Prova 1 - Cálculo II

João Pedro Peres Bertoncelo
RA 112650

1.a) Se calcularmos o limite da sequência e obtivermos um número real, a sequência será convergente, então:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(e^{n\ln(1+1/3n)}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{e}$$

que, calculando em decimal, teremos a seguinte dízima:

$\lim_{n\to+\infty}(1+1/3n)^n = 1,39561...$ portanto, como foi encontrado número real, a sequência converge.

b) seguiremos a mesma lógica do exercício anterior

$a_1 = \frac{1!}{e^1} = \frac{1}{e}$

$a_2 = \frac{2!}{e^2} = \frac{1.2}{e.e}$

$a_3 = \frac{3!}{e^3} = \frac{1.(2.3)}{e(e.e)}$

Como a partir de $n=6$ o valor de $n!$ será maior de e^n, a sequência irá crescer infinitamente; portanto, diverge.

2. Sabemos que a fórmula da soma dos termos da PA é $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$, portanto:

$a_{10} = a_1+9.r$
$a_{50} = a_1+49.r$

$S_{10} \Rightarrow 130 = \frac{(a_1+a_1+9r).\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}} \Rightarrow \frac{130}{5} = 2a_1+9r \Rightarrow 26-9r = 2a_1$

$S_{50} \Rightarrow 3650 = \frac{(a_1+a_1+9r).\cancel{50}^{25}}{\cancel{2}} \Rightarrow \frac{3650}{25} = 2a_1+49r \Rightarrow$

$146 - 49r = 2a_1$

$2a_1 = 2a_1$

$26 - 9r = 146 - 49r$

$40r = 120$

$r = \frac{120}{40}$

$\underline{r = 3}$

$2a_1 = 26 - 9r$

$2a_1 = 26 - 27$

$a_1 = \frac{-1}{2}$

Portanto, obtemos a seguinte PA:

$PA = \{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{11}{2}; \frac{17}{2}; \ldots; a_n\}$

3. $PG\left(\frac{a}{q}, a, a \cdot q\right)$

$\left(a/q + a + a \cdot q\right) = \frac{21}{8} \Rightarrow a\left(1 + \left(\frac{1}{q}\right) + q\right) = \frac{21}{8}$ (I)

$\left(\left(\frac{a}{q}\right)^2 + a^2 + (a \cdot q)^2\right) = \frac{189}{64} \Rightarrow a^2\left(q^2 + 1 + \left(1/q^2\right)\right) = \frac{189}{64}$ (II)

Usando uma variável auxiliar, temos que $\left(q + \frac{1}{q}\right) = t$, então $q^2 + \left(1/q^2\right) = t^2 - 2$

em (I) temos: $a \cdot (t+1) = 21/8$

em (II) temos: $a^2 \cdot (t^2 - 1) = \frac{189}{64} \Rightarrow a^2(t+1)(t-1) = 189/64 \Rightarrow$

como $a(t+1) = \frac{21}{8}$, temos:

$\Rightarrow a \cdot (t-1) \cdot \left(\frac{21}{8}\right) = \frac{189}{64} \Rightarrow a(t-1) = \frac{189}{64} \cdot \frac{8}{21} \Rightarrow a \cdot (t-1) = \frac{9}{8} = 1{,}125$

Dividindo (II) por (I), temos:

$\frac{\cancel{a}(t+1)}{\cancel{a}(t-1)} = \frac{21}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

3).. Aplicando regra de 3, temos:

$$\frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{7}{3} \Rightarrow (3x+3) = (7x-7) \Rightarrow 3x = 7x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x = -10 \Rightarrow x = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Substituindo, temos:

$$q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}$$

portanto, manipulando, temos:

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \qquad \Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9$$

$a = 2$

$b = -5$

$c = 2$

$$|q| = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \rightarrow |q'| = \frac{+1}{2}$$

$$|q''| = +2$$

substituindo em (I):

$$a\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{+1}{2}\right)} + \frac{+1}{2}\right) = \frac{21}{8} \Rightarrow a\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{21.2}{8.7}$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Portanto, os três numeros reais em PG requisitados são:

$$PG\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

........../........../..........

4! $\dfrac{5}{(3n+1)(3n-2)} = \dfrac{A}{(3n+1)} + \dfrac{B}{(3n-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{5}{\cancel{(3n+1)}.(3n-2)} = \dfrac{a(3n-2)+B(3n+1)}{} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 5 = 3.a.n - 2a + 3Bn + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0.n + 5 = 3n(a+B) + B - 2a$

$A + B = 0$

$A + (5+2A) = 0$

$3A = -5$

$\boxed{A = \dfrac{-5}{3}}$

$5 = B - 2a \rightarrow 5 = B - 2\left(\dfrac{-5}{3}\right)$

$5 + 2a = B$

$B = 5 - \dfrac{10}{3}$

$\boxed{B = \dfrac{5}{3}}$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{3.(3n+1)} + \frac{5}{3.(3n-2)}\right)$$

$$= \overset{n=1}{\left(\frac{-\cancel{5}}{\cancel{12}} + \frac{5}{3}\right)} + \overset{n=2}{\left(\frac{-\cancel{5}}{\cancel{21}} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{12}}\right)} + \overset{n=3}{\left(\frac{-\cancel{5}}{\cancel{30}} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{21}}\right)} + \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{-5}{3(3n+1)} + \cancel{\frac{5}{3(3n-2)}}\right)$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{3.(3n+1)} + \frac{5}{3.(3n-2)}\right) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3(3n+1)} \Rightarrow S_n$$

4. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3} - \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}n+3}\right) = \frac{5}{3}$ É convergente

5. a) Manipularemos a série, até conseguirmos utilizar o teste da comparação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^{-1/2}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1}$$

Então, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$, que é uma série-P com $P=\frac{3}{2}$, portanto converge

Pelo teste da comparação, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ e a maior série converge, podemos dizer que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$ é convergente.

b) $f(x) = e^{-5x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n} \xrightarrow[\text{n por x}]{\text{"trocando"}} \int_1^{\infty} e^{-5x}\,dx$$

ou ambos convergem ou ambos divergem.
Substituiremos a impropriedade por uma variável m

$$\lim_{m\to\infty} \int_1^m \frac{1}{e^{5x}}\,dx \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \left[-\frac{1}{5} \cdot e^{-5x}\right]_1^m = \lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{5} \cdot e^{-5m} + \frac{1}{5} \cdot e^{-5}\right]$$

$$= \left[\cancel{\frac{1}{5 \cdot e^{5\infty}}} + \frac{1}{5 \cdot e^5}\right] = \frac{1}{5 \cdot e^5}$$; portanto, convergem, tanto a integral quanto a série

c) Como a série oscilará entre positivo e negativo, utilizaremos o Teste da Série alternada

(I) analisar desconsiderando o sinal

$$\left\{ \overset{0}{\frac{\ln|1|}{1}}, \overset{0{,}3465\ldots}{\frac{\ln|2|}{2}}, \overset{0{,}366\ldots}{\frac{\ln|3|}{3}} \right\}$$

Como a série é crescente se desconsiderarmos o sinal, certamente diverge.

6. a) Pode-se analisar que $2 \cdot \operatorname{sen} n$ varia entre -2 e $+2$, e considerando os termos absolutos, sempre varia de 0 até 2, portanto, podemos considerar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1 - 2 \operatorname{sen} n}{n^3} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

, que é uma p-série com $p = 3$, ou seja convergente

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} n}{n^3}$ é absolutamente convergente.

b) faremos o teste da raiz baseado nos valores absolutos da série:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n} \right|} = \frac{1 + \overset{0}{\frac{1}{\infty}}}{e} = \frac{1}{e}$$

Portanto, como os valores absolutos da série convergem, a mesma é absolutamente convergente.