Cálculo Diferencial e integral II — João Pedro P. Bortonalo

Prova 3 — RA 112650

1. $Ty' + (T+1)y = T$, $y(\ln 2) = 1$, $T > 0$

dividindo ambos os lados da primeira equação por T:

$$y' + \frac{(T+1)}{T}y = 1$$

Temos uma equação na forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, com $n=0$, então teremos como solução (com F.I. sendo o fator integrante, sendo: $F.I. = e^{\int P(x)dx}$): $y = \dfrac{\int F.I. \cdot Q(x)dx}{F.I.}$

portanto, temos:

$(\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C)$

$$F.I. = e^{\int 1+\frac{1}{T} dT} = e^{\int 1 dT + \int \frac{1}{T} dT} = e^{T + \ln|T|}$$

Se adotarmos $T = \ln|e^T|$:

$$F.I. = e^{\ln|e^T| + \ln|T|}$$

Temos por regra que $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$ com $a, b > 0$, então:

$$F.I. = e^{\ln|T \cdot e^T|}$$

Também por regra de logaritmos, temos que $a^{\log_a(b)} = b$, com $1 \neq a$ e $b > 0$, portanto:

$F.I = T \cdot e^T$

Como nesse caso $Q(T) = 1$, aplicaremos a fórmula dada no começo da resolução:

$$y = \frac{\int T \cdot e^T \cdot 1 \, dT}{T \cdot e^T}$$

Calcularemos a integral (integração por partes)

$$\int T \cdot e^T dT = T \cdot e^T \int e^T dT = T \cdot e^T - e^T + C$$

$u = T$ $\quad$ $v' = e^T dT$

$\frac{du}{dT} = 1$ $\quad$ $v = e^T$

$du = dT$

$$y(T) = \frac{T \cdot e^T - e^T + C}{T \cdot e^T}$$

Usando a informação do enunciado, temos $y(\ln 2) = 1$, então:

$$y(\ln 2) = \frac{\ln 2 \cdot e^{\ln 2} - e^{\ln 2} + C}{\ln 2 \cdot e^{\ln 2}} \Rightarrow \frac{2 \ln 2 - 2 + C}{2 \ln 2} = 1$$

Calculando:

$$2 \ln 2 - 2 + C = 2 \ln 2$$

$$(2 \ln 2 - 2 + C) - (2 \ln 2 - 2) = 2 \ln 2 - (2 \ln 2 - 2)$$

$$C = 2$$

tilibra

Portanto, podemos dizer que a solução geral do problema de valor inicial é:

$$y(t) = \frac{t \cdot e^t - e^t + 2}{t \cdot e^t}$$

2. $y'' + y = 3 \operatorname{sen} 2t + t \cos 2t$

A equação homogênea correspondente é dada por:

$$y'' + y = 0$$

Com a seguinte equação característica: $r^2 + 1 = 0$

$a = 1$ $\quad \Delta = -4$

$B = 0$ $\quad x = \frac{\pm\sqrt{4}}{2} \rightarrow x' = 1,\ x'' = -1$ raízes

$c = 1$

então, temos a solução complementar dada por:

$$y_c = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

dividiremos em dois sub-problemas:

$$y'' + y = 3 \operatorname{sen} 2t = g_1(t). \quad (1)$$
$$y'' + y = t \cos 2t = g_2(t). \quad (2)$$

Como não há duplicações, aplicaremos a solução particular:

$$Y = (At + B) \operatorname{sen} 2t + (Ct + D) \cos 2t$$

tilibra

$$(x \cdot sen(x) + x \cdot cos(x))' = $$
$$= sen(x) + x\cos(x) + cos(x) - x\,sen(x)$$

$sen' x = cos\, x$
$cos' x = -sen\, x$

aplicaremos y em ①:

$$((A\pi + B)\,sen\,2\pi + (C\pi + D)\cos 2\pi)'' + (A\pi + B)\,sen\,2\pi + (C\pi + D)\cos 2\pi =$$
$$= 3\,sen\,\pi + \pi\cos 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A\,sen\,2\pi + 2(A\pi + B)\cos 2\pi + C\cos 2\pi - 2(C\pi + D)\,sen\,2\pi)' +$$
$$+ (A\pi + B)\,sen\,2\pi + (C\pi + D)\cos 2\pi = 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((A - 2D)\,sen\,2\pi + 2A\pi\cos 2\pi + (2B + C)\cos 2\pi -$$
$$- 2C\pi\,sin\,2\pi)' + (A\pi + B)\,sen\,2\pi + (C\pi + D)\cos 2\pi =$$
$$= 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(A - 2D)\cos 2\pi + 2A\cos 2\pi - 4A\pi\,sen\,2\pi -$$
$$- 2(2B + C)\,sen\,2\pi - 2C\,sen\,2\pi - 4C\pi\cos 2\pi +$$
$$+ (A\pi + B)\,sen\,2\pi + (C\pi + D)\cos 2\pi = 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4A - 4D + D)\cos 2\pi + (-4A + A)\pi\,sen\,2\pi - (4B + 4C - B)\,sen\,2\pi +$$
$$+ (-4C + C)\pi\cos 2\pi = 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4A - 3D)\cos 2\pi + (-3A)\pi\,sen\,2\pi - (3B + 4C)\,sen\,2\pi +$$
$$+ (-3C)\pi\cos 2\pi = 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi$$

Considerando que:

$$(4A - 3D)\cos 2\pi + (-3A)\pi\,sen\,2\pi - (3B + 4C)\,sen\,2\pi + (-3C)\pi\cos\pi =$$
$$= 0 \cdot \cos 2\pi + 0 \cdot sen\,2\pi + 3\,sen\,2\pi + \pi\cos 2\pi$$

Teremos o seguinte sistema:

tilibra

$$\begin{cases} 4A - 3D = 0 \longrightarrow D = 0 \\ -3A = 0 \longrightarrow A = 0 \\ -3B - 4C = 3 \longrightarrow -3B - 4\left(\frac{-1}{3}\right) = 3 \Rightarrow \\ -3C = 1 \longrightarrow C = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3B + \frac{4}{3} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3B = \frac{9}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = -\frac{5}{9}$$

$A = 0$

$B = -5/9$

$C = -1/3$

$D = 0$

portanto, a solução particular é dada por:

$$Y = -\frac{5}{9}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{3}x \cdot \cos 2x$$

O que nos leva à seguinte solução geral:

$$y = y_c + Y = C_1 \cos x + C_2\,\text{sen}\,x - \frac{5}{9}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{3}x \cdot \cos 2x$$

3. $y'' + 4y' + 4y = \underbrace{x^{-2} e^{-2x}}_{g(x)}$ com $x > 0$

$\lambda^2 + 4\lambda^1 + 4\lambda^0 = 0$

$a = 1$ $\quad \Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$b = 4$

$c = 4$ $\quad \lambda = \frac{-4}{2} = -2$

Ambos os raízes são iguais, portanto, teremos a equação homogênea associada:

$$Y_h = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

Como Q(x) é uma exponencial, temos a solução particular:

$$Y_p = V_1 e^{-2t} + V_2 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

sendo que:

$$V_1(t) = -\int \frac{Y_2(t)\, g(t)}{W(Y_1, Y_2)(t)}\, dt$$

$$V_2(t) = \int \frac{Y_1(t)\, g(t)}{W(Y_1, Y_2)}\, dt$$

Sendo $W(Y_1, Y_2)(t)$ o determinante da seguinte matriz:

$$W(Y_1, Y_2)(t) = \begin{vmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{vmatrix} \Rightarrow W(Y_1, Y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2e^{-2t} t \end{vmatrix}$$

$$+2te^{-4t} + e^{-4t} - 2te^{-4t} = e^{-4t}$$

Substituindo em $V_1(t)$ e $V_2(t)$, temos

$$V_1(t) = -\int \frac{t \cdot \cancel{e^{-2t}}\, t^{-2} \cancel{e^{-2t}}}{\cancel{e^{-4t}}}\, dt = -\int \frac{t}{t^2}\, dt = -\int \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= \boxed{-\ln|t| + C_1}$$

$$V_2(t) = \int \frac{\cancel{e^{-2t}}\, t^{-2}\, \cancel{e^{-2t}}}{\cancel{e^{-4t}}}\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt = \boxed{\frac{-1}{t} + C_2}$$

tilibra

Agora que temos V_1 e V_2, substituiremos na form
para encontrar a solução geral da equação dife

$$Y(t) = (-\ln|t| + C_1) \cdot e^{-2t} + \left(\frac{-1}{t} + C_2\right) \cdot e^{-2t} \cdot t$$

$$Y(t) = -e^{-2t} \ln|t| + e^{-2t} C_1 - \frac{e^{-2t} \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} + e^{-2t} \cdot t \cdot C_2$$

$$Y(t) = -e^{-2t} \ln|t| + e^{-2t} C_1 - e^{-2t} + e^{-2t} \cdot t \cdot C_2$$

4. $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X$ $\qquad \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$

$(A - RI)\lambda = 0$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow \det(A - R.I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-R & -1 \\ 5 & -3-R \end{vmatrix} = 3 - R^2 + 5 = \underbrace{-R^2 + 8^2}_{(R+8)(R-0)} \qquad \begin{matrix} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 8 \end{matrix}$$

$R_1 = 8$

$R_2 = 0$

Se $R_1 = 8$

$$(A - 8I)\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -7\lambda_1 \\ 5\lambda_1 - 11\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

O autovetor correspondente a R_1 pode ser escolhido como:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Se $R = 0$

$$(A - 0.I)\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ 5\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \dfrac{3\lambda_2}{5} \end{cases}$$ Não é raiz real

Como as raízes não são reais, a solução geral será dada por:

$$Y(x) = e^{ax}\left[K_1 \cos(Bx) + K_2 \operatorname{sen}(bx)\right]$$

$$Y(x) = e^{-1x}\left[K_1 \cos(0x) + \cancel{K_2 \operatorname{sen}(0x)}\right]$$

$$Y(x) = e^{-x}\left[K_1 . 1\right]$$

$$Y(x) = e^{-x} . K_1$$

5. $X' = \begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} X.$ $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$

$(A - RI)\lambda = 0$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow \det(A - RI) = 0$

$$\begin{vmatrix} -3-R & 5/2 \\ -5/2 & 2-R \end{vmatrix} = (-6 - R^2 + \frac{25}{4} = -R^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - R\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - (1 - R) - R^2 = R^2 + R + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (R + 1/2)(R + 1/2) = 0$$

$R_1 = 1/2$

$R_2 = 1/2$

RAÍZES IGUAIS

se $R = 1/2$

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)\lambda = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2}\lambda_1 + \frac{5}{2}\lambda_2 = 0 \\ -\frac{5}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{10}{14}\lambda_2 = \frac{5}{7}\lambda_2$$

O autovetor correspondente a $R_1 = 1/2$ pode ser escolhido como:

$$\lambda_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/7 \end{pmatrix} = \lambda_2$$

como R1 e R2 são iguais, a solução será:

$$X^{(1)} = X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/7 \end{pmatrix} e^{1/2 t}$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5/7 \end{pmatrix} e^{1/2 t} + C_2 \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5/7 \end{pmatrix} e^{1/2 t}$$

(tem esse formato pois é o caso de raízes iguais)