1. Temos que o volume é dado por:

$$V = \pi . R^2 . h$$

E, pelo enunciado, temos que:

$$\frac{dV}{dT} = \frac{4}{5}\pi \, m^3/min \text{ , e, } \frac{dr}{dT} = 0,2 \frac{cm}{min} = 0,002 \frac{m}{min}$$

Com o raio de 2 m e $V = 20\pi \, m^3$, calculamos:

$$20\cancel{\pi} = 4.\cancel{\pi}.h \Rightarrow h = \frac{20}{4} = 5 \, m.$$

Calculando a regra da cadeia:

$$\frac{dV}{dT} = \frac{\partial V}{\partial h} . \frac{dh}{dT} + \frac{\partial V}{\partial R} . \frac{dR}{dT}$$

Substituindo:

$$\frac{4}{5}\cancel{\pi} = (\cancel{\pi}.R^2).\left(\frac{dh}{dT}\right) + (2\cancel{\pi}.R.h).\left(2.10^{-3}\right)$$

$$\frac{4}{5} = (2)^2.\left(\frac{dh}{dT}\right) + (2.2.5).\left(\frac{2}{10^3}\right)$$

$$\frac{4}{5} = 4.\left(\frac{dh}{dT}\right) + \frac{40}{10^3}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{10^2} = 4.\left(\frac{dh}{dT}\right)$$

$$\frac{80}{10^2} - \frac{4}{10^2} = 4.\left(\frac{dh}{dT}\right)$$

$$\frac{7,6.10}{10^2} = 4.\left(\frac{dh}{dT}\right)$$

1. $\frac{dh}{dT} = \frac{0,76}{4} = 0,19$ m/min

2. a) Primeiro, calcularemos o vetor gradiente, depois aplicaremos o ponto

$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y)$
$\nabla f(x,y) = (6x + 2y, 2x)$

Então, tendo o vetor gradiente, aplicaremos o ponto:

$\nabla f(3,-6) = (6.(3) + 2.(-6), 2(3))$
$\nabla f(3,-6) = (6, 6)$

Calculando a norma do vetor no ponto (6,6) temos:

$\|\nabla f(6,6)\| = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72} = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

b) A taxa de variação máxima será dada na direção do ponto $\nabla f(3,-6) = (6,6)$

3. Primeiro, calculamos o plano tangente, dado pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$$

Pelo enunciado, temos que $K=4$. Calcularemos os respectivos derivadas e aplicaremos os pontos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,1,1) = \frac{1}{2}\cdot(4)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,1,1) = \frac{1}{2}\cdot(1)^{-1/2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(4,1,1) = \frac{1}{2}\cdot(1)^{-1/2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, aplicaremos o resultado à fórmula:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(4,1,1)}_{\frac{1}{4}}(x-4) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(4,1,1)}_{\frac{1}{2}}(y-1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(4,1,1)}_{\frac{1}{2}}(z-1) = 0$$

$$\frac{1}{4}\cdot(x-4) + \frac{1}{2}\cdot(y-1) + \frac{1}{2}\cdot(z-1) = 0$$

$$\frac{x}{4} - \frac{4}{4} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - 2 = 0^{\times 2} \Rightarrow \frac{x}{2} + y + z - 4 = 0$$

3. Agora, calcularemos a reta normal, dada por:

$$\frac{(x-a)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{(y-b)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{(z-c)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{(y-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(z-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Cálculo diferencial e integral II — João Pedro P. Bertonelo
prova 2 / parte 2 — RA 112650

4. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

Vetor Gradiente: $\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12x,\ 2y+1)$

$$\begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 4x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \therefore y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x(x-4) = 0$
ou seja,
$x = 0$ ou $(x-4) = 0$
$x = 4$

$P_1(0, -\frac{1}{2})$
$P_2(4, -\frac{1}{2})$

Calcularemos o hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$H(x,y) = 2(6x - 12) = 12x - 24$$

Aplicando os pontos:

- $(0, -\frac{1}{2}) \Rightarrow H(0, -\frac{1}{2}) = 12.(0) - 24 = -24 < 0$
  $\therefore$ ponto sela

- $(4, -\frac{1}{2}) \Rightarrow H(4, -\frac{1}{2}) = 12.(4) - 24 = 24 > 0$
  Teste 2ª derivada:
  $f_{xx}(4, -\frac{1}{2}) = 6.(4) - 12 = 12 > 0$
  $\therefore$ Mínimo local

6. Sabemos que:

$f(x,y,z) = d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$f(x,y,z) = d^2 = x^2+y^2+z^2$

e que as equações dos planos são dadas por:

(1) $x+y+z=1$ e (2) $2x+3y+z=6$

Apelidaremos (1) de $g(x,y,z)$ e (2) de $I(x,y,z)$

Num sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right).\lambda + \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right).\mu \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right).\lambda + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right).\mu \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right).\lambda + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right).\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda.(1) + 2.\mu \quad (3) \\ 2y = 1.\lambda + 3.\mu \quad (4) \\ 2z = 1.\lambda + 1.\mu \quad (5) \end{cases}$$

aplicando em (1):

$$\left(\frac{\lambda+2\mu}{2}\right) + \left(\frac{\lambda+3\mu}{2}\right) + \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) = 1$$

$$\frac{3\lambda}{2} + 3\mu = 1 \Rightarrow 3\lambda = 2 - 6\mu \quad (6)$$

aplicando em (2):

$$(\lambda+2\mu) + 3\left(\frac{\lambda+3\mu}{2}\right) + \left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) = 6$$

$$3\lambda + \frac{14\mu}{2} = 6 \Rightarrow 3\lambda + 7\mu = 6 \Rightarrow 3\lambda = 6 - 7\mu \quad (7)$$

6... igualando ⑥ e ⑦:

$$2-6\mu = 6-7\mu$$
$$-6\mu+7\mu = 6-2$$
$$\mu = 4$$

Substituindo em ⑦:

$$3\lambda = 6-7.4$$
$$3\lambda = -22$$
$$\lambda = \frac{-22}{3}$$

Por fim, para encontrar os três pontos, substituiremos λ e μ em ③, ④ e ⑤.

③ $$x = \frac{\left(\frac{-22}{3}\right)+2(4)}{2} = \frac{-22}{6} + \frac{4^{\times 3}}{1_{\times 3}} = \frac{-11}{3} + \frac{12}{3} = \frac{1}{3}$$

④ $$y = \frac{\left(\frac{-22}{3}\right)+3.(4)}{2} = \frac{-22}{6} + \frac{6^{\times 3}}{1_{\times 3}} = \frac{-11}{3} + \frac{18}{3} = \frac{7}{3}$$

⑤ $$z = \frac{\left(\frac{-22}{3}\right)+(4)}{2} = \frac{-11}{3} + \frac{2^{\times 3}}{1_{\times 3}} = \frac{-5}{3}$$

Portanto, o ponto de r que se distancia minimamente da origem é:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

5.a) Primeiramente, temos m dado por:

$$m = \frac{5(714.179,72) - 1897,4(1870,3)}{5(748.484,18) - (1897,4)^2} =$$

$$= \frac{22191,38}{3779420,9 - 3600126,76} \quad 0,1560$$

Aplicando na fórmula de b, temos:

$$b = \frac{1}{5} \cdot \left(1870,3 - [(0,1560) \cdot 1897,4]\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1870,3 - [295,9944]\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (1.574,3056) = 314,86112$$

portanto, a equação da reta de regressão linear é dada por:

$$y = 0,1560 \cdot x + 314,86112$$

Digitalizado com CamScanner

5.b) Fazemos a substituição do ponto na equação da reta de regressão linear encontrada:

$$y = 0{,}1560 \cdot (340{,}4) + 314{,}86112 =$$

$$y = 367{,}96352$$