Calculo Diferencial e integral I

João Pedro Pires Bertonceli
PRA112650

4. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\, dy$

Primeiramente, aplicaremos a integração por partes

$u = y,\ w' = \frac{1}{e^{2y}}$

$= \left\{ -\frac{1}{2}e^{-2y}y - \int -\frac{1}{2}e^{-2y}\, dy \right\}_0^1$

Resolveremos primeiramente a integral

$\left(\int -\frac{1}{2}e^{-2y}\, dy = \frac{1}{4}e^{-2y} \right)$

Com integral resolvida podemos finalizar o calculo da expressão

$$\left\{ -\frac{1}{2}e^{-2y}y - \frac{1}{4}e^{-2y} \right\}_0^1 = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$$

Portanto o resultado é $\boxed{-\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \operatorname{sen}(x)\right)^2$

Calcularemos o produto notável do trinômio quadrado perfeito

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Portanto

$(2 - \operatorname{sen}(x))^2 = 4 - 4\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)$

Então temos a seguinte integral:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 - 4\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)\,dx$$

aplicaremos a regra da soma $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Então $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen}(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(x)\,dx$

Então calculando as integrais separadamente, obtemos

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,dx = 2\pi$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen}(x)\,dx = 4$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$

Juntando obtemos:

$\boxed{= 2\pi - 4 + \frac{\pi}{4}}$

6. $\int_0^{3} \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$

Faremos a substituição de variável, $u = 36 - x^2$

$$\int_{36}^{27} -\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

E inverteremos o sinal pelo fato de termos que inverter os valores da integral para manter seu valor

$\left(\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,\ a < b\right)$

$-\int_{27}^{36} -\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

Por definição podemos retirar a constante da integração, portanto temos:

$$-\left(-\frac{1}{2}\cdot\int_{27}^{36}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du\right)$$

Aplicaremos propriedades de radiciação

$$-\left(-\frac{1}{2}\cdot\int_{27}^{36}\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du\right)$$

Agora aplicaremos as propriedades exponenciais

Portanto temos

$$\left(\frac{1}{u^{1/2}}=u^{-1/2}\right)$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\cdot\int_{27}^{36}u^{-1/2}\,du\right)$$

Agora aplicaremos a regra da potência

$$-\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{27}^{36}\right)$$

Então simplificaremos

$$-\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{27}^{36}\right)\cdot\frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_{27}^{36}$$

Calcularemos os limites, separadamente e faremos a substituição

$= \frac{1}{2} \left| 12 - 6\sqrt{3} \right)$

E simplificaremos para:

$\boxed{3(2-\sqrt{3})}$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$

Retiraremos a fração parcial de:

$\frac{x-4}{x^2+5x+6}$, então teremos: $-\frac{6}{x+2} + \frac{7}{x+3}$

Então, aplicaremos a regra da soma e então teremos

$= -\int_0^1 \frac{6}{x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{7}{x+3}\,dx$

Calcularemos as integrais separadas e as juntaremos

$\int_0^1 \frac{6}{x+2}\,dx = 6\,(\ln(3) - \ln(2))$

$\int_0^1 \frac{7}{x+3}\,dx = 7\,(2\ln(2) - \ln(3))$

$-6(\ln(3)-\ln(2)) + 7(2\ln(2)-\ln(3))$

Então simplificaremos para:

$-6(\ln(3)-\ln(2)) + 7(2\ln(2)-\ln(3))$

$\boxed{= 20\ln(2) - 13\ln(3)}$

3. Primeiramente calcularemos o valor médio da função

$$d_{med} = \frac{1}{8-0} \int_0^8 \left[\frac{12}{\sqrt{x+1}} \right] . dx$$

por definição retiraremos as constantes da integral

$$d_{med} = \frac{12}{8} \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

Faremos substituição de variáveis

$$u = x+1$$
$$du = dx$$

Portanto,

$$d_{med} = \frac{3}{2} \int_0^8 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \int_0^8 u^{\frac{1}{2}} . du$$

$$d_{med} = \left[\frac{3}{2} . \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^8$$

$$d_{med} = \left[\frac{3}{2} . \frac{2}{1} . u^{\frac{1}{2}} \right]_0^8$$

Faremos substituição do u de volta a x, portanto teremos

$$d_{med} = \left[3(x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_0^8$$

Então aplicaremos o intervalo 0-8

$$d_{med} = 3\left[(8+1)^{1/2} - (0+1)^{1/2}\right]$$

$$d_{med} = 3\left[9^{1/2} - 1^{1/2}\right]$$

$$= 3(3-1)$$

$$= 3 \times 2$$

$$\boxed{d_{med}\ 6\ \frac{kg}{m}}$$

Digitalizado com CamScanner