Resumo Geometria Analítica

Vetores

- Equipolência (Equivalência)
  1. $(A,B) \sim (A,B)$ - "reflexiva"
  2. $(A,B) \sim (C,D) \Rightarrow (C,D) \sim (A,B)$ - "simétrica"
  3. $(A,B) \sim (C,D)$ e $(C,D) \sim (E,F)$ então $(A,B) \sim (E,F)$ - "transitiva"
- Norma
  - É o comprimento do vetor ou qualquer um de seus representantes

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{V}^1 &- \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2} = |a_x| \\ \mathbb{V}^2 &- \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \mathbb{V}^3 &- \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{aligned}}$$

- Operações
  - Propriedades da adição de vetores:
    - Associativa: $\{(\vec{u}) + (\vec{v})\} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
    - Comutativa: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$
    - Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
    - Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
  - Multiplicação por escalar
    - se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = 0$, então $\alpha . \vec{v} = \vec{0}$
    - se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, então:

      1- se $\vec{u} = \alpha(\vec{v})$ então $\vec{u} // \vec{v}$

      2- $\alpha(\vec{v})$ e $\vec{v}$ tem mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$

      3- $\|\alpha(\vec{v})\| = |\alpha| . \|\vec{v}\|$
    - Propriedades

      1. $\alpha\{(\vec{u}) + (\vec{v})\} = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$

$2\ (\alpha+\beta).(\vec{u}) = \alpha(\vec{u}) + \beta(\vec{u})$
$3.\ 1.\vec{v} = \vec{v}$
$4.\ \alpha.(\beta(\vec{v})) = (\alpha.\beta).(\vec{v}) = \beta(\alpha(\vec{v}))$

• Soma de ponto com vetor
- Para encontrar vetor: $\vec{AB} = B - A$
- Para cada ponto $P \in E^3$ e a cada vetor $\vec{v} \in V^3$ associa um ponto $Q \in E^3$, indicado por $Q = P + \vec{v}$, assim:

$$\forall P \in E^3, \forall \vec{v} \in V^3: P + \vec{v} = Q \Leftrightarrow (\vec{PQ}) = \vec{v};$$

Da mesma forma, a diferença entre vetor e ponto é dada por $P - \vec{v} = P + \vec{v}$.

• Propriedades
1. $P + \vec{0} = P$
2. $P + \vec{u} = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{v} + \vec{u}$
3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$
4. $A + \vec{v} = B + \vec{v} = A = B$
5. $(P + \vec{u}) - \vec{u} = P$

• Dependência e independência linear
• Corolário
1. A sequência $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD $\Leftrightarrow$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\vec{u} = \alpha\vec{v}$
2. Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, existem escalares α e β tais que $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$
3. Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então todo $\vec{x} \in V^3$, é gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja, $\forall \vec{x} \in V^3$, existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ / $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$

- Fórmula geral mudança de base:

$$\boxed{[V_A] = M_{A}^{B}\,[V_B] \qquad [V_B] = M_{B}^{A}\,[V_A] \qquad M_{B}^{A} = [B]^{-1}[A]}$$