Calculo Diferencial e Integral II   João Pedro P. Bertoncelo
Prova II   RA 112650

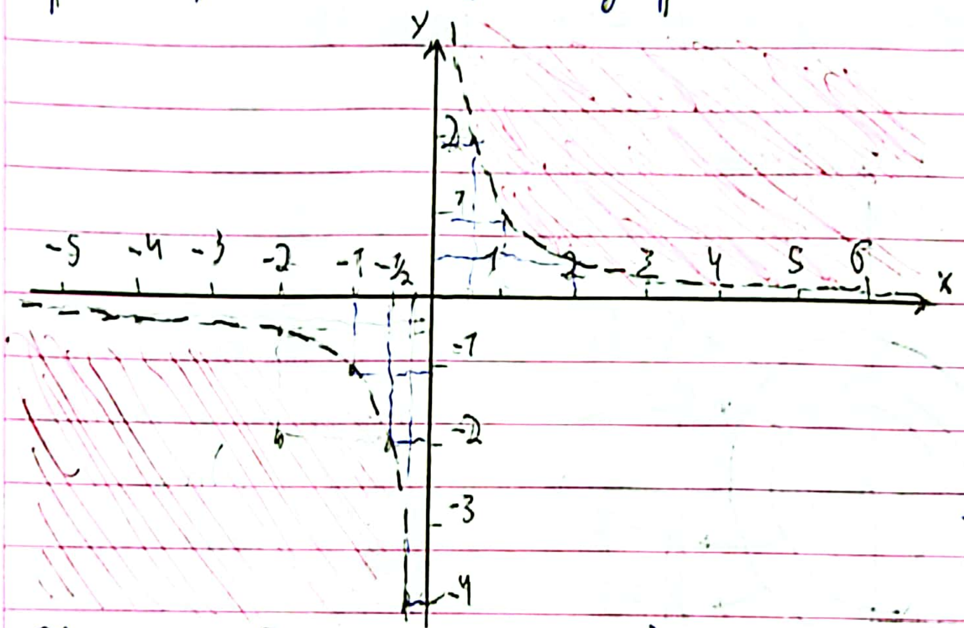
1.a) para que a função exista:

$X.Y - 1 > 0$

$X.Y > 1$ temos que,

$Dom\, f(x,y) = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / X.Y > 1\}$

portanto, temo o seguinte gráfico do domínio:



X	Y
-2	-1/2
-1	-1
0	$\nexists$
1	1
2	1/2
-1/2	-2
-1/4	-4
+1/2	2

Testaremos 5 pontos (A, B, C, D, E) para descobrir quais pontos estão no domínio

A(-2,-2)	B(-1,-1)	C(2,-2)	D(1,1)	E(2,2)
-2.-2 > 1	-1.-1 > 1	2.-2 > 1	1.1 > 1	2.2 > 1
+4 > 1	1 > 1	-4 > 1	1 > 1	4 > 1
✓	X	X	X	✓

portanto, foram marcados os pontos que pertencem ao domínio

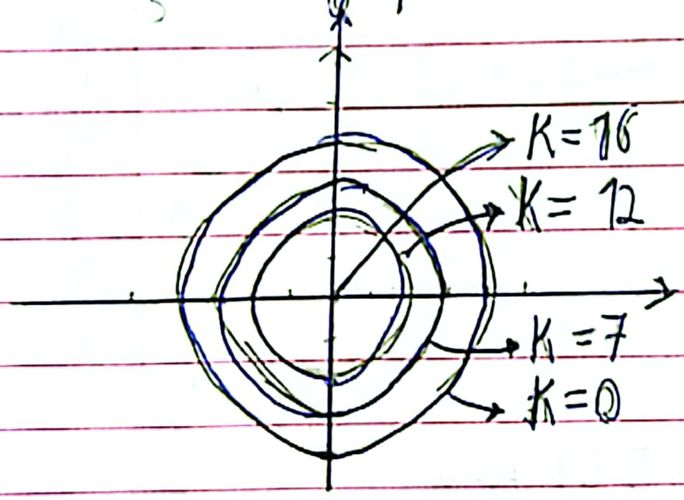
b) Por ser uma função logarítmica, temos por definição que:

$$\text{Im} f = \mathbb{R}$$

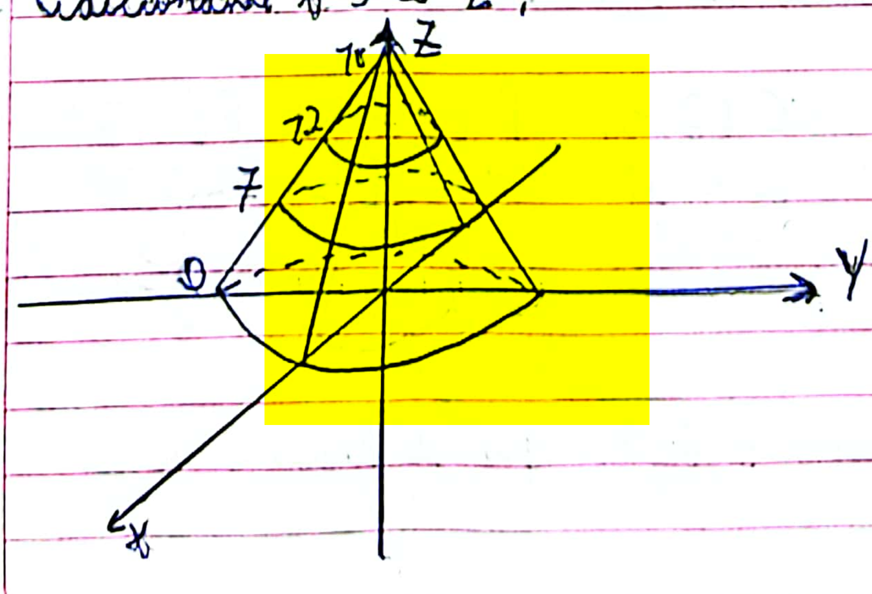
2) Calcularemos as curvas de nível, temos:

$16 = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ (Centro)
$12 = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ (raio 2)
$7 = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ (Raio 3)
$0 = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$ (raio 4)

esboçando os gráficos



adicionando o eixo Z:



3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Colocaremos o x em evidência!

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x(x+2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x+2y \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x + 2y = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$x = 0 \} \dfrac{0}{\sqrt{0^2+y^2}} = 0$

$y = 0 \} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+0^2}} = \dfrac{x}{|x|} = 1$

portanto, é uma função limitada entre 0 e 1

Então, como o limite é o produto entre uma função que tende a 0 e uma função limitada, podemos dizer que:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

4. Para valores diferentes de $(0,0)$, temos $\dfrac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$, que é uma função polinomial, portanto, contínua.

Para que a função seja contínua na origem, primeiro, devemos garantir que os limites laterais existem, portanto!

para $x = 0$

$$\lim_{\substack{x = 0 \\ y \to 0}} \frac{y^4 + 3 \cdot 0^2 y^2 + 2 \cdot y \cdot 0^3}{(0^2+y^2)^2} = \lim_{\substack{x = 0 \\ y \to 0}} \frac{y^4}{y^4} = 1$$

para $y=0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} \frac{0^4 + 3x^2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Então, como os limites laterais são diferentes, o limite não existe, portanto a função não é contínua.

5: Primeiro, testaremos as derivadas parciais:

$$g(x,y) = (x^{2/5} + y^{2/5})^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(0,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} y^{-3/5} + 0\right)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{5 \frac{2}{\sqrt[5]{y^3}}}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

como a derivada em relação a y não é um valor exato, ela não existe, portanto, não é diferenciável

6: Calcularemos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$$

calculando por partes, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left((x-1)^2 + \cancel{(y-1)^2}\right) = 2(x-1)$$

portanto, teremos:

$$\frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

no ponto $(1,2,1)$ temos:

$$\frac{1-1}{\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$$

Em relação a Y, temos:

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial Y}\left((X-1)^2+(Y-1)^2\right)} \Rightarrow 2(Y-1)$$

o que nos leva a

$$\frac{Y-1}{\sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2}}$$

portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(1,2) = \frac{2-1}{\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Então, com as derivadas parciais, aplicaremos a fórmula do plano tangente, temos

$$Z-1 = 0\cdot(X-1) + 1\cdot(Y-2)$$

$$Z-1 = Y-2$$

$$\boxed{Y-Z-1=0}$$

7. Sabemos que, por pitágoras obtemos a medida da diagonal do triângulo

$$f(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$$

O que torna f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. E para variações mínimas, podemos usar a seguinte fórmula:

$$df \approx \frac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) \cdot da + \frac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) \cdot db$$

(Sendo d a variação)

Temos as seguintes derivadas parciais no ponto (5, 2):

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{(1/2-1)} \cdot \frac{\partial}{\partial a}(a^2+b^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-1/2} \cdot (2a + 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

~~Portanto, no ponto~~

Portanto, derivando em relação a b, temos

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Substituindo o ponto (5, 2):

$$\frac{\partial f}{\partial a}(5,2) = \frac{5}{\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(5,2) = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Aplicando na fórmula inicial, temos:

$$df \approx \frac{\partial f}{\partial a}(5, 2) \cdot da + \frac{\partial f}{\partial b}(5, 2)\, db$$

$$df \approx \frac{5 \cdot (0{,}002) + 2 \cdot (-0{,}1)}{\sqrt{29}} \approx -\frac{0{,}19}{\sqrt{29}} \approx -0{,}035\,cm$$

Portanto, a diagonal do retângulo diminuirá aproximadamente

0,035 cm.

8: $y = \operatorname{arctg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

então, temos que:

$$\frac{1}{(3xyz)^2+1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(3xyz) \Rightarrow \frac{3yz}{9x^2y^2z^2+1}$$

o que nos leva a

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{3yz}{9x^2y^2z^2+1} \Rightarrow 3yz\,\frac{\partial f}{\partial x}(9x^2y^2z^2+1)$$

Unindo os resultados, obtemos:

$$3yz\left(\frac{18y^2z^2x}{1} \cdot \frac{-1}{(9x^2y^2z^2+1)^2}\right) = \frac{-54y^3z^3x}{(9y^2z^2x^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{54y^3z^3x}{(9y^2z^2x^2+1)^2}\right)$$

considerando x e y como constantes, iremos retirá-los da derivação.

$$-54y^3x\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{(9y^2z^2x^2+1)^2}\right)$$

a regra do quociente nos diz que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

Portanto,

$$= -54y^3x\,\frac{\frac{\partial}{\partial z}(z^3)\cdot(9y^2z^2x^2+1)^2 - \frac{\partial}{\partial z}\left((9y^2z^2x^2+1)^2\right)\cdot z^3}{\left((9y^2z^2x^2+1)^2\right)^2}$$

as derivadas resultarão, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((9y^2z^2x^2+1)^2\right) = 36y^2x^2z(9y^2x^2z^2+1)$$

substituindo:

$$= -54y^3x\,\frac{3z^2(9y^2z^2x^2+1)^2 - 36y^2x^2z(9y^2x^2z^2+1)z^3}{\left((9y^2z^2x^2+1)^2\right)^2}$$

$$= -\frac{162y^3z^2x(-3y^2z^2x^2+1)}{(9y^2x^2z^2+1)^3}$$