1º prova Geometria Analítica — João Pedro [illegible] — RA 112650

1) i) Para verificarmos se $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base, sabemos que podemos escrever os vetores de F da seguinte maneira:

$$\vec{f_1} = (1, 2, -3) \qquad \vec{f_2} = (1, 0, 1) \qquad \vec{f_3} = (0, 1, 3)$$

Esses vetores deveriam ser vetores LI, portanto:

$$\alpha(1, 1, -3) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 3) = (0, 0, 0)$$

$$= (\alpha, \alpha, -3\alpha) + (\beta, 0, \beta) + (0, \gamma, 3\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha + \beta + 0, \alpha + 0 + \gamma, -3\alpha + \beta + 3\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Transformando em matriz, obtemos:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(X) = -3 - 7 - 3 = -7$$

Por cramer:

$$X_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad X_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad X_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 0 \qquad X_3 = 0$$

$\alpha = \frac{X_1}{\det(X)} = \frac{0}{-7} = 0$

$\beta = \frac{X_2}{\det(X)} = \frac{0}{-7} = 0$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ portanto os vetores são linearmente independente e são uma base.

$\gamma = \frac{X_3}{\det(x)} = \frac{0}{-7} = 0$

ii) primeiramente, calcularemos se $\{e_1, e_2\}$ são LI, portanto:

$\alpha(\vec{e_1}) + \beta(\vec{e_2}) = (0,0)$

$(\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2) = (0,0,0)$

$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \quad (x_1 + x_2) \cdot (\alpha + \beta) = 0$

$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \quad (\alpha + \beta) \cdot (y_1 + y_2) = 0$

como $\alpha = \beta = 0$, são LI

Para mostrar que $\{\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - \vec{e_2}\}$ é LI, faremos que $\{\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - \vec{e_2}\} = \{\vec{x}, \vec{y}\} = \{\vec{y} = (1, -1)$, $\vec{x} = (1,1)\}$ fazendo:

$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = (0,0)$

obtemos $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$

$\alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (0,0)$

$(\alpha, \alpha) + (\beta, -\beta) = 0$

$\beta = 0$

portanto $\alpha = \beta = 0$

$(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (0,0)$

temos que $\{\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - \vec{e_2}\}$ é LI assim como $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

2) i) Tendo $A = (-1, 0, 2)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (4, 3, 1)$ e $D = (3, 1, 0)$

fazemos:

$\vec{AB} = (0, 2, 3) - (-1, 0, 2) = (1, 2, 1)$
$\vec{DC} = (4, 3, 1) - (3, 1, 0) = (1, 2, 1)$
$\vec{AD} = (3, 1, 0) - (-1, 0, 2) = (4, 1, -2)$
$\vec{BC} = (4, 3, 1) - (0, 2, 3) = (4, 1, -2)$

Como $\vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$ os ponto são vértices de um paralelogramo

ii) para calcular a área do um paralelogramo temos

$A = \| \vec{AB} \cdot \vec{AD} \|$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 6j - 7k$$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = (-5, 6, -7)$

$\| \vec{AB} \cdot \vec{AD} \| = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2 + (-7)^2}$
$= \sqrt{110}$

a área é igual a $\sqrt{110}$

iii) como os vetores $\vec{AB}$, $\vec{DC}$, $\vec{BC}$ e $\vec{AD}$ não são iguais em sua totalidade, a figura formada por eles é um retângulo

3) i) Para provarmos que os vetores $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{w} = (0, \sqrt{2}/2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Devemos descobrir se os vetores são ortogonais dois a dois, fazendo o produto escalar de cada um

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1.0 + 0 . \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 . \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \text{ ortogonais} ✓$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (0.0 + \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} . (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = (0 + 2/4 - 2/4) = 0 \text{ ortogonais} ✓$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1.0 + 0 . \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 . -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \text{ ortogonais} ✓$$

Agora que descobrimos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais, devemos encontrar a norma dos mesmos, caso seja 1, será uma base ortonormal

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1^2} = 1$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}^2} = \sqrt{2 \frac{(\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{2 . \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$
$$||\vec{w}|| = \sqrt{0^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Como os vetores são ortogonais entre si e possuem norma 1, podemos afirmar que $E = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal de V^3.

ii) Para calcularmos a norma do vetor $\vec{x} = (8, 15, 0)_E$, utilizaremos (por ser uma base ortonormal) a seguinte fórmula:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{8^2 + 15^2 + 0^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

portanto a norma do vetor $\vec{x} = (8, 15, 0)_E$ é 17

iii) para sabermos se $\vec{x} = (8, 15, 0)_E$ tem mesma norma em ambas as bases, devemos fazer uma mudança de base para a base canônica, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(8, 15, 0) &= a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) \\
(8, 15, 0) &= (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c) \\
&= (8a, 0, 0) + (0, 15b, 0) + (0, 0, 0c) \\
&= (8a, 15b, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
8a = 8 \\
15b = 15 \\
0c = 0
\end{cases}
$$

$a = b = c = 1$

$\vec{x} = (8, 15, 0)_E = (1, 1, 1)_C$

(base canônica = base C)

calculando $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$ temos que

$= \sqrt{1}$

$\|\vec{x}\| = 1$