \cdot 1 \equiv 6(+2) \pmod{3}$

como $8 \equiv 2 \pmod{3}$

$x - y - 1 \equiv 2 \pmod{3}$

Elemento neutro: (-1)

Temos que

$-1 \equiv 2 \pmod{3}$

$\frac{-2-1}{3} = -1$

portanto, o elemento neutro pertence a H

Como o elemento neutro e o simétrico de $(\mathbb{Z}, *)$ pertencem a H, H é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, *)$