Programação Linear
Método Simplex

Prof. Igor da Penha Natal

Departamento de Informática

Universidade Estadual de Maringá

Aula de Hoje

- **Resolução de Problemas de Programação Linear:**
  - **Introdução ao Método Simplex**
  - **Método Simplex: forma tabular**

Introdução ao Método Simplex

Método Simplex: introdução

- Sabe-se que para encontrar a solução ótima de um problema de Programação Linear basta procurarmos entre os vértices.
- Entretanto a quantidade de vértices de um problema prático é de $C_{n,m}$ onde *m* é o número de restrições e *n* é o número de variáveis.
- Por exemplo se tiver um problema com $m=50$ e $n=100$ variáveis tem-se: $C_{100,50}=100!/50!(100-50)! \cong 1 \times 10^{29}$
- Isso torna inviável a enumeração de todos os vértices existentes de um problema de tamanho moderado
- O método Simplex consiste num procedimento eficiente para a busca da solução ótima entre os vértices.

Método Simplex: introdução gráfica

• **Exemplo:** Uma indústria de confecção produz camisas de manga longa e de manga curta. Os recursos disponíveis são de 1200 reais para compra de tecido e as máquinas permitem 40 horas de produção por semana. Após uma pesquisa de mercado decidiu-se que a produção total não pode exceder de 800 unidades. Além disso, o número de unidades produzidas de camisa manga longa não pode exceder o número de unidades produzidas de camisa manga curta em mais de 450 unidades. Sabe-se que, cada camisa manga longa requer 2 reais de tecido e 3 minutos de produção e cada camisa manga curta requer 1 real de tecido e 4 minutos de produção. O departamento de finanças tem a informação de que cada camisa manga longa dá um lucro de 8 reais e cada camisa manga curta dá um lucro de 5 reais. O gerente da indústria deseja saber qual o melhor esquema de produção de forma a respeitar as restrições e maximizar o lucro.

Método Simplex: introdução

- Modelo de Programação Linear

Max $8X1 + 5X2$ (lucro semanal)

Sujeito a:

$2X1 + 1X2 <= 1200$ (Quantidade de tecido)

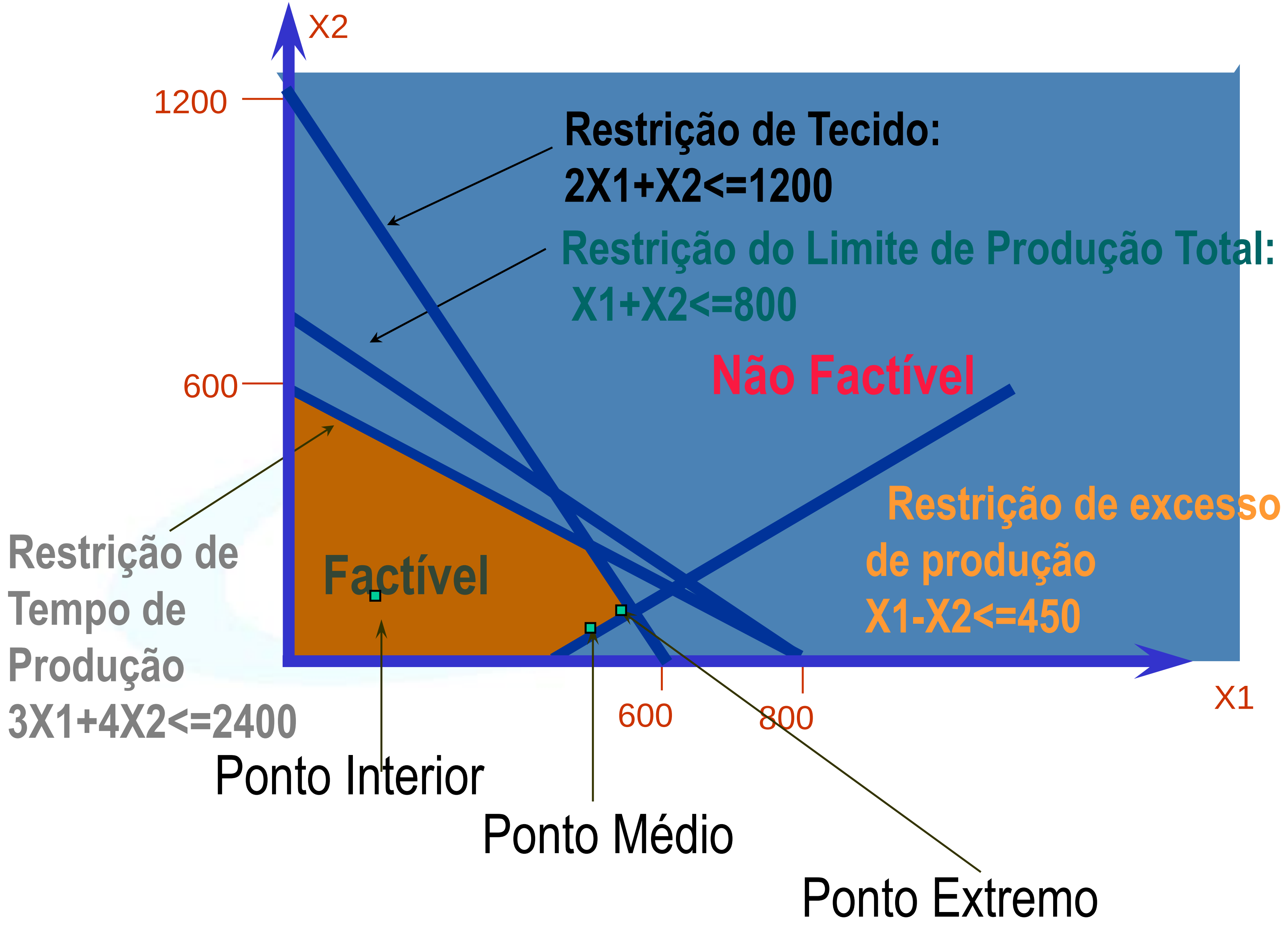
$3X1 + 4X2 <= 2400$ (Tempo de produção)

$X1 + X2 <= 800$ (Limite produção total)

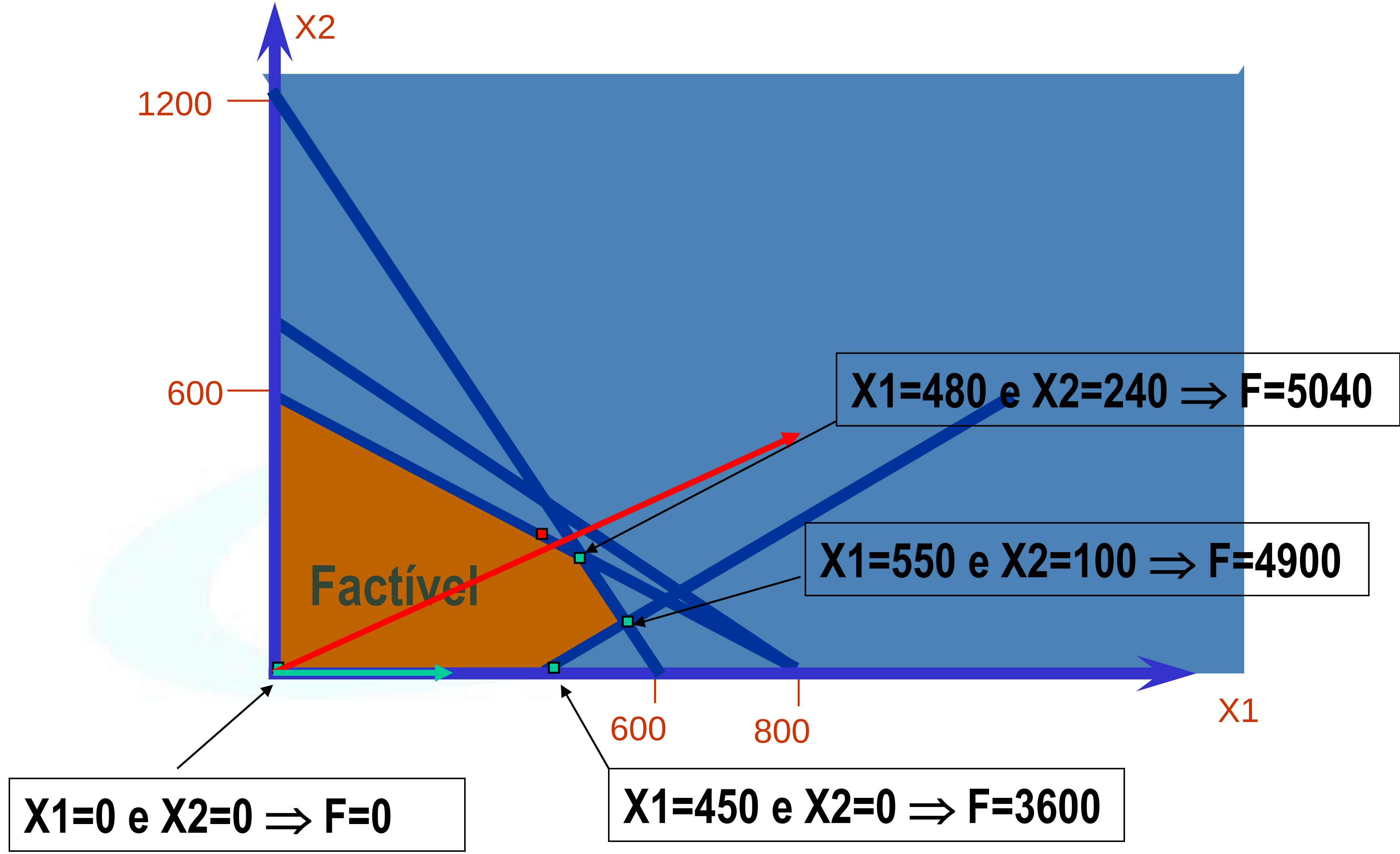
$X1 - X2 <= 450$ (Produção em excesso)

$X_j >= 0$, $j= 1, 2$. (Resultados positivos)

Método Simplex: introdução



Método Simplex: introdução



Método Simplex: introdução

- Pergunta: Como aplicar a solução gráfica para resolver o seguinte problema?

$$maximizar\ \ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \qquad (I)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \qquad (II) \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \qquad (III)$$

- Resposta: Não é possível resolver graficamente!
- É possível obter uma solução com um método analítico, por exemplo, pelo método simplex

Método Simplex: introdução

- Características dos problemas de Programação Linear que permitem a solução pelo método Simplex.
  - A região factível/viável deve ser convexa.
  - Um conjunto é convexo quando toda combinação convexa de dois elementos dele pertence a ele.
  - Uma combinação convexa de dois elementos, x_1 e x_2 é um terceiro elemento y tal que: $y=a.x_1+(1-a)x_2$ onde $0 \leq a \leq 1$.
  - Assim, um conjunto é convexo quando: dados $x_1 \in S$, $x_2 \in S$ e $y=a.x_1+(1-a)x_2$ onde $0 \leq a \leq 1$ então $y \in S$.
  - Graficamente: dados dois pontos factíveis quaisquer, sempre existirá um segmento de reta ligando estes dois pontos, de forma que, este segmento está totalmente contido na região de factibilidade.

Método Simplex: introdução

- Preparativos para a aplicação do método simplex:
  - Se o conjunto de possibilidades fosse formado por igualdades seria mais fácil resolver o sistema que o forma.
  - Para tanto é possível utilizar algumas operações que permitem transformar modelos de programação linear em outros modelos equivalentes. Por exemplo:
    - um problema de minimização, pode ser resolvido pela maximização do negativo da função objetivo.
    - restrições de $\geq$ podem ser multiplicadas por -1 para se tornarem restrições de $\leq$.
    - restrições de $\geq$ ou de $\leq$ podem ser colocadas nas forma de igualdade adicionando-se variáveis de folga .
    - variáveis que possam assumir qualquer valor e não apenas valores positivos podem ser substituídas pela diferença de duas variáveis positivas
- Vejamos tais transformações com maiores detalhes

Transformação de problemas em formas equivalentes

• Restrições de desigualdade :

- Caso as restrições, forem apresentadas como inequações, ao invés de equações, podemos converter para forma de igualdade com o auxílio de novas variáveis. Vejamos:

- Imaginemos determinada restrição *i* na forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (ex: 3x_1+4x_2-x_3 \leq 7)$$

- Se somarmos ao primeiro termo uma variável x_k ($k \geq n+1$), sendo $x_k \geq 0$, poderíamos escrever então, a igualdade:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i \quad (ex: 3x_1+4x_2-x_3+x_4 = 7, x_4 \geq 0)$$

sem alterar o significado da restrição.

Transformação de problemas em formas equivalentes

- Restrições de desigualdade (continuação):

\- Analogamente, se a restrição fosse da forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \quad (ex: 3x_1+4x_2-x_3 \geq 7)$$

bastaria que subtraíssemos uma variável x_k ($k \geq n+1$), do primeiro termo para transformar a inequação em igualdade, sendo $x_k \geq 0$.

$$ex: 3x_1+4x_2-x_3-x_4 = 7,\ x_4 \geq 0$$

Observação:

• Essas variáveis adicionais, chamadas de ***variáveis de folga***, são muito úteis, pois deixam todas as restrições em forma de igualdade mantendo-se as condições de não-negatividade

• As variáveis de folga aumentam o grau de liberdade do sistema (infinitas soluções)

Transformação de problemas em formas equivalentes

- Variáveis Livres:

Caso as variáveis x_i das restrições sejam livres de sinal, ou seja, não tenham restrições de não-negatividade, basta fazermos a substituição de variáveis no problema:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0.$$

- Função objetivo (maximizar ou minimizar):

Caso a função objetivo esteja na forma de maximização (minimização), basta substituirmos pela minimização (maximização) do negativo da função. Ou seja:

- maximizar $f(x_1,x_2)=2x_1 + 3x_2 \approx$ minimizar $-f(x_1,x_2)=-2x_1 - 3x_2$

- minimizar $f(x_1,x_2)= 5x_1 - 8x_2 \approx$ maximizar $-f(x_1,x_2)= -5x_1 + 8x_2$

Exemplo

- Escrever o Problema de Otimização Linear abaixo na forma padrão

Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3$ **(I)**

sujeito a:

$4x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2$ **(II)**

$x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 4$

$x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ **(III)**

Resposta:

Maximizar $z = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$ **(I)**

sujeito a:

$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2$ **(II)**

$x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_5 = 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ **(III)**

Variáveis Básicas e não Básicas

Considere-se o sistema Ax = b, com *m* equações lineares e *n* variáveis uma solução básica é obtida fazendo

- $n - m$ variáveis iguais a 0 (variáveis não básicas)
- resolvendo o sistema para as variáveis restantes, que são chamadas as variáveis básicas.

Exemplo: determinar todas as soluções básicas para o sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Variáveis Básica : x_1 **e** x_3 ***sendo*** $x_1 = 3$ **e** $x_3 = 1$

Variável não Básica: x_2 ***, sendo*** $x_2 = 0;$

Soluções Viáveis/Admissíveis

- Definição: a toda a solução básica do problema na forma padrão na qual todas as variáveis são não-negativas chama-se solução básica admissível.
- Teorema 1: A região admissível de qualquer problema de programação linear (PL) é um conjunto convexo. Se o PL tem uma solução única, deverá haver um ponto extremo da região admissível que é ótimo.
- Teorema 2: Para qualquer PL, há um único ponto extremo da região admissível correspondendo a cada solução básica admissível. Há pelo menos uma solução básica admissível correspondendo a cada ponto extremo da região admissível.
- Definição: soluções básicas admissíveis adjacentes: para um PL com m restrições, duas soluções básicas dizem-se adjacentes se os seus conjuntos de variáveis básicas têm $m-1$ variáveis em comum.

Passos Básicos do Método Simplex

i. Achar uma solução básica inicial.
ii. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o passo iii.
iii. Determinar a variável não básica que deve entrar na base (solução básica).
iv. Determinar a variável básica que deve sair da base.
v. Achar a nova solução básica e voltar ao passo ii.

Método Simplex: forma tabular

Vamos apresentar o método Simplex representando o modelo na forma de uma tabela.

Exemplo

Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina. Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina. A empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina para um período de produção.

Sabe-se que os lucros líquidos dos produtos são $4 e $1 respectivamente. Formule um modelo de PL que maximize o lucro.

Exemplo

$$Max \qquad L = 4x_1 + x_2$$

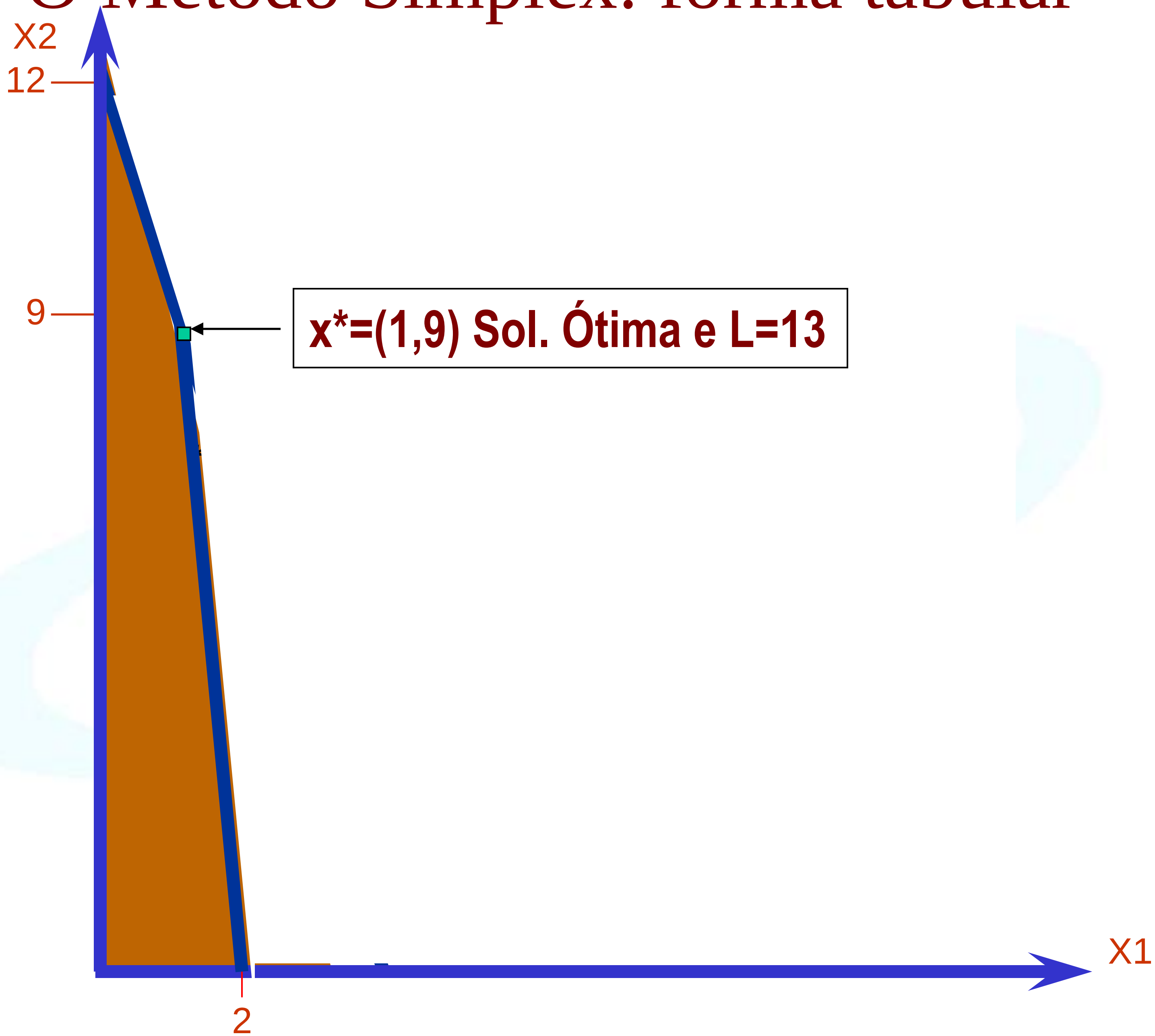
Sujeito a:

$$H.H. \qquad 9x_1 + x_2 \leq 18$$

$$H.M. \qquad 3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

- Vejamos como resolver este exemplo na forma tabular:

- O primeiro passo consiste em deixar o modelo na forma padrão, ou seja, deve-se acrescentar duas variáveis de folga:

$$H.H. \quad 9x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$H.M. \quad 3x_1 + x_2 + x_4 = 12$$

- Além disso tem-se que:

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

- Como se a f. o. fosse uma das restrições originais, porém não é necessário nenhuma variável de folga, pois já esta na forma de igualdade
- L passa a ser vista como uma variável básica adicional e permanente

O Método Simplex: forma tabular

- Forma-se então um sistema de equações lineares com dois graus de liberdade (para quaisquer duas variáveis podem ser escolhidos valores arbitrários):

$$
\begin{aligned}
L - 4x_1 - x_2 &= 0 \\
9x_1 + x_2 + x_3 &= 18 \\
3x_1 + x_2 + x_4 &= 12
\end{aligned}
$$

- O método simplex usa o valor zero para esses valores arbitrários

O Método Simplex: forma tabular

- Uma solução imediata e que muitas vezes está disponível é a solução onde todas as variáveis originais são nulas e as de folga são iguais aos limites dos recursos (lado direito).
- Esta solução é conhecida como solução trivial.

solução

$$
\begin{array}{cccccl}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 18 \\ 12 \end{array}} \\
 & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
L=0 \\
x_3=18 \\
x_4=12
\end{array}
$$

- Observe que, neste caso, $x_1=0$, $x_2=0$ e o lucro $L=0$

O Método Simplex: forma tabular

- As variáveis que são diferentes de zero são ditas estarem na base ou são chamadas de variáveis básicas

x_3 e x_4 são variáveis básicas

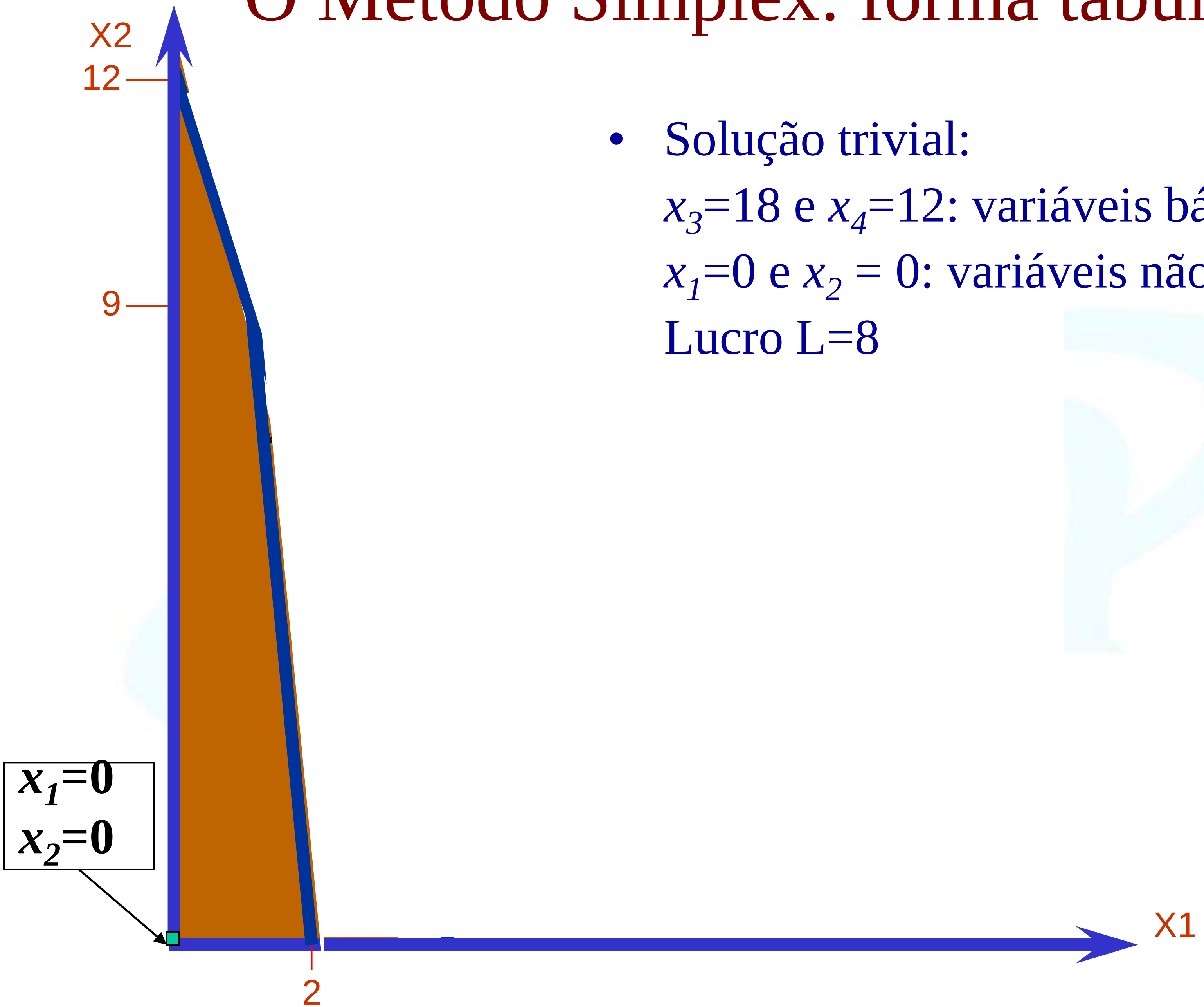
- As que são iguais a zero são conhecidas como variáveis não básicas ou variáveis que estão fora da base.

x_1 e x_2 são variáveis não básicas

- A solução resultante é chamada de solução básica e, se todas as variáveis básicas forem não-negativas tem-se uma solução básica factível

- Graficamente, uma solução básica factível é equivalente a um vértice factível

O Método Simplex: forma tabular



- Solução trivial:
  x_3=18 e x_4=12: variáveis básicas.
  x_1=0 e x_2 = 0: variáveis não básicas.
  Lucro L=8

O Método Simplex: forma tabular

- Para resolver o problema devemos resolver as seguintes perguntas:
- Qual o objetivo?
- Como se deve modificar os valores das variáveis de acordo com o objetivo?
- Lembre-se você tem dois graus de liberdade, ou seja, pode escolher os valores de até duas variáveis.
- Que variável fará seu lucro aumentar mais?
- Vejamos a seguir como responder tais perguntas:

O Método Simplex: forma tabular

- Observando o objetivo:

$$L = 4x_1 + x_2 \Rightarrow L - 4x_1 - x_2 = 0$$

- pode-se ver claramente que x_1 (atualmente nula, portanto não básica) aumentaria mais rapidamente o lucro se fosse posta na base (valor diferente de zero).
- Como o objetivo é maximizar o lucro o ideal seria aumentar x_1 até o infinito.
- Entretanto todas as outras restrições devem ser ainda satisfeitas na presença do máximo valor que x_1 possa alcançar.

O Método Simplex: forma tabular

$$L \quad - 4x_1 \quad - x_2 \qquad\qquad = \quad 0$$

$$\boxed{9x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \qquad = \quad 18} \quad 18 \div 9 = 2$$

$$\boxed{3x_1 \quad + x_2 \qquad + x_4 = \quad 12} \quad 12 \div 3 = 4$$

- Como deseja-se aumentar x_1 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições:
  - **Na primeira restrição o limite de x_1 é 2.**
  - **Na segunda restrição o limite de x_1 é 4.**

• Como não se pode romper nenhuma das restrições, x_1 deve ser no máximo 2.

• Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lcccccl}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
\hline
\multicolumn{1}{|l}{} & 9x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & \multicolumn{1}{l|}{18} \\
\hline
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12
\end{array}
\quad 2
$$

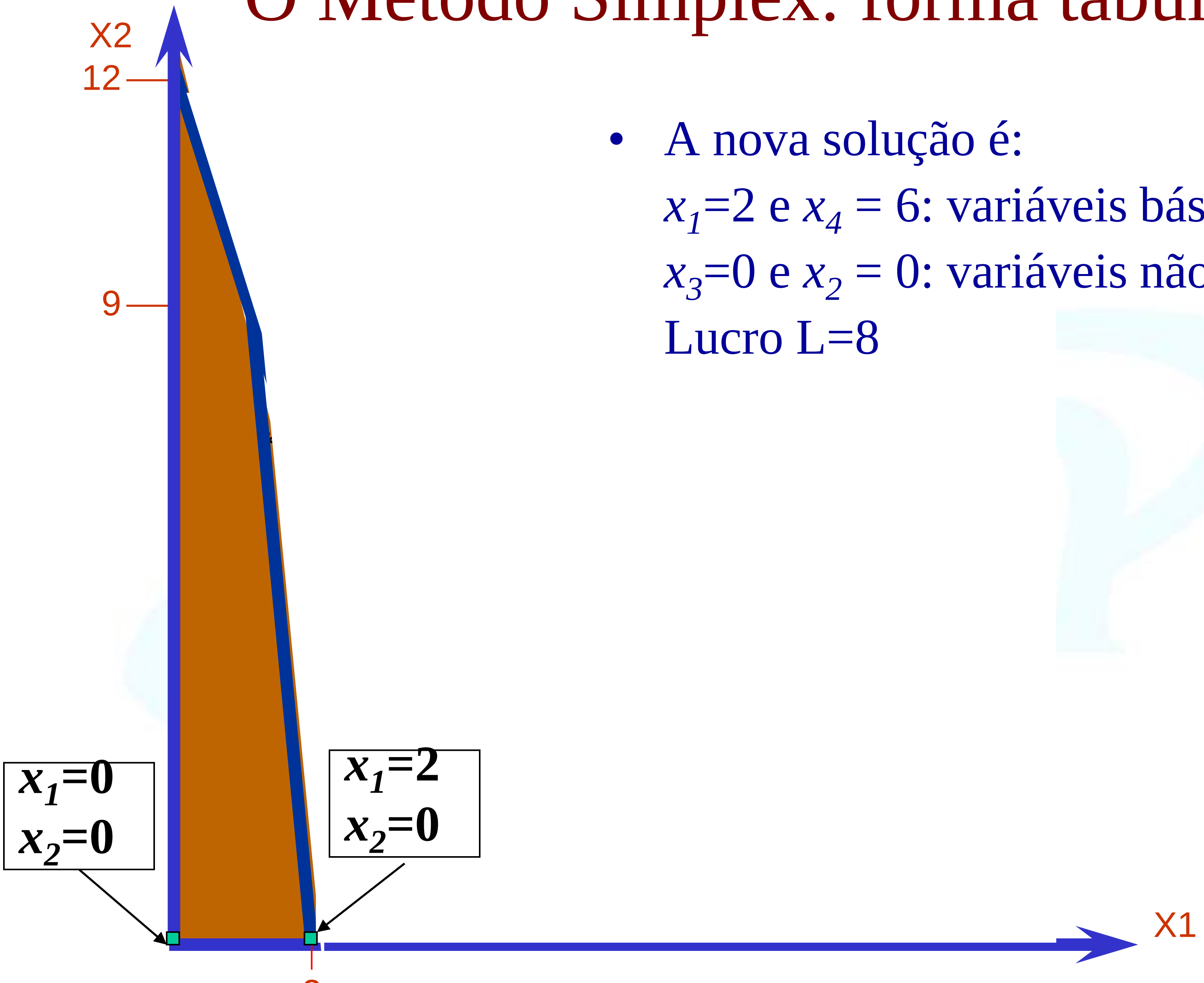
- O limite de x_1 ocorre na linha da primeira restrição.

- Quando x_1 atingir o valor de 2:
  - x_3 deverá ser nula para atender a restrição.
  - x_4 que era 12 deverá ser igual a 6 dado que 6 unidades da segunda restrição serão consumidas por x_1 com valor 2.

- Desta forma x_1 entrou na base e x_3 saiu.

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
  x_1=2 e x_4 = 6: variáveis básicas.
  x_3=0 e x_2 = 0: variáveis não básicas.
  Lucro L=8



O Método Simplex: forma tabular

- Escalonando (pivotando) o sistema.

$$
\begin{array}{l}
L - 4x_1 - x_2 = 0 \\
\boxed{9x_1 + x_2 + x_3 = 18} \quad \div 9 \\
3x_1 + x_2 + x_4 = 12
\end{array}
$$

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se dividir toda equação, na linha de entrada, por 9.

$$
\begin{array}{l}
L - 4x_1 - x_2 = 0 \\
x_1 + \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{9}x_3 = 2 \\
3x_1 + x_2 + x_4 = 12
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{lrrrrrr}
L & -4x_1 & -x_2 & & & = & 0 \\
4\text{ x} & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12
\end{array}$$

- Multiplicando a nova linha de x_1 por 4 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\begin{array}{lrrrrrr}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\
 & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\
 & 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 12
\end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
-3 \text{ x} & \boxed{x_1} & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
& 3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 12
\end{array}
$$

- Multiplicando a nova linha de x_1 por -3 e somando com a outra linha, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$
\begin{array}{llllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
& x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
& & \boxed{+\frac{2}{3}x_2} & \boxed{-\frac{1}{3}x_3} & \boxed{+x_4} & \boxed{= 6}
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\
 & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\
 & & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = & 6
\end{array}
$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$L = \frac{5}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 + 8$$

- Claramente se x_2 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

$$L \quad -\frac{5}{9}x_2 \quad +\frac{4}{9}x_3 \quad = \quad 8$$

$$x_1 \quad +\frac{1}{9}x_2 \quad +\frac{1}{9}x_3 \quad = \quad 2 \qquad 2 \div 1/9$$

$$+\frac{2}{3}x_2 \quad -\frac{1}{3}x_3 \quad +x_4 \quad = \quad 6 \qquad 6 \div 2/3$$

- Deseja-se então aumentar ao máximo o valor de x_2 sem romper nenhuma das restrições.
- Isto pode feito como antes.
  - **Na primeira restrição x_2 pode ser aumentada até 18**
  - **Na segunda restrição x_2 pode ser aumentada até 9**
- Como as duas restrições devem ser atendidas, x_2 entrará na linha onde x_4 é a VB.

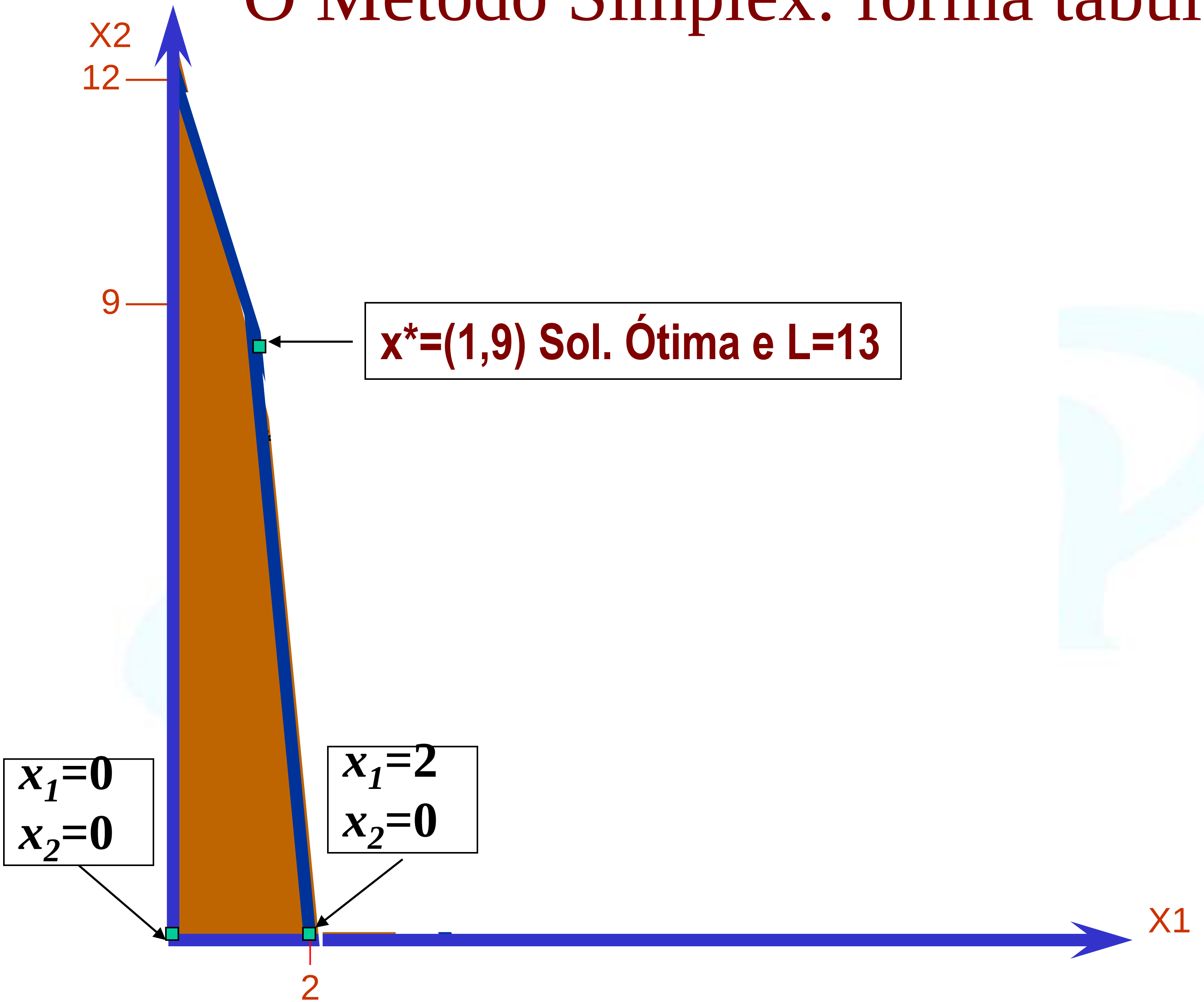
O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllll}
L & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = 8 \\
x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = 2 \\
 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = 6
\end{array}
$$

- A nova solução será:
  - $x_2 = 9$ e $x_1 = 1$: variáveis básicas;
  - $x_4 = 0$ e $x_3 = 0$: variáveis não básicas;

  - Lucro L=13.
- Claramente a solução é melhor que a anterior
- Para decidir se existe alguma variável NB que aumentaria o lucro deve-se colocar o sistema novamente no formato inicial, com relação as variáveis básicas e não básicas.

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{lllllll} L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\ & & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +x_4 & = & 6 \end{array}$$

- Através de operações elementares deve-se colocar a variável x_2 com coeficiente 1 na linha onde ela entrou e zero nas demais.
- Multiplique a linha onde x_2 entrou por 3/2 para fazer seu coeficiente unitário.

$$x_2 \quad -\frac{1}{2}x_3 \quad +\frac{3}{2}x_4 \quad = \quad 9$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\begin{array}{lllllll} L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & +\frac{1}{9}x_2 & +\frac{1}{9}x_3 & & = & 2 \\ & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9 \end{array}$$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por -1/9 e some com a linha da primeira restrição.

$$\begin{array}{lllllll} L & & -\frac{5}{9}x_2 & +\frac{4}{9}x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = & 9 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\boxed{L \quad \boxed{-\frac{5}{9}x_2} \quad +\frac{4}{9}x_3 \quad = \quad 8}$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 1 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9 \end{array}$$

- Escalonando: multiplique a linha de x_2 por 5/9 e some com a linha do lucro.

$$\begin{array}{lllll} L & & +\frac{1}{6}x_3 & +\frac{5}{6}x_4 & = 13 \\ x_1 & & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 1 \\ & x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & = 9 \end{array}$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{aligned}
L \quad\quad\quad\quad & + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{5}{6}x_4 = 13 \\
x_1 \quad\quad & + \tfrac{1}{6}x_3 - \tfrac{1}{6}x_4 = 1 \\
x_2 & - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 = 9
\end{aligned}
$$

- Note que agora nenhuma variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá o algoritmo Simplex.
- Utilizando-se os quadros os passos ficaram mais fáceis de serem implementados.

O Método Simplex: forma tabular

- Utilizando-se de quadros os passos ficam mais fáceis de serem implementados, pois é possível expor os sistemas de uma maneira mais adequada.
- A seguinte forma foi escolhida como a mais conveniente:

Termo Independente

Variáveis: básicas e não-básicas

Função Objetivo

	x1	x2	x3	x4	
L	-4	-1	0	0	0
x3	9	1	1	0	18
x4	3	1	0	1	12

Variáveis básicas

- Estes quadros são conhecidos como quadro simplex, este particularmente é o quadro simplex inicial para o exemplo anterior.

O Método Simplex: forma tabular

Variável x1 entra na base (maior acréscimo)

Variável x3 sai da base (limita)

Base	x1	x2	x3	x4	
L	-4	-1	0	0	0
x3	9	1	1	0	18
x4	3	1	0	1	12

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

• **Construção da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

	Base	x1	x2	x3	x4	
	L	-4	-1	0	0	0
Lin1=Lin1÷9	x3	1	1/9	1/9	0	2
	x4	3	1	0	1	12

• **Construção da coluna Pivô: zerar os coeficientes das outras linhas na coluna relativa ao elemento pivô**

	Base	x1	x2	x3	x4	
Linf=4xLin2+Linf	L	0	- 5/9	4/9	0	8
	x3	1	1/9	1/9	0	2
Lin2=-3xLin2+Lin2	x4	0	2/3	- 1/3	1	6

O Método Simplex: forma tabular

- **Como x_1 entrou na base e x_3 saiu tem-se a nova tabela**

Variável x2 entra na base (maior acréscimo)

	x1	x2	x3	x4	
L	0	- 5/9	4/9	0	8
x1	1	1/9	1/9	0	2
x4	0	2/3	- 1/3	1	6

Variável x4 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

• **Construção da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

Lin2=Lin2 x 3÷2

	x1	x2	x3	x4	
L	0	- 5/9	4/9	0	8
x1	1	1/9	1/9	0	2
x4	0	1	- 1/2	3/2	9

• **Construção da coluna Pivô: zerar os coeficientes das outras linhas na coluna relativa ao elemento pivô**

Linf=5÷9xLin3+Linf

Lin1=-1÷9xLin3+Lin1

	x1	x2	x3	x4	
L	0	0	1/6	5/6	13
x1	1	0	1/6	-1/6	1
x4	0	1	- 1/2	3/2	9

O Método Simplex: forma tabular

- **Como x_2 entrou na base e x_4 saiu tem-se a nova tabela**

	x1	x2	x3	x4	
L	0	0	1/6	5/6	13
x1	1	0	1/6	-1/6	1
x2	0	1	- 1/2	3/2	9

- Note que agora nenhuma variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.

O Método Simplex: forma tabular

- Idéia Básica do método Simplex (novamente):

  - O sistema de equações é resolvido repetidamente para uma sequencia de soluções básicas factíveis. Cada uma melhor que a sua predecessora

  - Isso é feito, até que seja alcançada uma solução básica factível ótima (graficamente corresponde a um vértice ótimo)

  - Cada nova solução básica é obtida de sua predecessora: "transformando uma variável não-básica em básica (variável entrando) e transformando uma variável básica em não-básica (variável saindo)"

  - Duas soluções básicas factíveis que diferem apenas por uma única troca de variáveis básicas e não-básicas são chamadas adjacentes

  - Uma solução básica (vértice) é dita ótima quando nenhuma das soluções básicas adjacentes (vértices adjacentes) é melhor que ela

• **Exercício: Resolva o seguinte problema usando a forma tabular do método simplex. Faça uma primeira resolução utilizando sistemas e uma segunda utilizando a forma de tabelas. Isso facilitará o entendimento das tabelas!**

Uma Indústria de confecção produz camisas de manga longa e de manga curta. Os recursos disponíveis são de 1200 reais para compra de tecido e as máquinas permitem 40 horas de produção por semana. Após uma pesquisa de mercado decidiu-se que a produção total não pode exceder de 800 unidades. Além disso, o número de unidades produzidas de camisa manga longa não pode exceder o número de unidades produzidas de camisa manga curta em mais de 450 unidades. Sabe-se que, cada camisa manga longa requer 2 reais de tecido e 3 minutos de produção e cada camisa manga curta requer 1 real de tecido e 4 minutos de produção. O departamento de finanças tem a informação de que cada camisa manga longa dá um lucro de 8 reais e cada camisa manga curta dá um lucro de 5 reais. O gerente da indústria deseja saber qual o melhor esquema de produção de forma a respeitar as restrições e maximizar o lucro.

O Método Simplex: forma tabular

- Modelo de Programação Linear

Max $8X1 + 5X2$ (lucro semanal)

Sujeito a:

$2X1 + 1X2 \leq 1200$ (Quantidade de tecido)

$3X1 + 4X2 \leq 2400$ (Tempo de produção)

$X1 + X2 \leq 800$ (Limite produção total)

$X1 - X2 \leq 450$ (Produção em excesso)

$X_j \geq 0$, $j = 1, 2$. (Resultados positivos)

O Método Simplex: forma tabular

- Vejamos como resolver este exemplo na forma tabular:

- O primeiro passo consiste em deixar o modelo na **forma padrão**, ou seja, deve-se acrescentar as variáveis de folga:

Max $Z = 8X1 + 5X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5 + 0X6$ (lucro semanal)

Sujeito a:

$2X1 + 1X2 + X3 = 1200$ (Quantidade de tecido)

$3X1 + 4X2 + X4 = 2400$ (Tempo de produção)

$X1 + X2 + X5 = 800$ (Limite produção total)

$X1 - X2 + X6 = 450$ (Produção em excesso)

$X_j >= 0$, $j= 1, ...,6$

O Método Simplex: forma tabular

- Reescrevendo o problema em forma de sistema tem-se:

$$
\begin{array}{lr}
Z - 8X1 - 5X2 + 0X3 + 0X4 + 0X5 + 0X6 = 0 & \text{(lucro semanal)} \\
2X1 + 1X2 + X3 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1200 & \text{(Quantidade de tecido)} \\
3X1 + 4X2 \qquad +X4 \qquad\qquad\qquad = 2400 & \text{(Tempo de produção)} \\
X1 + X2 \qquad\qquad\qquad +X5 \qquad\quad = 800 & \text{(Limite produção total)} \\
X1 - X2 \qquad\qquad\qquad\qquad +X6 \quad = 450 & \text{(Produção em excesso)}
\end{array}
$$

- Observe que este sistema tem quatro graus de liberdade:

O Método Simplex: forma tabular

- Iniciamos com a solução trivial onde todas as variáveis originais são nulas e as de folga são iguais aos limites dos recursos

$$
\begin{array}{lr|l|l}
Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = & 0 & f=0 \\
2x_1 + 1x_2 + x_3 & = & 1200 & x_3 = 1200 \\
3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 2400 & x_4 = 2400 \\
x_1 + x_2 + x_5 & = & 800 & x_5 = 800 \\
x_1 - x_2 + x_6 & = & 450 & x_6 = 450
\end{array}
$$

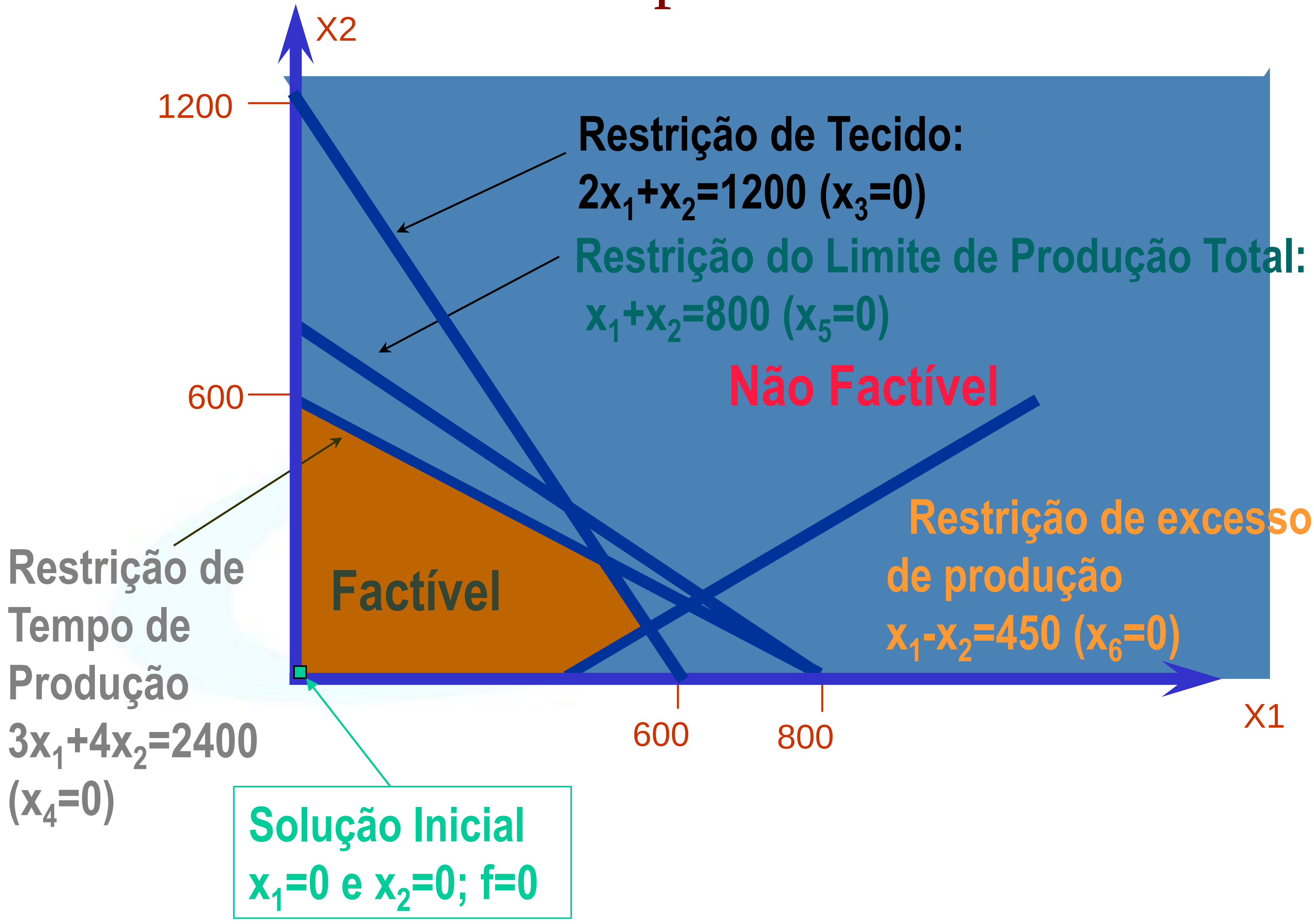
•A solução inicial é:

- $x_3 = 1200$; $x_4 = 2400$; $x_5 = 800$; $x_6 = 450$ variáveis básicas;

- $x_1=0$ e $x_2 = 0$; variáveis não básicas;

- Lucro f=0;

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

- Observando o objetivo:

$$Z = 8\,x_1 + 5\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 \Rightarrow$$

$$Z - 8\,x_1 - 5\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 \;=\; 0$$

- pode-se ver claramente que x_1 (atualmente nula, portanto não básica) aumentaria mais rapidamente o lucro se fosse posta na base (valor diferente de zero).
- Como o objetivo é maximizar o lucro o ideal seria aumentar x_1 até o infinito.
- Entretanto todas as outras restrições devem ser ainda satisfeitas na presença do máximo valor que x_1 possa alcançar.

O Método Simplex: forma tabular

$$Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

Valor Máximo

$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 1200$	$x_1=600$
$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 2400$	$x_1=800$
$x_1 + x_2 + x_5 = 800$	$x_1=800$
$x_1 - x_2 + x_6 = 450$	$x_1=450$

- Como deseja-se aumentar x_1 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
  - **Na quarta restrição o limite de x_1 é 450.**

• Como não se pode romper nenhuma das restrições, x_1 deve ser no máximo 450.

• Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$Z - 8x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 1200$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 2400$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$

$$\boxed{x_1 - x_2 + x_6 = 450}$$

• Quando x_1 atingir o valor de 450 (considerando que x_2 deve se manter fora da base, ou seja, $x_2=0$):

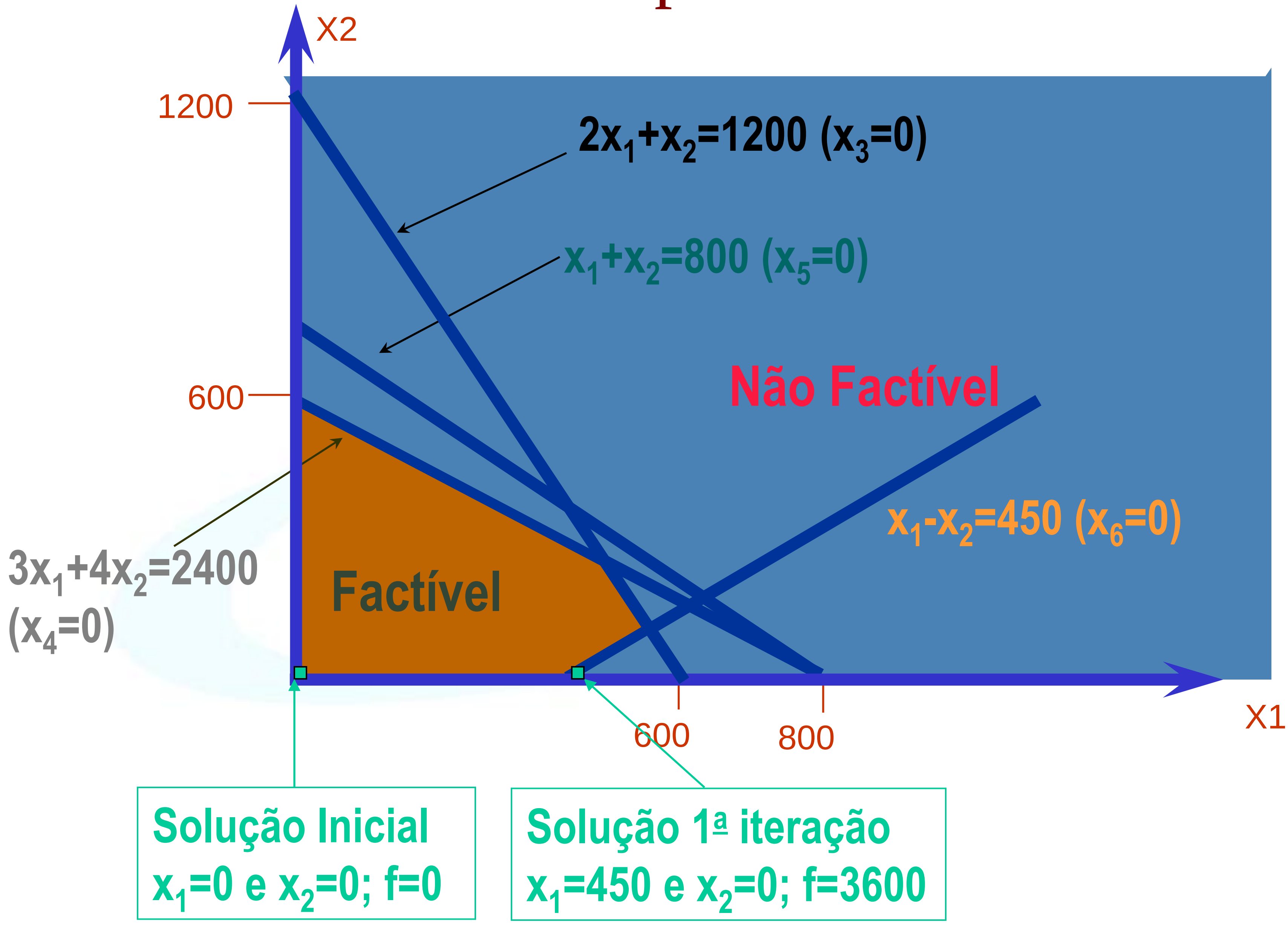
- x_3 deverá ser 300 para atender a restrição.
- x_4 deverá ser 1050 para atender a restrição.
- x_5 deverá ser 350 para atender a restrição.
- x_6 deverá ser 0 para atender a restrição.

Desta forma x_1 entrou na base e x_6 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
  - x_1=450; x_3=300; x_4=1050; x_5=350 variáveis básicas.
  - x_6=0 e x_2 = 0; variáveis não básicas.
  - Lucro f=3600;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_1, deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_6).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z & -\ 8\,x_1 & -\ 5\,x_2 & & & & & = & 0 \\
 & 2\,x_1 & +\ 1\,x_2 & +\ x_3 & & & & = & 1200 \\
 & 3\,x_1 & +\ 4\,x_2 & & +\ x_4 & & & = & 2400 \\
 & x_1 & +\ x_2 & & & +\ x_5 & & = & 800 \\
 & x_1 & -\ x_2 & & & & +\ x_6 & = & 450
\end{array}
$$

- Como o coeficiente de x_1 já é igual a um, não é necessário fazer nada
- Resta agora zerar os coeficientes de x_1 nas outras restrições usando a restrição 4 como pivô

O Método Simplex: forma tabular

$$\boxed{Z - 8x_1 - 5x_2 = 0}$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 1200$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 2400$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$

$$x_1 - x_2 + x_6 = 450 \qquad \text{x } 8$$

- Multiplicando a restrição 4 por 8 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$\boxed{Z - 13x_2 + 8x_6 = 3600}$$

$$2x_1 + 1x_2 + x_3 = 1200$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 2400$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$

$$x_1 - x_2 + x_6 = 450$$

O Método Simplex: forma tabular

$$Z \quad -13\,x_2 \quad + 8\,x_6 = 3600$$
$$2\,x_1 + 1\,x_2 + x_3 = 1200$$
$$3\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 = 2400$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$
$$x_1 - x_2 + x_6 = 450 \qquad \text{x } (-2)$$

- Multiplicando a restrição 4 por -2 e somando com a restrição 1, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$Z \quad -13\,x_2 \quad + 8\,x_6 = 3600$$
$$+ 3\,x_2 + x_3 - 2x_6 = 300$$
$$3\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 = 2400$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 800$$
$$x_1 - x_2 + x_6 = 450$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z & & -13\,x_2 & & & & +\,8\,x_6 & = & 3600 \\
 & & +\,3\,x_2 & +\,x_3 & & & -2\,x_6 & = & 300 \\
 & 3\,x_1 & +\,4\,x_2 & & +\,x_4 & & & = & 2400 \\
 & x_1 & +\,x_2 & & & +\,x_5 & & = & 800 \\
 & x_1 & -\,x_2 & & & & +\,x_6 & = & 450 \quad \text{x } (-3)
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 4 por -3 e somando com a restrição 2, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z & & -13\,x_2 & & & & +\,8\,x_6 & = & 3600 \\
 & & +\,3\,x_2 & +\,x_3 & & & -\,2\,x_6 & = & 300 \\
 & & +\,7\,x_2 & & +\,x_4 & & -\,3\,x_6 & = & 1050 \\
 & x_1 & +\,x_2 & & & +\,x_5 & & = & 800 \\
 & x_1 & -\,x_2 & & & & +\,x_6 & = & 450
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & -13\,x_2 & & & + 8\,x_6 & = 3600 \\
 & & + 3\,x_2 & + x_3 & & - 2\,x_6 & = 300 \\
 & & + 7\,x_2 & & + x_4 & - 3\,x_6 & = 1050 \\
 & x_1 & + x_2 & & + x_5 & & = 800 \\
 & x_1 & - x_2 & & & + x_6 & = 450 \quad \text{x (-1)}
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 4 por -1 e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_1 naquela linha.

$$
\begin{array}{lllllll}
Z + & & -13\,x_2 & & & + 8\,x_6 & = 3600 \\
 & & + 3\,x_2 & + x_3 & & - 2\,x_6 & = 300 \\
 & & + 7\,x_2 & & + x_4 & - 3\,x_6 & = 1050 \\
 & & + 2\,x_2 & & + x_5 & - x_6 & = 350 \\
 & x_1 & - x_2 & & & + x_6 & = 450
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllllll}
Z & -13\,x_2 & & & & + 8\,x_6 & = 3600 \\
 & +\,3\,x_2 & + x_3 & & & - 2\,x_6 & = 300 \\
 & +\,7\,x_2 & & + x_4 & & - 3\,x_6 & = 1050 \\
 & +\,2\,x_2 & & & + x_5 & - x_6 & = 350 \\
x_1 & -\; x_2 & & & & + x_6 & = 450
\end{array}
$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$Z = +\,13\,x_2 - 8\,x_6 + 3600$$

- Claramente se x_2 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

$Z \quad -13\,x_2 \quad + 8\,x_6 = 3600$		Valor Máximo
$+ 3\,x_2 + x_3 - 2\,x_6 = 300$		$x_2=100$
$+ 7\,x_2 + x_4 - 3\,x_6 = 1050$		$x_2=150$
$+ 2\,x_2 + x_5 - x_6 = 350$		$x_2=175$
$x_1 - x_2 + x_6 = 450$		$x_2=-450$

- Como deseja-se aumentar x_2 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
  - **Na primeira restrição o limite de x_2 é 100.**

• Como não se pode romper nenhuma das restrições x_2 deve ser no máximo 100

• Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllllll}
Z & -13\,x_2 & & & & + 8\,x_6 & = & 3600 \\
\hline
 & +3\,x_2 & + x_3 & & & -2\,x_6 & = & 300 \\
\hline
 & +7\,x_2 & & + x_4 & & -3\,x_6 & = & 1050 \\
 & +2\,x_2 & & & + x_5 & - x_6 & = & 350 \\
x_1 & - x_2 & & & & + x_6 & = & 450
\end{array}
$$

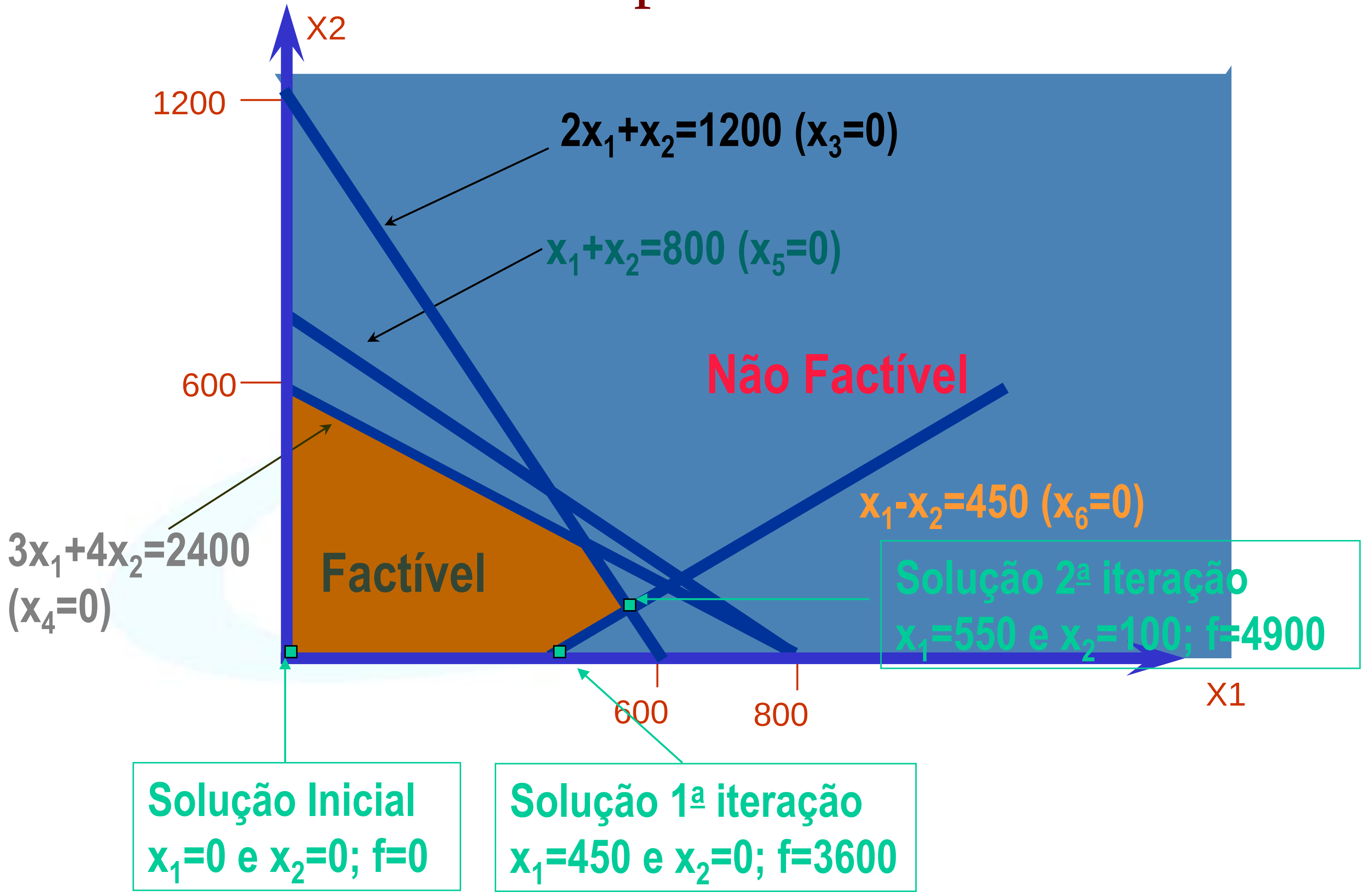
- Quando x_2 atingir o valor de 100 (considerando que x_6 deve se manter fora da base, ou seja, $x_6=0$):
  - x_3 deverá ser 0 para atender a restrição.
  - x_4 deverá ser 350 para atender a restrição.
  - x_5 deverá ser 150 para atender a restrição.
  - x_1 deverá ser 550 para atender a restrição.

Desta forma x_2 entrou na base e x_3 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
  - x_1=550; x_2=100; x_4=350; x_5=150 variáveis básicas.
  - x_6=0 e x_3 = 0; variáveis não básicas.
  - Lucro f=4900;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_2, deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_3).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & -13x_2 & & & & +8x_6 & = 3600 \\
 & +3x_2 & +x_3 & & & -2x_6 & = 300 \quad \div 3 \\
 & +7x_2 & & +x_4 & & -3x_6 & = 1050 \\
 & +2x_2 & & & +x_5 & -x_6 & = 350 \\
x_1 & -x_2 & & & & +x_6 & = 450
\end{array}
$$

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se dividir toda equação, na linha de entrada, por 3.

$$
\begin{array}{llllll}
Z & -13x_2 & & & +8x_6 & = 3600 \\
 & +x_2 & +1/3x_3 & & -2/3x_6 & = 100 \\
 & +7x_2 & & +x_4 & -3x_6 & = 1050 \\
 & +2x_2 & & +x_5 & -x_6 & = 350 \\
x_1 & -x_2 & & & +x_6 & = 450
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\boxed{Z \quad -13\,x_2 \qquad\qquad + 8\,x_6 = 3600}$$

$$+\ x_2 + 1/3x_3 \qquad\qquad - 2/3\,x_6 = 100$$

$$+ 7\,x_2 \qquad + x_4 \qquad - 3\,x_6 = 1050$$

$$+ 2\,x_2 \qquad\qquad + x_5 - x_6 = 350$$

$$x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 450$$

- Multiplicando a restrição 1 por 13 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$\boxed{Z \qquad +13/3x_3 \qquad -2/3\,x_6 = 4900}$$

$$+\ x_2 + 1/3x_3 \qquad\qquad - 2/3\,x_6 = 100$$

$$+ 7\,x_2 \qquad + x_4 \qquad - 3\,x_6 = 1050$$

$$+ 2\,x_2 \qquad\qquad + x_5 - x_6 = 350$$

$$x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 450$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +13/3x_3 & & & -2/3\, x_6 = & 4900 \\
& +\ x_2 & +\ 1/3x_3 & & & -\ 2/3\, x_6 = & 100 \\
& +\ 7\, x_2 & & +\ x_4 & & -\ 3\, x_6 = & 1050 \\
& +\ 2\, x_2 & & & +\ x_5 & -\ x_6 = & 350 \\
x_1 & -\ x_2 & & & & +\ x_6 = & 450
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 1 por -7 e somando com a restrição 2, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +13/3x_3 & & & -2/3\, x_6 = & 4900 \\
& +\ x_2 & +\ 1/3x_3 & & & -\ 2/3\, x_6 = & 100 \\
& & -\ 7/3x_3 & +\ x_4 & & +5/3\, x_6 = & 350 \\
& +\ 2\, x_2 & & & +\ x_5 & -\ x_6 = & 350 \\
x_1 & -\ x_2 & & & & +\ x_6 = & 450
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +\frac{13}{3}x_3 & & & -\frac{2}{3}x_6 & = 4900 \\
 & +\ x_2 & +\ \frac{1}{3}x_3 & & & -\ \frac{2}{3}x_6 & = 100 \\
 & & -\ \frac{7}{3}x_3 & +\ x_4 & & +\frac{5}{3}x_6 & = 350 \\
 & +\ 2x_2 & & & +\ x_5 & -\ x_6 & = 350 \\
x_1 & -\ x_2 & & & & +\ x_6 & = 450
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 1 por -2 e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +\frac{13}{3}x_3 & & & -\frac{2}{3}x_6 & = 4900 \\
 & +\ x_2 & +\ \frac{1}{3}x_3 & & & -\ \frac{2}{3}x_6 & = 100 \\
 & & -\ \frac{7}{3}x_3 & +\ x_4 & & +\frac{5}{3}x_6 & = 350 \\
 & & -\ \frac{2}{3}x_3 & & +\ x_5 & +\frac{1}{3}x_6 & = 150 \\
x_1 & -\ x_2 & & & & +\ x_6 & = 450
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{aligned}
Z \quad & + \tfrac{13}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_6 = 4900\\
& + x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_6 = 100\\
& - \tfrac{7}{3}x_3 + x_4 + \tfrac{5}{3}x_6 = 350\\
& - \tfrac{2}{3}x_3 + x_5 + \tfrac{1}{3}x_6 = 150\\
& \boxed{x_1 - x_2 + x_6 = 450}
\end{aligned}
$$

- Multiplicando a restrição 1 por 1 e somando com a restrição 4, zera-se o coeficiente de x_2 naquela linha.

$$
\begin{aligned}
Z \quad & + \tfrac{13}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_6 = 4900\\
& + x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 - \tfrac{2}{3}x_6 = 100\\
& - \tfrac{7}{3}x_3 + x_4 + \tfrac{5}{3}x_6 = 350\\
& - \tfrac{2}{3}x_3 + x_5 + \tfrac{1}{3}x_6 = 150\\
& \boxed{x_1 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{3}x_6 = 550}
\end{aligned}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +13/3x_3 & & & -2/3\,x_6 = & 4900 \\
+ & x_2 & +\,1/3x_3 & & & -\,2/3\,x_6 = & 100 \\
 & & -\,7/3x_3 & +\,x_4 & & +5/3\,x_6 = & 350 \\
 & & -\,2/3x_3 & & +\,x_5 & +1/3\,x_6 = & 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\,x_6 = & 550
\end{array}
$$

- O sistema encontra-se agora como antes (com relação as VB e VNB) e pode-se decidir qual variável deve entrar na base para aumentar o lucro.
- A equação da função lucro pode ser escrita agora como:

$$Z = -13/3\,x_3 + 2/3\,x_6 + 4900$$

- Claramente se x_6 for aumentada o lucro aumentará.

O Método Simplex: forma tabular

$Z \quad +13/3x_3 \quad -2/3\ x_6 = 4900$		Valor Máximo
$+ \quad x_2 + 1/3x_3 \quad - 2/3\ x_6 = 100$		x_6=-150
$- 7/3x_3 + x_4 \quad +5/3\ x_6 = 350$		x_6=210
$- 2/3x_3 \quad + x_5 \quad +1/3\ x_6 = 150$		x_6=450
$x_1 \quad +1/3x_3 \quad +1/3\ x_6 = 550$		x_6=1650

- Como deseja-se aumentar x_6 o máximo possível, deve-se saber seus limites nas restrições.
  - **Na segunda restrição o limite de x_6 é 210.**

• Como não se pode romper nenhuma das restrições x_6 deve ser no máximo 210

• Como ficam as demais variáveis?

O Método Simplex: forma tabular

$$Z \quad + 13/3 x_3 \quad - 2/3\, x_6 = 4900$$

$$+ \quad x_2 + 1/3 x_3 \quad - 2/3\, x_6 = 100$$

$$\boxed{- 7/3 x_3 + x_4 \quad + 5/3\, x_6 = 350}$$

$$- 2/3 x_3 \quad + x_5 \quad + 1/3\, x_6 = 150$$

$$x_1 \quad + 1/3 x_3 \quad + 1/3\, x_6 = 550$$

• Quando x_6 atingir o valor de 210 (considerando que x_3 deve se manter fora da base, ou seja, x_3=0):

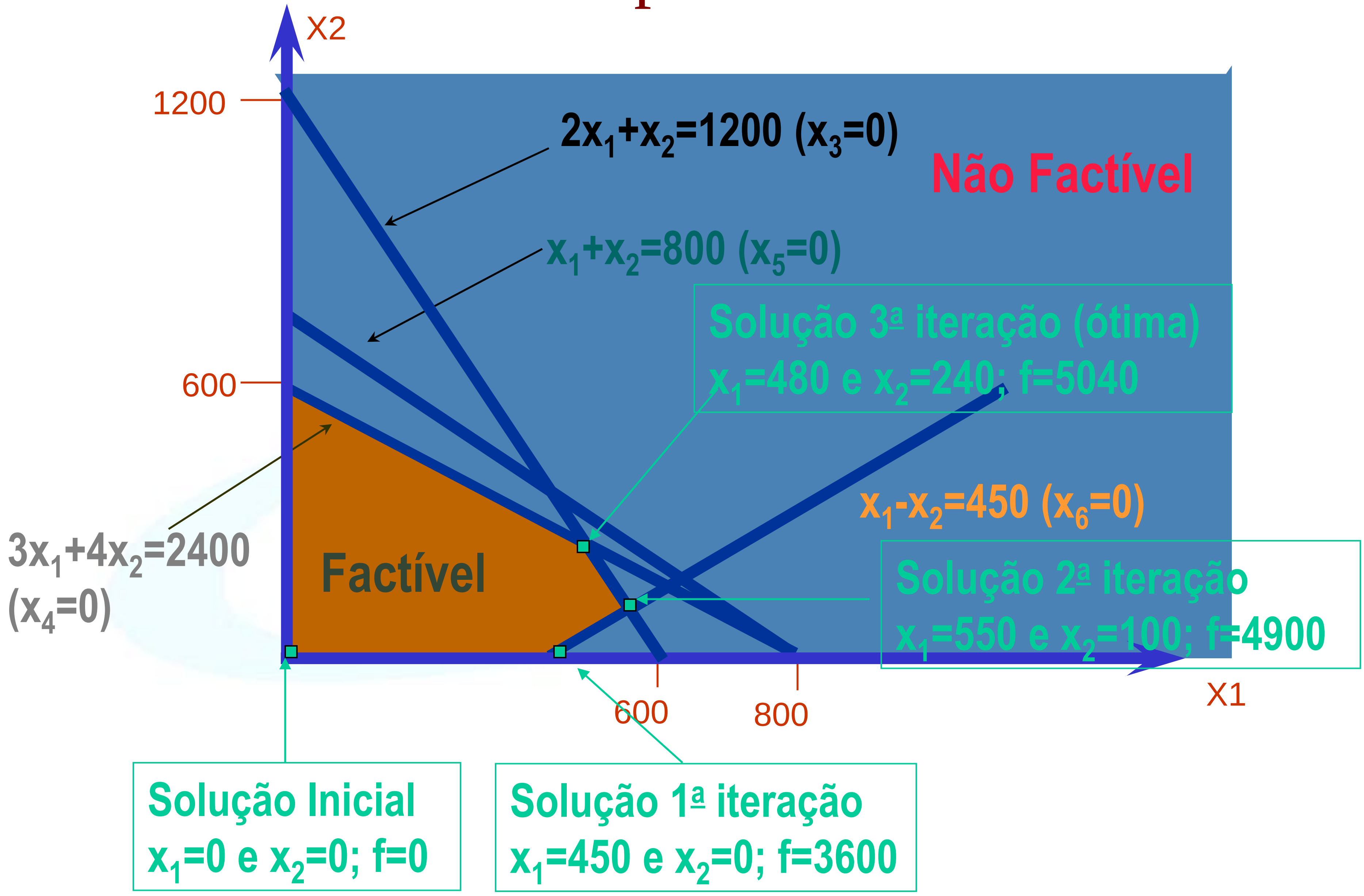
- x_2 deverá ser 240 para atender a restrição.
- x_4 deverá ser 0 para atender a restrição.
- x_5 deverá ser 80 para atender a restrição.
- x_1 deverá ser 480 para atender a restrição.

Desta forma x_6 entrou na base e x_4 saiu

O Método Simplex: forma tabular

- A nova solução é:
  - x_1=480; x_2=240; x_5=80; x_6=210 variáveis básicas.
  - x_3=0 e x_4 = 0; variáveis não básicas.
  - Lucro Z=5040;
- Se, utilizando operações elementares, o sistema for posto na mesma forma, com relação às variáveis básicas e não básicas, será possível perceber se alguma variável (NB=0) poderá contribuir para aumentar o lucro.
- Isto é feito escalonando-se o sistema na coluna relativa a x_6, deixando o coeficiente desta variável igual a 1 apenas na linha onde ela entrou (trocou valores com x_4).

O Método Simplex: forma tabular



O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllll}
Z & & +13/3x_3 & & -2/3\,x_6 & = 4900 \\
& + \; x_2 & +\,1/3x_3 & & -2/3\,x_6 & = 100 \\
& & -\,7/3x_3 & +\; x_4 & +5/3\,x_6 & = 350 \\
& & -\,2/3x_3 & +\; x_5 & +1/3\,x_6 & = 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & +1/3\,x_6 & = 550
\end{array}
$$

x 3/5

- Para se fazer o coeficiente igual a um deve-se multiplicar toda equação, na linha de entrada, por 3/5.

$$
\begin{array}{llllll}
Z & & +13/3x_3 & & -2/3\,x_6 & = 4900 \\
& + \; x_2 & +\,1/3x_3 & & -2/3\,x_6 & = 100 \\
& & -21/15x_3 & +3/5x_4 & +\; x_6 & = 210 \\
& & -\,2/3x_3 & +\; x_5 & +1/3\,x_6 & = 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & +1/3\,x_6 & = 550
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$\boxed{Z + \frac{13}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6 = 4900}$$
$$+ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6 = 100$$
$$-\frac{21}{15}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + x_6 = 210$$
$$-\frac{2}{3}x_3 + x_5 + \frac{1}{3}x_6 = 150$$
$$x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 = 550$$

- Multiplicando a restrição 2 por 2/3 e somando com a linha do lucro, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$\boxed{Z + \frac{153}{45}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 5040}$$
$$+ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6 = 100$$
$$-\frac{21}{15}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + x_6 = 210$$
$$-\frac{2}{3}x_3 + x_5 + \frac{1}{3}x_6 = 150$$
$$x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 = 550$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
 & +\ x_2 & +\ 1/3x_3 & & & -\ 2/3\ x_6 & = 100 \\
 & & -21/15x_3 & +3/5x_4 & & +\ x_6 & = 210 \\
 & & -\ 2/3x_3 & & +\ x_5 & +1/3\ x_6 & = 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\ x_6 & = 550
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 2 por 2/3 e somando com a restrição 1, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$
\begin{array}{llllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
 & +\ x_2 & -\ 9/15x_3 & +\ 2/5x_4 & & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & +\ 3/5x_4 & & +\ x_6 & = 210 \\
 & & -\ 2/3x_3 & & +\ x_5 & +1/3\ x_6 & = 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\ x_6 & = 550
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
 & + x_2 & - 9/15x_3 & + 2/5x_4 & & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & + 3/5x_4 & & + x_6 & = 210 \\
 & & - 2/3x_3 & & + x_5 & +1/3\, x_6 & = 150 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\, x_6 & = 550
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 2 por –1/3 e somando com a restrição 3, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$
\begin{array}{llllllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
 & + x_2 & - 9/15x_3 & + 2/5x_4 & & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & + 3/5x_4 & & + x_6 & = 210 \\
 & & - 3/15x_3 & - 1/5x_4 & + x_5 & & = 80 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\, x_6 & = 550
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
+ & x_2 & -9/15x_3 & +2/5x_4 & & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & +3/5x_4 & & +\ x_6 & = 210 \\
 & & -3/15x_3 & -1/5x_4 & +\ x_5 & & = 80 \\
x_1 & & +1/3x_3 & & & +1/3\ x_6 & = 550
\end{array}
$$

- Multiplicando a restrição 2 por –1/3 e somando com a restrição 4, zera-se o coeficiente de x_6 naquela linha.

$$
\begin{array}{lllllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & & = 5040 \\
+ & x_2 & -9/15x_3 & +2/5x_4 & & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & +3/5x_4 & & +\ x_6 & = 210 \\
 & & -3/15x_3 & -1/5x_4 & +\ x_5 & & = 80 \\
x_1 & & +12/15x_3 & -1/5x_4 & & & = 480
\end{array}
$$

O Método Simplex: forma tabular

$$
\begin{array}{llllll}
Z & & +153/45x_3 & +2/5x_4 & & = 5040 \\
 & + \; x_2 & - 9/15x_3 & + 2/5x_4 & & = 420 \\
 & & -21/15x_3 & + 3/5x_4 & + \; x_6 & = 210 \\
 & & - 3/15x_3 & - 1/5x_4 \; + x_5 & & = 80 \\
x_1 & & +12/15x_3 & - 1/5x_4 & & = 480
\end{array}
$$

- Note que agora nenhuma variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.
- Utilizando-se os quadros os passos ficaram mais fáceis de serem implementados

O Método Simplex: forma tabular

- A seguinte forma foi escolhida como a mais conveniente para se expor o método.

Variáveis: básicas e não-básicas

Termo Independente

Função Objetivo

Variáveis básicas

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	0	1200
x4	3	4	0	1	0	0	2400
x5	1	1	0	0	1	0	800
x6	1	-1	0	0	0	1	450

- Estes quadros são conhecidos como quadro simplex, este particularmente é o quadro simplex inicial.

O Método Simplex: forma tabular

Variável x1 entra na base (maior acréscimo)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	0	1200
x4	3	4	0	1	0	0	2400
x5	1	1	0	0	1	0	800
x6	1	-1	0	0	0	1	450

Variável x6 sai da base (limita)

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

• **Contrução da linha Pivô: como o valor do pivô já é igual a 1, nada tem que ser feito**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	-8	-5	0	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	0	1200
x4	3	4	0	1	0	0	2400
x5	1	1	0	0	1	0	800
x6	1	-1	0	0	0	1	450

O Método Simplex: forma tabular

- **Contrução da coluna Pivô: zerar os coeficintes das outras linhas na coluna do elemento pivô**

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Linf*=8 x *Lin4*+*Linf	Z	0	-13	0	0	0	8	3600
Lin1*=-2 x *Lin4*+*Lin1	x3	0	3	1	0	0	-2	300
Lin2*=-3 x *Lin4*+*Lin2	x4	0	7	0	1	0	-3	1050
Lin3*=-1 x *Lin4*+*Lin3	x5	0	2	0	0	1	-1	350
	x1	1	-1	0	0	0	1	450

O Método Simplex: forma tabular

- **Como x_1 entrou na base e x_6 saiu tem-se a nova tabela**

Variável x2 entra na base (maior acréscimo)

Variável x3 sai da base (limita)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	0	-13	0	0	0	8	3600
x3	0	3	1	0	0	-2	300
x4	0	7	0	1	0	-3	1050
x5	0	2	0	0	1	-1	350
x1	1	-1	0	0	0	1	450

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

• **Contrução da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

Lin1=-Lin1/3

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	0	-13	0	0	0	8	3600
x3	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
x4	0	7	0	1	0	-3	1050
x5	0	2	0	0	1	-1	350
x1	1	-1	0	0	0	1	450

O Método Simplex: forma tabular

- **Contrução da coluna Pivô: zerar os coeficintes das outras linhas na coluna do elemento pivô**

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Linf=13x*Lin1*+*Linf*	L	0	0	13/3	0	0	-2/3	4900
	x2	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
Lin2=-7x*Lin1*+*Lin2*	x4	0	0	-7/3	1	0	5/3	350
Lin3=-2x*Lin1*+*Lin3*	x5	0	0	-2/3	0	1	1/3	150
Lin4=1x*Lin1*+*Lin4*	x1	1	0	1/3	0	0	1/3	550

O Método Simplex: forma tabular

- **Como x_2 entrou na base e x_3 saiu tem-se a nova tabela**

Variável x6 entra na base (maior acréscimo)

Variável x4 sai da base (limita)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
L	0	0	13/3	0	0	-2/3	4900
x2	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
x4	0	0	-7/3	1	0	5/3	350
x5	0	0	-2/3	0	1	1/3	150
x1	1	0	1/3	0	0	1/3	550

Pivô

O Método Simplex: forma tabular

• **Contrução da linha Pivô: divisão da linha pelo valor do pivô para que este fique igual a 1**

***Lin2=Lin2* x 3/5**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
L	0	0	13/3	0	0	-2/3	4900
x2	0	1	1/3	0	0	-2/3	100
x4	0	0	-21/15	3/5	0	1	210
x5	0	0	-2/3	0	1	1/3	150
x1	1	0	1/3	0	0	1/3	550

O Método Simplex: forma tabular

- **Contrução da coluna Pivô: zerar os coeficintes das outras linhas na coluna do elemento pivô**

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Linf=2/3xLin2+Linf	Z	0	0	153/45	2/5	0	0	5040
Lin1=2/3xLin2+Lin1	x2	0	1	-9/15	2/5	0	0	420
	x6	0	0	-21/15	3/5	0	1	210
Lin3=-1/3xLin2+Lin3	x5	0	0	-3/15	-1/5	1	0	80
Lin4=-1/3xLin2+Lin4	x1	1	0	12/15	-1/5	0	0	480

O Método Simplex: forma tabular

- **Como x_6 entrou na base e x_4 saiu tem-se a nova tabela**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
Z	0	0	153/45	2/5	0	0	5040
x2	0	1	-9/15	2/5	0	0	420
x6	0	0	-21/15	3/5	0	1	210
x5	0	0	-3/15	-1/5	1	0	80
x1	1	0	12/15	-1/5	0	0	480

- Note que agora nenhuma variável contribuiria para aumentar o lucro, isto caracteriza a solução ótima.
- Se este mesmo procedimento for delineado e automatizado constituirá um algoritmo para solução, o algoritmo Simplex.

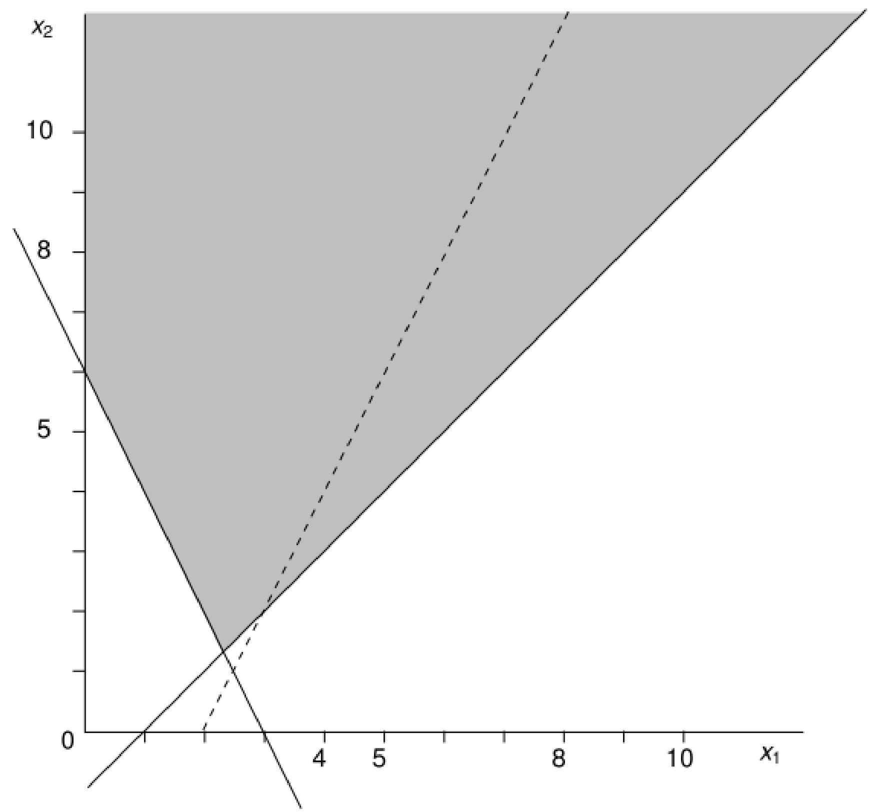
Casos especiais

- Caso de **soluções ótimas múltiplas:**
  - há uma variável não básica com coeficiente 0 na linha da função objetivo no quadro, então essa variável pode entrar na base (saindo outra) sem que o valor da função objetivo seja alterado.
- Caso de **problemas ilimitados:**
  - num passo do algoritmo há uma variável não básica que pode ser aumentada (de zero para um valor positivo) quando essa variável entra na base, não há nenhuma restrição que a limite em problemas de maximização: uma variável tem coeficiente negativo na linha da função objetivo, e coeficientes não positivos em todas as restrições.

Problemas ilimitados

Resolva graficamente:

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Ferramenta interativa do método simplex:

- http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/simplex_intro/index.html

Exercício 1

- Resolver o seguinte PPL usando o método simplex em planilha:

Min $z = x_1 + x_2 - 4x_3$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$x_i \geq 0$, i= 1, 2, 3 e 4.

Exercício 1

- Colocando na forma padrão

Max $-z = - x_1 - x_2 + 4x_3$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 9 \\
x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 2 \\
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 4
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 6$

Tabela Simplex inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-z	1	1	-4	0	0	0	0
	1	2	2	1	0	0	9
	1	1	-1	0	1	0	2
	-1	1	1	0	0	1	4

Exercício 2

- Resolver o seguinte PPL usando o método simplex em planilha:

Max $z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15 \\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 4$

Exercício 2

- Forma Padrão

$$\text{Max } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15\\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 &= 120\\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 &= 100
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 7$

Exercício 3

- Resolver o seguinte PPL usando o método simplex em planilha:

$$\text{Max } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 3$

Exercício 3

- Forma Padrão

Max $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + x_5 &= 20 \\
2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + x_6 &= 8 \\
x_2 + x_7 &= 5
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, 7$