

Transformações Geométricas 2D

COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Dante Alves Medeiros Filho

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Informática

Computação Gráfica

CG-05-TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

NOTAS DE AULA

Prof. Dr. Dante Alves Medeiros Filho

2016

SUMÁRIO

2. Transformações	01
2.1 Classificação das Transformações	01
2.1.1 Transformações Isométricas - Isometria ou Congruência	01
2.1.2 Transformações Isomórficas – Homotetia e Semelhança	02
2.1.2.1 Semelhança	02
2.1.2.2 Homotetia	02
2.1.3 Transformações Anamórficas	02
2.2 Transformações e Geometrias	02
2.2.1 Geometria Congruente	03
2.2.2 Geometria Conforme	03
2.2.3 Geometria Euclidiana	03
2.2.4 Geometria Afim	03
2.2.5 Geometria Projetiva	04
2.2.6 Topologia	04
2.3 Transformações Básicas no Plano	05
2.3.1 Transformação de Translação	06
2.3.2 Transformação de Mudança de Escala	08
2.3.3 Transformação de Rotação	11
2.4 Outras Transformações Geométricas	14
2.4.1 Transformação de Reflexão	14
2.4.2 Transformação de Distorção Linear	17
2.5 Composição de Transformações	19
2.5.1 Transformações Lineares	22
2.5.1.1 Matrizes - Anatomia de uma Transformação Linear	23
2.5.2 Transformação Afim	25
2.5.3 Coordenadas Homogêneas	26
2.5.4 Transformações Geométricas e Coordenadas Homogêneas	28
2.5.4.1 Translação com Coordenadas Homogêneas	28
2.5.4.2 Mudança de Escala com Coordenadas Homogêneas	30

2.5.4.3 Rotação com Coordenadas Homogêneas	33
2.5.4.4 Reflexão com Coordenadas Homogêneas	36
2.5.4.5 Distorção com Coordenadas Homogêneas	48
2.5.5 Transformações Inversas	52
2.5.6 Transformações de Corpo Rígido	55
2.5.7 Sucessividade e Comutatividade das Transformações	56
2.5.7.1 Transformações Aplicadas Sucessivamente	57
2.5.7.2 Comutatividade das Transformações	58
2.6 Transformações de Coordenadas	71
2.6.1 Rotação de Sistemas de Coordenadas	76
2.6.2 Translação de Sistemas de Coordenadas	77
2.7 Conclusões	81
Bibliografia Recomendada	83

2 Transformações

As **transformações geométricas** desempenham papel importante na **computação gráfica**. Permitem a modelação, posicionamento, modificações e visualização de objetos gráficos. Estas operações são frequentes nesta disciplina e quando expressas na forma matricial, facilitam a manipulação de dados dando grande eficiência a estes sistemas computacionais.

Essas transformações podem ser consideradas como aplicações, mapeamentos ou funções empregadas sobre objetos geométricos capazes de deslocá-los, deformá-los, girá-los em espaços bidimensionais ou até mesmo projetá-los em tridimensionais. Existem vários tipos de transformações e cada uma delas possui funções e características específicas. Vamos formalizá-las matematicamente visando seu uso na **computação gráfica**. Nesta tarefa mostraremos quais as ferramentas matemáticas apropriadas para que, quando submetidos a estas transformações, os objetos gráficos não sofram deformações inoportunas e se ganhe eficiência em sua manipulação.

O termo **transformação geométrica** foi cunhado por **Felix Klein** (1849-1925) da **Universidade de Erlangen** ao observar que certas propriedades de objetos gráficos permaneciam inalteradas quando eram submetidos a determinados tipos de operações e com isto poderia classificar geometrias que as representassem. Ele destacou as propriedades invariantes e variantes nos objetos e construiu uma taxonomia de geometrias.

2.1 Classificação das Transformações

De acordo com a preservação ou não das propriedades dos objetos gráficos após a aplicação de **transformações geométricas**, estas podem ser classificadas como: **isométricas**, **isomórficas** ou **anamórficas**.

2.1.1 Transformações Isométricas - Isometria ou Congruência

Uma **transformação geométrica** é considerada **isométrica** quando os objetos gráficos, após a sua aplicação, mantém a ordem ou sequência dos pontos, a colinearidade, a amplitude dos ângulos e o paralelismo de retas. O objeto gráfico mantém-se igual, ou seja, conserva forma e tamanho.

2.1.2 Transformações Isomórficas – Homotetia e Semelhança

São chamadas de transformações **isomórficas** aquelas que modificam o tamanho dos objetos gráficos, não preserva medidas, porém mantêm a sua forma. Podem ser classificadas em **homotetia** e **semelhança**.

2.1.2.1 Semelhança

Quanto os objetos gráficos após a aplicação da transformação mantêm a amplitude dos ângulos, a colinearidade de pontos, as razões entre os segmentos de reta e o paralelismo de retas. Não conserva distância entre os pontos (medidas). Preserva forma, porém não preserva tamanho dos objetos.

2.1.2.2 Homotetia

Ocorre quando os objetos após a aplicação da transformação mantêm a forma dos objetos segundo uma determinada proporção. Não preserva medidas. Reduz ou amplia as distâncias e áreas a partir de um ponto fixo de referência. A **homotetia** preserva as razões entre os segmentos de reta e seu paralelismo.

2.1.3 Transformações Anamórficas

São aquelas que modificam a posição, tamanho e forma do objeto gráfico inicial. Transformações que ampliam ou reduzem objetos gráficos com proporções diferentes da direção de seus eixos principais são consideradas **anamórficas**.

2.2 Transformações e Geometrias

Com a definição dessas propriedades que estabelecem a comparação entre o objeto gráfico antes de ser submetido à transformação e depois dela, podemos classificar as propriedades invariantes em grupos e, por conseguinte as geometrias que são empregadas na computação gráfica em: **euclidiana**, **afim**, **projetiva** e **Topologia** (Figura 1).

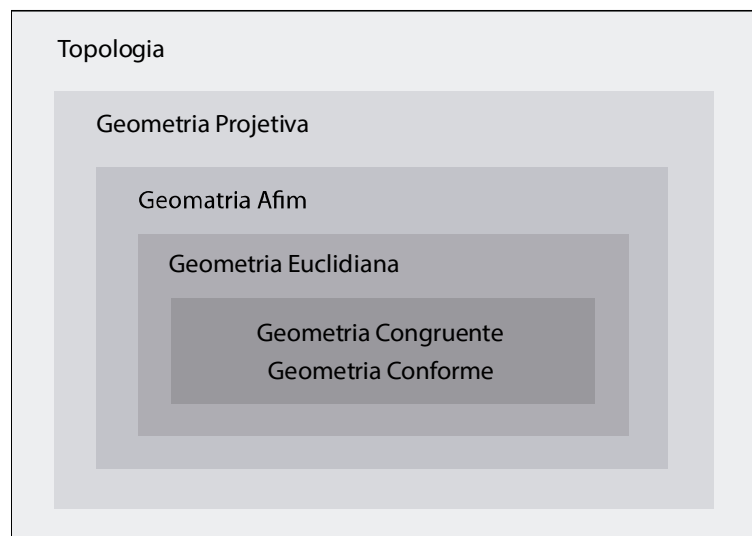


Figura 1: Relação entre Geometrias

2.2.1 Geometria Congruente

Caracteriza-se pela manutenção das propriedades dos objetos gráficos após a aplicação das transformações. O tamanho e forma permanecem idênticos ao objeto gráfico inicial. Podemos transladar e rotacionar objetos gráficos sem alterar suas propriedades congruentes. Preserva medidas e ângulos.

2.2.2 Geometria Conforme

Este tipo de geometria mantém a forma dos objetos gráficos após a aplicação das transformações, porém não preserva o tamanho. Os objetos gráficos podem sofrer retração ou ampliação. Ângulos são preservados. Medidas não são preservadas.

2.2.3 Geometria Euclidiana

Este tipo de geometria envolve as propriedades das geometrias congruente e conforme. É uma das mais conhecidas e utilizadas no mundo. Teve imensa difusão com o trabalho de Euclides (300 a.C.) “**Os elementos**” composto de treze volumes. Esta publicação é considerada a mais difundida no ocidente depois da Bíblia.

2.2.4 Geometria Afim

Nesta Geometria as propriedades invariantes dos objetos gráficos após a sua aplicação são: colinearidade, paralelismo, razão entre pontos em segmentos de retas e intermediação. Esta última propriedade indica que um ponto intermediário a dois pontos que definem um segmento de reta, permanece na sua condição de intermediário após a aplicação de transformações deste grupo.

2.2.5 Geometria Projetiva

Esta geometria envolve transformações nas quais linhas paralelas não são preservadas, mas linhas retas permanecem retas. Uma transformação projectiva transforma círculos em elipses e hipérbolas em parábolas. É uma ferramenta muito importante para a computação gráfica principalmente para a representação de cenas tridimensionais em superfícies planas.

2.2.6 Topologia

A topologia pode ser considerada a menos restritiva dentre essas geometrias. Ela permite transformações que produzem esticamento, flexão e que variadamente distorce um objeto gráfico, desde que nenhum corte ou colagem seja feito. Poucas propriedades geométricas são preservadas, das quais podemos destacar a conectividade e ordem dos pontos que definem o objeto gráfico.

Mortenson (1999) ilustrou alguns efeitos produzidos por **transformações geométricas** sobre um quadrado que retrata muito bem os grupos de propriedades ligados as geometrias aqui aludidas (Figura 2).

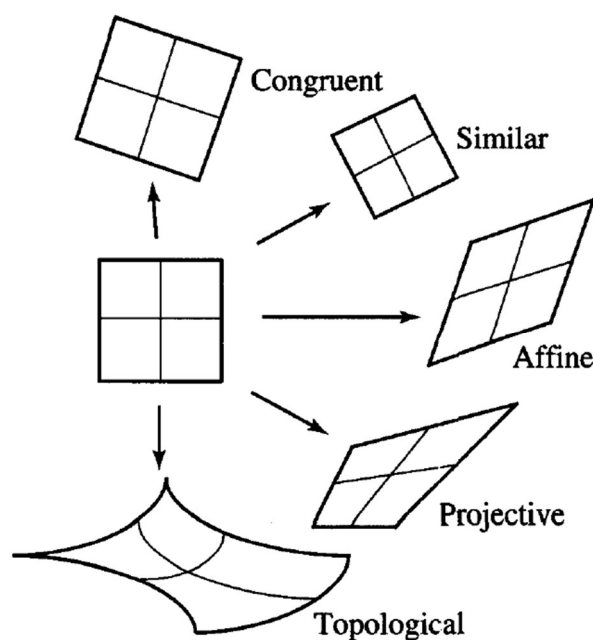


Figura 2: Geometrias definidas com o auxílio de transformações, (MORTENSON, 1999, p.48).

2.3 Transformações Básicas no Plano

São consideradas como transformações básicas no plano as transformações de **translação**, **rotação** e **mudança de escala**. Os objetos gráficos são geralmente construídos geometricamente por meio de pontos e linhas. Os pontos definem os vértices e as linhas por sua vez dão forma aos objetos. Assim, as **transformações geométricas** podem ser estudadas por meio de sua aplicação sobre um ponto e por analogia estender este raciocínio a objetos gráficos complexos representados por vários pontos. Após a apresentação das transformações básicas mostraremos as transformações de **reflexão** e de **distorção linear** que trazem contribuições significativas para a computação gráfica.

O estudo de **transformações geométricas** está intimamente ligado ao uso de matrizes. A utilização desta ferramenta algébrica foi estudada por Arthur Cayley (VINCE, 2006) em meados de 1858. A observação do comportamento de equações referentes à aplicação de duas transformações sucessivas evidenciou que os coeficientes dessas equações poderiam ser agrupados formando o que conhecemos hoje como matrizes. Esta organização algébrica de números ou elementos matemáticos em linhas e colunas permite sintetizar conjuntos de operações matemáticas. Em particular, para a **computação gráfica**, auxilia a representação

de transformações dando grande eficiência ao processo de geração e manipulação de imagens digitais.

2.3.1 Transformação de Translação

Esta transformação quando aplicada em um objeto gráfico desloca este objeto para uma nova posição (Figura 3). É importante, tratando-se de transformações geométricas verificar que propriedades dos objetos gráficos permanecem ou não invariantes. Como visto, podemos classificar estas transformações de acordo com o comportamento dessas propriedades e escolher adequadamente qual tratamento algébrico e geométrico é mais eficaz e eficiente para cada uma dessas aplicações ou mapeamentos.

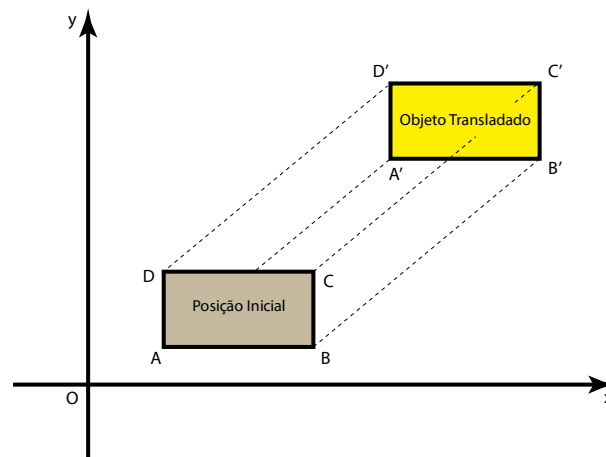


Figura 3: Translação do ponto P para P'

Note que nesta transformação o objeto preserva a congruência das medidas, a posição dos vértices, a colinearidade dos pontos, a medida dos ângulos e o paralelismo das retas, ou seja, mantêm forma e tamanho. É considerada uma **isometria**.

Para um tratamento algébrico, tomemos a Figura 4 que ilustra o descolamento de um ponto $P(x, y)$ para $P'(x', y')$ no plano.

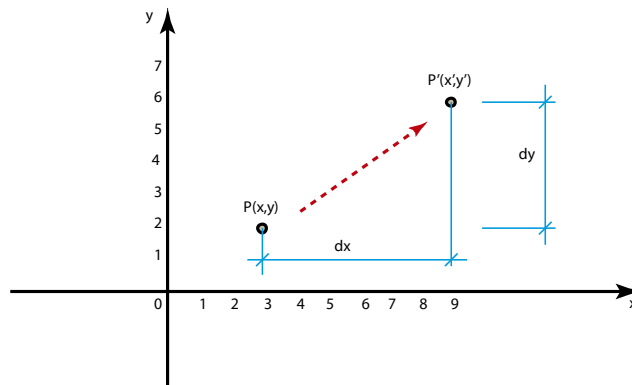


Figura 4: Translação de um ponto em dado plano

O ponto deslocado $P'(x', y')$ pode ser expresso algebricamente da seguinte forma:

$$x' = x + dx$$

$$y' = y + dy$$

Matricialmente podemos escrever:

$$P' = P + T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a translação considere um ponto P com coordenadas $(3,2)$. Vamos calcular a nova posição do ponto quando sofre um deslocamento de 6 unidades na direção x e 4 unidades na direção y .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O ponto $P(3,2)$ após o deslocamento de 6 unidades na direção x e 4 na direção y passa a ter as coordenadas $P'(9,6)$.

2.3.2 Transformação de Mudança de Escala

A **transformação de escala** é aplicada sobre as dimensões predominantes do objeto. No caso de objetos gráficos bidimensionais sobre a sua largura e altura. Neste sentido temos um fator de escala para a direção da largura s_x e na direção da altura s_y . Dependendo dos valores destes fatores, quando aplicados ao objeto, pode modificar a sua forma e tamanho.

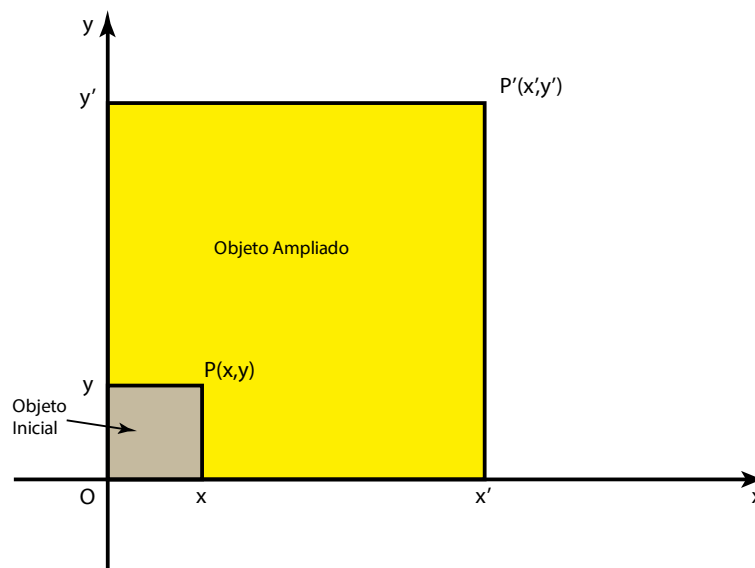


Figura 5: Mudança de escala aplicada a um quadrado.

A Figura 5 mostra uma transformação de escala aplicada com fatores de escala $s_x = 4$ e $s_y = 4$ em um quadrado de dimensões 2×2 . É importante destacar que nesta transformação, com estes fatores de escala, o objeto gráfico preservou posição dos vértices, a colinearidade dos pontos, a amplitude dos ângulos e o paralelismo das retas, ou seja, mantém a forma, mas não o tamanho. Pode ser considerada uma **transformação isomórfica**. Dentro das isomórficas pode ser classificada como uma **homotetia**, pois a ampliação do objeto gráfico ocorre em relação a um determinado ponto, no caso, a origem.

Vejamos agora se os fatores de escala forem diferentes aplicadas no mesmo objeto gráfico. Tomemos os seguintes fatores de escala $s_x = 4$ e $s_y = 2$.

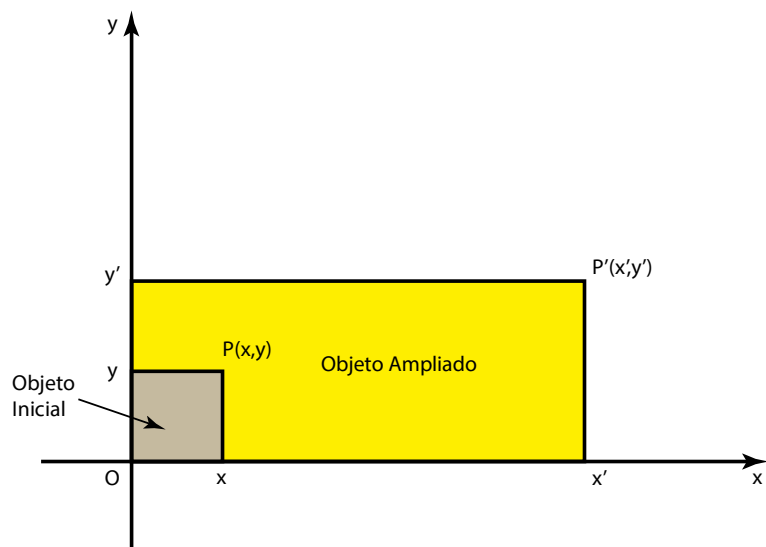


Figura 6: Mudança de escala com fatores de escala diferentes $s_x \neq s_y$

Observe que neste caso, (Figura 6), o objeto gráfico apesar de manter a posição dos vértices, a colinearidade dos pontos, a amplitude dos ângulos e o paralelismo das retas, não preserva forma. Assim, podemos dizer que a **transformação de mudança de escala** quando os fatores de escala são distintos é considerada uma transformação **anamórfica** (Figura 7).

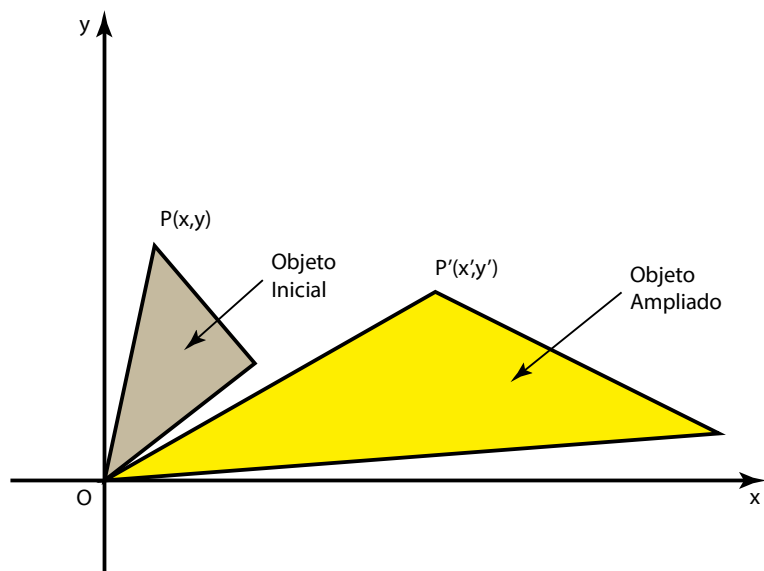


Figura 7: Mudança de escala anamórfica

Além disso, também é possível notar que dependendo dos valores dos fatores de escala os objetos podem sofrer ampliação ou contração. Quando os fatores de escala estão entre $0 < S < 1$ temos retração e quando são maiores que 1 sofrem ampliação (Figura 8). Quando o fator é igual a 1 não temos alteração.

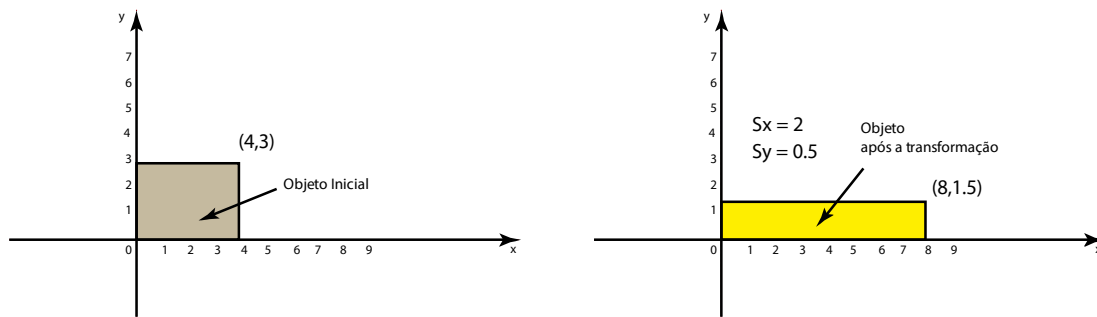


Figura 8: Transformação de mudança de escala com fatores $S_x > 1$ e $0 < S_y < 1$

Algebricamente podemos representar esta transformação da seguinte forma:

$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

Vamos denotar a transformação de Mudança de Escala em relação à origem pela sigla $S_0(s_x, s_y)$. Matricialmente para um ponto temos:

$$P' = S_0(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tomemos como exemplo um quadrado formado pelos seguintes pontos A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1). Vamos aplicar uma transformação de mudança de escala com fatores $s_x = 3$ e $s_y = 2$. Para isto basta multiplicar a matriz referente à transformação de mudança de escala pela matriz que representa os pontos do objeto.

$$M'_{obj} = S_0(3,2) \cdot M_{obj}$$

Note que os pontos que representam o objeto são representados matricialmente por colunas.

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação de mudança de escala em relação a origem fica:

$$S_0 = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Os pontos que definem o objeto após a aplicação da transformação podem ser assim calculados:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos a seguinte representação (Figura 9):

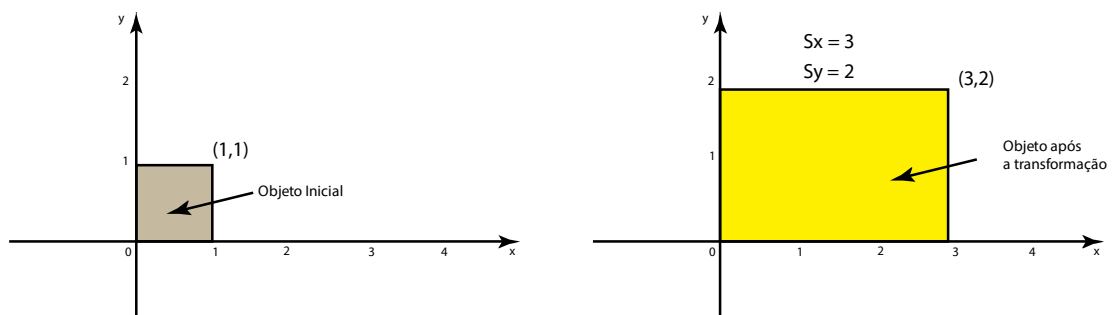


Figura 9: Transformação de mudança de escala com $S_x = 3$ e $S_y = 2$

Doravante vamos representar os pontos que formam o objeto gráfico por colunas integrando uma matriz M_{obj} .

2.3.3 Transformação de Rotação

Esta transformação rotaciona os objetos em torno de um ponto de acordo com um ângulo pré-definido. Inicialmente apresentaremos a rotação em torno da origem (Figura 10).

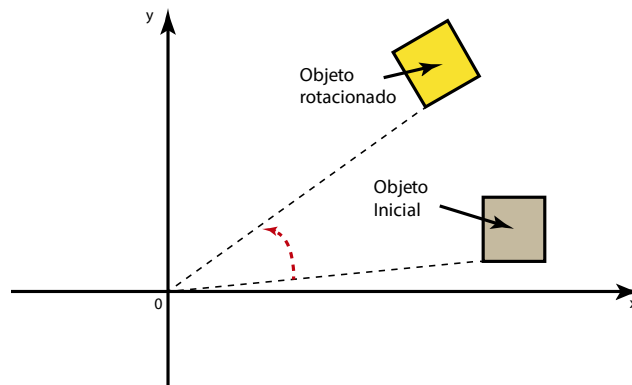


Figura 10: Rotação de um objeto gráfico em relação à origem

Para uma análise algébrica vamos tomar a rotação de um ponto com relação à origem. Esta transformação pode ser construída da seguinte maneira (Figura 11):

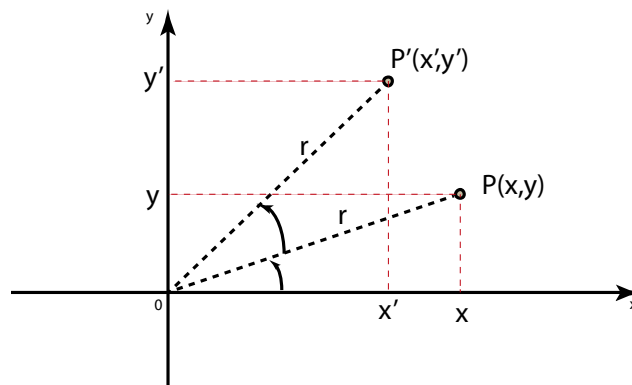


Figura 11: Rotação de um ponto em relação à origem

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi)$$

$$y' = r \cdot \sin(\theta + \phi)$$

$$x = r \cdot \cos(\phi)$$

$$y = r \cdot \sin(\phi)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$x' = r(\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi))$$

$$x' = r \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)$$

$$y' = r \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi))$$

$$y' = r.\text{sen}(\theta) \cos(\phi) + r.\cos(\theta) \text{sen}(\phi)$$

$$x' = x.\cos(\theta) - y.\text{sen}(\theta)$$

$$y' = x.\text{sen}(\theta) + y.\cos(\theta)$$

Matricialmente podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vamos denotar a rotação de θ graus em relação à origem pela letra R_{θ}^0 . Assim, temos:

$$P' = R_{\theta}^0 \cdot P$$

Note que a transformação de rotação preserva a congruência das medidas, a posição dos vértices, a colinearidade dos pontos, a amplitude dos ângulos e o paralelismo das retas, ou seja, mantêm forma e tamanho. É também considerada uma **isometria**.

Para ilustrar a aplicação desta transformação vamos considerar um triângulo representado na Figura 12 formado pelos vértices A(6,-2), B(8,0) e C(6,2) e aplicar neste objeto gráfico uma transformação de rotação de 90° em torno da origem. Temos:

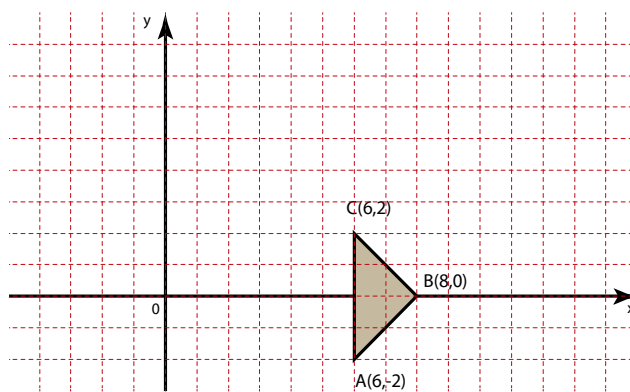


Figura 12: Objeto gráfico na posição inicial

$$P' = R_{90}^0 \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) \\ \sin(90) & \cos(90) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos:

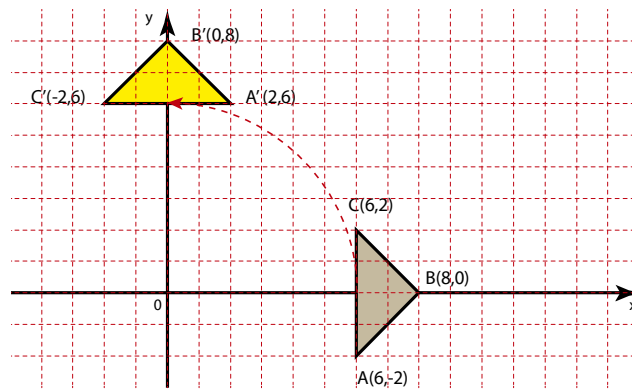


Figura 13: Objeto rotacionado de 90°

2.4 Outras Transformações Geométricas

Além das transformações básicas temos outras transformações. Aqui vamos trabalhar duas delas a de **reflexão** e de **distorção linear**. Estas transformações são muito utilizadas na **computação gráfica**.

2.4.1 Transformação de Reflexão

A Transformação de reflexão recebe também o nome de espelhamento devido à relação de seus resultados com os efeitos produzidos pelo reflexo produzido por uma imagem em um espelho. Existem dois tipos de reflexão no plano. A reflexão em relação a um eixo e a reflexão em relação a um ponto.

Inicialmente vamos apresentar a reflexão de objetos gráficos em relação a um eixo. Para facilitar a compreensão do funcionamento deste tipo de transformação vamos utilizar o eixo das abscissas. Considere um ponto P com coordenadas $P(x, y)$ no primeiro quadrante, Figura 14.

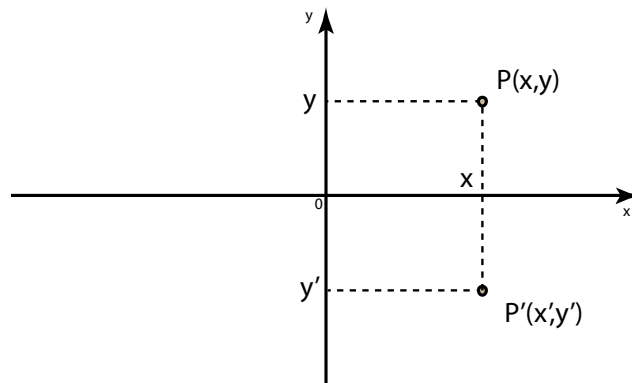


Figura 14: Reflexão em relação ao eixo x

A reflexão do ponto $P(x, y)$ em relação ao eixo x modifica apenas o valor da ordenada do ponto P . Algebricamente o ponto refletido $P'(x', y')$ em relação ao eixo x fica:

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

Matricialmente temos:

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$

$$P' = M_x \cdot P$$

Observe que utilizamos a letra M seguida de x (M_x) para designar esta matriz. Esta notação é conhecida por lembrar o termo espelho em inglês **mirror**. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A reflexão do ponto $P(x, y)$ em relação ao eixo y modifica apenas o valor da abscissa do ponto P . Algebricamente o ponto refletido $P'(x', y')$ em relação ao eixo y fica (Figura 15):

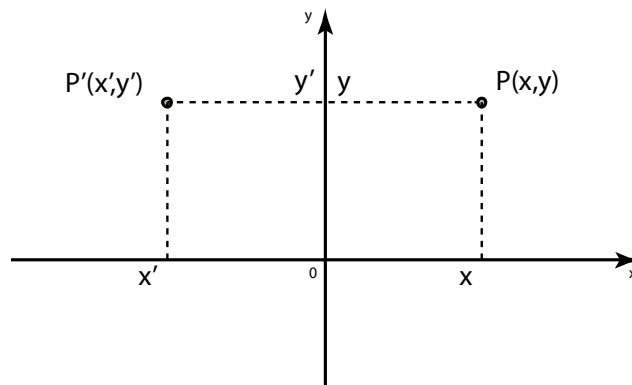


Figura 15: Reflexão em relação ao eixo y

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

Matricialmente temos:

$$x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$P' = M_y \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vejamos agora a reflexão em relação à origem. Observando a Figura 16 notamos que esta reflexão troca o sinal das coordenadas do ponto P ficando $P' = (-x, -y)$.

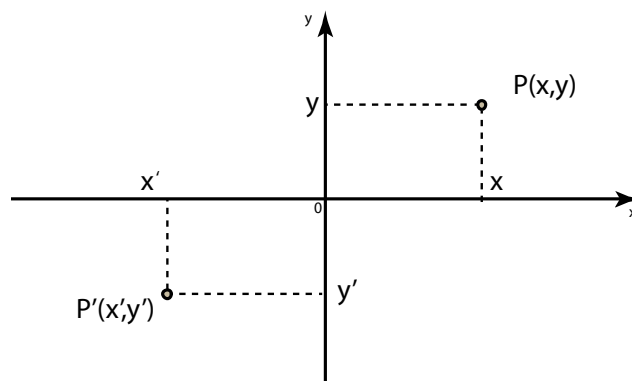


Figura 16: Reflexão em relação a origem

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

Matricialmente temos:

$$x' = -1.x + 0.y$$

$$y' = 0.x - 1.y$$

$$P' = M_0 . P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.4.2. Transformação de Distorção Linear

Esta transformação causa um deslocamento de parte do objeto gráfico em relação a um ponto fixo. O deslocamento pode ocorrer nas direções predominantes do objeto gráfico x ou y . Esta transformação é conhecida em inglês com **Shear**. Por esta razão vamos utilizar a notação SH_x e SH_y para designá-las quando ocorrem em relação a x e a y respectivamente. Quando ocorrem simultaneamente designaremos SH_{xy} .

Vejamos quando o deslocamento ocorre apenas na direção das abscissas. A Figura 17 ilustra esta transformação.

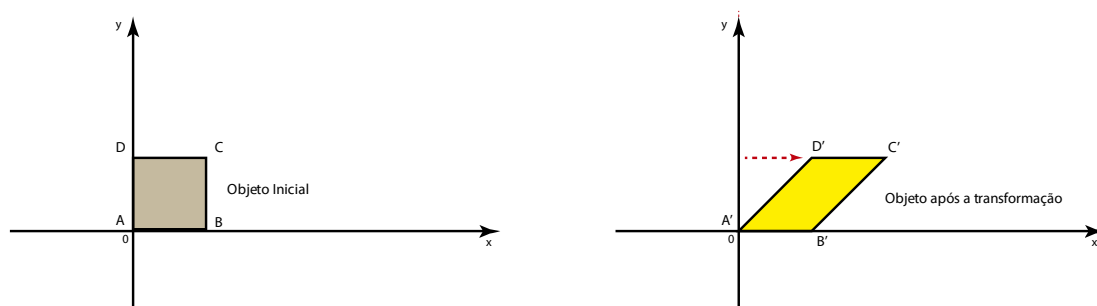


Figura 17: Distorção ou cisalhamento na direção x

Algebricamente temos

$$x' = x + y.tan(\alpha)$$

$$y' = y$$

$$a = \tan \alpha$$

$$x' = x + a \cdot y$$

$$y' = 0 \cdot x + y$$

Matricialmente temos:

$$P' = SH_x.P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vejamos quando o deslocamento ocorre na direção das ordenadas. A Figura 18 ilustra esta transformação.

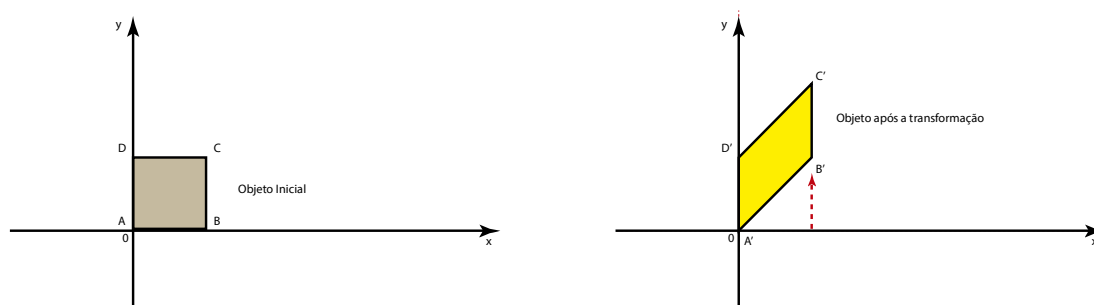


Figura 18: Distorção ou cisalhamento na direção y

Algebricamente temos:

$$x' = x + 0 \cdot y$$

$$y' = b \cdot x + y$$

Matricialmente temos:

$$P' = SH_y.P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vejamos quando o deslocamento ocorre nas direções x e y simultaneamente. A Figura 19 ilustra esta transformação.

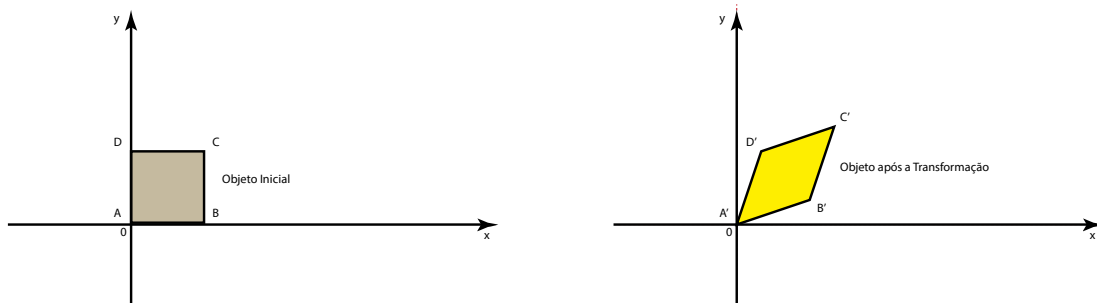


Figura 19: Distorção ou cisalhamento nas direções x e y concomitantemente

Algebricamente temos:

$$x' = x + a \cdot y$$

$$y' = b \cdot x + y$$

Matricialmente temos:

$$P' = SH_{xy} \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.5 Composição de Transformações

As transformações trabalhadas até momento utilizam como ponto de referência a origem $(0,0)$. No entanto, é comum objetos gráficos serem rotacionados ou sofrerem outros tipos de transformações em relação a um ponto específico diferente da origem do sistema de coordenadas em que foram formalizados (Figura 20).

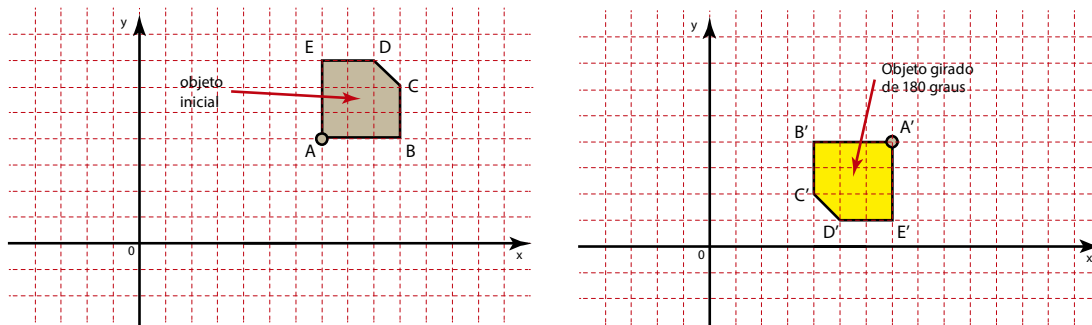


Figura 20: Rotação de 180° do objeto gráfico em torno do ponto A

Nesta situação, podemos transladar os objetos para a origem, aplicar as transformações e retornar os objetos para a posição inicial. Para isto precisamos indicar um ponto de referência para aplicação da transformação.

Vamos tomar para analisar o problema as transformações de rotação e escala. Nestas transformações precisamos inicialmente transladar o objeto para a origem e em seguida aplicar a transformação desejada e transladar o resultado para a posição inicial. Os passos e as matrizes envolvidas neste processo são:

Passo 1: Transladar o objeto para a origem utilizando como referência o ponto $P(x, y)$. Matricialmente: $P' = P + T(-x, -y)$. Na Figura 21 o ponto de referencia é o A;

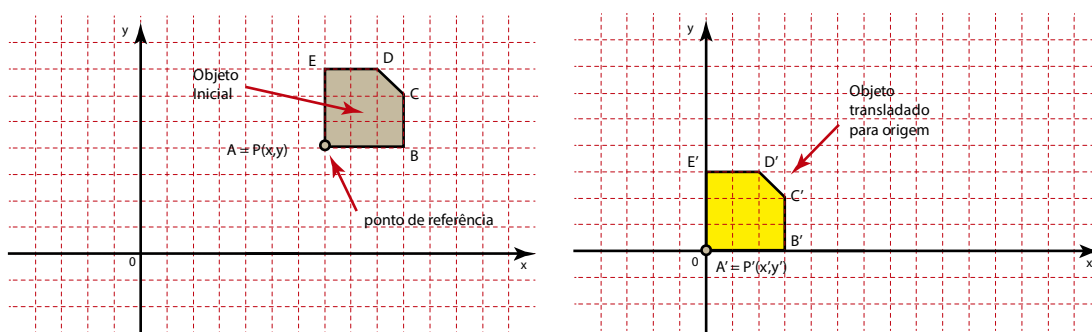


Figura 21: Translação do objeto para a origem tendo como referencia o ponto A

Passo 2: Agora que o objeto está na origem, vamos rotacioná-lo de θ graus. $P' = R_{\theta}^0 \cdot P$. (caso estivéssemos trabalhando com uma mudança de escala aplicaríamos a transformação de Mudança de Escala $P' = S_o(S_x, S_y) \cdot P$), Figura 22;

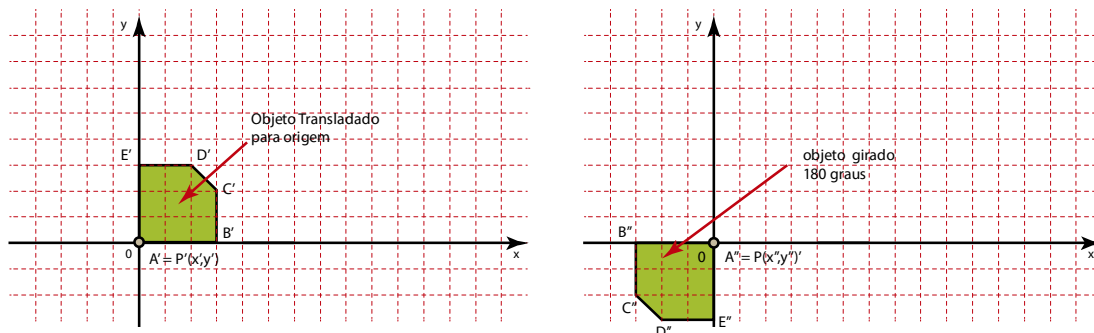


Figura 22: Rotação do objeto gráfico de 180°. em torno da origem

Passo 3: Após a rotação em relação a origem, vamos transladá-lo de volta ao ponto $P(x, y)$.
 $P' = P + T(x, y)$, Figura 23;

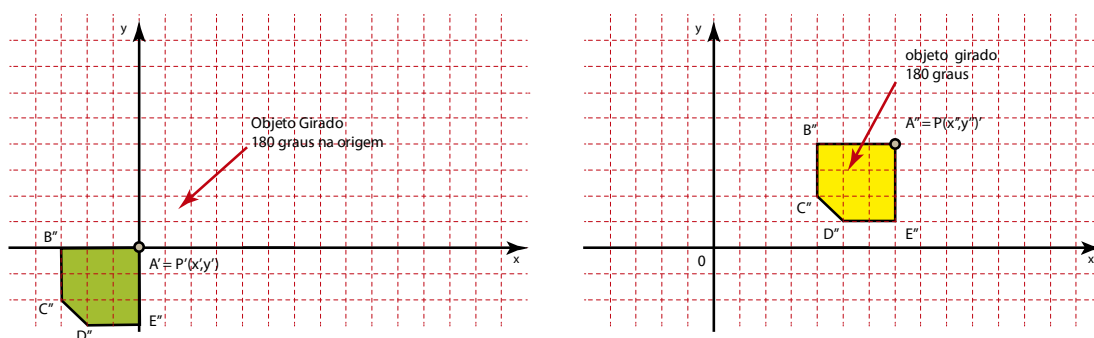


Figura 23: Translação do objeto gráfico de volta ao ponto A

Estes procedimentos são realizados com matrizes. Seriam mais eficientes para o contexto da computação gráfica se pudéssemos combinar estas matrizes em uma única matriz. No entanto, nos deparamos com um problema. As matrizes de rotação e de mudança de escala são utilizadas multiplicando-as com a matriz de pontos que representam o objeto, isto é, uma só matriz modifica todos os pontos do objeto com uma única operação de multiplicação. Na translação, isto não ocorre, pois ela precisa ser aplicada a cada ponto do objeto e não utiliza uma multiplicação e sim uma soma. Se quisermos automatizar esta operação teremos dificuldades em unir matricialmente estes procedimentos. Embora transformações como as de rotação e mudança de escala utilizem matrizes compatíveis (2 x 2) entre si e sejam transformações lineares, a de translação, não goza desta propriedade. **A translação não é uma transformação linear.** Observe:

$$\text{Translação (soma de matrizes): } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotação (multiplicação de matrizes): } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{Mudança de Escala (multiplicação de matrizes): } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.5.1 Transformações Lineares

Transformações nada mais são que funções matemáticas que operam em espaços vetoriais. São chamadas de Transformações Lineares quando preservam linearidade nas operações de soma e multiplicação por um escalar, da seguinte forma:

Transformação linear, ou operador linear, de um espaço vetorial ϑ_1 em um espaço vetorial ϑ_2 é uma função que associa a cada vetor x de ϑ_1 um único vetor $A(x)$ de ϑ_2 de uma maneira tal que

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

para todos os vetores x_1, x_2, x em ϑ_1 e todos os escalares α (KREIDER, D. et al., 1983, p.50).

Uma consequência desta definição é que uma transformação linear sempre aplica o vetor nulo de ϑ_1 no vetor nulo de ϑ_2 , ou seja:

$$A(0) = 0$$

Isto quer dizer que nestas transformações a origem é um invariante. É necessário destacar que se $A(0) \neq 0$ podemos afirmar que a transformação não é linear. No entanto, a condição $A(0) = 0$ é necessária para afirmar que uma transformação é linear, porém não é suficiente. Se $A(0) = 0$ temos ainda que verificar outras propriedades que definem uma transformação é linear.

A linearidade destas operações é importante porque ela nos garante a invariabilidade de algumas propriedades dos objetos gráficos quando submetidos a estas transformações. A

rotação, reflexão, mudança de escala e a distorção linear (cisalhamento) são consideradas transformações lineares. Todas elas conservam a origem do sistema de referência.

Uma transformação linear conserva as seguintes propriedades:

- **linearidade:** retas são transformadas em retas;
- **colinearidade:** pontos em uma mesma reta continuam pertencentes à mesma reta;
- **razão:** preserva a razão entre pontos distribuídos em uma reta;
- **paralelismo:** retas paralelas continuam paralelas;

2.5.1.1 Matrizes - Anatomia de uma Transformação Linear

Da definição apresentada por Kreider (1983) uma transformação $A: (R^2 \rightarrow R^2)$ é dita linear e completamente determinada quando:

$$A(e_1) = ae_1 + be_2$$

$$A(e_2) = ce_1 + de_2$$

Onde:

(e_1, e_2) formam uma base em R_2

Tomando-se

$$p = xe_1 + ye_2$$

$$A(p) = xA(e_1) + yA(e_2)$$

$$A(p) = x(ae_1 + be_2) + y(ce_1 + de_2)$$

$$A(p) = xae_1 + xbe_2 + yce_1 + yde_2$$

$$A(p) = e_1(xa + yc) + e_2(xb + yd)$$

$$A(p) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A transformação linear possui a seguinte anatomia algébrica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A transformação de translação embora preserve linearidade, colinearidade, razão e paralelismo **não é uma transformação linear**. Para demonstrar esta assertiva vamos analisar a forma matricial desta transformação.

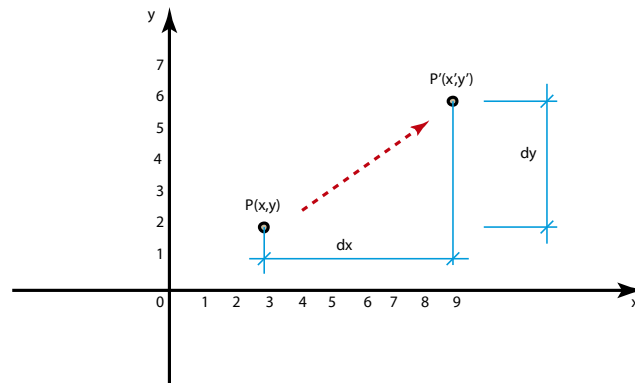


Figura 24: Deslocamento de um ponto na direção de um vetor

Da Figura 24 podemos expressar a translação algebricamente da seguinte forma:

$$x' = x + dx$$

$$y' = y + dy$$

Utilizando a matriz identidade podemos expressar matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Uma das propriedades de uma transformação linear é (necessária, porém não suficiente):

$$T(0) = 0$$

Na translação temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que na translação $T(0) \neq 0$ o que nos permite afirmar que **a translação não é uma transformação linear.**

Nesta formalização algébrica a transformação de translação genericamente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

A multiplicação de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é uma transformação linear (TL) e gera um ponto que é somado a um vetor $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ caracterizando a seguinte anatomia algébrica:

$$P' = TL.P + \vec{v}$$

Este tipo de transformação é chamado de **Transformação Afim.**

2.5.2 Transformação Afim

Este tipo de transformação recebe este nome porque está fundamentado na **Geometria Afim** que, diferente das transformações de escala, rotação, reflexão e cisalhamento, que são transformações lineares, tem o compromisso de preservar a colinearidade de pontos, razão entre pontos em uma reta e o paralelismo de retas.

Em síntese, não temos uniformidade entre as transformações lineares (escala, rotação, reflexão e cisalhamento) e a de translação, pois esta última é realizada pela soma de pontos com vetores e as demais aqui apresentadas pelo produto de matrizes.

Seria proveitoso se tivéssemos estas transformações uniformizadas algebricamente de forma que fossem viabilizadas pela multiplicação de matrizes. Para conseguirmos este intento vamos recorrer a **coordenadas homogêneas.**

2.5.3 Coordenadas Homogêneas

Este tipo de coordenadas é utilizado para formalizar conceitos da **geometria projetiva** que por ser mais flexível, como vimos, envolve as geometrias **afim** e **euclidiana**. Nesta geometria, os **pontos projetivos** são **vetores** em um espaço projetivo. No entanto podemos estabelecer uma relação entre o **espaço projetivo**, **afim** e o **euclidiano**.

No **espaço Euclidiano** temos a representação de pontos por coordenadas cartesianas do tipo (x, y) . No espaço projetivo temos vetores que podem ser expressos por $[a:b:c]$ conhecidas por **coordenadas homogêneas**.

Tomemos um conjunto de retas que passem pela origem de um determinado sistema de coordenadas (Figura 17). Estas retas são vetoriais que por sua vez podem ser expressas por $[a:b:c]$. Neste contexto, uma reta vetorial corta infinitos planos, todos paralelos ao plano xy ou $z = 0$. Se escolhermos arbitrariamente um desses planos vamos notar que a última coordenada c pode referenciá-lo, $z=c$ (**z referencia o plano c**). Podemos notar que cada plano corta a reta vetorial em um ponto com coordenadas (a,b,c) que mantém uma proporção linear com outros pontos, ou seja, se temos o ponto $(2,3,1)$ vamos notar que os pontos $(4,6,2)$ e $(6,9,3)$ estão contidos na mesma reta.

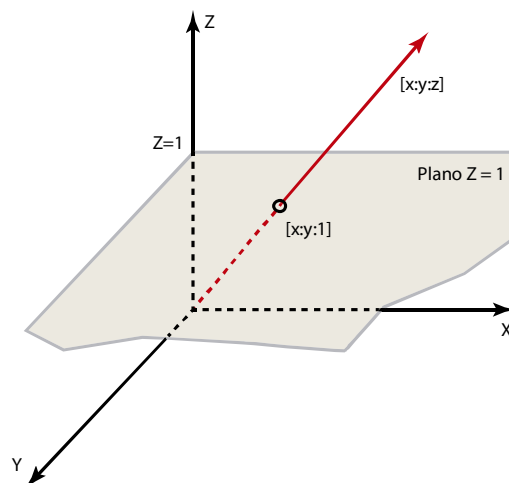


Figura 25: Vetores e pontos – espaços homogêneos e Euclidianos

Se tomarmos o plano $z=1$ (Figura 25) temos o ponto $(2,3,1)$ pertencente a reta e ao plano simultaneamente. Assim Quando $z=1$ temos $(2,3)$ para x e y que representam as coordenadas cartesianas de um ponto que está contido no vetor $[2,3,1]$. Podemos notar que os outros

pontos são na realidade o mesmo ponto (2,3) apenas multiplicados pela coordenada c. deste modo o ponto (4,6,2) pode ser expresso por (2.2, 2.3, 2.1), temos assim uma correspondência entre os demais pontos pertencentes ao vetor e o ponto no plano $z=1$. Generalizando podemos dizer que coordenadas homogêneas podem ser expressas da seguinte forma:

$$\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{c}{c} \right]$$

com $c \neq 0$

Em síntese, quando quisermos expressar um ponto do plano euclidiano $P(x,y)$, basta acrescentarmos uma coordenada com o valor 1. Basicamente, as coordenadas homogêneas definem um ponto em um plano usando três coordenadas em vez de duas.

Na literatura é convencional utilizar coordenadas homogêneas com as letras (x,y,w) onde temos:

$$[w.x, w.y, w]$$

Veja que quando temos $w = 1$ é mais fácil determinar as coordenadas cartesianas, pois w passa a ser divisor das coordenadas para se encontrar as cartesianas, como segue:

$$\left[\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{w}{w} \right]$$

$$[x, y, 1]$$

Este tipo de coordenadas é chamado de **homogêneas** porque possibilita escrever funções do tipo $f(x, y)$ na forma $f(x/t, y/t)$ sem alterar o grau da curva. De acordo com Vince(2006) embora pareça modesto aos não iniciados na matemática, este é um conceito importante e poderoso para a geometria projetiva.

Considere o ponto com coordenadas cartesianas (2,3), podemos representar este ponto em coordenadas homogêneas acrescentando $w = 1$ a sua representação, como segue: $[2,3,1]$ onde $x = 2$, $y = 3$, $w = 1$.

Em contrapartida podemos encontrar um ponto cartesiano por meio de coordenadas homogêneas. Um vetor $[x, y, w]$ possui seu representante no plano $w = 1$ e para expressar este ponto em coordenadas cartesianas basta dividir esta tripla por w .

Observe as coordenadas homogêneas $[8, 16, 2]$. Podemos encontrar as coordenadas cartesianas deste ponto. Como vimos para determinar as coordenadas cartesianas de ponto homogêneo basta dividir todas as coordenadas por w que neste exemplo é 2. Desta forma temos:

$$\left[\frac{8}{2}, \frac{16}{2}, \frac{2}{2} \right] = [4, 8, 1]$$

Quando temos $w = 1$, sabemos que x e y são as coordenadas cartesianas deste ponto. Assim, podemos dizer que as coordenadas cartesianas de $[8, 16, 2]$ são $(4, 8)$.

2.5.4 Transformações Geométricas e Coordenadas Homogêneas

O uso de **coordenadas homogêneas** permite expressar a translação como um produto de matrizes. Desta maneira operações como girar ou mudar de escala um objeto gráfico podem ser feitas combinando transformações geométricas, ou seja, por meio do produto de matrizes.

2.5.4.1 Translação com Coordenadas Homogêneas

Vimos que um ponto em coordenadas cartesianas pode ser facilmente expresso em coordenadas homogêneas acrescentado mais uma coordenada w com o valor 1. Com isto a translação fica:

$$\begin{aligned}x' &= x + dx; \\y' &= y + dy; \\w' &= 1\end{aligned}$$

Ou melhor:

$$\begin{aligned}x' &= 1.x + 0.y + dx.1; \\y' &= 0.x + 1.y + dy.1; \\w' &= 0.x + 0.y + 1.1;\end{aligned}$$

Matricialmente podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe a Figura 26. Vamos deslocar o objeto gráfico de 6 unidades na direção x e 3 unidades na direção y utilizando coordenadas homogêneas.

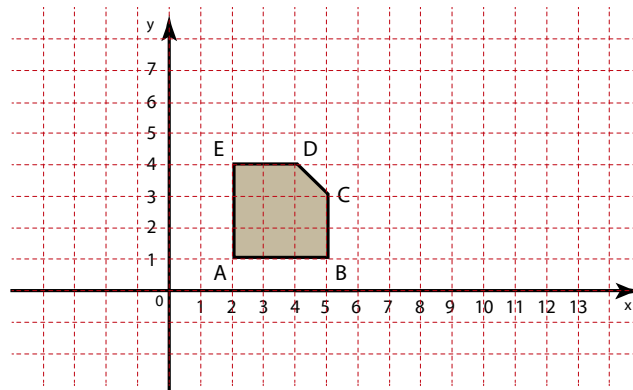


Figura 26: Objeto gráfico – posição inicial

Temos deslocamentos $dx = 6$ e $dy = 3$. A matriz de translação para esta transformação pode ser expressa da seguinte forma:

$$P' = T(6,3) \cdot M_{obj}$$

Matriz de translação:

$$T(6,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz que representa os vértices do objeto gráfico por colunas em coordenadas homogêneas:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de translação deve multiplicar as coordenadas dos vértices do objeto gráfico expressos por colunas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas do objeto trasladado:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 11 & 10 & 8 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 27):

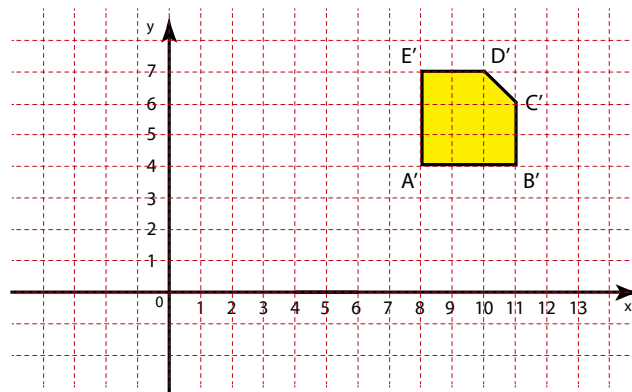


Figura 27: Objeto gráfico trasladado

2.5.4.2 Mudança de Escala com Coordenadas Homogêneas

A mudança de escala já podia ser expressa como multiplicação de matrizes. Em coordenadas homogêneas temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe a Figura 28. Vamos aplicar uma transformação de mudança de escala com fatores $s_x = 2$ e $s_y = 1$ utilizando o ponto (3,3) como referência.

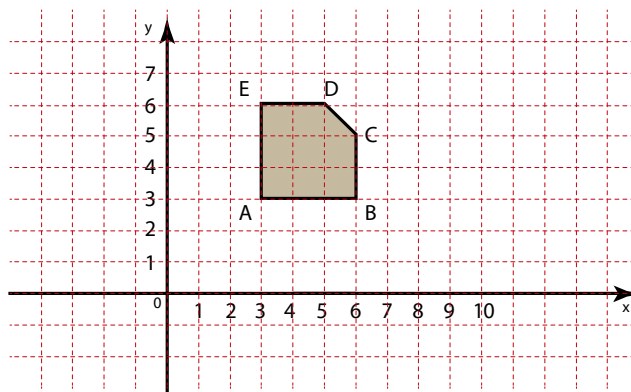


Figura 28: Objeto gráfico – posição inicial

As transformações necessárias são:

$$M'_{obj} = T(3,3) \cdot S_0(2,1) \cdot T(-3,-3) \cdot M_{obj}$$

Matriz de mudança de escala:

$$S_0(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz do objeto gráfico:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando as transformações, temos:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz do objeto após a aplicação da transformação de escala em relação ao ponto A(3,3):

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 29):

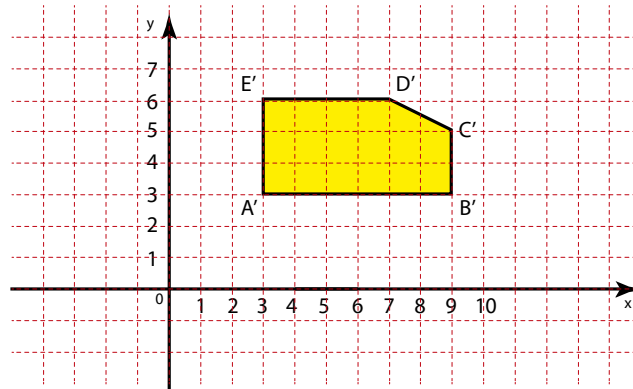


Figura 29: Objeto após a aplicação da transformação

Podemos realizar estas operações construindo uma única matriz que aplique esta transformação em relação um ponto distinto da origem $P(x,y)$, da seguinte forma :

$$M'_{obj} = T(x, y) \cdot S_0(s_x, s_y) \cdot T(-x, -y) \cdot M_{obj}$$

Note que estamos denotando a mudança de escala fora da origem por $S(s_x, s_y)$, matricialmente temos:

$$S(s_x, s_y) = T(x, y) \cdot S_0(s_x, s_y) \cdot T(-x, -y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y) = T(x, y) \cdot S_0(s_x, s_y) \cdot T(-x, -y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x - xs_x \\ 0 & s_y & y - ys_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x - xs_x \\ 0 & s_y & y - ys_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando no exemplo anterior temos:

$$M'_{obj} = S(s_x, s_y) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x - xs_x \\ 0 & s_y & y - ys_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos o mesmo resultado com a aplicação de uma única matriz, como segue:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.4.3 Rotação com Coordenadas Homogêneas

Analogamente a mudança de escala a transformação de rotação já era feita como o produto de matrizes. Em coordenadas homogêneas fica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar o uso de coordenadas homogêneas com transformações de rotação vamos girar o objeto gráfico da Figura 30 de 180° em relação ao ponto (7,4).

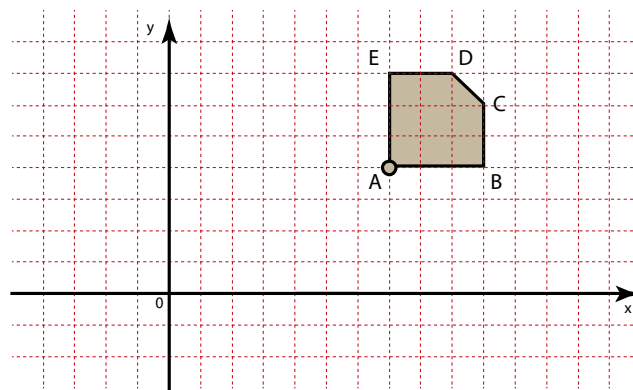


Figura 30: Objeto gráfico em posição inicial

$$M'_{obj} = T(7,4) \cdot R_{180}^0 \cdot T(-7, -4) \cdot M_{obj}$$

Matriz de Translação:

$$T(-7, -4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rotação em torno da origem de 180°:

$$R_{\theta}^0 = \begin{bmatrix} \cos 180 & -\sin 180 & 0 \\ \sin 180 & \cos 180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz do objeto gráfico:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 10 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = T(7, 4) \cdot R_{180}^0 \cdot T(-7, -4) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 & 10 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas dos vértices do objeto gráfico após a aplicação do conjunto de transformações:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 31):

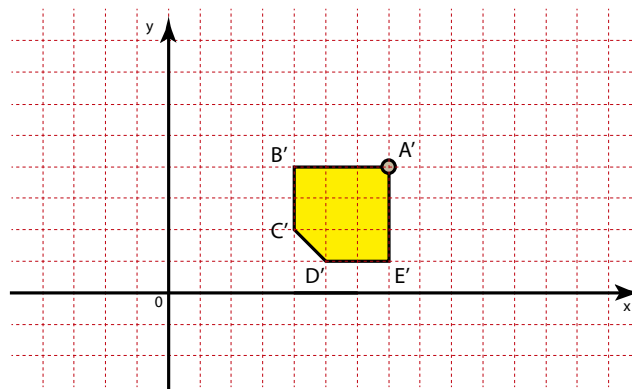


Figura 31: Objeto gráfico girado de 180°

Analogamente a transformação de mudança de escala podemos construir uma matriz genérica que realize diretamente a rotação em torno de um dado ponto $P(x, y)$ da seguinte forma:

$$P' = T(x, y).R_{\theta}^0.T(-x, -y).P$$

Observe que denotamos o giro em torno da origem pela notação R_{θ}^0 e quando fora da origem utilizamos a notação R_{θ} . Assim temos:

$$R_{\theta} = T(x, y).R_{\theta}^0.T(-x, -y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & y.\sin(\theta) - x.\cos(\theta) + x \\ \sin\theta & \cos\theta & -x.\sin(\theta) - y.\cos(\theta) + y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta matriz diretamente no exemplo anterior temos:

$$M'_{obj} = R_{\theta}.M_{obj}$$

$$\cos\theta = \cos(180) = 1$$

$$\sin\theta = \sin(180) = 0$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & y.\sin\theta - x.\cos\theta + x \\ \sin\theta & \cos\theta & -x.\sin\theta - y.\cos\theta + y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 & 10 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 & 10 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

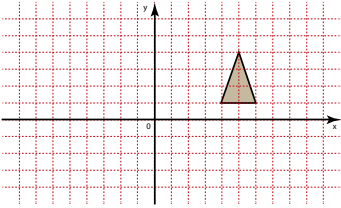
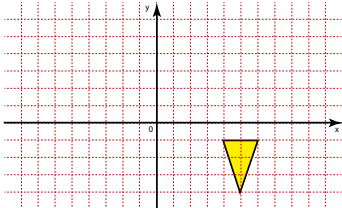
Coordenadas dos vértices do objeto gráfico após a rotação:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 10 & 9 & 7 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

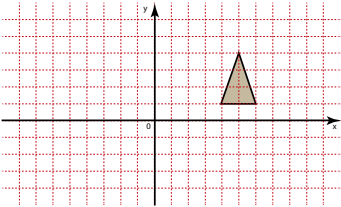
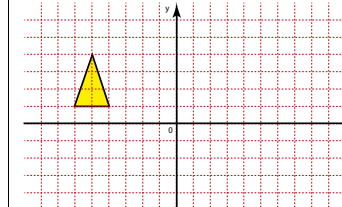
2.5.4.4 Reflexão com Coordenadas Homogêneas

A reflexão também pode ser expressa com facilidade em coordenadas homogêneas. As matrizes que representam estas transformações são as seguintes:

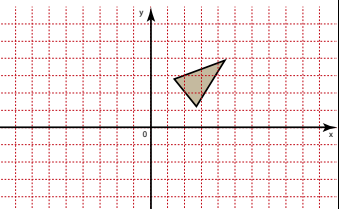
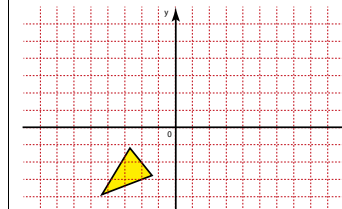
Reflexão em relação ao eixo x

Antes da Transformação	Transformação	Depois da Transformação
 <p>Figura 32: Objeto inicial</p>	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$	 <p>Figura 33: Objeto espelhado – eixo x</p>

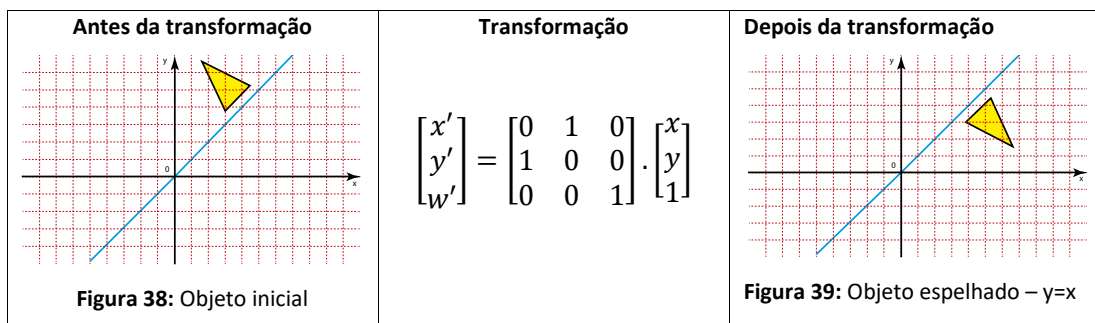
Reflexão em relação ao eixo y:

Antes da Transformação	Transformação	Depois da Transformação
 <p>Figura 34: Objeto inicial</p>	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$	 <p>Figura 35: Objeto espelhado – eixo y</p>

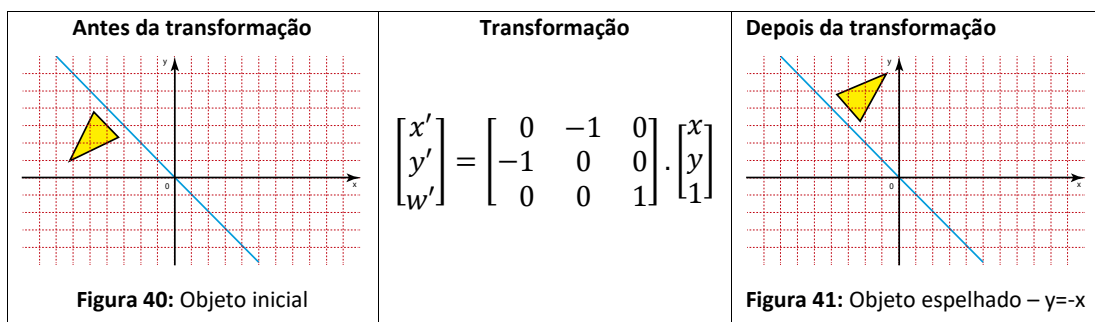
Reflexão em relação a origem:

Antes da transformação	Transformação	Depois da transformação
 <p>Figura 36: Objeto inicial</p>	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$	 <p>Figura 37: Objeto espelhado – origem</p>

Reflexão em relação a reta $y = x$:



Reflexão em relação a reta $y = -x$:



Até o momento vimos a transformação de reflexão ser aplicada em relação a eixos horizontais ou verticais. No entanto, podemos realizar esta transformação tendo como referência qualquer eixo no plano. Considere um ponto no plano e vamos espelhá-lo em relação a um eixo definido por dois pontos distintos conforme a Figura 42.

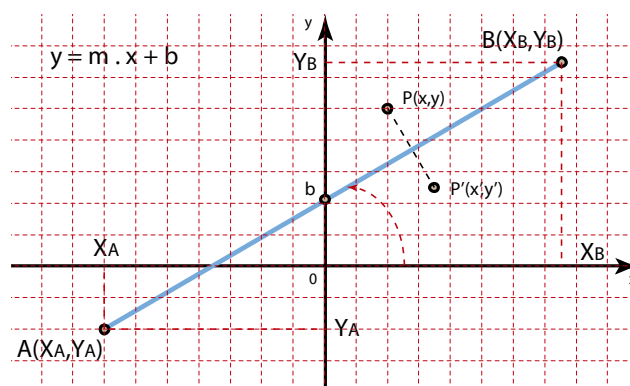


Figura 42: Reflexão em relação a um eixo qualquer no plano

Já vimos como realizar a reflexão em relação ao eixo x com este conhecimento vamos realizar a reflexão com relação a qualquer eixo conhecido. Observando a Figura 42 podemos fazer a reflexão do ponto $P(x, y)$ em $P'(x', y')$ em relação a reta L definida pelos pontos $A(A_x, A_y)$ e $B(B_x, B_y)$ deslocando o conjunto reta e objeto gráfico de forma que a reta (eixo AB) coincida com o eixo x e assim aplicar a transformação de espelhamento em relação ao eixo x . Uma vez aplicada a transformação em relação ao eixo x fazemos o caminho de volta a posição original. Vejamos como isto pode ser feito passo a passo.

Passo 1: transladar a reta AB de forma que o ponto $(0, b)$ coincida com a origem do sistema de coordenadas (Figura 43), $T(0, -b)$.

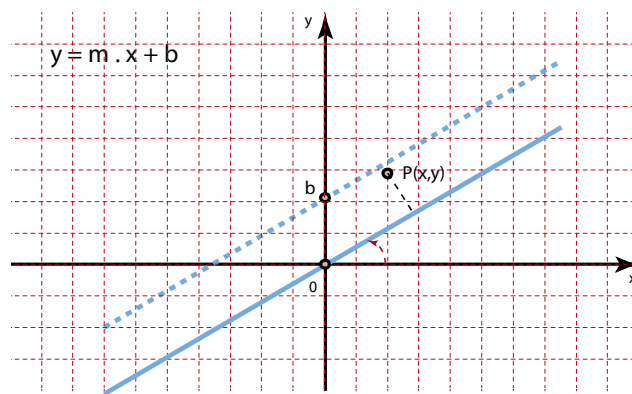


Figura 43: Translação do conjunto eixo e objeto para a origem tendo como referência o ponto b

Passo 2: girar o conjunto reta e objeto gráfico $-\theta$ graus de maneira que a reta (eixo AB) coincida com o eixo x . Isto pode ser feito com a ajuda da matriz de rotação $R_{-\theta}^0$ conforme a Figura 44.

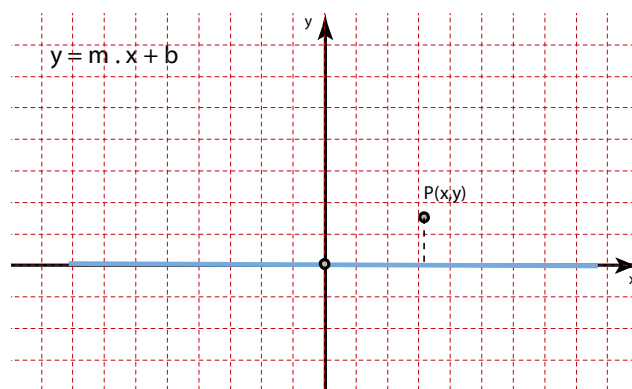


Figura 44: Conjunto girado de forma que o eixo de reflexão coincida com o eixo x

Passo 3: aplicar a matriz de reflexão ou espelhamento em relação ao eixo x (M_x) obtendo $P'(x', y')$, de acordo com a Figura 45.

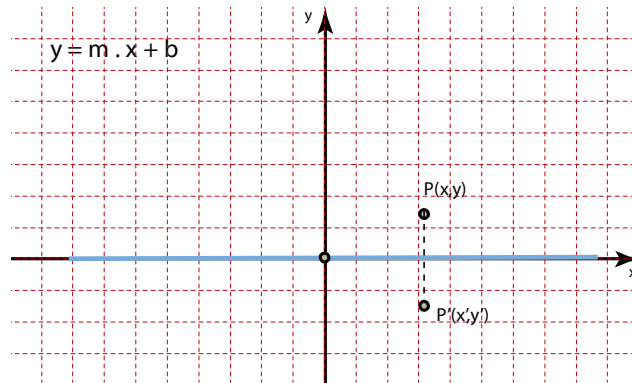


Figura 45: Reflexão do objeto gráfico em relação ao eixo x

Passo 4: vamos iniciar o caminho de volta. Para isto aplicamos uma rotação de θ graus no sentido horário com a matriz R_{θ}^0 .

Passo 5: aplicamos uma translação para o ponto onde iniciou-se o processo com a matriz $T(0, b)$.

Para ilustrar o espelhamento de um objeto gráfico em relação a um dado eixo vamos considerar a Figura 46 que mostra um triângulo com vértices $AT(2,7)$, $BT(4,7)$ e $CT(4,9)$. O eixo é definido pelos pontos $A(-2,0)$ e $B(8,10)$.

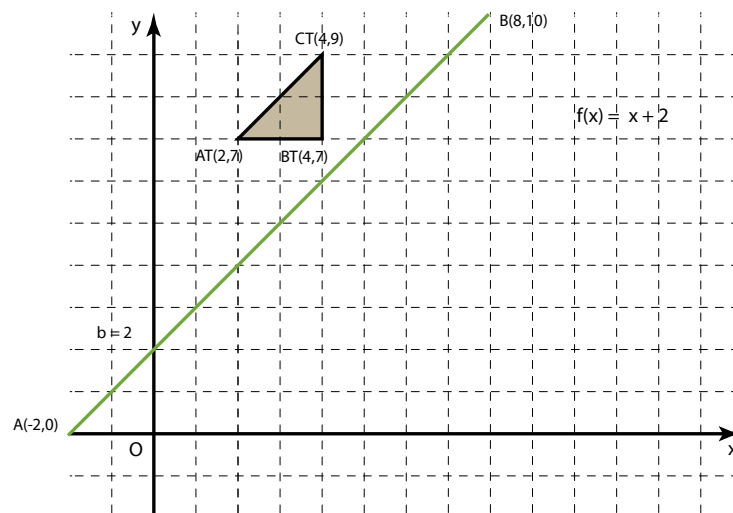


Figura 46: Objeto gráfico para realização do espelhamento em relação ao eixo AB

A matriz final do objeto refletido fica:

$$M'_{obj} = T(0, b) \cdot R_{\theta}^0 \cdot M_x \cdot R_{-\theta}^0 \cdot T(0, -b) \cdot M_{obj}$$

Matriz do objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo de b temos a equação $y = mx + b$. Para $x = 0$ temos $y = b$ e para $y = 0$ temos $x = 2$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{10 - 0}{8 - (-2)} = \frac{10}{10} = 1$$

Assim temos:

$$b = y - mx$$

$$\text{para } y = 0 \text{ temos } x = -2$$

$$b = 0 - 1 \cdot (-2) = 2$$

$$T(0, -b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a matriz de rotação precisamos calcular o seno e cosseno do ângulo de giro

$$L = \sqrt{(8 + 2)^2 + (10 - 0)^2} = \sqrt{200}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta x}{L} = \frac{8 - (-2)}{\sqrt{200}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\Delta y}{L} = \frac{10 - 0}{\sqrt{200}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R_{-\theta}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{+\theta}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Objeto espelhado (Figura 47):

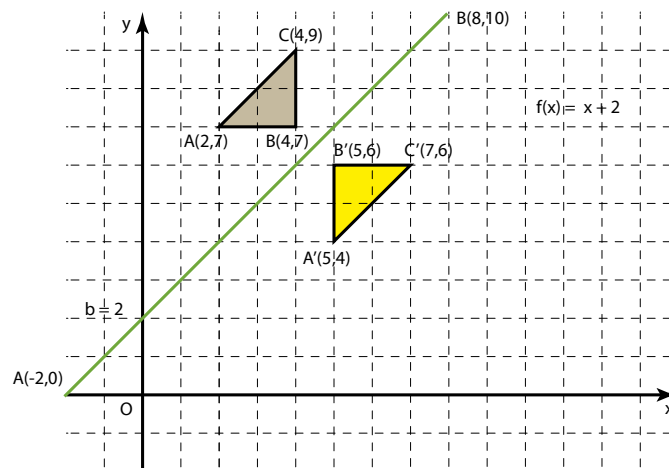


Figura 47: Objeto espelhado em relação ao eixo AB

Para facilitar a implementação podemos construir uma matriz que combine as transformações necessárias para a reflexão de um objeto gráfico em relação a um eixo

qualquer. Observe que as informações que temos são as do objeto gráfico e de dois pontos distintos no plano que definem o eixo de referência para o espelhamento. Com estes dados podemos construir uma matriz em função do coeficiente angular (m) e do ponto de interseção da reta com o eixo y conhecido como coeficiente linear da reta (b). Para isto basta escrever o seno e o cosseno do ângulo de inclinação da reta em função destes coeficientes.

Temos que $y = mx + b$ como equação da reta que define o eixo de espelhamento. Onde:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}$$

O comprimento do eixo é:

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Em que:

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta x}{l} = \frac{\Delta x}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Dividindo-se o lado direito da equação por Δx temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta x}}{\frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta x}}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado temos:

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta x}\right)^2}$$

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{\frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{1 + \frac{(\Delta y)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{1 + m^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o cálculo do seno temos:

$$\sin(\theta) = \frac{\Delta y}{L} = \frac{\Delta y}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Dividindo-se o lado direito da equação por Δx temos:

$$\sin(\theta) = \frac{\Delta y}{l} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta x}}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado temos:

$$(\sin(\theta))^2 = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\Delta x}\right)^2}$$

$$(\sin(\theta))^2 = \frac{\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}{\frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\sin(\theta))^2 = \frac{m^2}{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\sin(\theta))^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{(\Delta y)^2}{\Delta x^2}}$$

$$(\sin(\theta))^2 = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

A matriz de espelhamento em função dos coeficientes angular e linear da reta fica:

$$M_{AB} = T(0, b) \cdot R_{\theta}^0 \cdot M_x \cdot R_{-\theta}^0 \cdot T(0, -b)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & -\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & 0 \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & 0 \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} & -\frac{2bm}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2b}{m^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos observar o comportamento desta matriz aplicando-a no exemplo anterior de reflexão do triângulo.

Matriz do objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de reflexão em função de m e b , temos :

$$M'_{obj} = M_{AB} \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} & -\frac{2bm}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2b}{m^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para $m = 1$ e $b = 2$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar como se comporta esta matriz para uma reta paralela ao eixo x . Tomemos a equação da reta $y = mx + b$. Como, neste caso, a reta é paralela ao eixo x não existe variação em y , portanto $\Delta y = 0$ e como $m = 0/\Delta x$ temos $m = 0$. Desta forma temos na equação da reta $y = 0 \cdot m + b$ o que leva $y = b$. Assim, a matriz de composição para a reflexão pode ser utilizada com $m = 0$ e $y = b$, que resulta:

$$M_{k=y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomemos a Figura 48

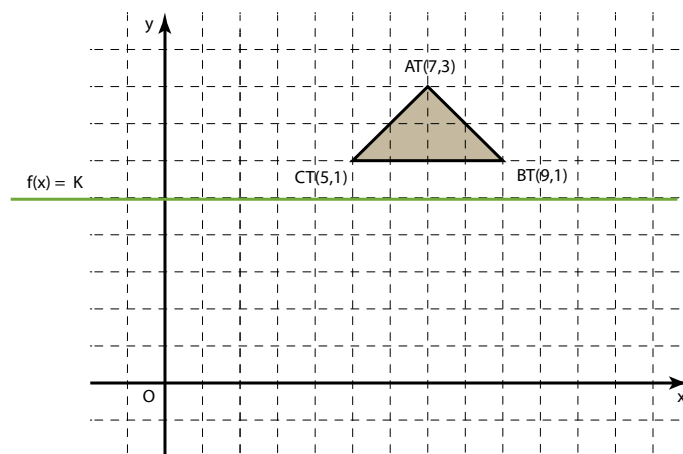


Figura 48: Reflexão sobre um eixo $f(x) = k$, paralelo ao eixo x

Aplicando a matriz temos

$$M'_{obj} = M_{k=y} \cdot M_{obj}$$

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz M_k com $y = 5$:

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O resultado pode ser visto na Figura 49

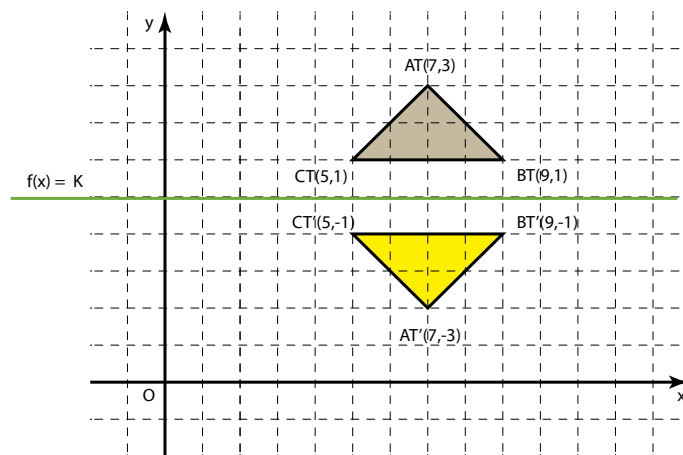


Figura 49: Objeto espelhado em relação ao eixo $y = 5$

Para o caso de $x = y$ temos uma linha vertical para tomarmos como eixo. No entanto, nesta direção temos que a inclinação da reta é infinita, pois $\Delta x = 0$. Neste caso, não usaremos a matriz acima. Desta vez, usaremos a matriz de reflexão em relação ao eixo y para compor o espelhamento, ficando:

$$M'_{obj} = M_{k=x} \cdot M_{obj}$$

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{k=x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vejamos a aplicação na Figura 50

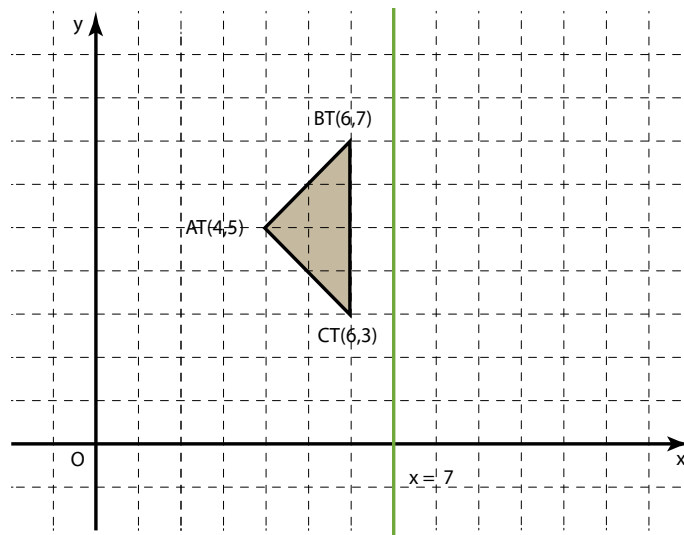


Figura 50: Reflexão com relação a um eixo vertical qualquer

Aplicando a matriz temos

$$M'_{obj} = M_{k=x} \cdot M_{obj}$$

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y=k} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos o resultado expresso na Figura 51:

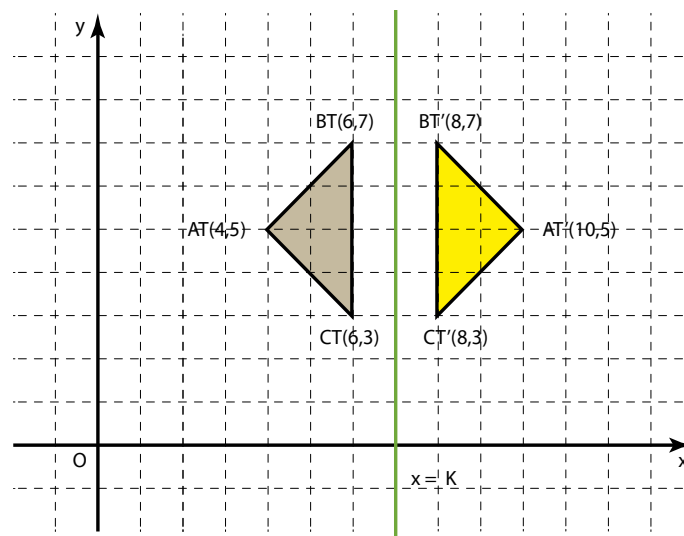


Figura 51: Objeto espelhado em relação a u eixo $k=x=7$

2.5.4.5 Distorção com Coordenadas Homogêneas

A distorção linear ou cisalhamento também pode ser expressa em coordenadas homogêneas. A distorção na direção x fica:

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na direção y temos:

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em ambas concomitantemente:

$$SH_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um exemplo muito utilizado para ilustrar o uso de coordenadas homogêneas na transformação de cisalhamento é o de considerar um quadrado unitário com o canto inferior alocado na origem (Figura 52).

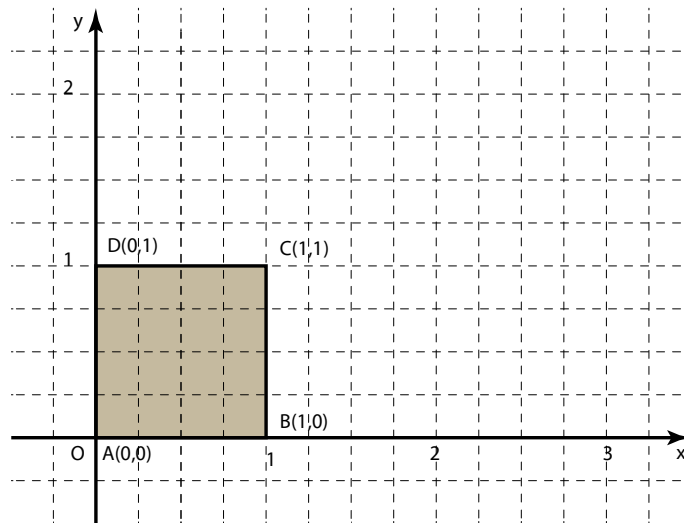


Figura 52: Quadrado unitário

Inicialmente vamos aplicar um deslocamento de 2 unidades em x (Figura 53).

$$M'_{obj} = SH_x \cdot M_{obj}$$

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos:

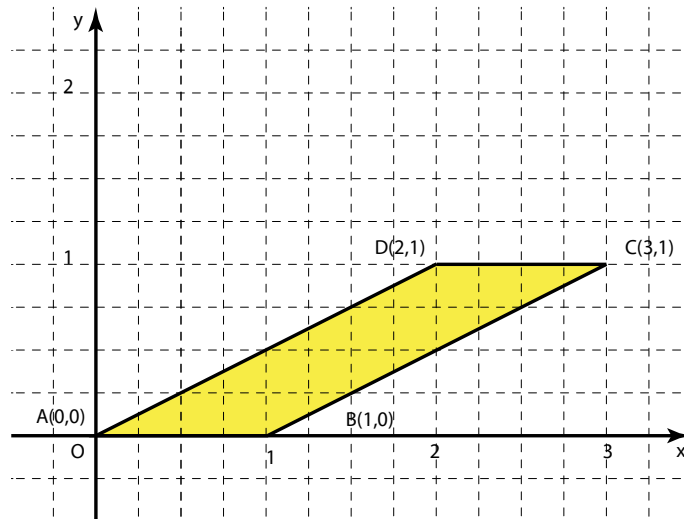


Figura 53: Cisalhamento em relação a direção x

Agora, no quadrado inicial vamos aplicar um deslocamento de 1,5 unidades em y :

$$M'_{obj} = SH_y \cdot M_{obj}$$

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 54):

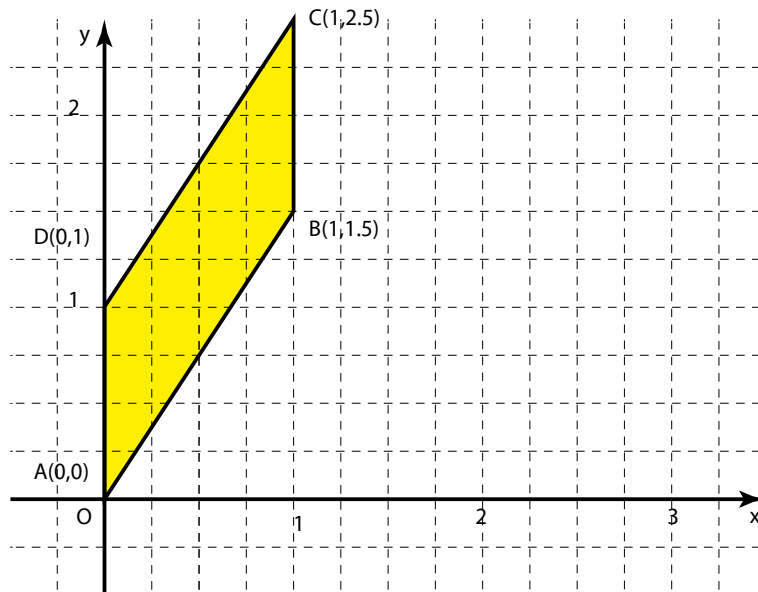


Figura54: Cisalhamento na direção y

Agora vamos aplicar ao quadrado inicial os deslocamentos 2 em x e 1,5 em y simultaneamente.

$$M'_{obj} = SH_{xy} \cdot M_{obj}$$

$$SH_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1.5 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 55):

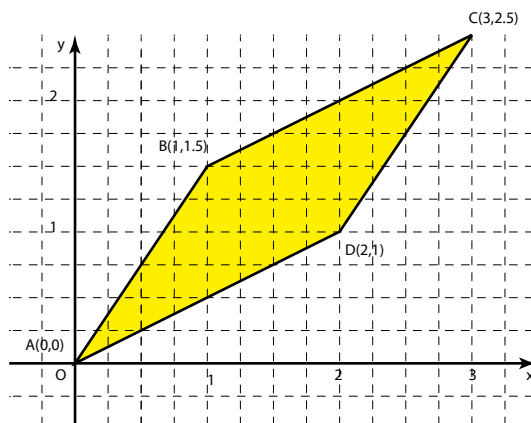


Figura 55: Cisalhamento nas direções x e y simultaneamente

A distorção também pode ocorrer a partir de um eixo de referência na direção dos eixos predominantes do objeto, ou seja, largura (x) e altura (y). Analogamente a outras transformações basta fazer um deslocamento para a origem aplicar as transformações correspondentes e realizar a translação de volta a posição inicial.

$$P' = T(dx, dy) \cdot SH_{xy} \cdot T(-dx, -dy) \cdot P$$

$$SH_{xy-re} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_{xy-r} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & -ady \\ b & 1 & -bdx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.5.5 Transformações Inversas

As transformações inversas possibilitam restaurar um objeto gráfico às condições anteriores à aplicação de uma determinada transformação. Matricialmente podemos escrever:

$$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I$$

Para a transformação de translação bidimensional temos a seguinte matriz que formaliza a transformação inversa:

$$T^{-1}(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a transformação de escala tendo como referencia a origem a matriz inversa fica:

$$S^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a transformação de rotação é possível notar que o ângulo de giro é contrário ao inicial, o que troca o seu sinal. Assim, podemos inferir que:

$$R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta}$$

Com consequência

$$R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

Assim

$$R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que esta matriz R_{θ}^{-1} é a transposta da matriz R_{θ} , ou seja, a inversa da matriz é a sua transposta.

$$R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta} = R_{\theta}^T$$

$$R_{\theta} \cdot R_{\theta}^T = R_{\theta}^T \cdot R_{\theta} = I$$

As matrizes com esta característica são chamadas de **ortogonais**. Podemos dizer que a matriz de **rotação 2D é ortogonal**. Transformações, cujas matrizes possuem este atributo não deformam os objetos, ou melhor, conservam ângulos e comprimentos. Por esta razão, são também conhecidas como **transformações de corpo rígido**.

As transformações de translação e rotação possuem inversas fáceis de deduzir, pois a sua expressão geométrica facilita a sua visualização. Apesar disso, elas podem ser deduzidas algebricamente. Para ilustrar uma determinação algébrica vamos calcular a transformação inversa de uma transformação de mudança de escala.

A inversa de uma matriz pode ser calculada dividindo-se a matriz formada pelos cofatores da sua transposta $\text{cof } S^t$ pelo seu determinante $|S|$ da seguinte forma:

$$S^{-1} = \frac{[\text{cof } S^t]}{|S|}$$

$$S(s_x, s_y) = S^t(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof } S^t(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & s_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_y & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{cof } S^t(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_x s_y \end{bmatrix}$$

$$|S| = s_x \begin{vmatrix} s_y & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & s_y \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|S| = s_x s_y$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s_y}{s_x s_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x}{s_x s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_x s_y} \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.6 Transformações de Corpo Rígido

Vimos que algumas transformações geométricas preservam forma e tamanho dos objetos gráficos. Estas transformações são chamadas de **transformações de corpo rígido**. Este tipo de transformação pode ser identificado por uma propriedade algébrica da matriz que o representa. O determinante destas matrizes é igual a 1.

Vimos que as transformações de translação e rotação mantêm a forma e tamanho, são **isometrias**. Vamos verificar o determinante dessas matrizes.

Rotação:

$$|R_\theta^0| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|R_\theta^0| = \cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|R_\theta^0| = \cos\theta(\cos\theta \cdot 1 - 0 \cdot 0) + \sin\theta(\sin\theta \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0 \cdot (\sin\theta \cdot 0 - 0 \cdot \cos\theta)$$

$$|R_\theta^0| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Como o determinante é igual 1 temos uma que a rotação é uma transformação de corpo rígido.

Vamos verificar a transformação de Translação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|T(d_x, d_y)| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & d_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & d_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + d_x \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|T(d_x, d_y)| = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot d_y) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot d_y) + d_x \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1)$$

$$|T(d_x, d_y)| = 1$$

Como o determinante é igual a 1 temos que a translação é uma transformação de corpo rígido.

A tabela 1 sintetiza algumas informações sobre os tipos de transformações geométricas e suas propriedades.

Tabela 1: tipos de transformações e suas propriedades		
Tipos de Transformações	Transformação de Corpo Rígido	Transformação Afim
Propriedades Preservadas	Paralelismo Distância Ângulos	Paralelismo
Transformações Geométricas	Rotação Translação	Rotação Translação Escala Cisalhamento

2.5.7 Sucessividade e Comutatividade das Transformações

Vimos que a combinação de transformações é realizada por meio da multiplicação de matrizes. Neste contexto é importante saber se a ordem de suas aplicações pode ou não ser comutada, pois comutatividade não é uma propriedade da multiplicação de matrizes. Vamos analisar o comportamento das transformações quando são aplicadas de forma sucessiva e comutativa.

2.5.7.1 Transformações Aplicadas Sucessivamente

Tomemos duas translações aplicadas sucessivamente $T(d_{x1}, d_{y1})$ e $T(d_{x2}, d_{y2})$ a um objeto gráfico representado pelo ponto $P(x, y)$.

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}).P$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}).P'$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}).T(d_{x1}, d_{y1}).P$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 0 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 0 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 0 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observando a matriz acima concluímos que os deslocamentos somados produzem o mesmo efeito de sua aplicação sucessiva.

No caso da aplicação sucessiva de duas transformação de mudança de escala sobre um objeto gráfico também representado pelo ponto $P(x, y)$, temos:

$$P' = S(S_{x1}, S_{y1}).P$$

$$P'' = S(S_{x2}, S_{y2}).P'$$

$$P'' = S(S_{x2}, S_{y2}).S(S_{x1}, S_{y1}).P$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{x1}S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1}S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que indica que a aplicação sucessiva de duas transformações de mudança de escala equivale à multiplicação dos coeficientes de ampliação ou contração.

No caso da aplicação de duas transformações sucessivas de rotação sobre um objeto gráfico temos:

$$P' = R(\alpha).P$$

$$P'' = R(\beta).P'$$

$$P'' = R(\beta).R(\alpha).P$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) & -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\beta) \cos(\alpha) & 0 \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\beta) \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O resultado acima mostra que a aplicação sucessiva de duas transformações de rotação é equivalente a soma dos ângulos.

2.5.7.2 Comutatividade das Transformações

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}).T(d_{x1}, d_{y1}).P$$

Vamos ver se $T_1(d_{x1}, d_{y1}).T_2(d_{x2}, d_{y2})$ é igual ou equivalente a $T_2(d_{x2}, d_{y2}).T_1(d_{x1}, d_{y1})$.

Inicialmente vamos calcular $T_1(dx1, dy1).T_2(dx2, dy2)$:

$$T_1(dx1, dy1).T_2(dx2, dy2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 0 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 0 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1(dx1, dy1).T_2(dx2, dy2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 0 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos calcular $T_2(dx2, dy2) . T_1(dx1, dy1)$:

$$T_2(dx2, dy2) . T_1(dx1, dy1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 0 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 0 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2(dx2, dy2) . T_1(dx1, dy1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} + d_{x1} \\ 0 & 0 & d_{y2} + d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando-se $T_1(d_{x1}, d_{y1}).T_2(d_{x2}, d_{y2})$ com $T_2(d_{x2}, d_{y2}).T_1(d_{x1}, d_{y1})$ podemos concluir que a translação nestes termos é comutativa.

Vamos ver se a Transformação de Escala é comutativa. Para esta verificação vamos comparar $S_2(S_{x2}, S_{y2}).S_1(S_{x1}, S_{y1}) = S_1(S_{x1}, S_{y1}).S_2(S_{x2}, S_{y2})$.

Inicialmente vamos calcular: $S_2(S_{x2}, S_{y2}).S_1(S_{x1}, S_{y1})$:

$$S_2(S_{x2}, S_{y2}).S_1(S_{x1}, S_{y1}) = \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2(S_{x2}, S_{y2}).S_1(S_{x1}, S_{y1}) = \begin{bmatrix} S_{x1}S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1}S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos $S_1(S_{x1}, S_{y1}).S_2(S_{x2}, S_{y2})$:

$$S_1(S_{x1}, S_{y1}).S_2(S_{x2}, S_{y2}) = \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{x2}S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2}S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando-se os resultados da aplicação das transformações de mudança de escala, podemos concluir que esta transformação é comutativa.

Analogamente as transformações de translação e mudança de escala, vamos fazer a comparação entre $R1_{\alpha}^0.R2_{\beta}^0 = R2_{\beta}^0.R1_{\alpha}^0$.

Inicialmente vamos calcular $R2_{\beta}^0.R1_{\alpha}^0$:

$$R2_{\beta}^0.R1_{\alpha}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R2_{\beta}^0.R1_{\alpha}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos $R1_{\alpha}^0.R2_{\beta}^0$:

$$R1_{\alpha}^0.R2_{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R1_{\alpha}^0.R2_{\beta}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando-se as matrizes $R1_{\alpha}^0.R2_{\beta}^0 = R2_{\beta}^0.R1_{\alpha}^0$, podemos concluir que as operações são comutativas.

Vamos verificar se as transformações de mudança de escala com fatores uniformes e a de rotação são comutativas. Queremos saber se $S_0(S_k, S_k).R_\theta^0 = R_\theta^0.S_0(S_k, S_k)$.

Inicialmente vamos calcular $S_0(S_k, S_k).R_\theta^0$:

$$R_\theta^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(S_k, S_k) = \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(S_k, S_k).R_\theta^0 = \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(S_k, S_k).R_\theta^0 = \begin{bmatrix} S_k \cos(\theta) & -S_k \sin(\theta) & 0 \\ S_k \sin(\theta) & S_k \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos $R_\theta^0.S_0(S_k, S_k)$:

$$R_\theta^0.S_0(S_k, S_k) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_k & 0 & 0 \\ 0 & S_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^0.S_0(S_k, S_k) = \begin{bmatrix} S_k \cos(\theta) & -S_k \sin(\theta) & 0 \\ S_k \sin(\theta) & S_k \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comparando-se os resultados de $S_0(S_k, S_k).R_\theta^0$ e de $R_\theta^0.S_0(S_k, S_k)$ concluímos que são comutativos.

Agora com fatores de escala diferenciados

$$R_\theta^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicialmente calculamos $S_0(s_x, s_y) \cdot R_\theta^0$:

$$S_0(s_x, s_y) \cdot R_\theta^0 = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(s_x, s_y) \cdot R_\theta^0 = \begin{bmatrix} s_x \cos(\theta) & -s_x \sin(\theta) & 0 \\ s_y \sin(\theta) & s_y \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora calculamos $R_\theta^0 \cdot S_0(s_x, s_y)$:

$$R_\theta^0 \cdot S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^0 \cdot S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x \cos(\theta) & -s_y \sin(\theta) & 0 \\ s_x \sin(\theta) & s_y \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observamos que esta operação não é comutativa, pois:

$$S_0(s_x, s_y) \cdot R_\theta^0 \neq R_\theta^0 \cdot S_0(s_x, s_y)$$

Vamos ver a escala não uniforme e a translação. Queremos saber se:

$$S_0(s_x, s_y) \cdot T(d_x, d_y) = T(d_x, d_y) \cdot S_0(s_x, s_y)$$

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicialmente vamos calcular $S_0(s_x, s_y) \cdot T(d_x, d_y)$:

$$S_0(s_x, s_y) \cdot T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0(s_x, s_y) \cdot T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & d_x s_x \\ 0 & s_y & d_y s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos calcular $T(d_x, d_y) \cdot S_0(s_x, s_y)$:

$$T(d_x, d_y) \cdot S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(d_x, d_y) \cdot S_0(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & d_x \\ 0 & s_y & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$S_0(s_x, s_y) \cdot T(d_x, d_y) \neq T(d_x, d_y) \cdot S_0(s_x, s_y)$$

A tabela 2 sintetiza as transformações aqui trabalhadas em termos de comutatividades.

Tabela-2: Transformações Comutativas	
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala Uniforme	Rotação

Vamos aplicar uma transformação de escala não uniforme seguida de uma translação sobre um quadrado com vértices $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,3)$ e $D(0,3)$ (Figura 56). Depois vamos comutar estas transformações e verificar o resultado.

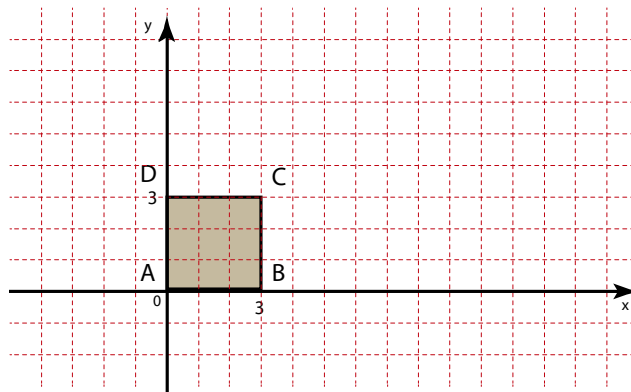


Figura 56: Objeto gráfico na posição inicial

Inicialmente vamos aplicar uma translação $T(3,2)$ e depois uma mudança de escala de $S(2,0.5)$.

$$M'_{obj} = T(3,2) \cdot M_{obj}$$

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(3,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 57):

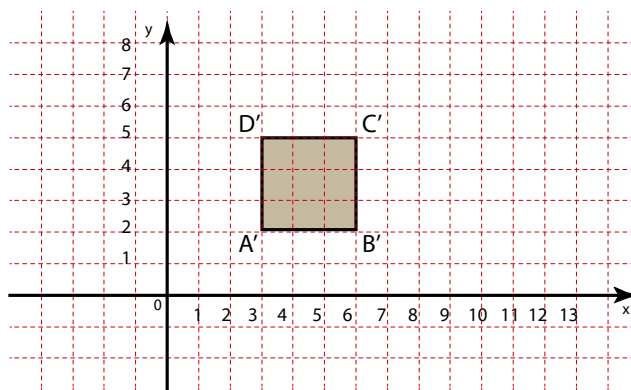


Figura 57: Objeto deslocado $T(3,2)$

Agora vamos aplicar a mudança de escala $S(2,0.5)$ sobre o objeto transladado:

$$M''_{obj} = S_0(2,0.5).M'_{obj}$$

$$S_0(2,0.5) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M''_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 12 & 6 \\ 1 & 1 & 2.5 & 2.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 58):

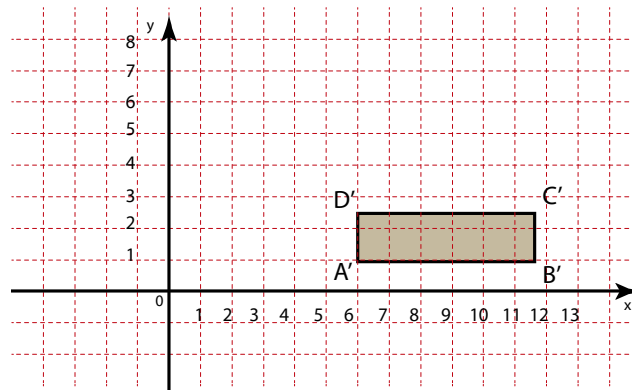


Figura 58: Aplicação da transformação escala após a de translação

Agora vamos comutar as transformações. Inicialmente vamos aplicar a transformação de escala e depois a de translação e comparar os resultados.

$$M'_{obj} = S_0(2,0.5).M_{obj}$$

$$M'_{obj} = S_0(2,0.5).M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 59):

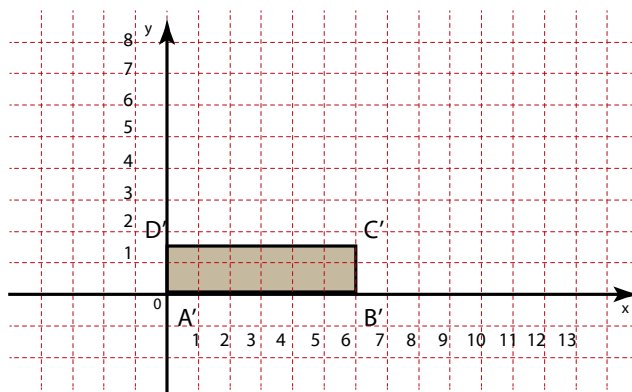


Figura 59: Aplicação inicial da transformação de escala

Em seguida vamos aplicar a translação:

$$M''_{obj} = T(3,2) \cdot M'_{obj}$$

$$M''_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 3.5 & 3.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 60):

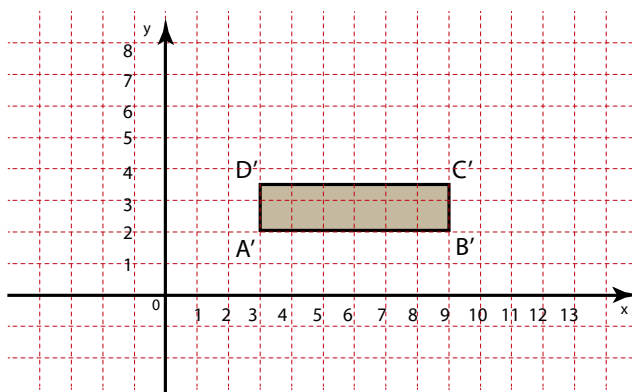


Figura 60: Aplicação da transformação translação após a de escala

Note que :

$$S_0(2,0.5) \cdot T(3,2) \neq T(3,2) \cdot S_0(2,0.5)$$

Graficamente (Figura 61)

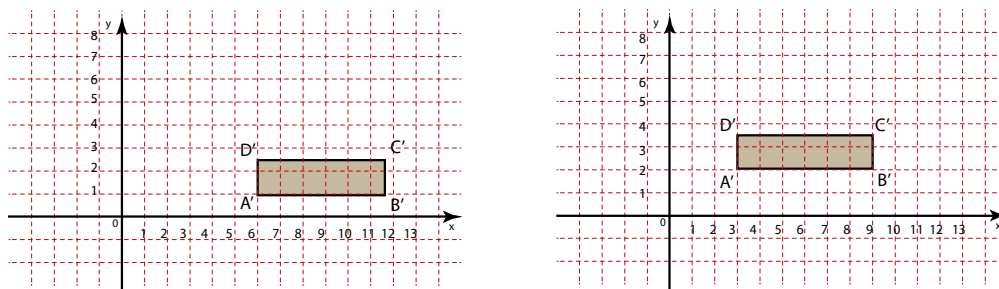


Figura 61: $S_0(2,0.5) \cdot T(3,2) \neq T(3,2) \cdot S_0(2,0.5)$

A não comutatividade aparece geometricamente de forma mais destacada na aplicação de transformações de mudança de escala e rotação.

Considere o quadrado da Figura 56 agora sendo aplicada sobre este objeto uma rotação de 45° e depois uma mudança de escala de $S(2,0.5)$. Vamos iniciar com a rotação

$$M'_{obj} = R_{45}^0 \cdot M_{obj}$$

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{45}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = R_{45}^0 \cdot M_{obj} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 2.12 & 0 & -2.12 \\ 0 & 2.12 & 4.24 & 2.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente (Figura 62):

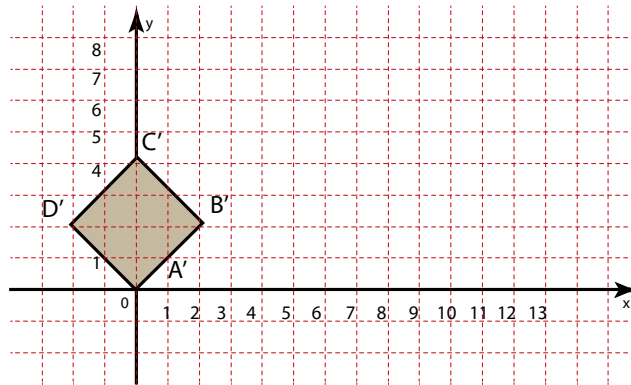


Figura 62: Objeto gráfico girado de 45°

Agora vamos aplicar a mudança de escala temos:

$$M''_{obj} = S_0(2,0.5) \cdot M'_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 0 & 2.12 & 0 & -2.12 \\ 0 & 2.12 & 4.24 & 2.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M''_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2.12 & 0 & -2.12 \\ 0 & 2.12 & 4.24 & 2.12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.24 & 0 & -4.24 \\ 0 & 1.06 & 2.12 & 1.06 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente (Figura 63):

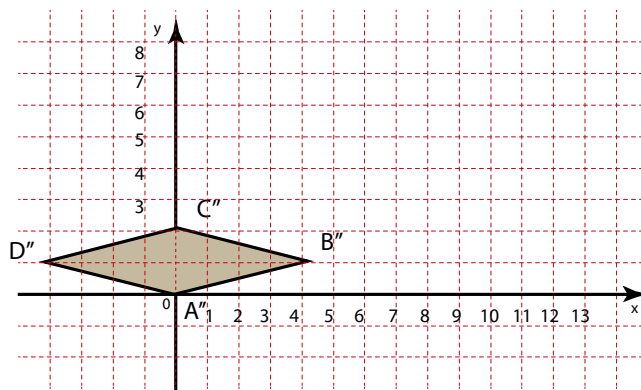


Figura 63: Aplicação da transformação de mudança de escala após a de rotação

Vamos comutar as operações. Iniciaremos com a mudança de escala e depois aplicaremos a rotação;

$$M'_{obj} = S_0(2,0.5) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente (Figura 64)

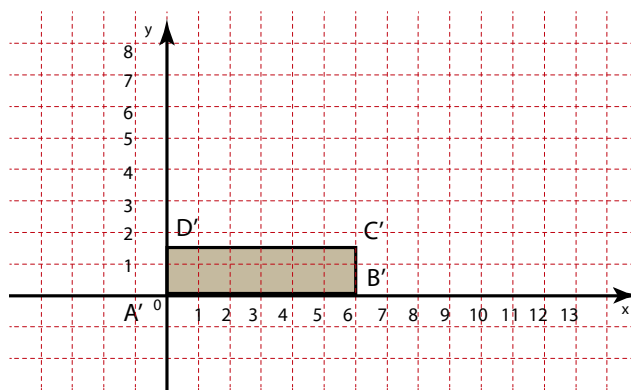


Figura 64: Aplicação da transformação de escala no objeto inicial

Agora vamos aplicar a rotação:

$$M''_{obj} = R_{45}^0 \cdot M'_{obj}$$

$$M''_{obj} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.24 & 3.18 & -1.06 \\ 0 & 4.24 & 5.30 & 1.06 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos (Figura 65):

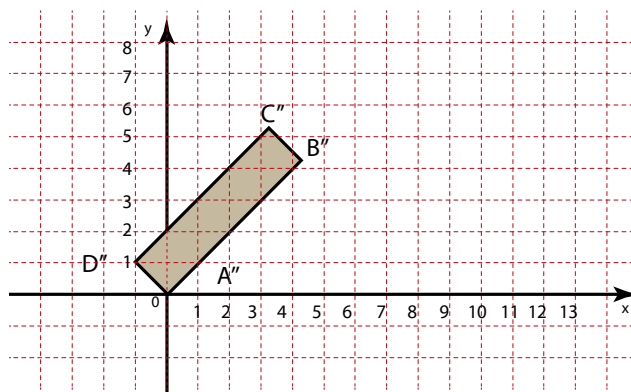


Figura 65: Transformação de rotação aplicada após a de escala

Podemos notar que :

$$S_0(2,0.5).R_{\theta}^0 \neq R_{\theta}^0.S_0(2,0.5)$$

A diferença pode ser notada graficamente (Figura 66):

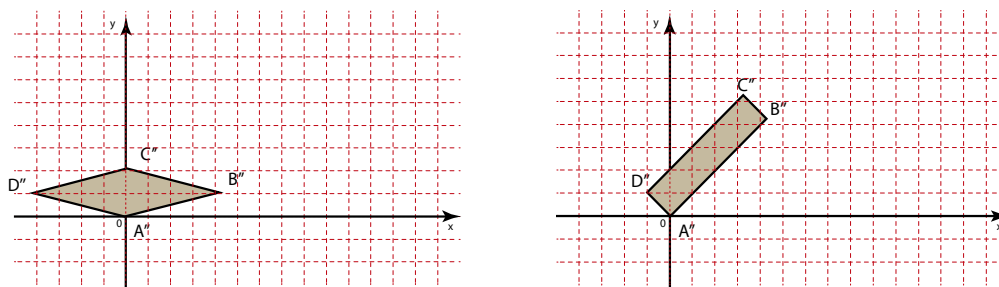


Figura 66: Não comutatividade das transformações - $S_0(2,0.5).R_{\theta}^0 \neq R_{\theta}^0.S_0(2,0.5)$

Para sintetizar estas operações apresentamos a tabela 3 que mostra as transformações não comutativas:

Tabela 3 - Transformações não Comutativas	
Escala não Uniforme	Translação
Escala não Uniforme	Rotação

2.6 Transformações de Coordenadas

As **transformações geométricas** apresentadas até o momento ocorrem em um determinado sistema de coordenadas fixo. Os objetos gráficos é que sofrem as transformações.

Nas **transformações de coordenadas** os objetos ficam estáticos enquanto o sistema de coordenadas sofre transformações.

Vamos considerar um sistema de coordenadas bidimensional com origem em 0 eixos x e y , $\{0, x, y\}$. Note que um ponto neste sistema pode ser referenciado vetorialmente (Figura 67).

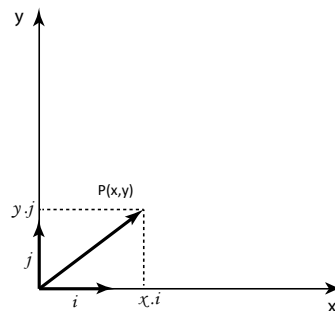


Figura 67: Ponto e vetor

Neste sistema de coordenadas o seguimento OP pode ser expresso da seguinte forma:

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = x(1, 0) + y(0, 1) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

Observe que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ são iguais aos coeficientes de \overrightarrow{OP} . Vamos agora representar este mesmo ponto em outro sistema de coordenadas. Neste novo sistema $P(x, y)$ passa a ser $P'(x', y')$. No primeiro sistema a base canônica é representada pela origem e os vetores unitários $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ e na nova base os vetores canônicos são

representados por $\{0', \vec{u}, \vec{v}\}$. Analogamente ao sistema anterior podemos representar $\overrightarrow{O'P'}$ por meio de sua base (Figura 68).

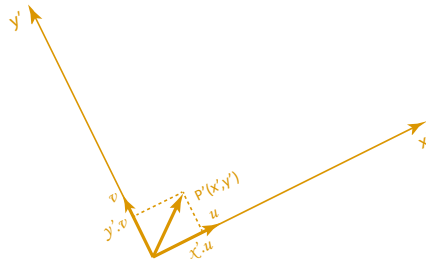


Figura 68: $P'(x', y')$ no sistema $\{0', x', y'\}$

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = (x', y') = (x', 0) + (0, y') = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = x'(1, 0) + y'(0, 1) = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v}$$

Vamos representar o ponto $P(x, y) = P'(x', y')$ simultaneamente nos dois sistemas de coordenadas, pois neste caso, são o mesmo ponto (Figura 69).

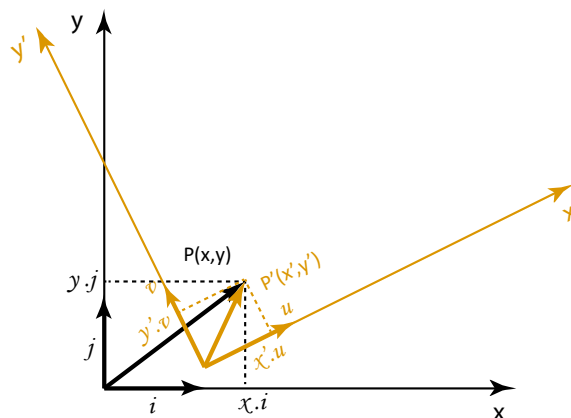


Figura 69: $P(x, y)$ nos sistemas $\{0, x, y\}$ e $\{0', x', y'\}$

As coordenadas de $P(x, y)$ no sistema $\{0', x', y'\}$ é $P'(x', y')$ e podem ser expressas da seguinte forma:

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u} \ \vec{v}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Lembrando que os vetores que formam a base deste novo sistema, são formalizados pela base do sistema inicial $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j}$$

$$\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j}$$

Temos

$$[\vec{u} \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Para $0 = 0'$ temos $OP = O'P'$ e $P(x, y) = P'(x', y')$:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para determinar P' temos que multiplicar os dois lados da equação pela matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1}$$

Porém como esta matriz é ortogonal, a sua inversa é igual a sua transposta:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}$$

$P'(x', y')$ pode ser assim determinado:

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a **transformação de coordenadas** vamos considerar um ponto $P(2,3)$ no sistema de coordenadas $\{0, x, y\}$ apresentado na Figura 70.

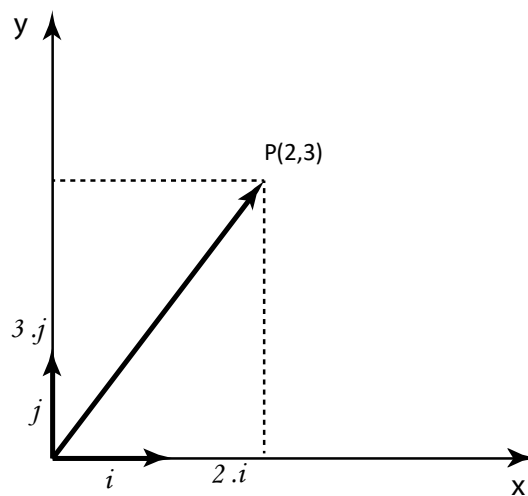


Figura 70: Ponto $P(2,3)$ definido no sistema $\{0, x, y\}$

Vamos considerar um segundo sistema de coordenadas $\{0', x', y'\}$ em que $0 = 0''$, $u = (3,2)$ e $v = (-2,3)$, (Figura 71). Vamos verificar quais as coordenadas do ponto P neste novo sistema.

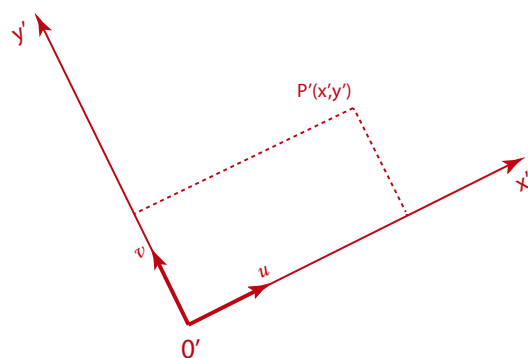


Figura 71: Ponto $P'(x', y')$ definido no sistema $\{0', x', y'\}$

Temos que escrever em uma base ortonormal com \vec{u} e \vec{v} :

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

Calculo do versor na direção \vec{u} :

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

Calculo do versor na direção \vec{v} :

$$|\vec{v}| = \sqrt{-2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Determinação das coordenadas no novo sistema:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.328 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

Graficamente:

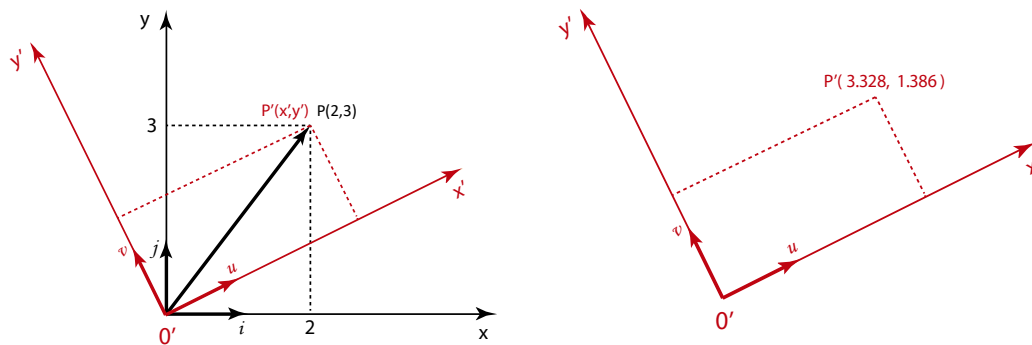


Figura 72: Ponto $P'(x', y')$ definido no sistema $\{0, x', y'\}$

No sistema $\{0, x, y\}$ o ponto P tem coordenadas $(2, 3)$, este ponto no sistema $\{0', x', y'\}$ têm coordenadas $(3.328, 1.386)$.

2.6.1 Rotação de Sistemas de Coordenadas

É importante notar que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ expressas no sistema $\{0, x, y\}$ além de representarem o ponto e com a combinação linear o vetor \overrightarrow{OP} , são na realidade o cosseno e seno do ângulo formado pelo vetor \overrightarrow{OP} e o eixo x . São as projeções de \overrightarrow{OP} nos eixos principais x e y que se normalizadas formam os cossenos diretores do sistema.

A transformação de coordenadas pode ocorrer de um sistema de coordenadas para outro como se fosse um giro do novo sistema em relação ao sistema inicial, tomando-se como referência a origem (Figura 73).

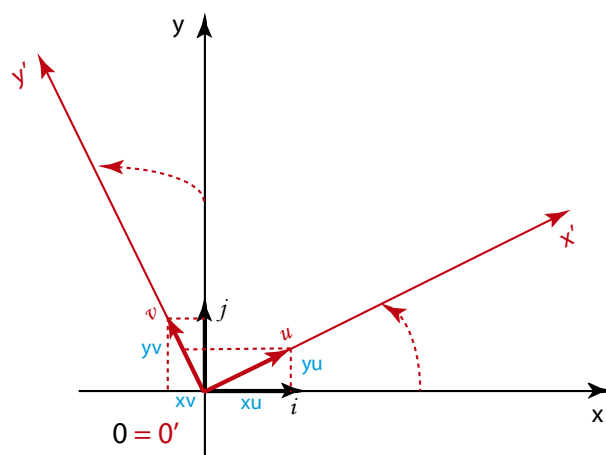


Figura 73: Rotação de $\{0, x, y\}$ para $\{0', x', y'\}$

Note que \vec{u} e \vec{v} são expressos em função de \vec{i} e \vec{j} que são os versores do sistema de coordenadas $\{0', x', y'\}$.

$$\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = \cos(180 - \theta) \cdot \vec{i} + \sin(180 - \theta) \cdot \vec{j} = -\sin(\theta) \cdot \vec{i} + \cos(\theta) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{u} = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = -\sin(\theta) \cdot \vec{i} + \cos(\theta) \cdot \vec{j}$$

Usando:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se compararmos esta matriz com a de rotação de um ponto $P(x, y)$ em relação a origem vamos ver que ela é justamente a sua transposta. Assim, podemos concluir que a matriz que representa a transformação de **rotação de sistemas de coordenadas** é igual à transposta da matriz da **transformação geométrica de rotação de um ponto em relação à origem**.

2.6.2 Translação de Sistemas de Coordenadas

Vimos até agora a rotação de um sistema de coordenadas, no entanto podemos ter uma translação de sistemas (Figura 74).

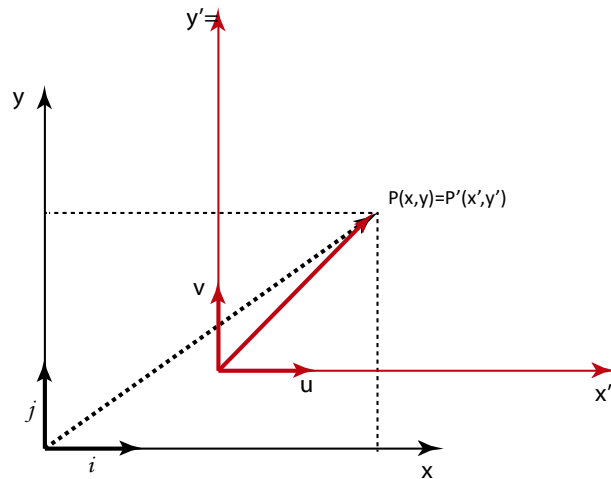


Figura 74: Translação de sistemas de coordenadas de $\{0, x, y\}$ para $\{0', x', y'\}$

Observe que neste caso $0' \neq 0$ e $0'P' = OP - 00'$ e se $0' = (0'_x, 0'_y)$ temos:

$$0'P' = OP - 00'$$

$$0'P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0'_x \\ 0'_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 0'_x \\ y - 0'_y \end{bmatrix}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0'_x \\ 0 & 1 & -0'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a transformação de translação de um sistema de coordenadas considere o ponto $P(4,3)$ no sistema de coordenadas $\{0, x, y\}$ (Figura 75).

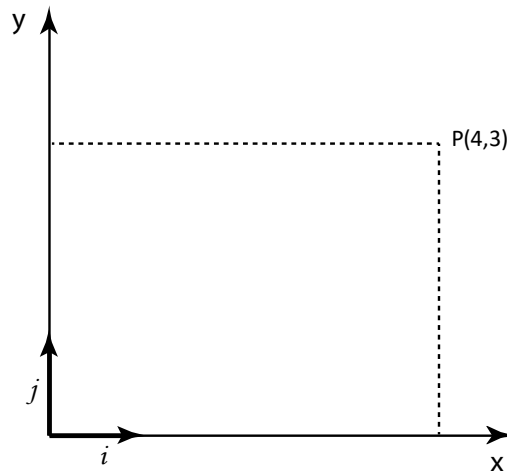


Figura 75: Ponto $P(4,3)$ no sistema de coordenadas de $\{0, x, y\}$

Vamos determinar as coordenadas deste ponto no sistema de coordenadas de $\{0', x', y'\}$ supondo um deslocamento de três unidades em x e duas unidades em y (3,2) (Figura 76).

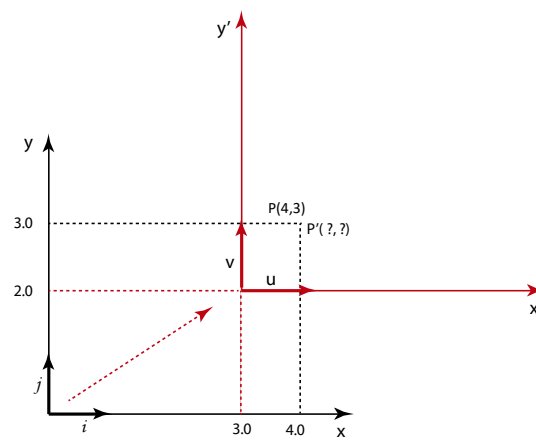


Figura 76: Ponto $P'(? , ?)$ no sistema de coordenadas de $\{0', x', y'\}$

$$0'_x = 3,0$$

$$0'_y = 2,0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0'_x \\ 0 & 1 & -0'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente, figura 77:

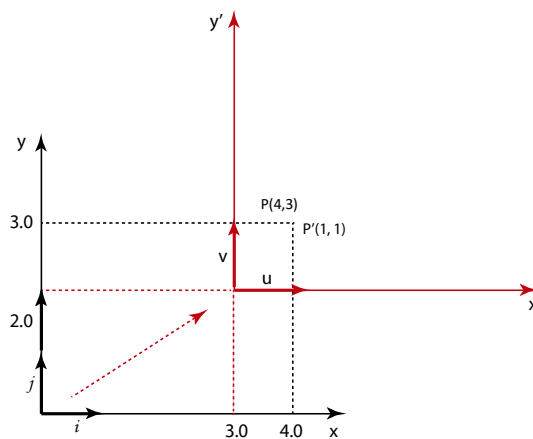


Figura 77: Ponto $P(4,3)$ em $\{0, x, y\}$ passa a ter coordenadas $P'(1,1)$ em $\{0', x', y'\}$

Considere agora o sistema $\{0, x, y\}$ com o ponto $P(4,3)$ da Figura 78. Vamos verificar quais as suas coordenadas no sistema $\{0', x', y'\}$ que integra uma translação $(2,1)$ com uma rotação 30° .

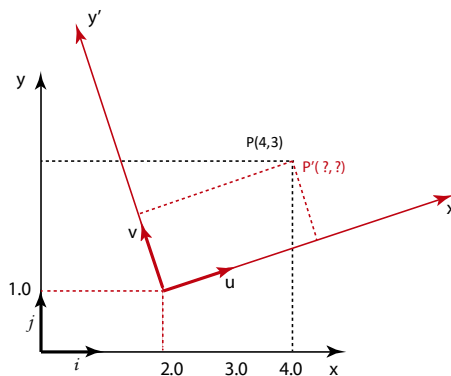


Figura 78: Determinação de P' em $\{0', x', y'\}$

Este exemplo é muito importante porque a ordem das operações pode levar a resultados inconsistentes. Observe que estas transformações utilizam como referência o sistema de coordenadas inicial, ou seja, $\{0, x, y\}$. Neste caso, precisamos fazer com que a rotação seja

executada em relação à origem do novo sistema transladado. Assim, torna-se imperativo que a translação seja feita primeiro.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0'_x \\ 0 & 1 & -0'_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) & \sin(30) & 0 \\ -\sin(30) & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.732 \\ 0.732 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente, figura 79:

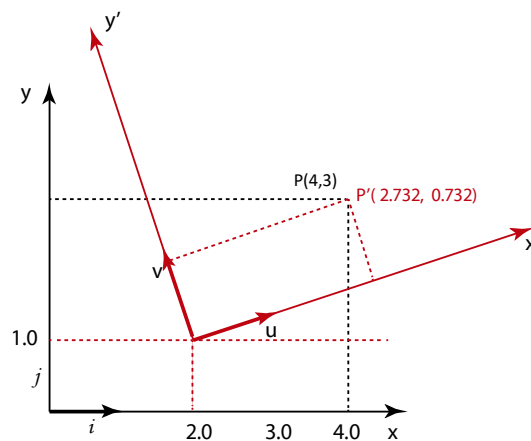


Figura 79: Valores de P' em $\{0', x', y'\}$

2.7 Conclusões

Vimos que as transformações são importantes para a computação gráfica porque permitem a manipulação e alteração de objetos gráficos. Elas também auxiliaram a classificar geometrias em grupos de acordo com as propriedades invariantes dos objetos gráficos quando a elas submetidos. A classificação de geometrias também levou a uma classificação das transformações geométricas as quais podemos classificar em lineares, afins e projetivas. Cada uma delas com contribuições significativas para a computação gráfica. As lineares transformam retas em retas ou pontos e a imagem do vetor (0,0) é sempre (0,0). As Afins transformam linhas paralelas em linha paralelas. A imagem do vetor (0,0) nem sempre é (0,0). As Projetivas não preservam necessariamente paralelismo de retas. A imagem de uma

reta é um ponto ou reta, no entanto, nunca uma curva. Além disso, vimos que a utilização de matrizes neste processo além de prover elegância às operações algébricas traz ganhos de eficiência computacional.

Bibliografia Recomendada

GHALI, S. **Introduction to geometric computing**. London: Spirng-Verlag, 2008.

KREIDER, D. et al. **Introdução à análise linear**: equações diferenciais lineares. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1983.

PLASTOCK, R. A.; KALLEY, G. **Computação Gráfica**. Lisboa: McGRAW-HILL, 1991.

REZENDE, P. J. de; STOLFI, J. **Fundamentos de geometria computacional**. Campinas, SP: UNICAMP, 1994.

VINCE. J. **Mathematics for computer graphics**. 2. ed. London: Springer Verlag, 2006.

MORTENSON, M. E., **Mathematics for computer graphics applications**. 2. ed. New York: Industrial Press, 1999.