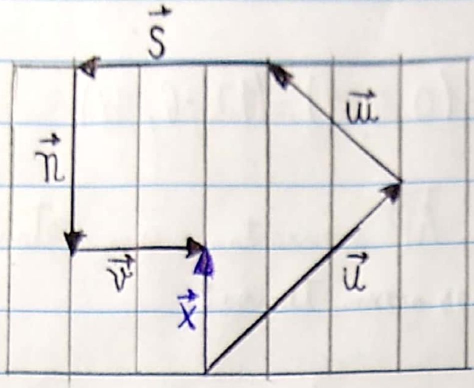
Lista 01 - Geometria Analítica

João Pedro Pera. Bertonello
RA 112 650

2) i)



Representando no plano, temos que $\vec{x} = (0,2)$

Algebricamente, temos:

$\vec{u} = (3,3)$
$\vec{w} = (-2,2)$
$\vec{s} = (-3,0)$
$\vec{n} = (0,-3)$
$\vec{v} = (2,0)$

$\vec{x} = \vec{u} + \vec{w} + \vec{s} + \vec{n} + \vec{v} =$
$= (3,3) + (-2,2) + (-3,0) + (0,-3) + (2,0)$
$= (1,5) + (-1,-3) = (0,2)$

portanto $\vec{x} = (0,2)$

Para encontrar a norma de $\vec{x} = (0,2)$, temos que:

$||\vec{x}|| = \sqrt{0^2 + 2^2}$
$||\vec{x}|| = \sqrt{0+4}$
$||\vec{x}|| = \sqrt{4}$
$||\vec{x}|| = 2$

a norma do vetor "soma" $\vec{x}$ é 2

ii) Como o eixo x do vetor "soma" é igual a 0, e ao mesmo tempo o eixo y do mesmo é maior que 0, temos que sua direção é vertical e sentido para cima.

3) Para encontrarmos o vetor $\vec{AB}$ correspondente aos pontos $A=(0,3,-1)$ e $B=(12,-3,17)$ temos (por definição) que $\vec{AB} = B - A$, portanto:

$$\vec{AB} = (12,-3,17)-(0,3,-1) = (12,-6,18)$$

Podemos simplificar o vetor $\vec{AB}$ e encontrar um vetor que também será paralelo ao mesmo, assim, temos:

$$\vec{x} = \frac{\vec{AB}}{6} = \left(\frac{12}{6}, \frac{-6}{6}, \frac{18}{6}\right) = (2,-1,3)$$

Um vetor paralelo ao vetor $\vec{AB}$ terá coordenadas proporcionais ao mesmo, portanto, para encontrar o vetor de norma 4 paralelo ao vetor $\vec{AB}$, usaremos o vetor $\vec{x}$ e acrescentaremos variáveis e igualaremos à 4 para encontrar os mesmos, assim como demonstrado:

$$\sqrt{(2.y)^2+(-1.y)^2+(3.y)^2} = 4$$

$$\sqrt{4.y^2+y^2+9y^2}^{\,2} = 4^2$$

$$4.y^2+y^2+9y^2 = 4^2$$

$$14y^2 = 16$$

$$y^2 = \frac{16}{14} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{16}{14}} = \sqrt{\frac{8}{7}}$$

Portanto, o vetor $\vec{v}$ paralelo a $\vec{AB}$ de norma 4 é:

$$\vec{v} = \left(2\sqrt{\frac{8}{7}}, -1.\sqrt{\frac{8}{7}}, 3.\sqrt{\frac{8}{7}}\right)$$

4) Para descobrirmos através de vetores se três pontos são colineares, devemos descobrir se os vetores correspondentes a eles são colineares, portanto, encontraremos $\vec{PQ}$ e $\vec{PS}$, para isso, temos que:

$$\vec{PQ} = Q - P = (-2, 5, 2) - (3, 2, 1) \qquad \vec{PQ} = (-5, 3, 1)$$

$$\vec{PS} = S - P = (8, -1, 0) - (3, 2, 1) \qquad \vec{PS} = (5, -3, -1)$$

Para que $\vec{PQ}$ e $\vec{PS}$ sejam colineares, deve existir um α tal que $\vec{PQ} = \alpha \vec{PS}$, assim como demonstrado:

$$(-5, 3, 1) = \alpha . (5, -3, -1)$$

Para encontrarmos esse escalar, devemos dividir cada termo de $\vec{PQ}$ por cada termo de $\vec{PS}$, e todos devem ser iguais, temos:

$$\alpha = \frac{-5}{5} = \frac{3}{-3} = \frac{1}{-1} =$$

$$\alpha = -1 = -1 = -1$$

portanto, existe um $\alpha = -1$ tal que os vetores $\vec{PQ}$ e $\vec{PS}$ são colineares, então os pontos P, Q e S são colineares.

5) Para mostrarmos que estes pontos $A = (0,0,0)$, $B = (1,2,3)$, $C = (-4,5,0)$ e $D = (-1,3,6)$ precisamos primeiro encontrar os vetores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ e descobrir se $\vec{AB}$ é proporcional a $\vec{CD}$, e se $\vec{BC}$ é proporcional a $\vec{DA}$, portanto, temos:

$$\vec{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (0, 0, 0) = (1, 2, 3)$$
$$\vec{BC} = C - B = (-4, 5, 0) - (1, 2, 3) = (-5, 3, -3)$$
$$\vec{CD} = D - C = (-1, 3, 6) - (-4, 5, 0) = (3, -2, 6)$$
$$\vec{DA} = A - D = (0,0,0) - (-1, 3, 6) = (1, -3, -6)$$

Para que seja descoberto se $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ / $\vec{BC}$ e $\vec{DA}$ são proporcionais, deve existir α_1 e α_2 tais que $\vec{AB} = \alpha_1 . \vec{CD}$ e $\vec{BC} = \alpha_2 \vec{DA}$

então, obtemos (assim como feito no exercício 4):

$\vec{AB} = \alpha_1 . \vec{CD}$ | $\vec{BC} = \alpha_2 . \vec{DA}$

$(1,2,3) = \alpha_1 . (3,-2,6)$ | $(-5,3,-3) = \alpha_2 . (1,-3,6)$

$\alpha_1 \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-2} \neq \frac{7}{2}$ | $\alpha_2 \neq \frac{-5}{1} \neq \frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{2}$

Como os vetores se mostraram não serem proporcionais, podemos chegar à conclusão de que os pontos A, B, C e D não são vértices de um paralelepípedo.

6) Para que os vetores $\vec{v} = (0,-2,4)$ e $\vec{u} = (3,4,x)$ sejam ortogonais, a seguinte equação deve ser saciada:

$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Então, temos:

$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \left(\sqrt{3^2+4^2+x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{0^2+(-2)^2+(4)^2}\right)^2$$
$$= (25+x^2) + (20)$$
$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \underline{x^2+45}$$

Para encontrarmos $\|\vec{v} + \vec{u}\|^2$ temos que encontrar a soma dos vetores, portanto, temos:

$$\vec{v} + \vec{u} = (0+3, (-2)+4, 4+x) = (3, 2, 4+x)$$

Então, temos:

$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = \left(\sqrt{3^2+2^2+(4+x)^2}\right)^2$$
$$= 13 + 16 + 2.4.x + x^2$$
$$\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 = x^2 + 8x + 29$$

Portanto, como

$$||\vec{v}+\vec{u}||^2 = ||\vec{v}+\vec{u}||^2$$

temos:

$$x^2+8x+29 = x^2+45$$
$$8x = 16$$
$$x = \frac{16}{8} = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto, temos que o resultado é $\underline{x=2}$

7) Para calcularmos a área do triângulo PQR por projeção ortogonal de vetores, devemos encontrar os vetores $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$, então, fazemos:

$$\vec{PQ} = Q-P = (5,12,0)-(3,0,4) = (2,12,-4)$$
$$\vec{PR} = R-P = (0,9,40)-(3,0,4) = (-3,9,36)$$

Tendo $\vec{PQ}$ e $\vec{PR}$, calcularemos a projeção ortogonal de $\vec{PQ}$ em $\vec{PR}$ para encontrar um vetor $\vec{u}$, correspondente a essa projeção, portanto:

$$\text{PROJ}_{\vec{PR}}\vec{PQ} = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{PR}}{||\vec{PR}||^2}\cdot\vec{PR}$$

I) $\vec{PQ}\cdot\vec{PR} = (2,12,-4)\cdot(-3,9,36)$
$= -6+108+(-144)$
$= -42$

II) $||\vec{PR}||^2 = (-3)^2+9^2+36^2$
$= 9+81+1296$
$= 1386$

Portanto, substituindo na fórmula, temos

$$\vec{u} = \text{PROJ}_{\vec{PR}}\vec{PQ} = \frac{-42}{1386}\cdot(-3,9,36) = \frac{-21}{693}(-3,9,36) = \frac{-3}{99}(3,9,36) =$$

=

$$= \frac{-1}{33}(-3,9,35) = \left(\frac{3}{33}, \frac{-9}{33}, \frac{-35}{33}\right) = \left(\frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, \frac{-35}{33}\right) = \vec{u}$$

Portanto, temos que: $\vec{u} = \left(\frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, \frac{-35}{33}\right)$

Para encontrarmos a altura H do triângulo, temos a seguinte fórmula:

$$\|\vec{PQ}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + H^2$$

$$2^2 + 12^2 - 4^2 = (1/11)^2 + (-3/11)^2 + (-35/33)^2 + H^2$$

$$132 = \frac{14}{11} + H^2$$

$$H^2 = \frac{14}{11} - 132$$

$$H = \sqrt{\frac{-1438}{11}}$$

Para encontrar a área do triângulo, temos que:

$$A = \frac{\|\vec{PR}\| \cdot H}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 35^2} \cdot \sqrt{-1438/11}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{1386} \cdot \sqrt{-1438/11}}{2} = \frac{3\sqrt{154} \cdot \sqrt{-1438/11}}{2} = 3 \cdot \sqrt{-5033}$$

Portanto, a área do triângulo PQR é:

$$A = 3\sqrt{-5033}$$

8) Para que os vetores $\vec{u}=(3,-3,1)$, $\vec{w}=(4,2,-6)$ e $\vec{x}=(8,11,9)$ sejam dois a dois ortogonais, o produto escalar entre eles deve ser 0, portanto:

$$\vec{u}\cdot\vec{x} = (3.8 + (-3).11 + 1.9)$$
$$= 24 + (-33) + 9 = 0 \checkmark \quad \text{ORTOGONAIS}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{x} = (4.8 + 2.11 + (-6).9$$
$$= 32 + 22 - 54 = 0 \checkmark \quad \text{ORTOGONAIS}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (3.4 + (-3).2 + 1.(-6))$$
$$= 12 + (-6) - 6 = 0 \checkmark \quad \text{ORTOGONAIS}$$

Agora que sabemos que os vetores são ortogonais e que podemos conseguir uma base ortogonal $V = \{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x})\}$, através da normalização desses vetores, obteremos a base ortonormal $V' = \{(\vec{u}', \vec{w}', \vec{x}')\}$, então, para normalizarmos um vetor, utilizamos a fórmula:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

portanto, temos:

$$\vec{u}' = \left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}\right) \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

$$\vec{w}' = \left(\frac{4}{\sqrt{56}}, \frac{2}{\sqrt{56}}, \frac{-6}{\sqrt{56}}\right) \qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56}$$

$$\vec{x}' = \left(\frac{8}{\sqrt{266}}, \frac{11}{\sqrt{266}}, \frac{5}{\sqrt{266}}\right) \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{64+121+81} = \sqrt{266}$$

Então, nossa base ortonormal V' construída a partir dos vetores ortogonais é:

$$V' = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{56}}, \frac{2}{\sqrt{56}}, \frac{-6}{\sqrt{56}}\right), \left(\frac{8}{\sqrt{266}}, \frac{11}{\sqrt{266}}, \frac{5}{\sqrt{266}}\right)\right\}$$

9) Para podermos tirar conclusões de dois vetores com base no produto escalar dos mesmos, devemos analisar 3 casos:

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$: Neste caso, pode-se dizer que os vetores são ortogonais, com ângulo de 90° entre si.

2. $\vec{v} \cdot \vec{u} > 0$: Neste caso, o ângulo será agudo, ou seja, menor que 90°

3. $\vec{v} \cdot \vec{u} < 0$: Neste caso, o ângulo entre os vetores será obtuso, ou seja, maior que 90°

1) i) Se considerarmos que $\vec{x}$ tem origem no ponto (0,0,0) e extremidade no vértice de um cubo, Podemos chamar a largura do mesmo de α, a profundidade de β, e a altura de γ, portanto, Temos que:

$$\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

Considerando m como a diagonal do cubo, podemos usar o Teorema de pitágoras para calcular a norma de $\vec{x}$, Temos $m = \vec{x}$:

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

O segundo cálculo que devemos fazer é aplicar pitágoras no Triângulo correspondente a $\|\vec{x}\|$, γ e m, aplicando, temos:

$$\|\vec{x}\|^2 = m^2 + \gamma^2$$
$$\|\vec{x}\|^2 = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + \gamma^2$$
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Podemos concluir que a alternativa é verdadeira

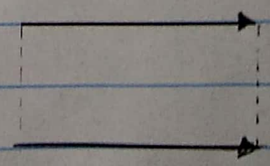
ii) Podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço da seguinte forma, com pequenos etapas:

1) $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$, portanto, tem o mesmo comprimento

2) $\vec{v} \parallel \vec{u}$, portanto, são paralelos e nunca se encontram

3) Possuem o mesmo sentido

O resultado pode-se ver ao lado



Como as interseções são paralelas, os vetores são equipolentes

Verdadeira

iii) Tomando como exemplo os vetores:

$\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -2)$, $\vec{w} = (3, 3, -6)$

Faremos o teste para ver se são ortogonais através do produto escalar entre os dois, o que deve ter como resultado 0

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1.1 + 1.1 + 1.(-2)) = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1.3 + 1.3 + 1.(-6)) = 0$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1.3 + 1.3 + (-2).(-6)) = 18$

Como demonstrado $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$, porém $\vec{v}$ não é ortogonal a $\vec{w}$

Falso

iv) Como $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\| . \|\vec{v} + \vec{w}\|$

aplicaremos a distributiva, e teremos:

$\|\vec{v}\| + 2.\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\| + \|w\|^2$

obtemos o resultado de que a afirmação é verdadeira

v) Por definição, temos que $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| . \|\vec{x}\|$, portanto:

$\|\alpha \vec{x}\|^3 = \|\alpha \vec{x}\| . \|\alpha \vec{x}\| . \|\alpha \vec{x}\|$
$= |\alpha| . \|\vec{x}\| . |\alpha| . \|\vec{x}\| . |\alpha| . \|\vec{x}\|$

$\|\alpha . \vec{x}\|^3 = |\alpha|^3 . \|\vec{x}\|^3$

Como $|\alpha|^3 . \|\vec{x}\|^3 \neq \alpha^3 \|\vec{x}\|^3$, a afirmação é falsa