Prova Geometria Analítica

João Pedro Peres Bertoncelo
RA 112650

3. i i) Para mostrar que o ponto não pertence ao plano substituiremos os valores de P na equação geral do plano:

$$(2) - 2.(1) + 3(-2) - 8 = 0$$
$$-14 = 0$$

como o resultado é um absurdo, o ponto não pertence ao plano

Para encontrarmos a distância entre o ponto e o plano, faremos:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1.2 + (-2).1 + 3.(-2) + (-8)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{|2 - 2 - 6 - 8|}{\sqrt{14}} = \frac{+14}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{+14 \cdot \sqrt{14}}{14} = +\sqrt{14}$$

1) i) Vamos transformar a equação de S em paramétrica, com $y = t$, temos:

$$S: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

Portanto, obtemos o vetor diretor de S: $\vec{v} = (2, 1, -1)$

Calcula-se o vetor $\vec{AB} = B - A$:

$$\vec{AB} = (-3, 1, 1)$$

Aplicamos o teste de linearidade: $(-3, 1, 1) = \alpha(2, 1, -1)$

$$\begin{cases} -3 = 2\alpha \\ 1 = \alpha \\ -1 = \alpha \end{cases}$$ obtemos que são LI

$A = (1, 2, 4) \in R$ } Calculamos $\vec{AC} = (2, -2, -3)$, e
$C = (3, 0, 1) \in S$ } calcularemos o produto misto para verificar a linearidade

$$\{\vec{AB}, \vec{v}, \vec{AC}\} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$6 - 2 + 6 - 2 - 4 + 9 = 13 \neq 0 \quad LI$$

As retas são Reversas

ii) $$\cos \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|-6+1-1|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \cdot \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{66}} = \frac{6 \cdot \sqrt{66}}{66}$$

$$= \frac{\sqrt{66}}{11} \cong 0,739$$

2) Descobriremos um vetor normal ao plano, para isso, devemos descobrir um vetor normal a R e a S usando seus vetores diretores, retirados de suas equações:

R: $\vec{u} = (2, 3, -1)$ S: $(3, 1, 2) = \vec{v}$

Calculando $(\vec{u} \times \vec{v})$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$-9k + i - 4j + 6i - 3j + 2k = 7i - 7j - 7k$$

Portanto [illegible]

$7x + (-7).y + (-7z) + d = 0$

Observando a equação de S, sabemos que $P = (1, -1, 2)$ é um ponto que pertence a S, portanto pertence ao plano, e podemos usá-lo para encontrar o d correspondente à equação

$$7(1) - 7.(-1) - 7(2) + d = 0$$
$$14 - 14 + d = 0$$
$$d = 0$$

portanto, obtemos a equação final:

$$\underline{7x - 7y - 7z = 0}$$

3. iii) Devemos encontrar uma reta que passe pelo ponto P e seja perpendicular ao plano, para isso, usaremos o vetor normal do plano e o ponto para calcular a equação dessa reta

$$\vec{n} = (1, -2, 3)$$

portanto, a equação vetorial é

$$(x, y, z) = (2, 1, -2) + t(1, -2, 3)$$

fazendo a forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + (-2).t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Π se aplicarmos essas coordenadas na equação geral do plano, teremos o valor de t no ponto em que a reta toca o plano, então:

Π: $x - 2y + 3z - 8 = 0$

$$(2 + t) - 2.(1 - 2t) + 3.(-2 + 3t) - 8 = 0$$
$$2 + t - 2 + 4t + (-6) + 9t - 8 = 0$$
$$14t = 14$$
$$\underline{t = 1}$$

............/............/............

Como em $t=1$ a reta toca o plano, devemos substituir esse valor na equação paramétrica da reta para descobrir suas coordenadas, portanto o P':

$$\begin{cases} x = 2+1 = 3 \\ y = 1-2.1 = -1 \\ z = -2+3.1 = 1 \end{cases}$$

Portanto, a projeção ortogonal de P em Π é:

$$P' = (3,-1,1)$$

4. Utilizaremos os pontos para encontrar dois vetores diretores LI, portanto, temos:

$$\vec{BA} = (-2,-1,-3)$$
$$\vec{BC} = (3,-1,-7)$$

se a combinação linear dos vetores só admitir o resultado trivial (0,0,0) os vetores serão LI

$$\alpha \vec{BA} + \beta \vec{BC} = \vec{0}$$

$$(-2\alpha, -\alpha, -3\alpha) + (3\beta, -\beta, -7\beta) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 3\beta = 0 \longrightarrow -2(-\beta)+3\beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \rightarrow \alpha = -\beta \rightarrow \alpha = -0 = 0 \\ -3\alpha - 7\beta = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \beta = 0$ solução trivial

LI

Como os vetores definem o plano, podemos formar a equação do plano

$$(x,y,z) = (2,2,3) + \lambda(-2,-1,-3) + \gamma(3,-1,-7)$$

na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + (-2\lambda) + 3\gamma \\ y = 2 - \lambda - \gamma \\ z = 3 - 3\lambda - 7\gamma \end{cases}$$

Faremos o produto vetorial $\vec{BA} \times \vec{BC}$ para obtermos o vet
ao plano Π_1:

$$\vec{n} = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right|$$

$$+3k - 3i - 14j + 7i - 9j + 2k = 4i - 23j + 5k$$

nosso vetor normal de Π_1 é $\vec{n} = (4, -23, 5)$, substituindo
na formula da equação do plano, temos:

$$4.x + (-23).y + 5z + d = 0$$

substituindo o ponto $C(5, 1, -4)$ encontramos o seguinte

$$4.5 + (-23).1 + 5.4 + d = 0$$
$$\underline{d = 17}$$

portanto: $4x - 23y + 5z - 17 = 0$: equação geral de Π_1

Em Π_2, como a reta R é ortogonal ao plano, o vetor de
R $\vec{v} = (2,3,1)$ também é o vetor normal ao plano Π_2. Como
é um ponto de Π_2, podemos utilizá-lo para encontrar
equação geral do plano:

$$2(-1) + 3.2 + 1.3 + d = 0$$
$$d = -7$$

portanto, obtemos a seguinte equação geral de Π_2:

Fazemos o teste de linearidade dos vetores normais dos planos π_1 e π_2:

$$(4, -23, 5) = \alpha(2, 3, 1)$$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \\ -23 = 3\alpha \\ 5 = \alpha \end{cases}$$

como não existe apenas 1 valor de α, podemos afirmar que os vetores normais são LI, portanto

$$\pi_1 \; T \; \pi_2$$

6. Como o ponto $P \in r$, podemos escrever a equação de r na forma paramétrica, o que nos dará as coordenadas em função de λ, portanto:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 7\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Então, podemos calcular a distância de P a π através da fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c y_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1.(-1+\lambda) + (-2).(2+7\lambda) + 3.(3+\lambda) + (-4)|}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$= \frac{|-1 + \lambda - 4 - 14\lambda + 9 + 3\lambda - 4|}{\sqrt{14}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|-10\lambda + 0|}{\sqrt{14}} = \frac{10\lambda}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{5\lambda\sqrt{14}}{7}$$

Como $d(P,\Pi) = 5$, temos

$$5 = \frac{5\lambda\sqrt{14}}{7}$$

$$5 \cdot 7 = 5\lambda\sqrt{14}$$

$$7 = \lambda\sqrt{14}$$

$$\lambda = \frac{7}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Substituindo nas coordenadas iniciais, obtemos o seguinte ponto

$$P = \left(-1+\frac{\sqrt{14}}{2},\ 2+7\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right),\ 3+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$

5. Por intuição, temos que o ponto $P_1=(1,1,1)$ pertence à s, e a equação, obtemos:

$$s: \frac{3x+6}{9} = \frac{y+1}{2} = z$$

Portanto, $\vec{v}=(9,2,1)$ é um vetor diretor da reta.

Agora, encontraremos o vetor diretor de t e um ponto, transformando a equação em paramétrica

$$\begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

isso nos dá o ponto $P_1=(-1,2,0)$ e o vetor diretor de t $\vec{u}=(3,2,1)$

Façamos um teste de linearidade dos vetores:

$$(9,2,1) = \lambda(3,2,1)$$

$$\begin{cases} 9 = \lambda . 3 \Rightarrow \lambda = 3 \\ 2 = \lambda . 2 \\ 1 = \lambda . 1 \end{cases}$$

como não há somente um valor possível para λ, os vetores são LI

Com os vetores LI, podemos calcular o vetor normal ao plano, da seguinte forma:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 9 & 2 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right|$$

$$-6k - 2i - 9j + 2i + 3j + 18k = 0i - 6j + 12k$$

$$\vec{n} = (0, -6, 12)$$

Para a reta r, podemos obter o vetor diretor $\vec{m} = (1,1$ e através dele, descobrimos o ângulo θ

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{m}\| . \|\vec{n}\|} = \frac{|(0 + (-6) + 12)|}{\sqrt{3} . 6 . \sqrt{5}} = \frac{6}{6 . \sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} . \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{15} \cong 0,258 \text{ RAD}$$