

Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Informática

Computação Gráfica

CG-06-TRANSFORMAÇÕES TRIDIMENSIONAIS

NOTAS DE AULA

Prof. Dr. Dante Alves Medeiros Filho

2015

3. Transformações Geométricas no Espaço

As transformações geométricas tridimensionais valem-se das mesmas geometrias que as transformações bidimensionais. Assim, vamos apresentar estas transformações em coordenadas homogêneas.

3.1 Transformação de Translação Tridimensional

A translação 3D é análoga à 2D acrescida de mais uma coordenada (z) e seu respectivo deslocamento (dz). Em coordenadas homogêneas a matriz desta transformação passa a ser (4×4). Aplicada a um ponto temos:

$$P'(x', y', z') = T(dx, dy, dz).P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Existem várias formas de descrever ou formalizar os objetos gráficos 3D (Modelagem). Aqui, para o estudo das transformações geométricas 3D, vamos formalizá-los pelos vértices. A Figura 1 mostra a translação de um objeto gráfico.

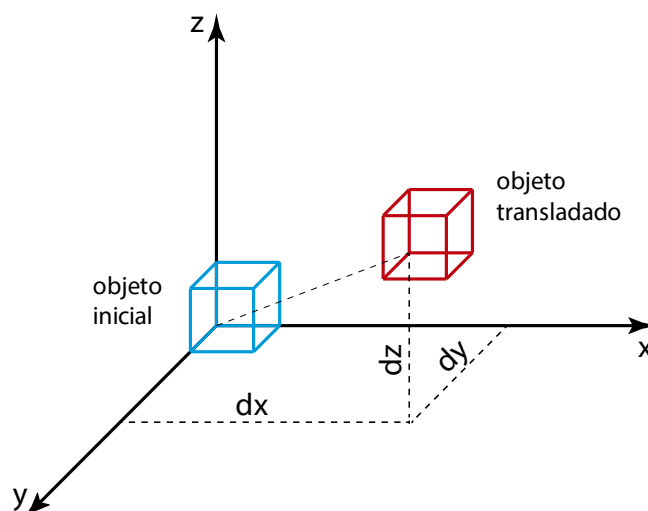


Figura 1: Translação 3D

Na matriz, que representa o objeto gráfico, os vértices são alocados por colunas. Por exemplo, o vértice A da Figura 2 está expresso na primeira coluna da matriz (M_{obj}), o vértice B na segunda coluna e assim sucessivamente.

$$Matriz_{objeto} = M_{obj} = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x & E_x & F_x & G_x & H_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & G_y & H_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & E_z & F_z & G_z & H_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

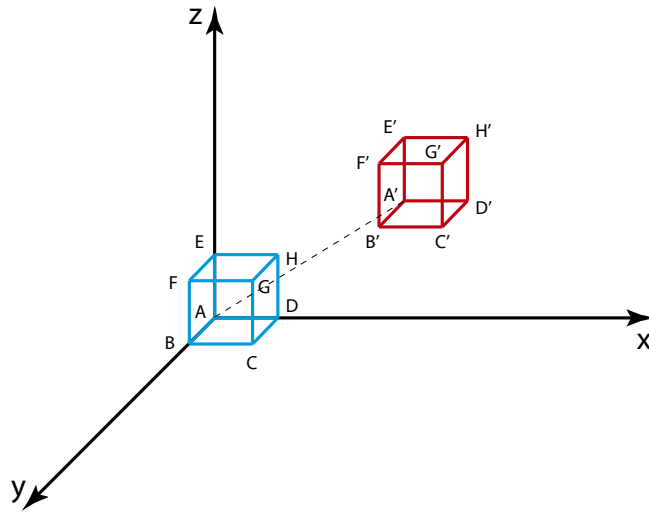


Figura 2: Objeto gráfico transladado pelos vértices

Com a ajuda da representação em coordenadas homogêneas, a transformação de translação pode ser realizada pela multiplicação de matrizes:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x & E_x & F_x & G_x & H_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & G_y & H_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & E_z & F_z & G_z & H_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a transformação de translação 3D considere um cubo unitário com vértices $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,1,0)$, $D(1,0,0)$, $E(0,0,1)$, $F(0,1,1)$, $G(1,1,1)$ e $H(1,0,1)$ sendo deslocado na direção $2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura 3:

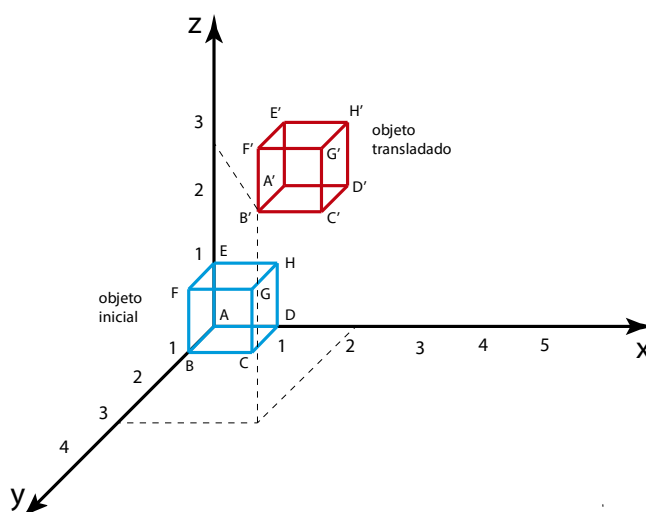


Figura 3: Translação 3D na direção $2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

3.2 Transformação de Mudança de Escala Tridimensional

A transformação de mudança de escala tridimensional em relação à origem e em coordenadas homogêneas é representada matricialmente da seguinte forma:

$$P'(x', y', z') = S_0(s_x, s_y, s_z) \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a aplicação desta transformação, considere o cubo unitário do exemplo anterior, inicialmente alocado na origem que agora sofre ampliação com os seguintes fatores de escala $s_x = 1$, $s_y = 2$ e $s_z = 3$. Matricialmente:

$$M'_{obj} = S_0(1,2,3).M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura4:

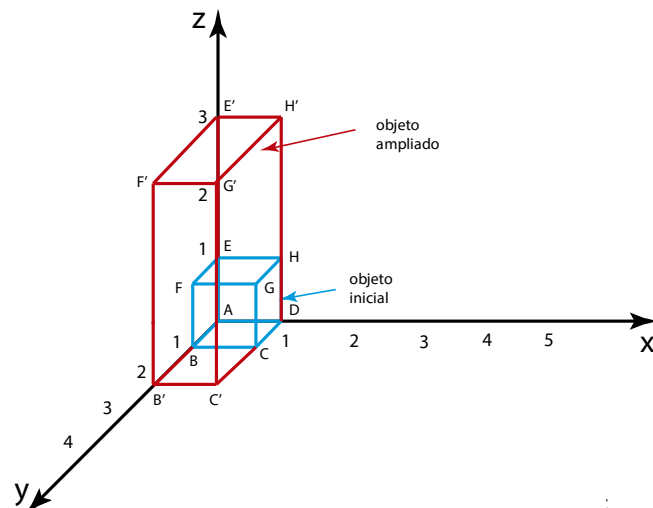


Figura 4: Aplicação de uma transformação de mudança de escala

Observe que, quando o fator de escala é > 1 , temos ampliação do objeto gráfico na direção do fator de escala, quando se encontra entre $0 < S < 1$, retração. Quando $S = 1$, temos a matriz identidade, ou seja, o objeto gráfico não se altera.

3.3 Transformação de Rotação Tridimensional

A rotação bidimensional ocorre em torno de um ponto no plano. A tridimensional ocorre em relação a um eixo no espaço 3D (Figura5).

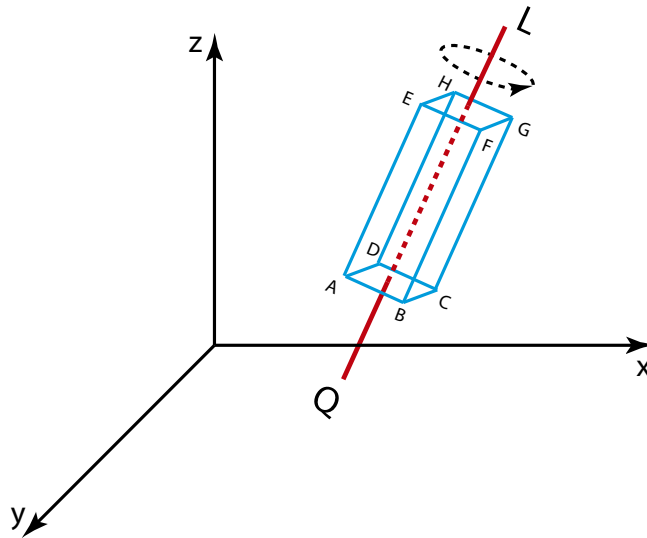


Figura 5:Eixo de rotação no espaço 3D

Inicialmente vamos apresentar a rotação sobre os eixos cartesianos x , y e z . E, depois, a rotação sobre qualquer eixo no espaço 3D. Além disso, a rotação em torno de um determinado eixo depende do sentido do eixo. Assim, para determinar o sentido da rotação vamos utilizar a regra da mão direita que nada mais é do que uma convenção para estabelecer o sentido positivo e negativo desta operação.

3.3.1 A Regra da Mão Direita

A regra da mão direita nos ajuda a orientar os eixos de um sistema de coordenadas e o giro de um objeto gráfico em relação a um dado eixo. Para orientar os eixos principais de um sistema de coordenadas, segundo a regra da mão direita, basta utilizar o polegar da mão direita para indicar o eixo x , o indicador para o eixo y e o dedo médio para o eixo z , conforme a Figura 6.

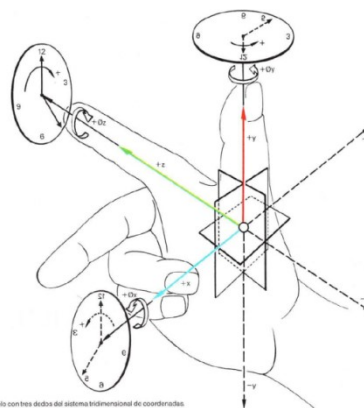


Figura 6:Regra da mão direita para sistemas de coordenadas 3D

Para determinar o sentido da rotação de um objeto em relação a um eixo utilizamos o polegar para indicar o sentido positivo do eixo e os demais dedos, fechando a mão, indicam o sentido positivo do giro (Figura7).

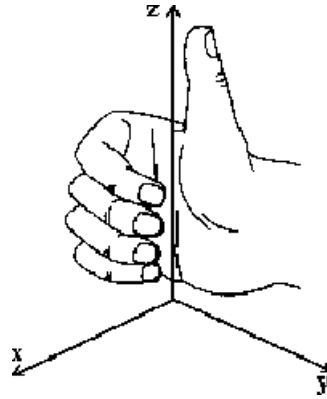


Figura 7:Regra da mão direita para indicação de rotação sobre eixos

3.3.2 Rotação em Torno do Eixo Z

Utilizando a regra da mão direita podemos verificar o sentido positivo da rotação em torno do eixo z. Observe que o sentido positivo, projetado no plano xy, indica um giro no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio (Figura8).

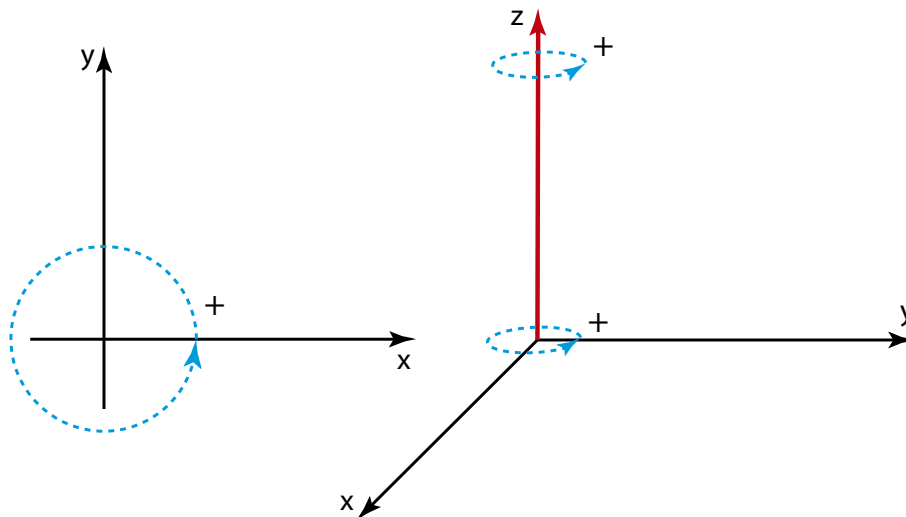


Figura 8:Sentido positivo (anti-horário) do giro em torno do eixo z

Escolhemos o eixo z para iniciar a apresentação da transformação de rotação 3D porque ela possui certa familiaridade com a rotação 2D, uma vez que ela ocorre no plano xy. Vejamos a matriz desta rotação em coordenadas homogêneas.

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^z \cdot P(x, y, z)$$

$$R_{\theta}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a um ponto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Rotação em Torno do Eixo Y

A matriz de rotação em torno do eixo y, como as demais, deve ser calculada utilizando a regra da mão direita (Figura9).

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^y \cdot P(x, y, z)$$

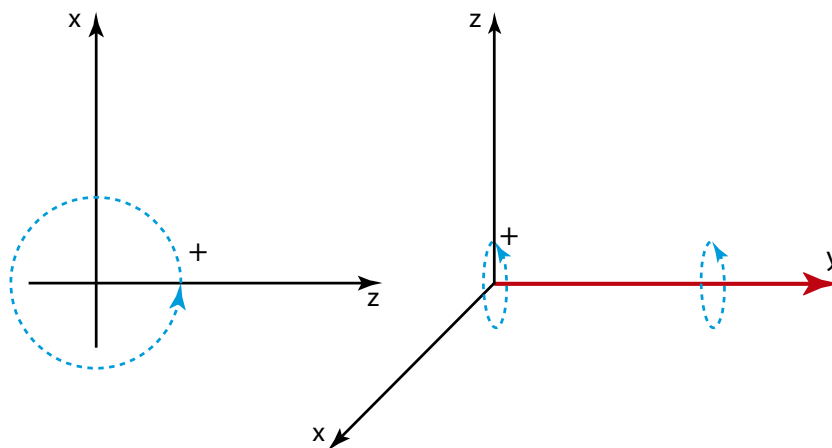


Figura 9: Rotação em torno do eixo y

Para deduzirmos a matriz de rotação é necessária uma análise do giro no plano xz e especial atenção nos sinais trabalhados nas equações. Observe a Figura10.

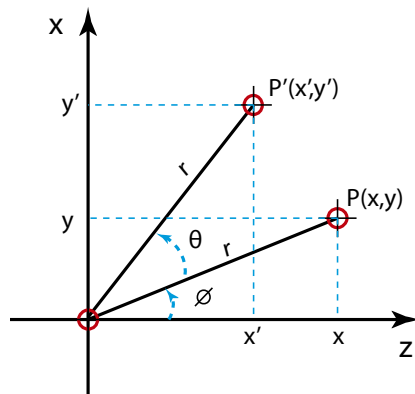


Figura 10: Rotação em torno do eixo y do ponto P para P'

$$z = r \cdot \cos(\phi)$$

$$x = r \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = r \cdot \cos(\theta + \phi)$$

$$x' = r \cdot \text{sen}(\theta + \phi)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = r(\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi))$$

$$z' = r \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - r \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = z \cdot \cos(\theta) - x \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$x' = r \cdot (\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\phi))$$

$$x' = r \cdot \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + r \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\phi)$$

$$x' = z \cdot \text{sen}(\theta) + x \cdot \cos(\theta)$$

Resumindo:

$$z' = z \cdot \cos(\theta) - x \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$x' = z \cdot \text{sen}(\theta) + x \cdot \cos(\theta)$$

Organizando as equações:

$$x' = x \cdot \cos(\theta) + z \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$z' = -x \cdot \text{sen}(\theta) + z \cdot \cos(\theta)$$

Observe os sinais. Em coordenadas homogêneas temos:

$$R_{\theta}^y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a um ponto temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Rotação em Torno do Eixo X

Aplicando o mesmo raciocínio para a rotação em torno do eixo x podemos obter a seguinte matriz em coordenadas homogêneas:

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^x \cdot P(x, y, z)$$

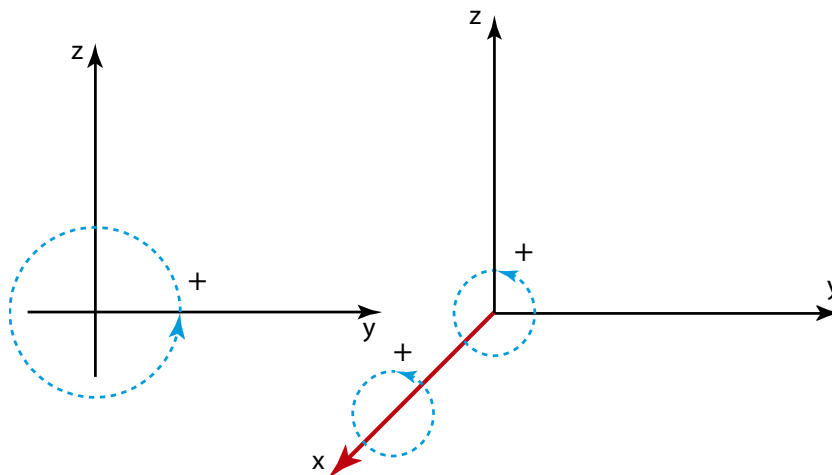


Figura 11: Rotação em torno do eixo x

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a um ponto temos:

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos ilustrar a transformação de rotação com o giro de 90° de um objeto gráfico em torno do eixo x no sentido horário. Observe a Figura 12.

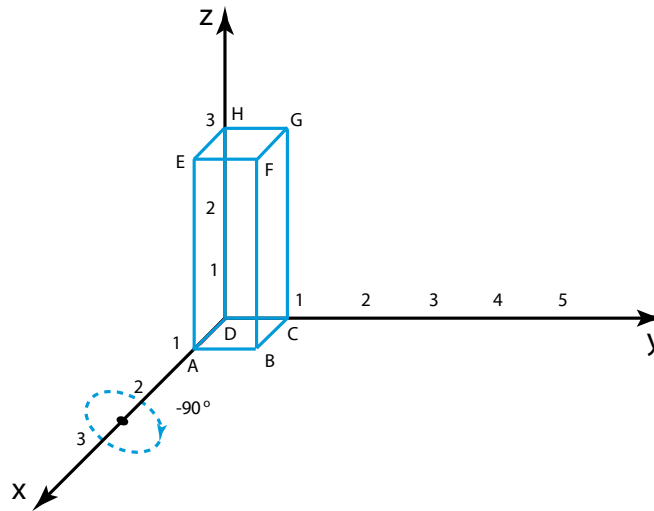


Figura 12:Exemplo de rotação em torno do eixo x

Para girar este objeto, basta multiplicar as coordenadas de seu vértice pela matriz de rotação em torno do eixo x , da seguinte forma:

$$M'_{obj} = R_{-90}^x \cdot M_{obj}$$

Da Figura 12 montamos a matriz que representa o objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação em torno do eixo x :

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 \\ 0 & \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação de rotação sobre os vértices do objeto:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Objeto girado:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura 13:

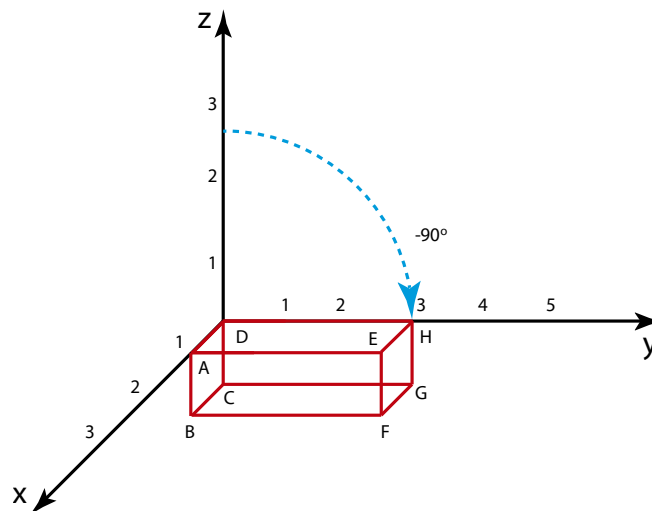


Figura 13: Objeto rotacionado em torno do eixo x

3.3.5 Rotação em Torno de um Eixo qualquer no Espaço 3D

Vimos como realizar a rotação em torno dos eixos principais de um sistema de coordenadas. No entanto, é comum girar objetos em torno de eixos distintos aos principais. A solução algébrica para realizar esta operação consiste em alinhar o eixo de rotação sob o

qual se deseja realizar o giro, de modo que coincida com um dos eixos principais e então aplicar uma das matrizes que acabamos de apresentar (figura 14).

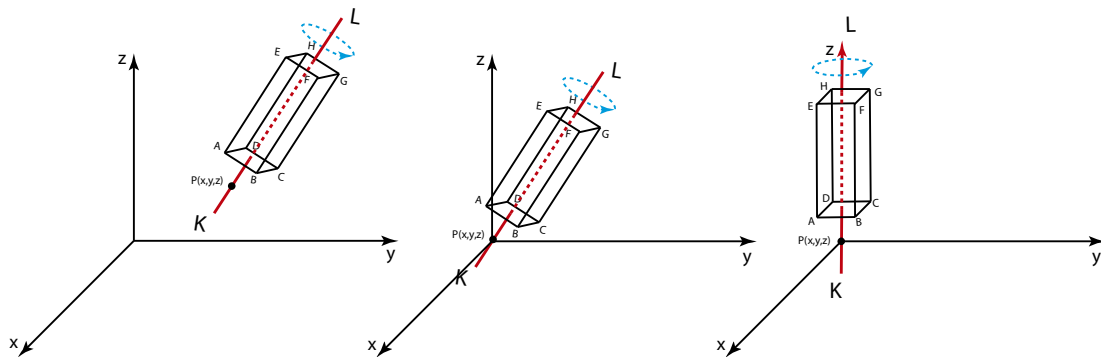


Figura 14: Alinhamento do eixo QL com o eixo z

A combinação de transformações pode nos ajudar na tarefa de alinhar um eixo qualquer no espaço com um dos eixos coordenados. Por convenção e familiaridade com as matrizes bidimensionais, vamos mostrar como alinhar um eixo qualquer no espaço 3D com o eixo z.

Considere a Figura 15. Como o eixo QL, sobre o qual desejamos executar o giro de um objeto gráfico, possui direção e sentido, podemos representá-lo por um vetor, no caso o vetor \vec{v} . O eixo z, por seu turno, também pode ser representado por um vetor, pois também possui direção e sentido. É convencional na literatura representar no eixo z o vetor \vec{k} .

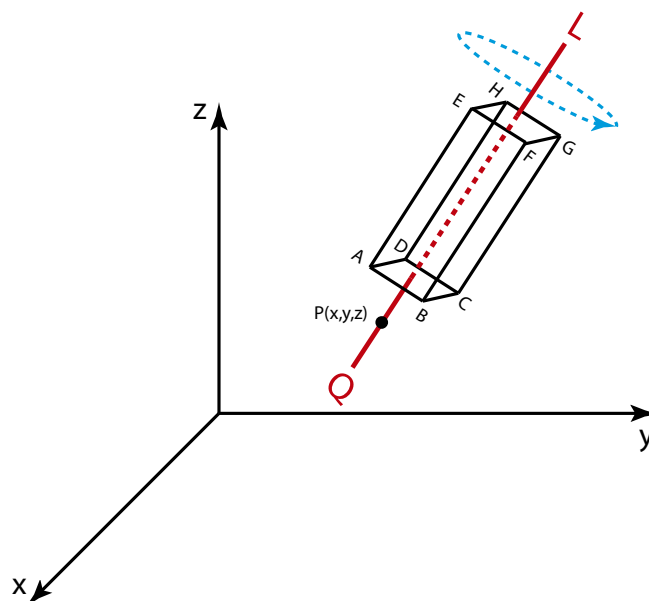


Figura 15: Rotação em torno do eixo QL

A rotação de um objeto gráfico em torno de um eixo qualquer no espaço 3D pode ser realizada por meio dos seguintes passos:

Passo 1: Translação de $Q(x_q, y_q, z_q)$ para a origem do sistema $(0,0,0)$;

Passo 2: Alinhamento do eixo QL (vetor \vec{v}) com o eixo Z (vetor \vec{k});

Passo 3: Rotação de θ° sobre o eixo Z (vetor \vec{k});

Passo 4: Alinhamento de retorno -vetor \vec{k} com o vetor \vec{v} ;

Passo 5: Translação de volta para $Q(x_q, y_q, z_q)$.

Estes passos podem ser expressos matricialmente da seguinte forma:

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot R_{-\theta_1}^x \cdot R_{\theta_2}^y \cdot R_{\theta_3}^z \cdot R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Observe que o alinhamento do eixo QL (vetor \vec{v}) com o eixo Z (vetor \vec{k}) é feito pela multiplicação das matrizes que constituem o giro em relação ao eixo x seguido de um giro em relação ao eixo y .

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x$$

No processo de retorno à posição inicial temos a matriz inversa que chamamos de A_{k-v} . É preciso prestar atenção na notação.

$$A_{k-v} = R_{-\theta_1}^x \cdot R_{\theta_2}^y$$

$$A_{k-v} = A_{v-k}^{-1}$$

Como a matriz A_{k-v} é composta de versores ortonormais, temos:

$$A_{k-v} = A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T$$

Assim, os passos para o giro sobre o eixo podem ser expressos:

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^{-1} \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Ou

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Visando eficiência na implementação podemos calcular a matriz de alinhamento A_{v-k} . Quando realizamos o giro de um objeto em 3D temos que selecionar o objeto e fornecer o eixo de rotação (Q-L). Assim, com os dados de dois pontos distintos no espaço é que vamos calcular a matriz de alinhamento deste eixo com o eixo z (Figura 16).

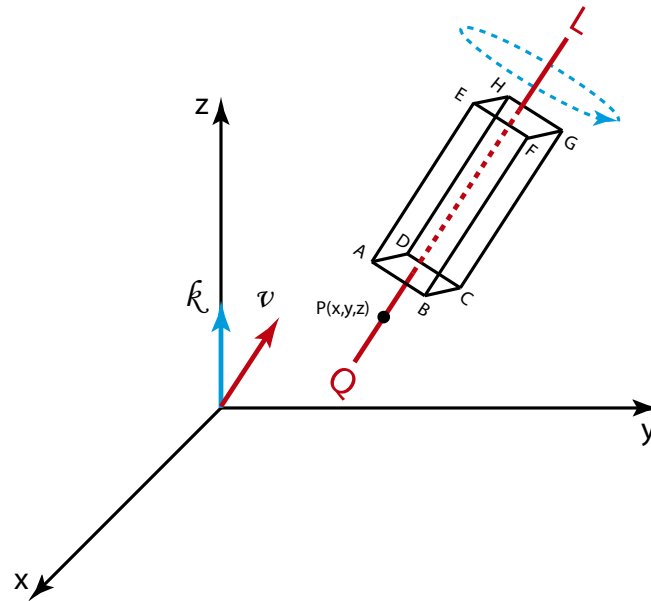


Figura 16: Rotação em torno do eixo QL

O vetor \vec{v} pode ser obtido pela subtração dos pontos Q e L, da seguinte forma:

$$\vec{v} = L(x_L, y_L, z_L) - Q(x_q, y_q, z_q)$$

$$\vec{v} = (x_L - x_q)\vec{i} + (y_L - y_q)\vec{j} + (z_L - z_q)\vec{k}$$

Este vetor \vec{v} tem sentido positivo do ponto Q para o ponto L. Note que construímos o vetor \vec{v} fazendo a subtração: ponto final – ponto inicial. Se invertermos a subtração, fazendo Q-L, teremos a inversão do sentido de \vec{v} . É importante lembrar que o sentido de \vec{v} , com a regra da mão direita, determina o sentido do giro pretendido.

3.3.5.1 O Alinhamento do vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} .

O **primeiro passo** consiste em levar o ponto $Q(x_q, y_q, z_q)$ para a origem (Figura 17). A matriz que representa esta transformação é a seguinte:

$$T(-x_q, -y_q, -z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_q \\ 0 & 1 & 0 & -y_q \\ 0 & 0 & 1 & -z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

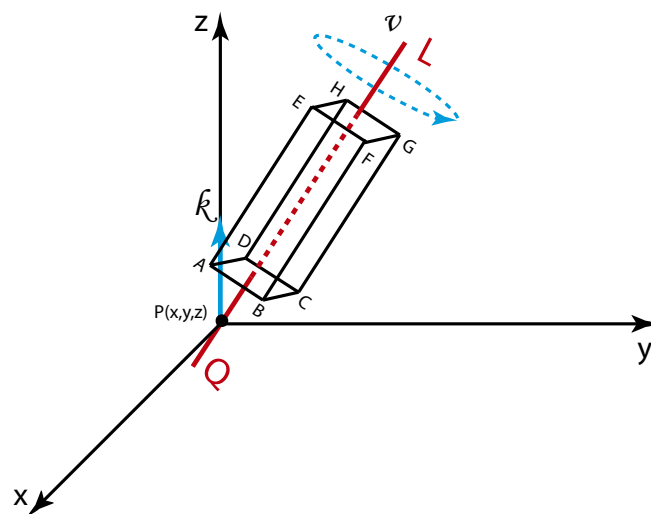


Figura 17: Translação para a origem

No **segundo passo** iniciamos o alinhamento do vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} . Isto pode ser feito com dois giros sucessivos. Inicia-se o procedimento com um giro em torno do eixo x e depois com um giro em torno do eixo y (Figura 18).

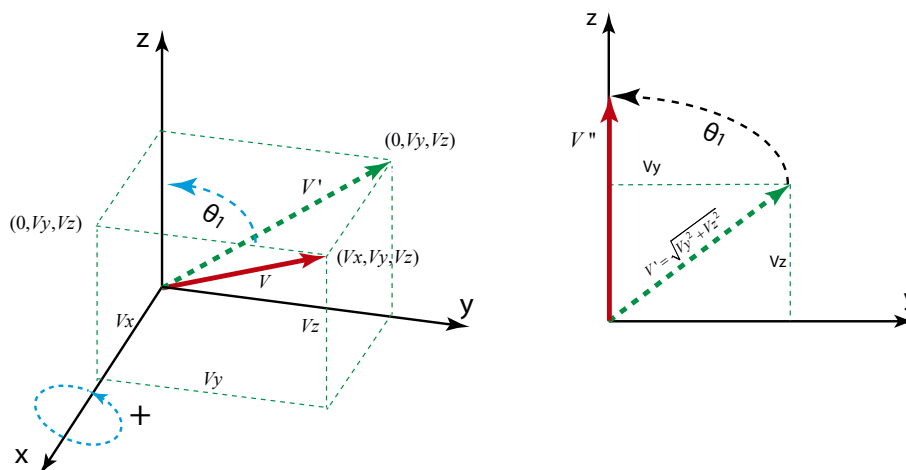


Figura 18: Resultado do giro do vetor \vec{v} em torno do eixo x

Para fazer o giro de θ_1 em torno do eixo x precisamos calcular o seno e o cosseno deste ângulo. Da Figura 18 temos:

$$|v'| = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{v_z}{|v'|} = \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{v_y}{|v'|} = \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}$$

A matriz de rotação em torno do eixo x :

$$R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta matriz ao vetor \vec{v} (Figura 19):

$$v'' = \begin{bmatrix} v''_x \\ v''_y \\ v''_z \\ v''_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v'' = \begin{bmatrix} v''_x \\ v''_y \\ v''_z \\ v''_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ \sqrt{v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

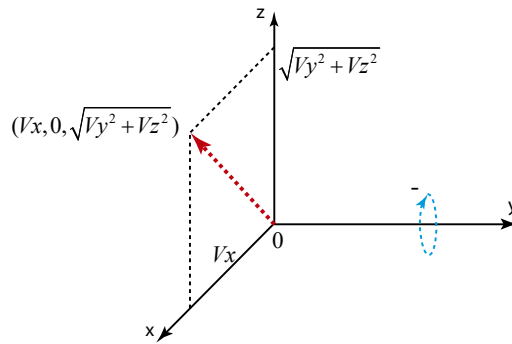


Figura 19: Giro do vetor \vec{v} em torno do eixo x

Agora vamos fazer a rotação em torno de y , no sentido negativo (utilizando a regra da mão direita). Com esta rotação o vetor \vec{v} deve ficar alinhado com o vetor \vec{k} (Figura 20).

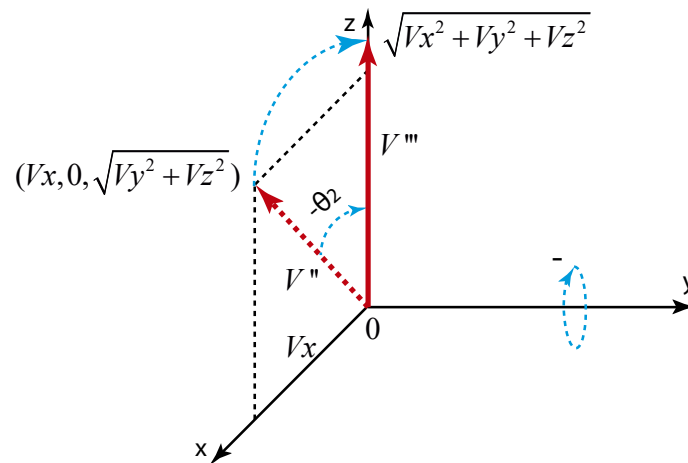


Figura 20: Rotação de \vec{v}'' em torno de y

Temos agora que calcular o seno e o cosseno de θ_2 . Observe que o giro ocorre no sentido negativo.

Cálculo do comprimento de \vec{v}'' :

$$|\vec{v}''| = \sqrt{v_x^2 + (\sqrt{v_y^2 + v_z^2})^2}$$

$$|\vec{v}''| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$R_{-\theta_2}^y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v''' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ w''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ \sqrt{v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v''' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ w''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que v''' é exatamente a norma do vetor \vec{v} . Assim, o alinhamento do vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} pode ser expresso:

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez alinhados os vetores \vec{v} e \vec{k} , podemos realizar **oterceiro passo**, que consiste na rotação do objeto gráfico em torno do eixo z (vetor \vec{k}) com a seguinte matriz:

$$R_{\theta}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\text{sen}\theta_3 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O **quarto passo** faz parte do processo de retorno ao ponto de referência do objeto. É o alinhamento do vetor \vec{k} com o vetor \vec{v} , cuja matriz é atraspsta do alinhamento do vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} .

$$A_{k-v} = A_{v-k}^T$$

$$A_{k-v} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E o **quinto passo** a translação de retorno ao ponto inicial $Q(x_q, y_q, z_q)$

$$T(x_q, y_q, z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_q \\ 0 & 1 & 0 & y_q \\ 0 & 0 & 1 & z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Juntando tudo temos:

$$M'_{obj} = T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q) \cdot M_{obj}$$

Vamos ilustrar o giro de um objeto gráfico sobre um determinado eixo no espaço 3D. Considere a Figura 21. O objeto é definido pelos seguintes pontos A(1,2,1), B(2,2,1), C(2,3,1), D(1,3,1), E(1,2,4), F(2,2,4), G(2,3,4) e H(1,3,4). O eixo de rotação é definido pelos ponto Q(2,1,0) e L(0,3,-1).

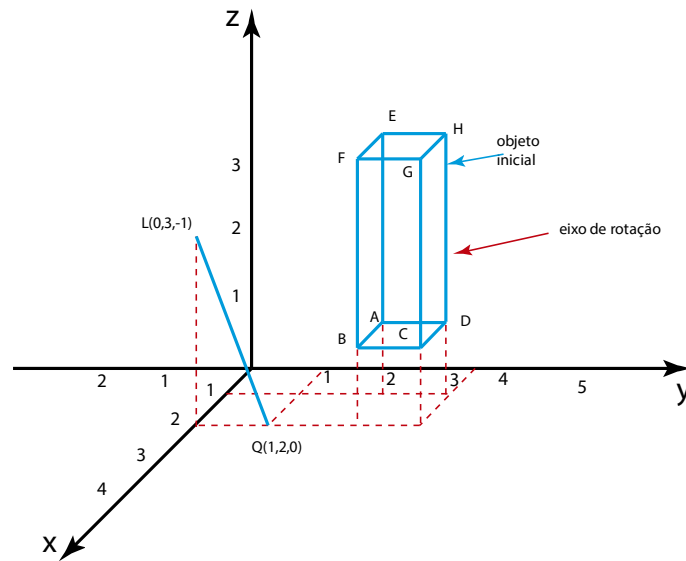


Figura 21: Rotação de v'' em torno de y

A representação do objeto em coordenadas homogêneas fica:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer o giro temos que alinhar o conjunto, objeto gráfico e eixo de rotação com o eixo z. Para isto vamos levar o ponto Q para a origem com a seguinte transformação de translação:

$$T(-x_q, -y_q, -z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos construir a matriz de alinhamento. Esta matriz está em função dos escalares v_x , v_y e v_z que compõem o vetor \vec{v}

$$\vec{v} = L(x_L, y_L, z_L) - Q(x_q, y_q, z_q) = L(2, 0, 3) - Q(2, 1, 0)$$

$$\vec{v} = (x_L - x_q)\vec{i} + (y_L - y_q)\vec{j} + (z_L - z_q)\vec{k}$$

$$\vec{v} = (2 - 2)\vec{i} + (0 - 1)\vec{j} + (3 - 0)\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \sqrt{100} = 10$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{0}{10} & \frac{0}{10} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta_3}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = T(x, y, z) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x, -y, -z) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 3.0 & 2 & 2 & 3.0 & 3.0 & 2.0 & 2.0 & 3.0 \\ -0.4 & -0.4 & -1.2 & -1.2 & -2.2 & -2.2 & -3.0 & -3.0 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 & -0.4 & 2.6 & 2.6 & 2.0 & 2.0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente Figura 22:

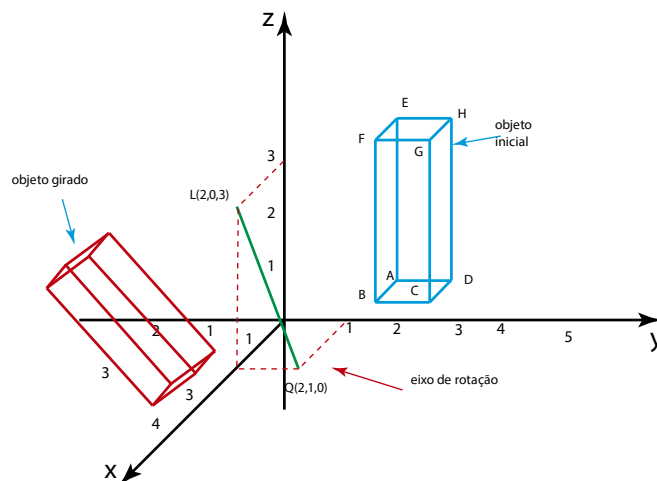


Figura 22: Objeto rotacionado em torno do eixo Q(2,1,0) – L(2,0,3)

3.4 Reflexão no Espaço 3D

A reflexão em tridimensional funciona analogamente à bidimensional. A diferença é que a 2D é feita em relação a um eixo e a 3D em relação a um plano. Inicialmente vamos apresentar a reflexão relativa aos planos formados pelos eixos principais.

3.4.1 Reflexão em relação ao plano xy

Considere a Figura 23. Observe que um ponto $P(x, y, z)$ pode ser espelhado em relação ao plano xy apenas trocando o sinal da sua cota, ou melhor, da coordenada z .

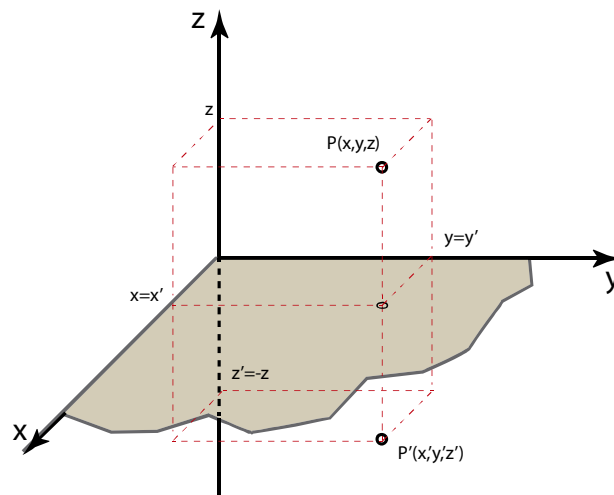


Figura 23: Objeto espelhado em relação ao plano xy

Algebricamente podemos expressar a matriz dessa transformação em coordenadas homogêneas, quando aplicada a um ponto, da seguinte forma:

$$P'(x', y', z') = M_{xy} \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Reflexão em relação ao plano xz

Considere a Figura 24. Observe que o ponto $P(x, y, z)$ agora é espelhado em relação ao plano xz . Esta operação pode ser realizada trocando-se apenas o sinal da sua ordenada, ou seja, da coordenada y .

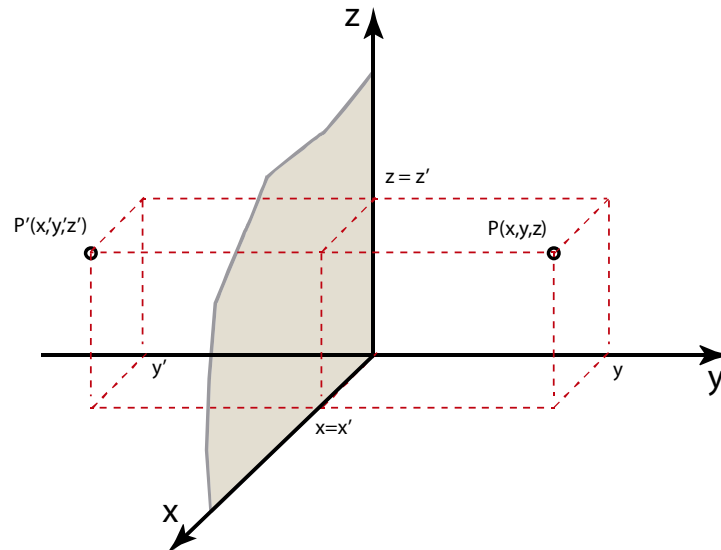


Figura 24: Objeto espelhado em relação ao plano xz

Algebricamente, aplicando a um ponto e em coordenadas homogêneas temos:

$$P'(x', y', z') = M_{xz} \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Reflexão em relação ao plano yz

Considere agora a Figura 25. Observe que nela o ponto $P(x, y, z)$ é espelhado em relação ao plano yz . Isto pode ser feito trocando-se o sinal da sua abscissa, ou seja, da coordenada x .

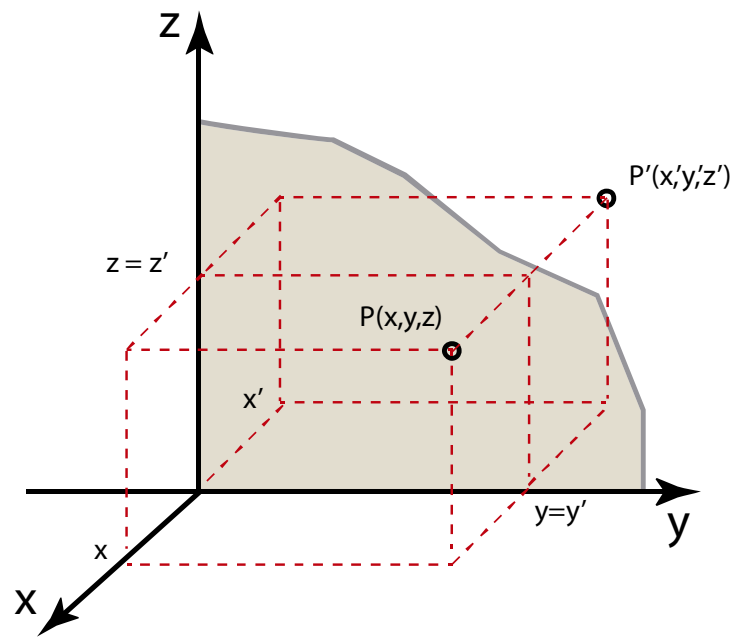


Figura 25: Espelhamento de um ponto em relação ao plano yz

Algebricamente e em coordenadas homogêneas temos:

$$P'(x', y', z') = M_{yz} \cdot P(x, y, z)$$

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4.4 Reflexão em relação a um Plano qualquer no espaço 3D

A reflexão tridimensional não ocorre apenas em relação aos planos gerados pelas direções principais. É comum o espelhamento de objetos em relação a um plano qualquer no espaço.

Um plano é univocamente determinado quando conhecemos um ponto sobre ele e um vetor perpendicular a ele. Isto quer dizer que quando conhecemos um plano também

conhecemos um vetor que lhe é perpendicular. Observe a Figura 26. Nela mostramos um ponto $P(x, y, z)$ e um plano sobre o qual queremos espelhar este ponto.

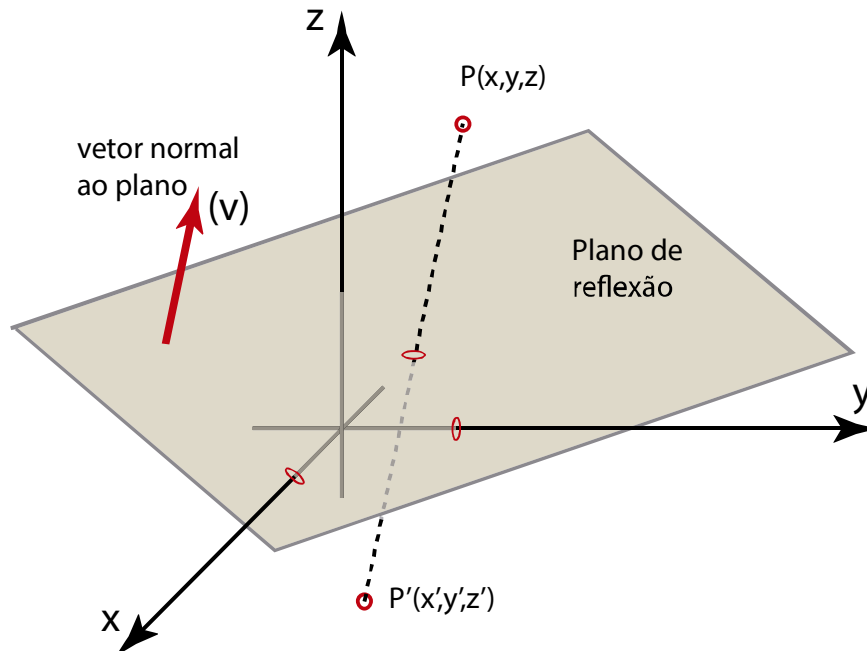


Figura 26: Reflexão ou espelhamento em relação a um plano qualquer no espaço 3D

Vimos como funcionam os espelhamentos em relação aos planos formados pelos eixos principais, e, com este conhecimento, podemos transladar o problema de espelhar um objeto em relação a um plano qualquer no espaço para um plano ao qual sabemos realizar esta operação. Assim, por convenção, escolhemos o plano xy para esta operação, que pode ser realizada com os seguintes passos:

Passo 1: transladar o plano para a origem utilizando um ponto de referência;

Passo 2: alinhar o vetor normal \vec{v} com o vetor \vec{k} (mesmo procedimento da rotação 3D);

Passo 3: realizar a reflexão em relação ao plano xy ;

Passo 4: alinhar o vetor \vec{k} com o vetor \vec{v} (mesmo procedimento usado na rotação 3D);

Passo 5: transladar ao ponto de início.

$$M'_{obj} = T(x, y, z) \cdot A_{v-k}^T \cdot M_{xy} \cdot A_{v-k} \cdot T(-x, -y, -z) \cdot M_{obj}$$

Para ilustrar o espelhamento de um objeto considere a Figura 27. Vamos espelhar a reta definida pelos pontos D(2,2,2) e E(1,3,4) em relação ao plano definido pelos pontos A(3,0,0), B(0,2,0) e C(0,0,1).

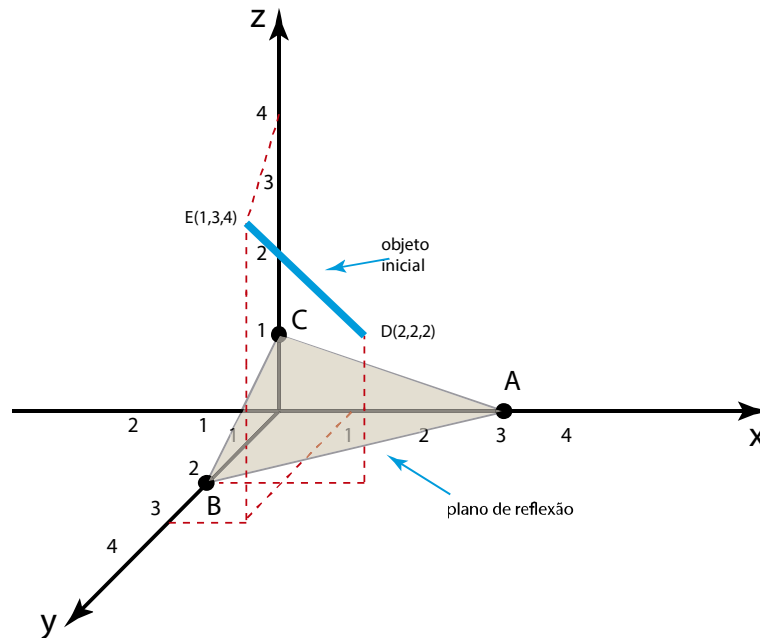


Figura 27: Reflexão da reta DE em relação ao plano ABC

Matriz do objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos do vetor normal ao plano definido pelos pontos ABC. Temos que mover este plano de forma que coincida com o plano xy . Isto é possível escolhendo um dos pontos que integram o plano como referencial e transladar o conjunto plano-ponto para a origem do sistema. Vamos escolher o ponto A(3,0,0).

A matriz de translação pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(-x, -y, -z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos alinhar o plano de reflexão com o plano xy. Isto é possível por meio do alinhamento do vetor normal ao plano de reflexão \vec{v} com o vetor \vec{k} (eixo z). O vetor normal pode ser gerado por meio do produto vetorial dos vetores \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} . Os pontos que definem o plano são:

$$A(3,0,0), B(0,2,0) \text{ e } C(0,0,1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$$

Cálculo de \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} :

$$\overrightarrow{BA} = A - B = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = -2\vec{j} + \vec{k}$$

Cálculo de \vec{v} :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

Temos então:

$$v_x = -2; \quad v_y = -3; \quad v_z = -6$$

Vamos montar a matriz de alinhamento do vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} .

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{45}$$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{49}$$

$$\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \sqrt{2205}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{-6}{\sqrt{2205}} & \frac{-12}{\sqrt{2205}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{45}} & \frac{3}{\sqrt{45}} & 0 \\ -2 & \frac{-3}{\sqrt{49}} & \frac{-6}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de espelhamento em relação ao plano M_{xy} :

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa ou de retorno. Alinhamento do vetor \vec{k} com o vetor \vec{v} :

$$A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{-6}{\sqrt{2205}} & \frac{-6}{\sqrt{45}} & \frac{-3}{\sqrt{49}} & 0 \\ -12 & \frac{3}{\sqrt{45}} & \frac{-6}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}} & 1 \end{bmatrix}$$

Translação de volta ao ponto inicial:

$$T(3,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{49}} & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}} & 0 \\ -12 & 3 & -6 & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{0} & \frac{\sqrt{45}}{0} & \frac{\sqrt{49}}{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & -6 & \frac{-12}{\sqrt{2205}} & 0 \\ \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \\ \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} -0.693 & -1.367 \\ 0.408 & -0.551 \\ -1.918 & -3.102 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 Transformação de Coordenadas em 3D

Vamos considerar um sistema de coordenadas tridimensional com eixos x, y e z e origem em $\{0\}$. Note que um ponto neste sistema pode ser referenciado vetorialmente (Figura 28).

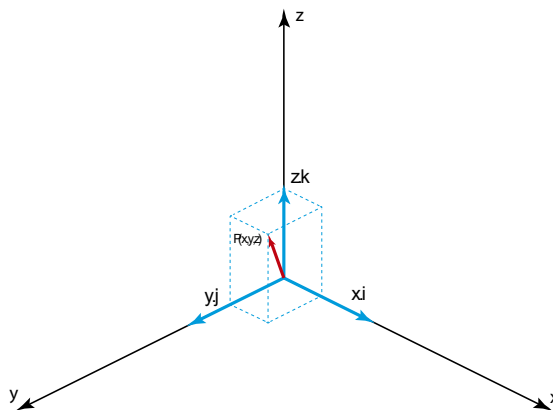


Figura 28: Ponto e vetor

Neste sistema de coordenadas o seguimento OP pode ser expresso na base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ da seguinte forma:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Observe que as coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ são iguais aos coeficientes de \overrightarrow{OP} . Vamos agora representar este mesmo ponto em outro sistema de coordenadas. Neste novo sistema $P(x, y, z)$ passa a ser $P'(x', y', z')$. No primeiro sistema a base canônica é representada pela origem e os vetores unitários $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e na nova base os versores são representados por $\{0', \vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$. Analogamente ao sistema anterior podemos representar $\overrightarrow{O'P'}$ por meio de sua base (Figura 29).

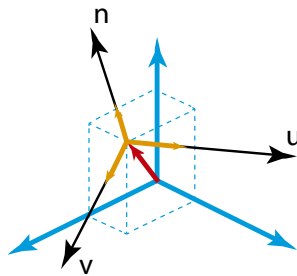


Figura 29: $P'(x, y, z)$ no sistema $\{0', x', y', z'\}$

$$\overrightarrow{O'P'} = (x', y', z') = (x', 0, 0) + (0, y', 0) = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = x'(1, 0, 0) + y'(0, 1, 0) = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

Vamos representar o ponto $P(x, y, z) = P'(x', y', z')$ simultaneamente nos dois sistemas de coordenadas, pois são o mesmo ponto (Figura 30).

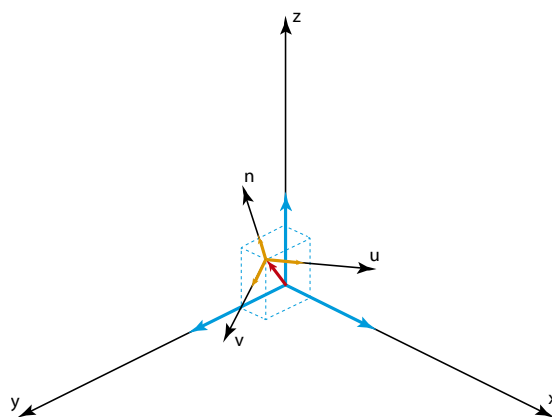


Figura 30: $P(x, y, z)$ nos sistemas $\{0, x, y\}$ e $\{0', x', y', z'\}$

As coordenadas de $P(x, y, z)$ no sistema $\{0', x', y', z'\}$ são $P'(x', y', z')$ e podem ser expressas da seguinte forma:

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u} \vec{v} \vec{n}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Lembrando que os versores do novo sistema são formalizados na base do sistema inicial $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$$

$$\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

$$\vec{n} = x_n \vec{i} + y_n \vec{j} + z_n \vec{k}$$

Temos:

$$[\vec{u} \vec{v} \vec{n}] = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Para $0 = 0'$ temos $OP = O'P'$ e $P(x, y, z) = P'(x', y', z')$:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para determinar P' temos que multiplicar os dois lados da equação pela matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Porém como esta matriz é ortogonal, a sua inversa é igual a sua transposta:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

$P'(x', y', z')$ pode ser assim determinado:

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Podemos calcular as coordenadas de P no novo sistema da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

De forma genérica podemos realizar a transformação de coordenadas em relação a um sistema fora da origem. Nesta situação temos que inicialmente realizar a translação para a origem. Podemos, com o auxílio de coordenadas homogêneas, escrever uma única matriz para esta operação, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x_n & y_n & z_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -o_x \\ 0 & 1 & 0 & -o_y \\ 0 & 0 & 1 & -o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & -x_o x_u - y_o y_u - z_o z_u \\ x_v & y_v & z_v & -x_o x_v - y_o y_v - z_o z_v \\ x_n & y_n & z_n & -x_o x_n - y_o y_n - z_o z_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos ilustrar a mudança de sistemas de coordenadas 3D calculando a nova posição do ponto $(4,2,5)$ do sistema $\{0,x,y,z\}$ no sistema $\{0',x',y',z'\}$, (Figura 31). O sistema $\{0,x,y,z\}$ é definido pelos versores $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. O sistema $\{0',x',y',z'\}$ é definido pelos pontos: Origem: $(3,2,2)$; $A(6,2,2)$; $B(3,4,4)$ e $C(3,0,4)$.

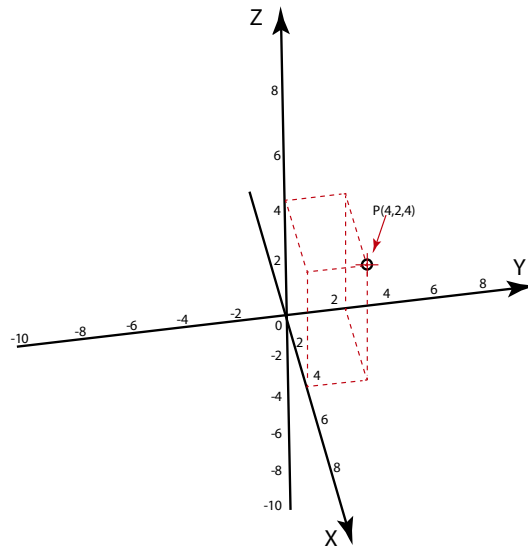


Figura 31: $P(x, y, z)$ nos sistema $\{0,x,y,z\}$

O ponto P no sistema $\{0',x',y',z'\}$ é P' (Figura 32):

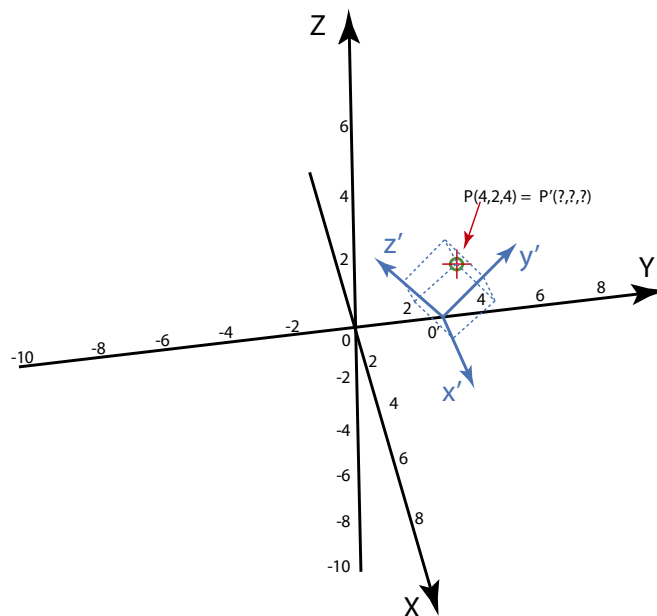


Figura 32: $P(x, y, z)$ nos sistema $\{0,x,y,z\}$ e $\{0',x',y',z'\}$

Vamos calcular os versores \vec{u} , \vec{v} e \vec{n} :

$$\vec{U} = A - O' = (6,2,2) - (3,2,2) = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{V} = B - O' = (3,4,4) - (3,2,2) = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{N} = C - O' = (3,0,4) - (3,2,2) = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Temos a base \vec{u} , \vec{v} e \vec{n} .

$$\vec{U} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{V} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{N} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Cálculo do versor na direção \vec{u} :

$$|\vec{U}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{3}{3}\vec{i} = 1\vec{i}$$

Cálculo do versor na direção \vec{v} :

$$|\vec{V}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$$

Cálculo do versor na direção \vec{n} :

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-2}{\sqrt{8}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$$

Determinação das coordenadas no novo sistema:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Lembrando que a matriz acima foi deduzida quando $0 = 0'$, ou seja, com os sistemas na origem. Assim, para o cálculo desta rotação precisamos primeiro realizar uma translação para a origem (Figura 33):

$$P' = P - 0'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

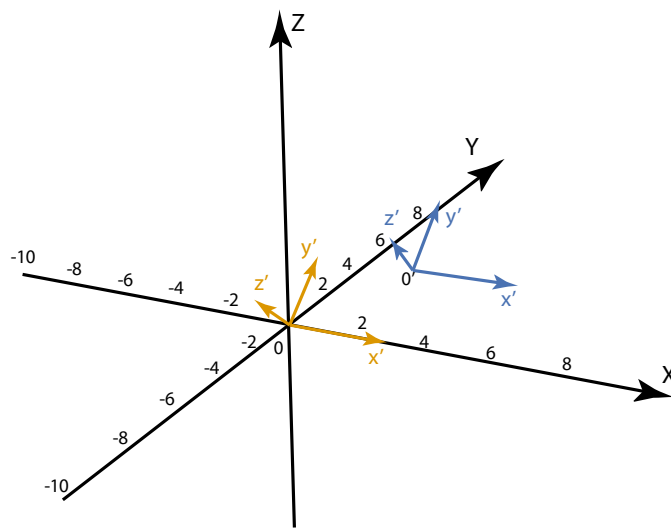


Figura 33: Sistemas $\{0, x, y, z\}$ e $\{0', x', y', z'\}$

Aplicando a rotação temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.4142 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$$

Vamos repetir os cálculos só que agora, utilizando coordenadas homogêneas. Para tal, vamos usar a seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & -x_{o'}x_u - y_{o'}y_u - z_{o'}z_u \\ x_v & y_v & z_v & -x_{o'}x_v - y_{o'}y_v - z_{o'}z_v \\ x_n & y_n & z_n & -x_{o'}x_n - y_{o'}y_n - z_{o'}z_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas de O' representadas em {0,x,y,z} são:

$$x_{o'} = 3;$$

$$y_{o'} = 2;$$

$$z_{o'} = 2;$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (-3.1 - 2.0 - 2.0) \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & (-3.0 - 2. \frac{\sqrt{2}}{2} - 2. \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & (-3.0 + 2. \frac{\sqrt{2}}{2} - 2. \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.4142 \\ 1.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Referências

HOWARD, T. I. J. et al. **A practical introduction to PHIGS and PHIGS PLUS**. New York: Addison-Wesley Publisher Ltd., 1991.

MAGALHÃES, L. P. **Computação Gráfica**: interfaces em sistemas de computação gráfica. Campinas: Unicamp, 1986.

PERSIANO, R. C. Marinho; OLIVEIRA, A. A. Fernandes de. **Introdução a computação gráfica**. Rio de Janeiro: LTC, 1988.