Prova cálculo 1

João Pedro Neves Bertoncelo
RA 112650

1. a) Dom $f(x) = ?$

Para que $f(x)$ tenha resultado real, $x - 3 > 0$, pois a raiz não pode ser negativa, portanto

$$x - 3 > 0$$
$$x > 3$$

Como, para qualquer valor de x acima de 3, o resultado da raiz (dividendo) será diferente de 0, podemos concluir que:

$$\text{Dom } f(x) =]3, +\infty[$$

b) Para que $g(x)$ tenha resultado Real, $3 - x > 0$, pois a raiz não pode ser negativa, portanto

$$3 - x > 0$$
$$3 > x$$
$$x < 3$$

Como para todos os valores em que $x < 3$ o resultado da raiz será diferente de 0, temos que:

$$\text{Dom } g(x) =]-\infty, 3[$$

SÃO DOMINGOS S.A.

Digitalizado com CamScanner

c) para que $h(x)$ tenha resultados reais, $x^3-9x^2 \geq 0$, pois raiz negativa resultaria em números imaginários, portanto,

$$x^3-9x^2 \geq 0$$
$$x^3 \geq +9x^2$$
$$x \cdot x^2 \geq 9x^2$$
$$x \geq \frac{9x^2}{x^2}$$

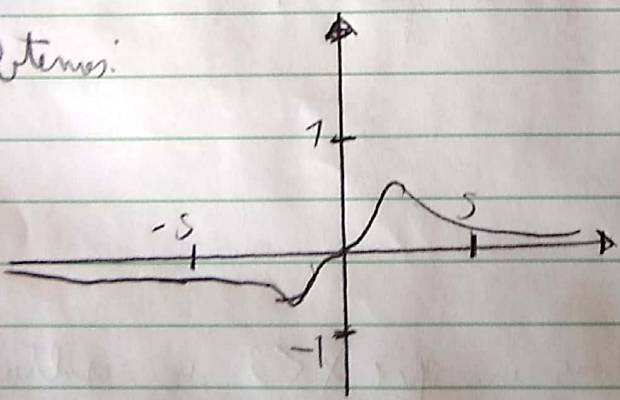
$$\underline{x \geq 9}$$

porém, para $x=0$ também possuímos um resultado não-negativo, portanto:

$$\text{Dom } h(x) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x=0 \text{ ou } x \geq 9\}$$

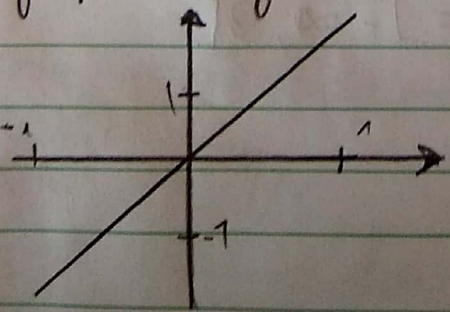
2) a) Plotando o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$,

obtemos:



como a função é "refletida" em relação à origem, é uma função ímpar (também pode ser falado "simétrica a partir da origem")

b) Plotando o gráfico de $g(x) = (x-1)^3+(x+1)^3$, temos:



como a função é simétrica em relação à origem, é uma função ímpar.

3) a) $f(x) = \ln(x)$

$g(x) = x^2 - 9$

para $f(g(x))$, temos:

$$(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$$

seu domínio será dado por:

$$x^2 - 9 > 0$$
$$x^2 > 9$$
$$x > \sqrt{9}$$
$$x > 3$$

(o resultado de ln deve ser maior que 0)

portanto para o domínio de $f(g(x))$ obtemos:

$$Dom(f \circ g)(x) =]3, +\infty[$$

b) a função dada por $f(f(x))$ é:

$$(f \circ f)(x) = \ln(\ln(x))$$

como o resultado de $\ln(1) = 0$, e temos que $\ln(x) > 0$ para que haja resultado, temos que $x > 1$, portanto

$$Dom(f \circ f)(x) =]1, +\infty[$$

4) expressando a função $F(x)$ em 3 etapas, obtemos:

$$x + \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow 1/x$$

portanto, obtemos as funções:

$f(x) = x + \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = \dfrac{1}{x}$

SÃO DOMINGOS S.A.

Digitalizado com CamScanner

então, a função $F(x)$, pode ser escrita como:

$$\underline{F(x) = h(g(f(x)))}$$

5. Multiplicando pelo conjugado, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+1}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4x+1}+x}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$$

vamos dividir pelo maior denominador de cada elemento, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} \right)$$

como o limite das divisões é igual à divisão dos limites, obtemos:

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \quad \begin{matrix} \to \lim_{x\to\infty} 4+\cancel{\frac{1}{x}}^{0} = \underline{4} \\ \to \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\cancel{\frac{4}{x}}^{0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}}+1 = \underline{2} \end{matrix}$$

portanto o $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e é:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right) = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

6.b) para $x < 0$, $f(x) = \sqrt{-x}$, portanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = \underline{0} \quad \underline{\text{tende a } 0}$$

a) Para $0 \leq x \leq 3$, temos que $f(x) = 3-x$, portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} 3-x = \underline{3} \quad \underline{\text{Tende a } 3}$$

c) como,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x),$$

o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe

d) para $0 \leq x \leq 3$, $f(x) = 3-x$, portanto:

$$\lim_{x\to 3^-} 3-x = \underline{0} \quad \underline{\text{tende a } 0}$$

e) para $x > 3$, $f(x) = (x-3)^2$, portanto

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3)^2 = (3-3)^2 = (0)^2 = \underline{0} \quad \underline{\text{tende a } 0}$$

f) como, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e

pode ser calculado da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 3-x = 3-3 = \underline{0} \quad \underline{\text{tende a } 0}$$

SÃO DOMINGOS S.A.

Digitalizado com CamScanner

......../........../..........

07. a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ o limite tende a 3 (de acordo com o gráfico)

B) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ tende a aproximadamente 2,3 ou 2,4, de acordo com o gráfico

c) O limite não existe pois seus limites laterais são diferentes, como demonstrado:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0$$

portanto, $\lim_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim_{x \to -3^+} f(x)$

ou seja, o limite de $f(x)$ quando x tende a -3 não existe

d) Como os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a 4 tendem ao mesmo número 2, sabemos que ele existe e através do gráfico obtemos:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2 \text{ tende a } 2$$

e) através do gráfico, podemos ver que os limites laterais de $\lim_{x \to 0} f(x)$ tendem a ∞, portanto, temos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

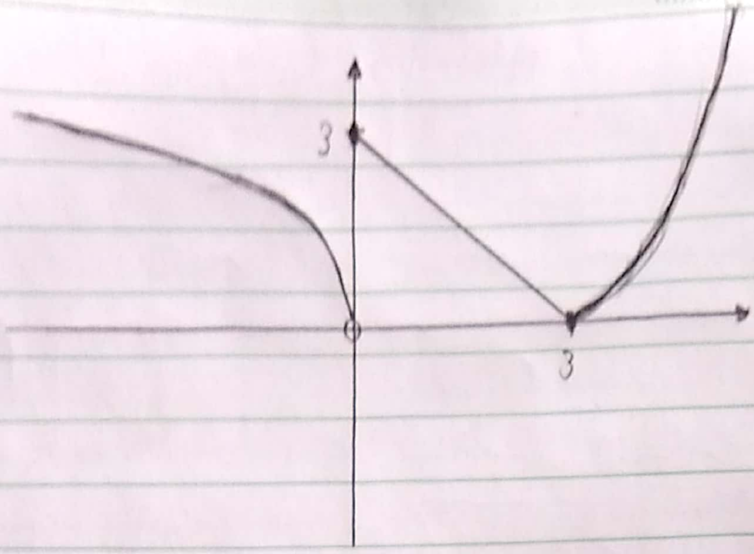
f) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ de acordo com o gráfico

g) de acordo com o gráfico, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

h) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ de acordo com o gráfico

Digitalizado com CamScanner

h)



g) A função é descontínua em $X = 0$.

07: i) a função possui 2 assíntotas horizontais, com as seguintes funções

$g(x) = 4$
$h(x) = -1$

j) há uma assíntota vertical, sua função é definida em $x = 0$

08.) como a equação equivale a uma função contínua, podemos aplicar os pontos do intervalo e provar que a função cruza a origem nesse intervalo, portanto, terá raiz

para $P(1) \Rightarrow 1^5 - 1^3 + 3.1 - 5 = -2$
para $P(2) \Rightarrow 2^5 - 2^3 + 3.2 - 5 = 32 - 8 + 6 - 5 = 25$

como a função é contínua e nesse intervalo atravessa a origem, de acordo com o teorema do valor intermediário a função tem raiz no intervalo $J = 1, 2)$

SÃO DOMINGOS S.A.

Digitalizado com CamScanner

9. $f(x) = \frac{6}{x+2} = 6(x+2)^{-1} = 6.(x)^{-1} + 6.(2)^{-1}$

$P = (1, 2)$ $= 6.(x)^{-1} + 3$

$f'(x) = -6x^{-2}$ $f'(1) = \frac{-6}{1^2} = -6$

a eq da reta tangente:

$(y - y_0) = m(x - x_0)$

$y - 2 = -6.(x - 1) \Rightarrow y = -6x + 8$

a eq da reta normal

$m_{perp} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$

portanto, a eq da reta normal é dada por:

$y - 2 = \frac{1}{6}(x - 1)$

$y = \frac{x}{6} + \frac{11}{6}$

Digitalizado com CamScanner