

MATEMÁTICA DISCRETA LÓGICA FORMAL E GRAFOS

SUMÁRIO

I - Proposições e conectivos lógicos	p.02
Exercícios do capítulo	p.05
II - Operações lógicas.....	p.06
Exercícios do capítulo	p.13
III - Tabela verdade	p.15
Exercícios do capítulo	p.20
IV - Tautologias, contradições e contingências	p.23
Exercícios do capítulo	p.27
V - Implicação e equivalência	p.30
Exercícios do capítulo	p.35
VI - Refutação por redução ao absurdo	p.38
Exercícios do capítulo	p.42
VII - Introdução à Grafos	p.44
Exercícios do capítulo	p.65

Lógica Formal - Capítulo I

Proposições e Conectivos

1. CONCEITO DE PROPOSIÇÕES

Proposição é todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Exemplos de proposições:

- a) *A Lua é um satélite da Terra*
- b) *Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais*
- c) $\pi > 2$

A lógica matemática tem como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios:

- 1) **PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO:** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- 2) **PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO:** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Em virtude deste princípio, diz-se que a Lógica Matemática é uma Lógica bivalente. Por exemplo, as três proposições acima são todas verdadeiras, mas são falsas as três proposições abaixo:

- a) Cristóvão Colombo descobriu o Brasil
- b) Camões escreveu A Odisseia
- c) O número π é racional

Assim, as proposições são expressões a respeito das quais tem sentido dizer que são verdadeiras ou falsas.

2. VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES.

Chama-se valor lógico de uma proposição a **verdade** se a proposição é verdadeira e a **falsidade** se a proposição é falsa.

Os valores lógicos **verdade** e **falsidade** são abreviados com V e F, respectivamente. Dessa forma, os princípios da **não contradição** e do **terceiro excluído** afirmam que:

“Toda proposição tem um, e um só, dos valores V, F”.

Consideremos os exemplos de proposições:

- a) O óleo é menos denso que a água
- b) A Terra é o centro do sistema solar

A proposição **a** tem como valor lógico a **verdade (V)** e a proposição **b** tem como valor lógico a **falsidade (F)**.

3. TIPOS DE PROPOSIÇÕES.

As proposições podem ser classificadas em **simples** ou **atômicas** e **compostas** ou **moleculares**.

A proposição **simples** ou **atômica** é aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

Normalmente são designadas pelas letras minúsculas **p, q, r, s, ...**, chamadas letras proposicionais.

Vejamos os exemplos abaixo de proposições atômicas:

p : Cláudio é careca

q : Afonso é alto

r : O número 25 é quadrado perfeito

A proposição composta ou molecular é aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

Normalmente são designadas pelas letras maiúsculas **P, Q, R, S, ...**, também chamadas de letras proposicionais.

Vejamos os exemplos abaixo de proposições moleculares:

P : Cláudio é careca **e** Afonso é alto

Q : Cláudio é careca **ou** Afonso é alto

R : **Se** 25 é ímpar, **então** 24 é par

4. CONECTIVOS

Conectivos são palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Vejamos os seguintes exemplos de proposições compostas:

P : O número 6 é par **e** o numero 8 é cubo perfeito

Q : O triângulo ABC é escaleno **ou** isósceles

R : **Não** está frio

S : **Se** Diogo é engenheiro, **então** sabe Matemática

T : O triângulo ABC é equilátero **se, e somente se**, é equiângulo

São conectivos usuais em Lógica Matemática as palavras:

“e”, “ou”, “não”, “se ... então ... “ e “... se, e somente se, ... “

Exercícios do Capítulo I

Valor lógico

1. Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

- a) O número 17 é primo (V)
- b) Fortaleza é a capital da Bahia (F)
- c) Tiradentes morreu afogado (F)
- d) $(6 + 9)^2 = 6^2 + 9^2$ (V)
- e) $-1 < -8$ (F)
- f) 0,131313 ... é uma dízima periódica simples (V)
- g) Um triângulo escaleno tem todos os lado iguais (F)
- h) Todo número divisível por 5 termina por 5 (F)
- i) $\sqrt{81} = 9$ (V)
- j) O produto de dois números ímpares é um numero ímpar (F)

Lógica Formal - Capítulo II

Operações Lógicas sobre Proposições

Quando pensamos, realizamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. As operações lógicas obedecem a regras de cálculo, denominado cálculo proposicional, semelhante ao da matemática sobre números. Iremos estudar a seguir as operações lógicas fundamentais.

1. CONJUNÇÃO

Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “ p e q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando as duas proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a conjunção de duas proposições p e q , utilizamos a seguinte notação: “ $p \wedge q$ ”, que lê-se “ p e q ”.

Vejamos a seguir a tabela verdade da conjunção “ $p \wedge q$ ”:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vejamos alguns exemplos:

1º - “O Brasil é um país rico e grande”.

p - O Brasil é rico (V)

q - O Brasil é grande (V)

$p \wedge q$: O Brasil é um país rico e grande (V)

$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$

2º - “O céu é azul e a terra é plana”

p - O céu é azul (V)

q - A terra é plana (F)

$p \wedge q$: O céu é azul e a terra é plana (F) $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = F$

3º - “Luiz é médico e artista”

p - Luiz é médico (F)

q - Luiz é artista (V)

$p \wedge q$: Luiz é médico e artista (F) $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$

4º - “O presidente é honesto e inteligente”

p - O presidente é honesto (F)

q - O presidente é inteligente (F)

$p \wedge q$: O presidente é honesto e inteligente (F) $V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$

2. DISJUNÇÃO

Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p e q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Para representar simbolicamente a disjunção de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: “ $p \vee q$ ”, que lê-se “p ou q”.

Vejamos a seguir a tabela verdade da disjunção “ $p \vee q$ ”:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Vejamos alguns exemplos:

1º - “Rosseau é francês ou filósofo”

p - Rousseau é francês (V)

q - Rousseau é filósofo (V)

$p \vee q$: Rousseau é francês ou filósofo (V) $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$

2º - “Camões escreveu Os Lusíadas ou Odisseia”

p - Camões escreveu Os Lusíadas (V)

q - Camões escreveu Odisseia (F)

$p \vee q$: Camões escreveu Os Lusíadas ou Odisseia (V) $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$

3º - “O sol gira em torno da terra ou a terra gira em torno do sol”

p - O sol gira em torno da terra (F)

q - A terra gira em torno do sol (V)

$p \vee q$: O sol gira em torno da terra ou a terra gira em torno do sol (V) $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$

4º - “Roma é a capital da Rússia ou dos Estados Unidos da America”

p - Roma é a capital da Rússia (F)

q - Roma é a capital dos Estados Unidos da America (F)

$p \vee q$: Roma é a capital da Rússia ou dos Estados Unidos da America (F) $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$

3. NEGAÇÃO

Chama-se a negação de uma proposição p a proposição representada por “não p ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e falsidade (F) quando p é verdadeira. Desta forma, “não p ” tem sempre o valor oposto de p .

Para representar simbolicamente a negação de p , utilizamos as seguintes notações: “ $\sim p$ ” ou “ $\neg p$ ”, que lê-se “não p ”. As duas formas são válidas.

Vejamos a seguir a tabela verdade da negação de p :

p	$\sim p$
V	F
F	V

Vejamos alguns exemplos:

- a) p : O Sol é uma estrela
 $\sim p$: O Sol não é uma estrela

- b) p : Otávio é cientista
 $\sim p$: Não é verdade que Otávio é cientista

- c) p : Renata é confusa
 $\sim p$: É falso que Renata é confusa

4. CONDICIONAL - IMPLICAÇÃO

Chama-se proposição condicional ou implicação uma proposição representada por “se p então q ”, cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeiro e q é falso e a verdade (V) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a implicação de duas proposições p e q , utilizamos a seguinte notação: " $p \rightarrow q$ ", que também se lê das seguintes maneiras.

(i) p é condição suficiente para q

(ii) q é condição necessária para p

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Vejamos a seguir a tabela verdade da implicação " $p \rightarrow q$ ":

Vejamos alguns exemplos:

a) "Se a média de Ana é maior que sete, então Ana será aprovada"

p : "Se a média de Ana é maior que sete" (V)

q : "então Ana será aprovada" (V)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$

b) "Se a média de Ana é maior que sete, então Ana não será aprovada"

p : "Se a média de Ana é maior que sete" (V)

q : "então Ana não será aprovada" (F)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

c) "Se a média de Ana é menor que sete, então Ana não será aprovada"

p : "Se a média de Ana é menor que sete" (F)

q : "então Ana não será aprovada" (V)

$$p \rightarrow q : V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$$

d) “Se a média de Ana é menor que sete, então Ana será aprovada”

p : “Se a média de Ana é menor que sete” (F)

q : “então Ana será aprovada” (F)

$$p \rightarrow q : V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = F$$

5. BICONDICIONAL - BI-IMPLICAÇÃO

Chama-se proposição bicondicional ou bi-implicação, uma proposição representada por “p se, e somente se, q”, cujo o valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a bi-implicação de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: “ $p \leftrightarrow q$ ”, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p

Vejamos a seguir a tabela verdade para a bicondicional “ $p \leftrightarrow q$ ”:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vejamos alguns exemplos:

a) “Frida será uma artista renomada se e somente se suas obras forem famosas”

(p) “Frida será uma artista renomada” (V)

(q) “se suas obras forem famosas” (V)

$$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$$

b) “Frida será uma artista renomada se e somente se suas obras forem desconhecidas”

(p) “Frida será uma artista renomada” (V)

(q) “se suas obras forem desconhecidas” (F)

$$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$$

c) “Frida será uma artista anônima se e somente se suas obras forem famosas”

(p) “Frida será uma artista anônima” (F)

(q) “se suas obras forem famosas” (V)

$$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$$

d) “Frida será uma artista anônima se e somente se suas obras forem desconhecidas”

(p) “Frida será uma artista anônima” (F)

(q) “se suas obras forem desconhecidas” (F)

$$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$$

Exercícios do Capítulo II

Operações Lógicas sobre Proposições OPERAÇÕES

1. Sejam as proposições p : Está frio e q : Está chovendo. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- a) $\sim p$ = Não está frio
- b) $p \wedge q$ = Está frio e está chovendo
- c) $p \vee q$ = Está frio ou está chovendo
- d) $q \leftrightarrow p$ = Está chovendo se, e somente se, está frio
- e) $p \rightarrow \sim q$ = Se está frio, então não está chovendo
- f) $p \vee \sim q$ = Está frio ou não está chovendo
- g) $\sim p \wedge \sim q$ = Não está frio e não está chovendo
- h) $p \leftrightarrow \sim q$ = Está frio se, e somente se, não está chovendo
- i) $p \wedge \sim q \rightarrow p$ = Se está frio e não está chovendo, então está frio

4. Sejam as proposições p : João é gaúcho e q : Jaime é paulista. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

- a) $\sim (p \wedge \sim q)$ = Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista
- b) $\sim \sim p$ = Não é verdade que João não é gaúcho
- c) $\sim (\sim p \vee \sim q)$ = Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista
- d) $p \rightarrow \sim q$ = Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista
- e) $\sim p \leftrightarrow \sim p$ = João não é gaúcho se, e somente se, Jaime não é paulista
- f) $\sim (\sim q \rightarrow p)$ = Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho

5. Sejam as proposições p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- a) Marcos é alto e elegante = $p \wedge q$
- b) Marcos é alto, mas não é elegante = $p \wedge \sim q$
- c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante = $\sim (\sim p \vee q)$
- d) Marcos não é nem alto e nem elegante = $\sim p \wedge \sim q$
- e) Marcos é alto ou é baixo e elegante = $p \vee (\sim p \wedge q)$
- f) É false que Marcos é baixo ou que é elegante = $\sim (\sim p \vee \sim q)$

6. Sejam as proposições p: Sueli é rica e q: Sueli é feliz. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

- a) Sueli é pobre, mas feliz = $\sim p \wedge q$
- b) Sueli é rica ou infeliz = $p \vee \sim q$
- c) Sueli é pobre e infeliz = $\sim p \wedge \sim q$
- d) Sueli é pobre ou rica, mas é infeliz = $(\sim p \vee q) \wedge \sim q$

Lógica Formal - Capítulo III

Construção de Tabelas-Verdade

1. TABELA VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dadas várias proposições simples p, q, r, \dots , podemos combiná-las pelos conectivos lógicos:

$$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

e construir proposições compostas, tais como:

$$P(p, q) = \sim p \vee (p \rightarrow q)$$

$$Q(p, q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$$

$$R(p, q, r) = (p \rightarrow \sim q \vee r) \wedge (q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$$

Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais:

$$\sim p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$$

Podemos construir a tabela-verdade de qualquer proposição composta dada. A tabela-verdade mostrará os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), de acordo com a combinação dos valores lógicos das proposições simples componentes.

2. NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

O número de linhas em uma tabela verdade de uma proposição composta dependerá diretamente do número proposições simples que a compõem, de acordo com o seguinte teorema:

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

3. CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Para a construção prática da tabela-verdade de uma proposição composta devemos primeiro contar o número de proposições simples que a ela possui. Se a proposição composta possui n proposições simples: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, então a tabela-verdade irá conter 2^n linhas. Posto isto, à 1ª proposição simples p_1 atribuem-se $2^n / 2 = 2^{n-1}$ valores **V** seguidos de 2^{n-1} valores **F**; à 2ª proposição simples p_2 atribuem-se $2^n / 4 = 2^{n-2}$ valores **V**, seguidos de 2^{n-2} valores **F**, seguidos de 2^{n-2} valores **V**, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores **F**; e assim por diante. De modo genérico, a **k-ésima** proposição simples p_k ($k \leq n$) atribuem-se alternadamente $2^n / 2^k = 2^{n-k}$ valores **V** seguidos de igual número de valores **F**.

Vejamos o exemplo a seguir:

1) Construção da tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim (p \wedge \sim q)$$

Primeiro passo: Forma-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segundo passo: Forma-se a coluna para $\sim q$:

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Terceiro passo: Forma-se a coluna para $p \wedge \sim q$:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Quarto passo: Forma-se a coluna para $\sim (p \wedge \sim q)$:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Para a construção das tabelas-verdade é imprescindível ter em mente os resultados das possíveis combinações de valores lógicos de cada conectivo lógico, como o conectivo de negação (\sim), conjunção (\wedge), disjunção (\vee), condicional (\rightarrow) e bicondicional (\leftrightarrow).

Vejamos o mais um exemplo:

2) Construção da tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$$

Primeiro passo: Forma-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segunda passo: Forma-se a coluna para $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Terceiro passo: Forma-se a coluna para $q \leftrightarrow p$:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Quarto passo: Forma-se a coluna para $\sim(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F

Quinto passo: Forma-se a coluna para $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Exercícios do Capítulo III

Construção da Tabela-Verdade

1. Construa as tabelas-verdade das seguintes proposições: \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

a) $\sim (p \vee \sim q)$

b) $\sim (p \rightarrow \sim q)$

c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$

f) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$

g) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

h) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$

Respostas:

a) $\sim (p \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

b) $\sim (p \rightarrow \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim (p \rightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$\sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

f) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V

g) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$q \rightarrow p$	$(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

h) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Lógica Formal - Capítulo IV

Tautologias, Contradições e Contingências

1. TAUTOLOGIA

Uma tautologia é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre verdade (V), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Na coluna de saída da tabela-verdade de uma tautologia, ocorre sempre o valor lógico V (verdade). Assim, se $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é uma tautologia, seu valor lógico é V independente dos valores lógicos das proposições simples p_1, p_2, \dots, p_n .

Uma tautologia é também chamada de proposição tautológica ou proposição logicamente verdadeira.

A afirmação “hoje é sábado ou não é sábado” é um exemplo de tautologia. Pois não há dúvidas de que seja verdadeira sempre, não importando qual dia seja hoje.

Vejamos o exemplo a seguir:

a) A proposição $\sim (p \wedge \sim p)$ é uma tautologia, como pode ser visto em sua tabela-verdade.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Observe que, na última coluna que chamamos de coluna de saída da tabela verdade de $\sim (p \wedge \sim p)$, só há o valor lógico V (verdade). Esse exemplo ilustra o princípio da não-contradição, apresentado anteriormente, e significa que a afirmação “uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa” é verdadeira.

b) A coluna de saída da tabela-verdade de $p \vee \sim p$ só apresenta valor lógico V (verdade).

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Logo, $p \vee \sim p$ é uma tautologia. Veja que esse exemplo ilustra o **princípio do terceiro excluído**, o qual corresponde dizer que a afirmação “uma proposição ou é verdadeira ou é falsa” é necessariamente verdadeira.

2. CONTRADIÇÃO

Uma contradição é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre falsidade (F), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Uma contradição também é chamada proposição contraválida ou proposição logicamente falsa.

Na coluna de saída da tabela verdade de uma contradição, ocorre sempre o valor lógico F (falsidade). Assim, o valor lógico de uma contradição $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é F, independente dos valores lógicos das proposições simples $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

A afirmação “hoje é sábado e hoje não é sábado” é contraválida, pois seu valor lógico é evidentemente falso, não importando qual dia seja hoje.

Vejamos alguns exemplos a seguir:

a) a proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição, conforme se vê por sua tabela-verdade.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Como pode-se notar, a coluna de saída da tabela-verdade de $p \wedge \sim p$ só encerra o valor lógico (falsidade). Esse exemplo ilustra o **princípio da não contradição**,

segundo o qual a afirmação “uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa” é necessariamente verdadeira.

b) A proposição $p \leftrightarrow \sim p$ é contraválida. Vejamos sua tabela verdade:

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	F

Note que a última coluna da tabela-verdade de $p \leftrightarrow \sim p$ só apresenta o valor lógico F (falsidade).

Um princípio bem útil na determinação de tautologias e contradições é o **Princípio da Substituição**, o que nos diz o seguinte:

“Seja $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ uma tautologia (contradição) qualquer. Se substituirmos as proposições $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ por outras proposições quaisquer (simples ou compostas) q_1, q_2, \dots, q_n , então a nova proposição $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$ que se obtém também é uma tautologia (contradição)”.

A demonstração do Princípio da Substituição é imediata e segue do fato que o valor lógico de uma tautologia é sempre V (verdade) e de uma contradição é sempre F (falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos de suas proposições componentes, ou seja, ser uma tautologia ou uma contradição depende apenas de como as componentes estão relacionadas, não dependendo de serem estas componentes verdadeiras ou falsas.

Como aplicação do Princípio da Substituição, a proposição $(r \rightarrow \sim s) \vee \sim (r \rightarrow \sim s)$ é tautológica, pois é obtida da proposição, $p \vee \sim p$ do exemplo **b)** da seção de Tautologia, por substituição da proposição p por $r \rightarrow \sim s$. A Inserção de parêntesis é para garantir que a proposição obtida continue sendo a disjunção de uma proposição com sua negação.

3. CONTINGÊNCIAS

Uma contingência é uma proposição composta em cuja tabela-verdade ocorrem, na coluna de saída, os valores lógicos V (verdade) e F (falsidade).

Uma contingência é também chamada proposição contingente ou proposição indeterminada.

Na ultima coluna da tabela-verdade de uma contingência, devem ocorrer os valores lógicos V e F, cada um pelo menos uma vez.

Vejamos o exemplo a seguir:

a) A proposição $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ é uma contingência, conforme pode ser visto em sua tabela-verdade.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Perceba que a última coluna da tabela-verdade de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ apresenta valores lógicos V (verdade) e F (falsidade).

Exercícios do Capítulo IV

Tautologias, Contradições e Contingências \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

1. Determine se as seguintes proposições são tautológicas, contradições ou contingências utilizando a tabela-verdade:

a) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

R: Tautologia

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

b) $p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$

R: Tautologia

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge r$	$\sim q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

c) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim q$

R: Contradição

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

d) $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

R: Contradição

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

e) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$

R: Contingência

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \wedge r$	$q \vee \sim r$	$\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

f) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$

R: Contingência

p	q	r	$\sim r$	$p \rightarrow r$	$q \vee \sim r$	$p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Lógica Formal - Capítulo V

Implicação lógica e Equivalência lógica

1. PROPOSIÇÕES INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Para uma melhor compreensão do assunto, é necessário entendermos algumas definições introdutórias. Vejamos sobre proposições independentes e dependentes.

Duas proposições são ditas **independentes** quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem todas as quatro alternativas VV, VF, FV e FF. Do contrário, ou seja, quando nas tabelas-verdade de duas proposições não ocorre pelo menos uma das quatro alternativas VV, VF, FV e FF, dizemos que elas são **dependentes**. Quando duas proposições são dependentes, dizemos ainda que existe uma relação entre elas.

Como podemos ver na tabela-verdade a seguir, as proposições $\sim p$ e $p \leftrightarrow q$ são dependentes, pois ocorrem as quatro alternativas: FV na primeira linha, FF na segunda linha, VF na terceira linha e VV na quarta linha.

p	q	$\sim p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

As proposições p e $q \rightarrow p$ são dependentes, como pode ser visto de suas tabelas verdades.

É possível perceber que ocorre na VV nas linhas 1 e 2, FV na linha 4 e FF na linha 3, mas não ocorres a alternativa VF. Portanto, existe uma relação entre as proposições p e $q \rightarrow p$.

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Uma relação entre proposições em que não ocorre exatamente uma das alternativas VV, VF, FV, FF é dita uma **relação simples**, enquanto que uma relação em que não ocorrem exatamente duas das alternativas é uma **relação composta**.

2. IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Dizemos que uma proposição P implica (ou implica logicamente) uma proposição Q, e representamos $P \Rightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdade, quando, em suas tabelas-verdade, não ocorre VF (nessa ordem) numa mesma linha.

Outras formas equivalente de dizer que P implica Q ($P \Rightarrow Q$) são:

- $P \Rightarrow Q$ quando Q é verdadeira (V) todas as vezes que P for verdadeira (V).
- $P \Rightarrow Q$ quando não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos, respectivamente, V e F.

Vejamos o exemplo a seguir, das tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e de $p \leftrightarrow q$. Note que, sempre que $p \wedge q$ é verdadeira (V), $p \leftrightarrow q$ é também verdadeira:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Portanto, não ocorre a alternativa VF (nessa ordem) nas tabelas-verdade de $p \wedge q$ e $p \leftrightarrow q$. Logo, $p \wedge q$ implica $p \leftrightarrow q$ ou, simbolicamente, $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

O teorema (1) seguinte diz que toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

“A proposição P implica a proposição Q, isto é, $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia”.

Portanto, toda implicação corresponde a uma condicional tautológica, e vice-versa. Mediante o Princípio da Substituição, visto anteriormente, uma consequência do Teorema 1 é o seguinte corolário:

Sejam p_1, p_2, \dots, p_n proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então temos também $P(p'_1, p'_2, \dots, p'_n) \Rightarrow Q(p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas p'_1, p'_2, \dots, p'_n

O Corolário garante que, ao substituirmos as proposições simples componentes em uma implicação por outras proposições quaisquer, ainda teremos uma implicação.

Podemos notar facilmente que a relação de implicação goza das seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** $P \Rightarrow P$

2. **Transitiva:** Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$

3. EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Dizemos que uma proposição P é equivalente (ou logicamente equivalente) a uma proposição Q, e representaremos por $P \Leftrightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdade, não ocorrem VF e nem FV numa mesma linha.

Outra forma de dizer que P é equivalente a Q ($P \Leftrightarrow Q$) é

- $P \Leftrightarrow Q$ Quando as tabelas-verdade de P e Q são idênticas.

Vejamos o exemplo a seguir, onde as proposições $\sim\sim p$ e p são equivalentes, desse modo, toda proposição é equivalente à sua dupla negação. De fato, basta verificar que as tabelas-verdade de $\sim\sim p$ e de p são idênticas:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

Portanto, simbolicamente, temos $\sim\sim p \Leftrightarrow p$, chamada **Regra da Dupla Negação**.

Vejamos mais um exemplo, onde as proposições $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são equivalentes, ou seja, uma condicional é equivalente à disjunção da negação do antecedente com o seu consequente. Simbolicamente, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Esse fato pode ser comprovado verificando-se que as tabelas-verdade de $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são idênticas.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

O teorema (2) seguinte estabelece uma relação entre a equivalência lógica e certa proposição bicondicional.

“A proposição P equivale à proposição Q, isto é, $P \Leftrightarrow Q$ se, e somente se, a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia.”

Portanto, toda equivalência corresponde a uma bicondicional tautológica, e vice-versa. Mediante o Princípio da Substituição, visto anteriormente, uma consequência do Teorema 2 é o seguinte corolário:

Sejam p_1, p_2, \dots, p_n proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \dots, p_n) \Leftrightarrow Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$, então temos também $P(p'_1, p'_2, \dots, p'_n) \Leftrightarrow Q(p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas p'_1, p'_2, \dots, p'_n .

Este corolário garante que, ao substituírmos as proposições simples componentes em uma equivalência por outras proposições quaisquer, ainda teremos uma equivalência.

Podemos notar facilmente que a relação de equivalência goza das seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** $P \Leftrightarrow P$
2. **Simétrica:** Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$
3. **Transitiva:** Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Exercícios do Capítulo V

Implicações e Equivalências

1. Usando tabela-verdade, prove que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Portanto, a condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico V. Logo, a proposição $p \wedge q$ implica $p \vee q$ ou, simbolicamente, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

2. Verifique, usando tabela-verdade, se a proposição $p \leftrightarrow \neg q$ implica ou não a proposição $\neg p \rightarrow \neg q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Portanto, a condicional $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ não é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre o valor lógico F. Logo, a proposição $p \leftrightarrow \neg q$ não implica $\neg p \rightarrow \neg q$.

3. Usando tabela-verdade, mostre a equivalência $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$, a qual é chamada Regra de Absorção.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da bicondicional $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Portanto, a bicondicional $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$ é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico V. Logo, as proposições $p \rightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, ocorre $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$.

4. Verifique, usando tabela-verdade, que a proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente à conjunção das duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, ou seja, mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são equivalentes.

Solução:

Vamos construir as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Portanto, as tabelas-verdade de $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são idênticas.

Logo, as proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são equivalentes ou,

simbolicamente, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Lógica Formal - Capítulo 6

Refutação

1. REDUÇÃO AO ABSURDO

Método de Refutação é baseado em uma técnica de prova, chamada de prova por redução ao absurdo, que consiste no seguinte procedimento:

- Admite-se inicialmente que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa em alguma atribuição de valores de verdade para as letras sentenciais;
- O argumento será válido se, em qualquer tentativa de explicitar essa tal atribuição um absurdo for gerado, isto é, se uma mesma sentença assumir tanto valor V como valor F

Vejamos o exemplo a seguir:

- *Quando Diego completar 18 anos, ele terá que se alistar nas forças armadas.*
- *Se Diego se alistar nas forças armadas, ele terá de mudar de cidade.*
- *Logo, Diego completa 18 anos somente se mudar de cidade.*

A conclusão pode ser reescrita da seguinte forma:

- *Se Diego completar 18 anos, então Diego deverá mudar de cidade.*

Então temos as seguintes sentenças atômicas:

- ***p*** : Diego completa 18 anos.
- ***q*** : Diego terá que se alistar nas forças armadas.
- ***r*** : Diego deverá mudar de cidade.

Ao representarmos de forma simbólica, os argumentos ficam assim:

Premissas:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}$$

Conclusão:

$$p \rightarrow r$$

Então, primeiramente devemos assumir que as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa.

Premissas:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ V} \\ q \rightarrow r \text{ V} \end{array}$$

Conclusão:

$$p \rightarrow r \text{ F}$$

Então agora, devemos analisar cada uma das sentenças atômicas. Assim, para que a conclusão seja **FALSA (F)**, é necessário que **p** seja **VERDADEIRO (V)** e **q** seja **FALSO (F)**, seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, **V \rightarrow F = F**:

Premissas:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \text{ V} \\ q \rightarrow r \text{ V} \end{array}$$

Conclusão:

$$p^{\text{V}} \rightarrow r^{\text{F}} \text{ F}$$

Assumindo-se que **r** é **FALSO (F)**, então na proposição **q → r** é necessário que **q** também seja **FALSO (F)**, pois é a única forma para a proposição **q → r** resultar em **VERDADEIRO (V)**, seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, **F → F = V**:

Premissas:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \quad V \\ q \rightarrow r \quad F \quad V \end{array}$$

Conclusão:

$$p \rightarrow r \quad F \quad F$$

Assumindo-se que **q** é **FALSO (F)**, então na proposição **p → q** é necessário que **p** também seja **FALSO (F)**, pois é a única forma para a proposição **p → q** resultar em **VERDADEIRO (V)**, seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, **F → F = V**, então é exatamente aí que encontramos nossa prova por **redução ao absurdo**, pois a implicação **p → q** na verdade resulta em **FALSO (F)**, **V → F = F**:

Premissas:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \quad F \quad V \\ q \rightarrow r \quad F \quad V \end{array}$$

Conclusão:

$$p \rightarrow r \quad F \quad F$$

Devemos nos recordar do princípio da não contradição:

***“Princípio na Não-contradição:** uma sentença não pode ser verdadeira e falsa em uma mesma atribuição de valores para as letras sentenciais”*

Não podendo existir uma atribuição de valores para as letras sentenciais na qual as **premissas são verdadeiras** e a **conclusão é falsa**. Portanto, o **argumento é válido**.

Exercícios do Capítulo 6

Refutação por redução ao absurdo

1. Determine se as seguintes formas de argumentos são válidas ou inválidas utilizando o método de refutação por **redução ao absurdo**:

a)

$$\frac{r \rightarrow p \vee q \quad \neg p}{r \rightarrow q}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

b)

$$\frac{p \wedge q \rightarrow r \quad p \wedge \neg r}{\neg q}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

c)

$$\frac{p \vee q \rightarrow t \quad \neg q \rightarrow r}{(p \wedge \neg r) \rightarrow t}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

d)

$$\frac{\begin{array}{c} r \\ p \rightarrow \neg (q \vee s) \end{array}}{\neg p \vee (\neg q \wedge r)}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

e)

$$\frac{\begin{array}{c} \neg t \rightarrow r \\ q \wedge t \rightarrow \neg p \end{array}}{p \rightarrow q \wedge r}$$

R: Inválido, pois não ocorreu um absurdo.

f)

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \vee s \\ \neg r \end{array}}{q \rightarrow s}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

Grafos - Capítulo VII

Teoria dos Grafos

A Teoria dos Grafos é uma área bastante recente da Matemática e uma das poucas que podemos datar exatamente como e quando começou. O conhecimento sobre grafos é relevante, dentre outras áreas, para a Ciência da Computação, Engenharia, Indústria e para estudar tópicos mais avançados na Matemática Discreta.

Nesse capítulo veremos:

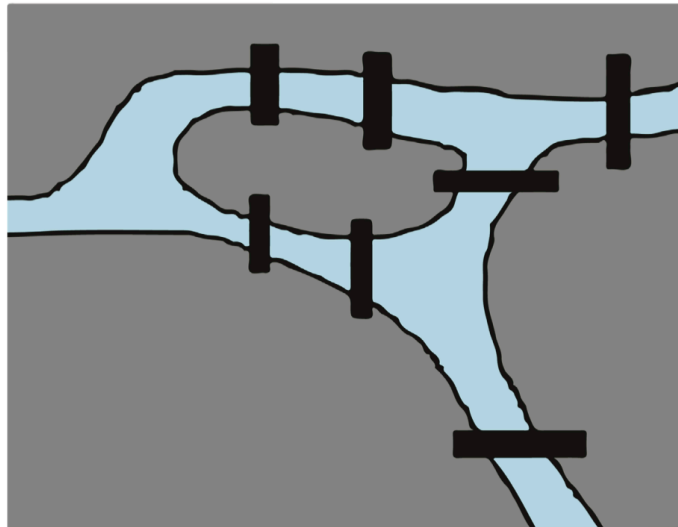
- O problema que motivou a criação da Teoria dos Grafos: as pontes de Königsberg.
- A definição e os principais elementos de um grafo.
- A classificação de um grafo quanto à conexidade e à existência de ciclos.
- Alguns problemas em que a teoria dos grafos se aplica.

1. As pontes de Königsberg

Veremos agora um problema que levou a criação da Teoria dos Grafos, esse problema surgiu na cidade de Kaliningrado, hoje na Rússia, que, durante muito tempo, se chamou Königsberg. Nasceram em Königsberg os grandes matemáticos Christian Goldbach, que contribuiu para a Teoria dos Números no século 18; e David Hilbert, que atuou em diversas áreas da Matemática nos séculos 19 e 20, mas é principalmente por causa de algumas pontes e de um matemático suíço que Königsberg ganhou relevância na história da Matemática. A cidade cresceu às margens do rio Prególia e, na sua parte central, possui duas ilhas que eram ligadas às margens por algumas pontes.

Vejamos, na Figura 1, essas pontes que são sinalizadas pelos retângulos escuros.

Figura 1 - Esboço do mapa da região central de Königsberg



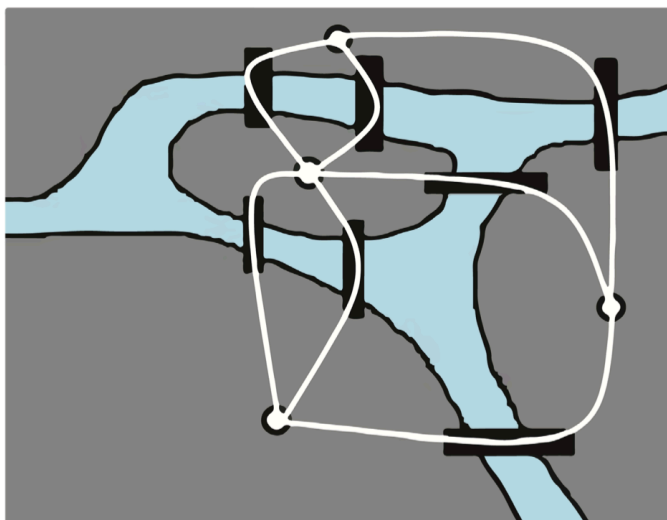
Fonte: DEaD | IFCE.

Por muito tempo, discutia-se a possibilidade de passear pela cidade passando por todas as sete pontes uma única vez. Chegar a uma ilha, ou a uma margem, por um meio que não fosse uma das pontes, não era aceitável como parte do caminho, assim como também era exigido que cada ponte fosse percorrida totalmente, isto é, ao se entrar em uma delas, só se poderia sair pela outra extremidade. O passeio pode começar em qualquer uma das margens, ou das ilhas, e não precisa terminar onde começou. Por mais que tentassem, os moradores da cidade não conseguiam resolver o problema: sempre se viam na necessidade de atravessar uma ponte repetidamente, ou ficava faltando uma ponte para ser cruzada, mas que não dava para acessar de onde se estava. Isso fez com que muitos acreditassem que o problema fosse impossível, mas não se pode considerar que um problema é impossível só porque não foi resolvido depois de muitas tentativas, não é? Quem colocou uma pedra na situação toda, provando que, de fato, um passeio com as condições pedidas não existe, foi o matemático suíço do século 18 Leonhard Euler. Vejamos como isso foi feito.

Para começar, Euler observou que o percurso realizado dentro de cada ilha ou na margem é irrelevante, a parte significativa de cada rota é a sequência com que as pontes são cruzadas. Com isso, ele reformulou o problema eliminando todas as partes desimportantes, isto é, mantendo apenas uma lista das margens e ilhas e as pontes que as ligam. Como o tamanho da ilha ou da margem não desempenha nenhum papel, podemos representar cada uma dessas porções de terra por um ponto.

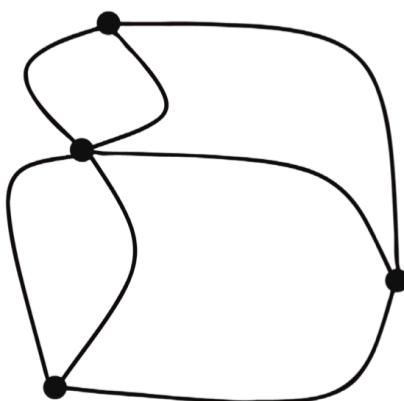
Assim, cada ponte pode se trocada por uma linha ligando dois desses pontos. Na Figura 2, temos, essencialmente, todos os caminhos a serem percorridos (representados pelas linhas brancas).

Figura 2 – Esquema simplificado dos caminhos pelas pontes de Königsberg



Fonte: DEaD | IFCE.

Uma vez feito isso, o rio, as ilhas, as margens, ou qualquer outra coisa da cidade, se tornam dispensáveis. Dessa forma, podemos considerar apenas a Figura 3 para pensar no problema das pontes de Königsberg.



Fonte: DEaD | IFCE.

Assim, ficamos apenas com o que é significativo. Perceba que cada ponto representa uma porção de terra e cada linha ligando esses dois pontos representa uma ponte, certo? A quantidade de conexões entre dois desses pontos é que é relevante, de modo que poderíamos traçar linhas com outras formas ou posicionar os pontos em outras partes do plano, bem como colocar uma linha que liga dois pontos em outra posição (abaixo ou acima da posição real da ponte).

A próxima observação de Euler sobre os passeios do problema foi a de que, ao se chegar a um dos pontos por uma ponte, só se pode sair desse ponto por uma ponte, de modo que, excetuando-se os pontos inicial e final do passeio, para todos os pontos, a quantidade de vezes que se chega ao ponto é igual à quantidade de vezes que se sai. Por isso, para cada ponto intermediário do passeio, o número de pontes que o toca deve ser par, sendo metade delas as pontes pelas quais se chega ao ponto e igual quantidade de pontes pelas quais se deve sair dele. Dessa forma, a quantidade de linhas, saindo de todos os pontos, exceto eventualmente dois, deve ser par. Porém, de todos os pontos do esquema sai uma quantidade ímpar de linhas (um deles tem cinco pontes e os outros três têm 3 cada um). Assim, teríamos que todos os quatro pontos devem ser começo ou final do passeio, o que é uma contradição e, portanto, o problema das pontes de Königsberg não possui solução.

A solução engenhosa de Euler para esse problema deu origem à Teoria dos Grafos, que é como chamaremos cada um dos esquemas simplificados com pontos e linhas ligando-os sob certas condições.

Note que os números, assim como os grafos, são uma maneira abstrata de tratar um problema com o que efetivamente importa. A mesma abordagem para resolver o problema das pontes poderia ser empregada se, em vez de margens e ilhas, tivéssemos quatro cidades e, no lugar das pontes, fossem rodovias ligando-as, ou se, em vez das ilhas, tivéssemos estações de metrô e linhas ligando essas estações, ou átomos e ligações entre esses átomos, certo? Em essência, a situação é a mesma.

2. Grafos e seus principais elementos

No tópico anterior, vimos que Euler simplificou o problema das pontes de Königsberg, representando cada porção de terra por um ponto e cada ponte por uma linha ligando esses pontos. A ideia central foi perceber que o importante era se havia ou não uma ligação entre dois pontos e quantas eram as linhas que saíam de cada ponto. Mais geralmente, cada ponto será chamado de vértice e cada linha ligando dois vértices será chamada de aresta. Uma ideia fundamental aqui é que a forma da linha,

de fato, é irrelevante. O que devemos observar, estimado(a) aluno(a), é apenas se há uma linha ligando dois pontos dados. Assim, para formar um esquema como o das pontes de Königsberg, precisamos apenas elencar os pontos que serão os vértices e listar quais deles são ligados entre si. Na situação das pontes, havia mais de uma linha ligando dois pontos, mas não vamos considerar essa possibilidade inicialmente, isto é, consideraremos que entre dois pontos há no máximo uma linha, certo? Um esquema desses será chamado de grafo e consistirá, portanto, de alguns pontos e uma lista de quais deles são ligados entre si. Neste tópico 2, veremos a definição de grafo e seus principais componentes.

Sendo V um conjunto não vazio, uma aresta sobre V é simplesmente um conjunto com exatamente dois elementos de V , os quais são chamados de vértices dessa aresta. Por exemplo, se $V = \{1, 2, 3\}$, temos que $\{2, 3\}$ é uma aresta de vértices 2 e 3. O conjunto de todas as arestas de V será denotado por $V^{(2)}$. Assim, para $V = \{1, 2, 3\}$, temos $V^{(2)} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Um conjunto de arestas de V é, portanto, qualquer subconjunto de $V^{(2)}$.

A definição de grafos entende-se por:

“ Um conjunto, não vazio e finito, de vértices V e de um conjunto de arestas A com vértices em V . Nesse caso, escrevemos $G = (V, A)$. ”

Exemplo 1

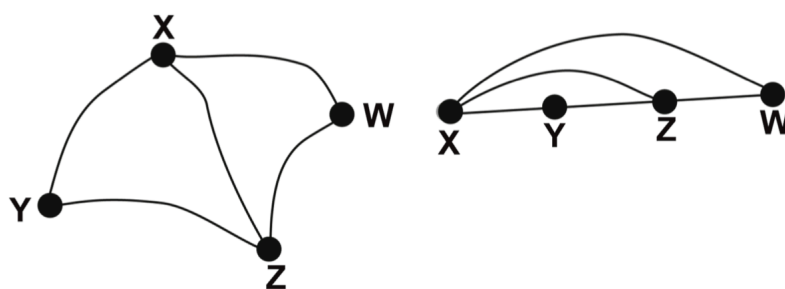
Considerando $V = \{X, Y, Z, W\}$ e $A = \{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{X, W\}, \{Y, Z\}, \{Z, W\}\}$, temos que $G_1 = (V, A)$, primeiro grafo que estamos exemplificando, que possui, nesse caso, quatro vértices e cinco arestas.

Exemplo 2

Se considerarmos V como o conjunto dos estados da Região Nordeste do Brasil e $A = \{\{x, y\}; x \text{ faz divisa com } y\}$, temos que, no grafo $G_2 = (V, A)$, existem, por exemplo, as arestas $\{\text{Ceará, Pernambuco}\}$ e $\{\text{Sergipe, Alagoas}\}$, mas $\{\text{Ceará, Alagoas}\}$ não é uma aresta de A .

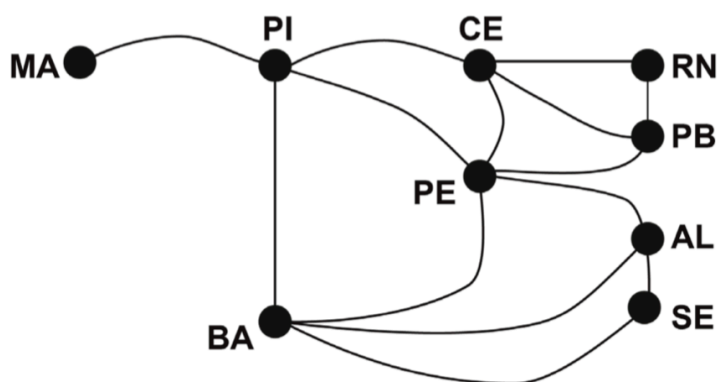
Observe que a definição de grafo apenas lista alguns elementos para serem vértices e alguns conjuntos com dois elementos para serem arestas. Quando os vértices a e b são tais que existe a aresta $\{a, b\}$ no grafo, dizemos que a e b são

adjacentes e, nesse caso, que a e b são as extremidades dessa aresta, que poderá ser denotada por ab ou ba . Essa é uma das principais informações sobre um grafo. Assim como podemos usar diagramas para representar conjuntos, também podemos usar um esquema gráfico para representar as informações de um grafo. Para tal, colocaremos um ponto para indicar cada vértice e uma curva ligando dois vértices que forem adjacentes. Na Figura 4, temos possíveis representações para o grafo G_1 do Exemplo 1.



Fonte: DEaD | IFCE.

Observe que, embora os dois esquemas que compõem a Figura 4 tenham formas diferentes, eles trazem exatamente as mesmas informações de ligação entre os pontos e, portanto, representam o mesmo grafo. Se usarmos a mesma ideia, podemos representar o grafo do Exemplo 2, conforme Figura 5.



Fonte: DEaD | IFCE.

Veja que a forma dos estados, o tamanho deles ou sua efetiva posição geográfica não desempenham papel nesse grafo, uma vez que a informação que ele transmite tem a ver com dois estados terem ou não divisa, certo? Podemos usá-lo para perceber, por exemplo, que Paraíba e Alagoas não têm divisa, pois não há uma linha ligando os vértices correspondentes a esses estados.

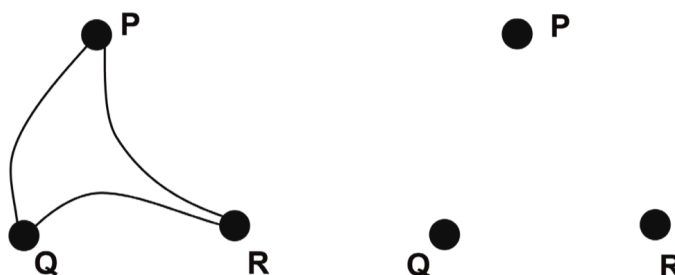
Um aspecto a ser destacado na definição de grafo é que uma aresta não pode ter extremidades iguais ou várias arestas distintas ligando os mesmos vértices. Há teorias em que essas possibilidades são levadas em conta, mas não vai ser o caso aqui. Tais esquemas são chamados de multigrafos. Os grafos de que esse texto trata são os grafos simples. Quando o conjunto de vértices e de arestas de um grafo estiver claro, podemos simplesmente fazer referência ao grafo G em vez de $G = (V, A)$.

Dado um conjunto V com n elementos, podemos formar $C_{n,2}$ subconjuntos de V com exatamente dois elementos, de modo que, se um grafo tem n vértices, ele terá, no máximo, $n(n-1)/2$ arestas, isto é, $\#V^{(2)} = n(n-1)/2$. Quando um grafo possui essa quantidade de arestas, isto é, quando dois vértices quaisquer são adjacentes, dizemos que o grafo é completo. O complemento de um grafo G consiste do grafo G' cujos vértices são os mesmos de G e cujas arestas são, precisamente, aquelas que faltam para que G seja completo, ou seja, se $G = (V, A)$ é um grafo, seu complemento é o grafo $G' = (V, V^{(2)} \setminus A)$.

Para $V = \{X, Y, Z, W\}$, temos $\#V = 4$. Um grafo completo com vértices em V deveria ter $C_{4,2}$ arestas, isto é, 6 arestas. Para $A = \{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{X, W\}, \{Y, Z\}, \{Z, W\}\}$, o grafo $G_1 = (V, A)$, já apresentado no Exemplo 1, não é completo. Seu complemento é o grafo $G' = (V, B)$, em que $B = \{\{Y, W\}\}$.

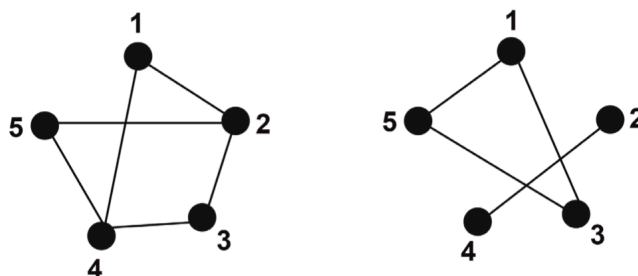
Exemplo 3

Para $V = \{P, Q, R\}$ e $A = \{\{P, Q\}, \{P, R\}, \{Q, R\}\}$, temos que o grafo $G_3 = (V, A)$ é completo e, portanto, seu complemento é o grafo $G_3 = (V, \emptyset)$. Na Figura 6, temos uma representação do grafo G_3 (à esquerda) e de seu complemento (à direita).



Exemplo 4

Para $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$, o grafo $G_4 = (V, A)$ não é completo e seu complemento é $G'_4 = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$. Na Figura 7, temos uma representação do grafo G_4 (à esquerda) e de seu complemento (à direita).



Fonte: DEaD | IFCE.

Se sabemos quais vértices são adjacentes, então podemos contar quantos vértices são adjacentes a um vértice dado. O conjunto de todos os vértices de um grafo G , que são adjacentes ao vértice x , é chamado de vizinhança de x e denotado por $viz_G(x)$. A quantidade de elementos de $viz_G(x)$ será chamada de grau do vértice. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

“Seja $G = (V, A)$ um grafo. Se $x \in V$, o grau de x em G é o número de vértices que são adjacentes a x , isto é, é a quantidade de elementos do conjunto $viz_G(x) = \{y \in V; \{x, y\} \in A\}$. O grau do vértice x no grafo G será denotado por $deg_G(x)$ ou, quando não houver confusão, por $deg(x)$. Assim, $deg_G(x) = \#viz_G(x)$. O grafo G é dito ser regular se todos os seus vértices possuem o mesmo grau.”

Exemplo 5

No grafo G_4 , que apresentamos no exemplo anterior, temos que o grau de vértice é $deg(1) = 2$, $deg(2) = 3$, $deg(3) = 2$, $deg(4) = 3$ e $deg(5) = 2$. Assim, G_4 não é regular.

Atenção: todo grafo completo é regular, isto é, os seus vértices têm o mesmo grau.

Exemplo 6

Se um grafo com n vértices é completo, então cada vértice é ligado a todos os outros $n - 1$ vértices, de modo que seu grau será $n - 1$. Dessa forma, um grafo com n vértices é completo se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau $n - 1$.

Exemplo 7

Para qualquer conjunto finito V , o grafo $G = (V, \emptyset)$ é regular, pois todos os seus vértices possuem grau 0. Esse grafo é o complemento de um grafo completo de vértices em V .

Se considerarmos a aresta xy no grafo G , ela é contada para obter o grau de x e para obter o grau de y , de modo que, se somarmos os graus de todos os vértices de um grafo, estaremos contando todas as arestas duas vezes. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

“A soma dos graus de todos os vértices do grafo $G = (V, A)$ é igual a $2 \cdot \#A$.”

Dessa forma, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre um número par. No caso do grafo do Exemplo 4, que denominamos de G_4 , a soma dos graus de todos os vértices é $2 \cdot \#A = 2 \cdot 6 = 12$, pois o número de elementos de A é 6. Você pode conferir esse resultado somando os graus de cada vértice, como apresentamos no Exemplo 5.

Ainda sobre as características do vértice de um grafo, temos a definição a seguir:

extremidade. De maneira geral, podemos estabelecer a seguinte definição para um caminho em um grafo.

“ Seja $G = (V, A)$ um grafo. Um caminho em G é qualquer sequência de vértices de G ($x_1 x_2 \dots x_k$) tal que $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Nesse caso, os vértices x_1 e x_k são ditos serem extremidades do caminho. Tal caminho pode ser denotado simplesmente por $x_1 x_2 \dots x_k$. Quando $x_1 = x_k$, o caminho é dito ser fechado ou é um circuito.”

Exemplo 9

No grafo G_2 , do tópico anterior, cujos vértices são os estados do Nordeste do Brasil, temos que (MA, PI, PE, AL, SE) é um caminho que liga os vértices MA e SE. Dois outros caminhos, ligando esses vértices, são (MA, PI, BA, SE) e (MA, PI, MA, PI, PE, AL, PE, AL, SE, AL, SE).

Exemplo 10

No grafo G_4 , temos este caminho fechado ou circuito (1, 2, 3, 4, 1) e, em seu complemento G'_4 , não há caminho com extremidades em 2 e 5.

A noção de caminho pode ser usada para estabelecer uma diferença significativa entre G_4 e seu complemento. Para quaisquer vértices de G_4 , existe um caminho ligando esses vértices enquanto isso não ocorre em G'_4 . Os grafos que têm essa propriedade serão chamados de conexos, de acordo com a seguinte definição:

“ O grafo $G = (V, A)$ é dito ser conexo, se, para quaisquer vértices distintos x e y , existir um caminho em G cujas extremidades são x e y . ”

De fato, o grafo G_4 é conexo, pois podemos estabelecer os seguintes caminhos:

- ligando 1 e 2: (1, 2)
- ligando 1 e 3: (1, 2, 3)

- ligando 1 e 4: (1, 4)
- ligando 1 e 5: (1, 2, 5)
- ligando 2 e 3: (2, 3)
- ligando 2 e 4: (2, 5, 4)
- ligando 2 e 5: (2, 5)
- ligando 3 e 4: (3, 4)
- ligando 3 e 5: (3, 4, 5)
- ligando 4 e 5: (4, 5)

Atenção: Todo grafo completo é conexo

Exemplo 11

Para $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$, temos que $G = (V, A)$ é conexo e seu complemento G_4 também é conexo.

Quando fixamos um vértice x de um grafo G e colecionamos todos os outros vértices que podem ser ligados a x e incluímos x na lista, temos o que é chamado de componente de x em G . Uma vez que a justaposição de dois caminhos com uma extremidade em comum é também um caminho, podemos verificar que duas componentes distintas de um grafo são sempre disjuntas e que um grafo é conexo quando ele possui apenas uma componente.

Seja $G = (V, A)$ um grafo. Se W é um subconjunto de V , e B é um subconjunto de A que possui apenas arestas que ligam pontos de W , isto é, se $B \subset W^{(2)}$, dizemos que $H = (W, B)$ é um subgrafo de G . Assim, um subgrafo de um grafo é uma coleção de vértices e arestas desse grafo que ainda é um grafo. Podemos considerar um caminho de um grafo como seu subgrafo. Também é um subgrafo de G qualquer uma de suas componentes se considerarmos todas as arestas que ligam os seus vértices.

Exemplo 12

Todo grafo G é subgrafo de si próprio e, para qualquer grafo $G = (V, A)$, vale

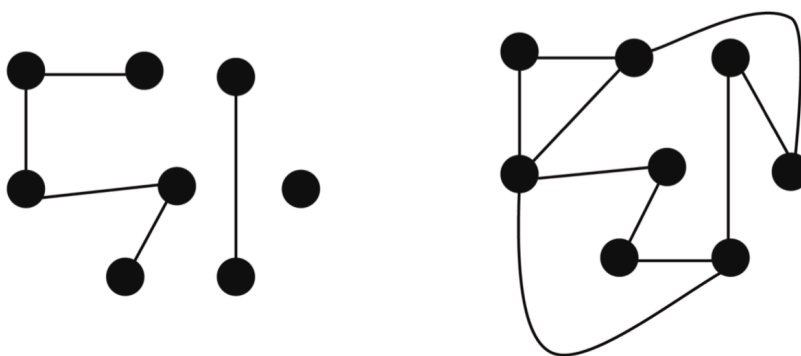
que $H = (W, \emptyset)$ é um subgrafo de G , para qualquer $W \subset V$.

Exemplo 13

Todo grafo $G = (V, A)$ é um subgrafo de $G = (V, V^{(2)})$

Exemplo 14

Na Figura 9, temos os esquemas de dois grafos. Se os vértices forem os mesmos, o grafo da esquerda é um subgrafo do da direita. Observe que o da esquerda não é conexo, já o da direita é conexo.

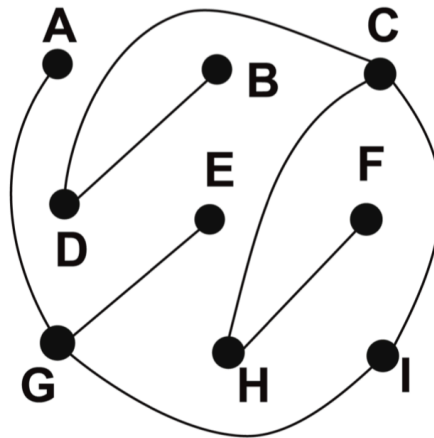


Fonte: DEaD | IFCE.

Acompanhe o **Exemplo 15**, no qual observamos as principais propriedades sobre os grafos que definimos até aqui.

Exemplo 15

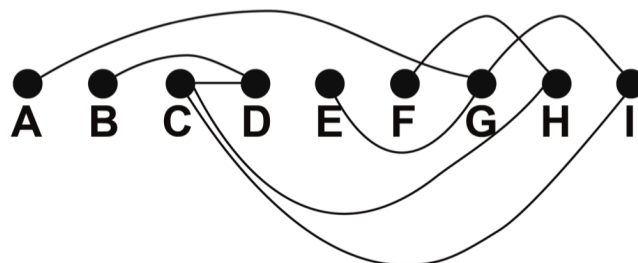
Considere o grafo esquematizado na figura abaixo.



Fonte: DEaD | IFCE.

Podemos descrevê-lo precisamente, colocando seu conjunto de vértices $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ e suas arestas $S = \{AG, BD, CD, CH, CI, EG, FH, GI\}$. Podemos escrever um caminho ligando dois quaisquer desses vértices, de modo que o grafo $J = (V, S)$ é conexo. Os vértices A, B, E e F têm grau 1, os vértices D, H e I têm grau 2, já os vértices C e G têm grau 3.

Se colocarmos $W = \{A, C, F, G, H, I\}$ e $T = \{AG, CI, CH, FH, GI\}$, temos que (W, T) é um subgrafo de J. Se colocarmos $X = \{A, B, C, D\}$, o grafo (X, T) não é um subgrafo de J, pois, embora tenhamos considerado apenas vértices de J e arestas de J, o par (X, T) não é um grafo. Por fim, observe que o grafo J pode ser esquematizado como na Figura 11, uma vez que os vértices são os mesmos e a informação fundamental, que é a de quais vértices estão ligados, é preservada, reforçando que o grafo, mais do que sua representação, é um conjunto de vértices e algumas ligações entre eles.



Fonte: DEaD | IFCE.

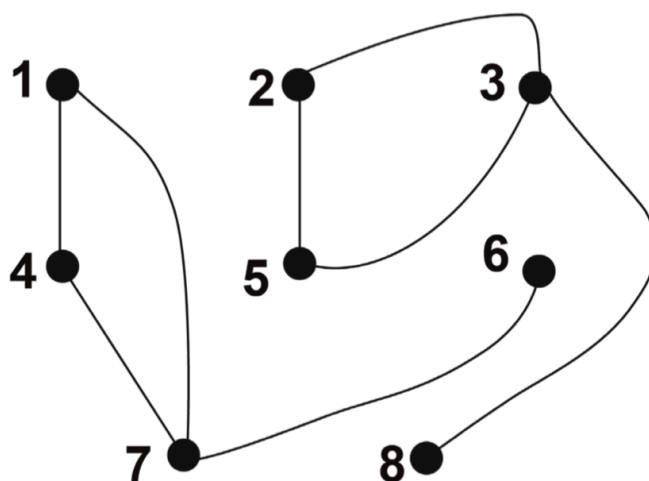
Em um grafo G , um circuito que não tem arestas repetidas é dito ser um ciclo. Alternativamente, podemos entender um ciclo em um grafo G como um subgrafo de G , que é regular e no qual todos os vértices têm grau 2. Quando um grafo não possui ciclos, dizemos que ele é uma floresta. Se um grafo é conexo e não possui ciclos, ele é dito ser uma árvore.

Exemplo 16

O grafo J do exemplo anterior não possui ciclos e é conexo, suas folhas são os vértices A , B , E e F .

Exemplo 17

Considere o grafo esquematizado na figura a seguir:



Fonte: DEaD | IFCE.

Temos que esse é um grafo não conexo, no qual podemos destacar os ciclos $(1, 4, 7, 1)$ e $(2, 3, 5, 2)$. Você deve recordar a Definição 8.3, que, nesse caso, esse grafo não possui vértices isolados. O subgrafo $H = (\{1, 4, 6, 7\}, \{14, 17, 47, 67\})$ é uma das componentes desse grafo. As folhas desse grafo são os vértices 6 e 8, uma vez que esses vértices possuem grau 1.

Exemplo 18

Todo grafo completo com, no mínimo 3 vértices, possui ciclos.

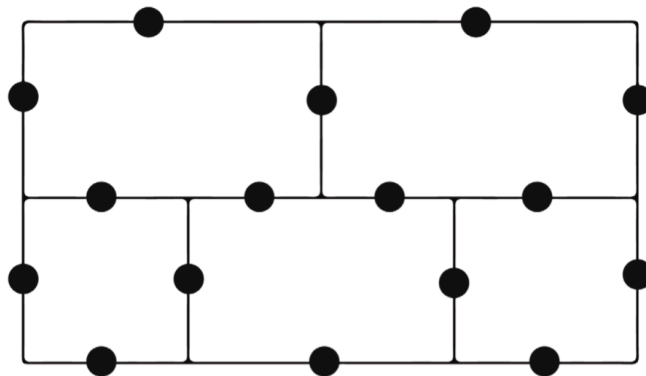
Se $G = (V, A)$ e $H = (W, B)$ são grafos, então é de imediata verificação que $(V \cup W, A \cup B)$ é um grafo, o qual chamamos de união de G e H . Cada grafo pode ser escrito de forma única como união de suas componentes. Dessa forma, perceba que uma floresta pode ser descrita como união de árvores.

4. Aplicação da Teoria dos Grafos

Neste tópico, encerraremos nossa disciplina, aplicando alguns conceitos da Teoria dos Grafos a problemas que não possuem a palavra grafo em seu enunciado, mas, como será visto, associar a situação a um grafo, transferindo o problema, fará com que consigamos encontrar uma solução de forma bem simples. Vejamos esses problemas.

Problema 1

Considere o seguinte arranjo de cinco retângulos com alguns pontos marcados nos seus lados onde há passagens entre os retângulos.

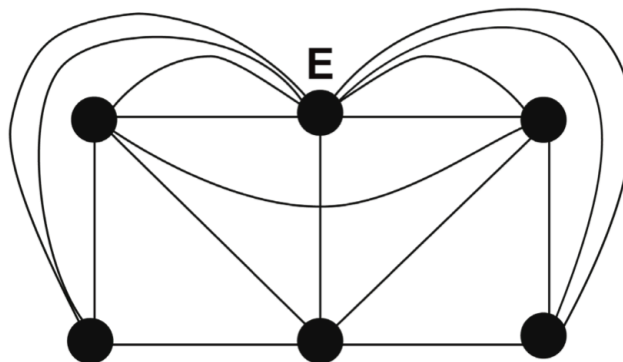


Fonte: DEaD | IFCE.

60 É possível desenhar uma linha contínua, isto é, sem tirar a caneta do papel, que atravessasse todas as passagens dessa figura uma única vez?

Solução

Para iniciar a resolução desse problema, podemos associar cada retângulo a um ponto e ligar dois desses pontos com uma linha para cada passagem que houver entre eles. Colocamos também um ponto para representar a região externa E, obtendo a Figura 14.



Fonte: DEaD | IFCE.

Assim como no caso das pontes de Königsberg, podemos observar que a quantidade de linhas que saem de cada vértice que não é extremidade da linha deve ser par. Mas temos o ponto E, de onde saem 9 linhas, três pontos de onde saem 5 linhas, e dois de onde saem 4 linhas. Assim, o ponto E e outros três deveriam ser extremidades do caminho, mas ele só tem um começo e um fim, de modo que uma linha, com as condições pedidas, não pode ser traçada.

Problema 2

Mostre que, em um grupo qualquer de n pessoas, existem pelo menos duas que possuem o mesmo número de conhecidos.

Solução

Supondo que a relação de conhecer outra pessoa seja recíproca, isto é, que, se A conhece B, então B conhece A, podemos considerar n pontos P_1, P_2, \dots, P_n no plano e linhas entre os pontos P_i e P_j para indicar que a pessoa P_i conhece a pessoa P_j . Dessa forma, temos um grafo com n vértices e algumas arestas. A quantidade de pessoas que P_i conhece é exatamente o grau de P_j . Com essa descrição, o problema se torna o de provar que, em um grafo qualquer, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau. Como são n vértices, as possibilidades de graus são $0, 1, 2, \dots, n - 1$. Se algum vértice tem grau 0, isto é, se há algum vértice isolado, então nenhum vértice tem grau $n - 1$, pois isso significaria que esse vértice está ligado a todos os outros, o que não ocorre. Assim, nesse caso, teríamos como possibilidades de grau para os vértices os números $0, 1, 2, \dots, n - 2$, que são $n - 1$ números. Assim, a função que associa cada vértice ao seu grau tem domínio com n elementos e contradomínio com $n - 1$ elementos e, pelo Princípio de Dirichlet, não pode ser injetiva, isto é, existem dois vértices com o mesmo grau. Por outro lado, se for o caso de não haver vértices isolados, as possibilidades de grau passam a ser $1, 2, \dots, n - 1$, que são $n - 1$ números. Assim, também, nesse caso, a função que associa cada vértice ao seu grau tem domínio com n elementos e contradomínio com $n - 1$ elementos e, portanto, não pode ser injetiva, isto é, existem dois vértices com o mesmo grau. Dessa forma, analisando todas as possibilidades, vemos que há dois vértices com o mesmo grau. Voltando ao problema inicial, isso significa que há pelo menos duas pessoas que têm a mesma quantidade de conhecidos em qualquer grupo.

Problema 3

São marcados 15 pontos no plano. É possível ligar esses pontos de tal forma que, ao final do processo, cada ponto esteja ligado a exatamente 5 outros pontos?

Solução

Se considerarmos o grafo cujos vértices são os pontos dados e cujas arestas sejam as ligações entre esses pontos, uma marcação como a pedida no problema consiste em um grafo regular onde cada vértice tem grau 5. Nesse caso, por um lado, a soma de todos os graus seria $15 \cdot 5$, isto é, 75. Por outro lado, a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas, isto é, teríamos $75 = 2 \cdot \#A$, o que nunca ocorre, uma vez que 75 é ímpar. Assim, é impossível traçar linhas com as características do enunciado.

Problema 4

Em uma festa, os convidados se cumprimentaram com apertos de mão. Mostre que a quantidade de pessoas que apertaram mãos um número ímpar de vezes é par.

Solução

Se considerarmos o grafo em que cada ponto representa um convidado da festa e uma aresta entre dois pontos significando que os convidados correspondentes se cumprimentaram, temos que o grau de cada ponto é exatamente a quantidade de vezes que a pessoa correspondente participou de um aperto de mãos. Assim, o problema se torna o de provar que, em qualquer grafo, a quantidade de vértices que têm grau ímpar é um número par. Se somarmos os graus de todos os vértices de grau par, obteremos um número par. Como a soma de todos os graus é um número par, concluímos que a soma dos graus de todos os vértices que têm grau ímpar é um número par também. A soma de dois números ímpares é um número par. Observe que, se a quantidade de vértices de grau ímpar fosse ímpar, esses vértices poderiam ser agrupados de dois em dois, resultando em soma par, e sobraria um vértice de grau ímpar, resultando em soma total sendo ímpar, o que nunca ocorre em nenhum grafo. Portanto, em qualquer grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar deve ser um número par, o que demonstra o problema.

Problema 5

As cidades de um país são ligadas por estradas e é possível ir de uma cidade a qualquer outra usando essas estradas, mesmo que atravessando outras cidades no percurso. Mostre que, se a quantidade de estradas que saem de cada cidade é um número par, então existe uma cidade no país em que é possível sair e voltar passando por todas as estradas uma única vez.

Solução

Consideremos o grafo G que consiste de um vértice para cada cidade do país e uma aresta ligando dois desses pontos quando houver uma estrada ligando as cidades correspondentes. Como a quantidade de estradas que sai de cada cidade é par, temos que o grau de cada vértice de G é par. Sair de uma cidade e voltar para ela

sem repetir estradas consiste em exibir um caminho fechado que não repete arestas. Assim, o problema consiste em, dado um grafo conexo G , em que todos os vértices têm grau par, mostrar que é possível exibir um caminho fechado, isto é, um circuito em G que não possui arestas repetidas, ou seja, um ciclo, que passa por todas as arestas. Começamos o caminho num determinado vértice P e sigamos segundo uma aresta não usada para outro vértice até regressar de novo a P . Note que isso é sempre possível, já que cada vértice, aonde chegamos, possui necessariamente uma saída, exceto o vértice P . Obtemos, assim, um circuito. Se todas as arestas forem usadas nesse processo, teríamos o caminho desejado. Se houve arestas não usadas, a conexidade do grafo diz que, nesse caminho, há um vértice onde outra aresta podia ser tomada. Denotamos esse vértice por Q . Podemos, dessa forma, chegar a Q pelo caminho obtido na primeira etapa e sair de Q por uma aresta que não foi usada previamente. Como grau de Q é par, é possível regressar a Q por outra aresta que não tinha sido tomada no caminho original. Se todas as arestas forem agora utilizadas, encontraríamos um circuito com as condições desejadas, partindo de P e, procedendo como inicialmente até Q , em seguida, tomamos o caminho adicional que vai de Q a Q , e regressamos a P como tínhamos feito no primeiro caminho. Caso ainda sobrem arestas por percorrer, repetimos o processo. Como a quantidade de arestas é finita, esses passos conduzirão a uma solução para o problema.

Problema 6

Hamilton saiu de Londres e conheceu várias cidades pelo mundo, regressando a Londres no final da jornada. Os deslocamentos entre as cidades foram feitos sempre de avião e em cada bilhete aparecia o nome da origem e do destino da viagem apenas uma vez. Algumas cidades foram visitadas mais de uma vez, embora nenhum trecho entre duas cidades foi repetido. Mostre que o número total de vezes em que aparece o nome de uma cidade qualquer nos bilhetes de Hamilton é par.

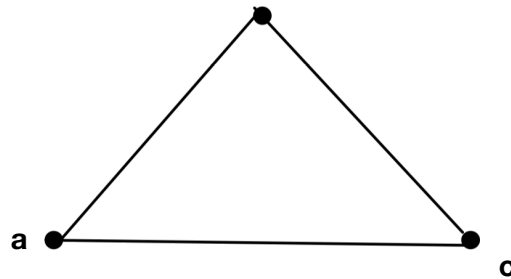
Solução

Nesse problema, se associarmos cada cidade visitada por Hamilton a um ponto e ligarmos dois desses pontos quando ele realizar um voo entre elas, temos que o grafo correspondente admite um caminho fechado que passa por todos os vértices. A quantidade de vezes em que uma cidade aparece nos bilhetes é exatamente o grau do vértice correspondente. Assim, nosso problema passa a ser o de mostrar que, se um grafo conexo G admite um circuito que passa por todas as arestas uma única vez, o

grau de todos os vértices é par. Mas isso é bem simples, pois, se o grafo admite um caminho com as propriedades dadas, é verdade que, em cada vértice, esse caminho deve chegar por uma aresta e partir por outra diferente. Assim, o número de arestas que se liga em cada vértice tem que ser par.

Exercícios - Capítulo VII

1.1 Qual alternativa representa as arestas do grafo abaixo?



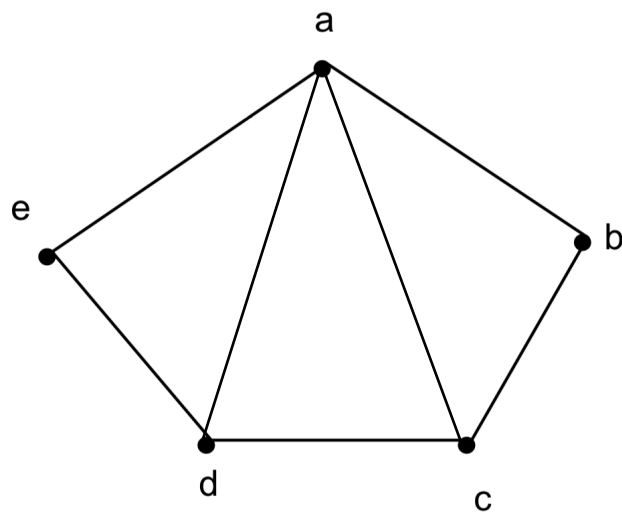
a) $A = \{ab, bc, ca, cb\}$

b) $A = \{ab, ca\}$

c) $A = \{ab, bc, ca\}$

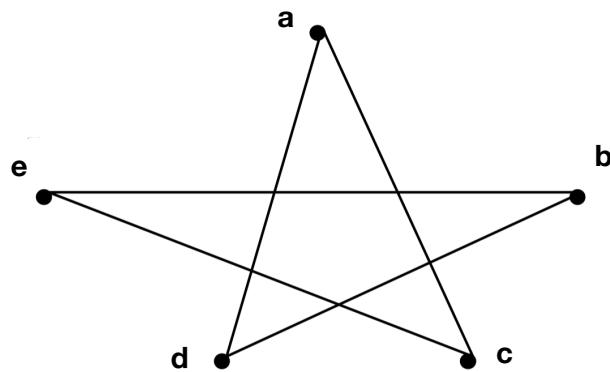
d) $A = \{ab, cb, ac, ba\}$

1.2. Qual alternativa representa as arestas do grafo abaixo?



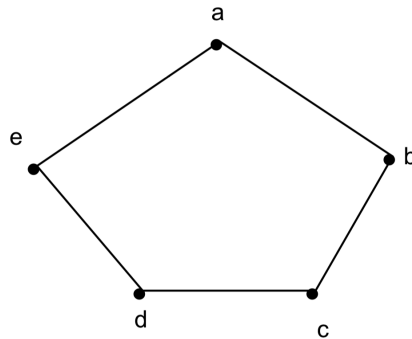
- a) $A = \{ab, bc, cd, de, ba, ac, ed\}$
- b) $A = \{ab, bc, ac, cd, ad, ca, ae\}$
- c) $A = \{ab, ba, ac, ed, ad, de, ae\}$
- d) $A = \{ab, bc, ac, cd, ad, de, ae\}$**

1.3. Qual alternativa representa as arestas do grafo abaixo?



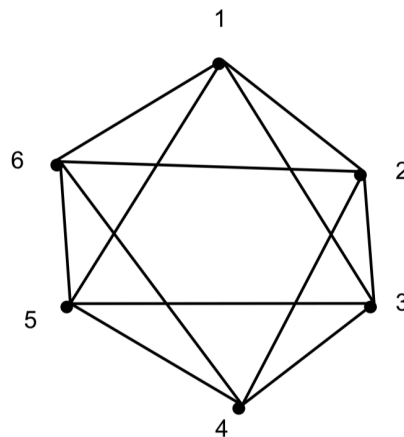
- a) $A = \{ac, ad, ad, be, ec\}$
- b) $A = \{ac, ad, bd, be, ca\}$
- c) $A = \{ac, ad, bd, ed, ec\}$
- d) $A = \{ac, ad, bd, be, ec\}$**

2. Para $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $A = \{ab, ae, bc, cd, de\}$, o grafo $G_4 = \{V, A\}$ não é completo. Assinale a alternativa que corresponde ao seu complemento:



- a) $G'_4 = \{ac, ad, be, bd, ce\}$
- b) $G'_4 = \{ac, ad, bd, be, ca\}$
- c) $G'_4 = \{ac, ad, bd, ed, ec\}$
- d) $G'_4 = \{ac, ad, bd, be, ec\}$

3. Dado o seguinte grafo $G_5 = \{V, A\}$ responda as seguintes questões:



3.1. Quantos graus tem o vértice 3?

- a) 3

b) 4

c) 2

d) 1

3.2. Pode-se dizer que o grafo acima é regular?

a) Sim, pois é também um grafo completo

b) Não, pois não é um grafo completo.

c) **Sim, porém não é um grafo completo**

d) Não, porém é um grafo completo

3.3. Qual das alternativas corresponde ao grafo complemento do grafo dado acima?

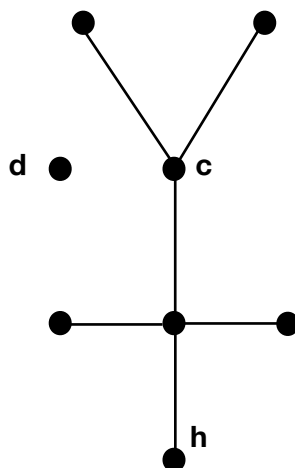
a) $G'_5 = \{\{1,3\}, \{2,5\}, \{3,6\}\}$

b) $G'_5 = \{\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

c) $G'_5 = \{\{1,3\}, \{2,6\}, \{3,6\}\}$

d) **$G'_5 = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6\}\}$**

4. Dado o seguinte grafo, responda as questões a seguir.



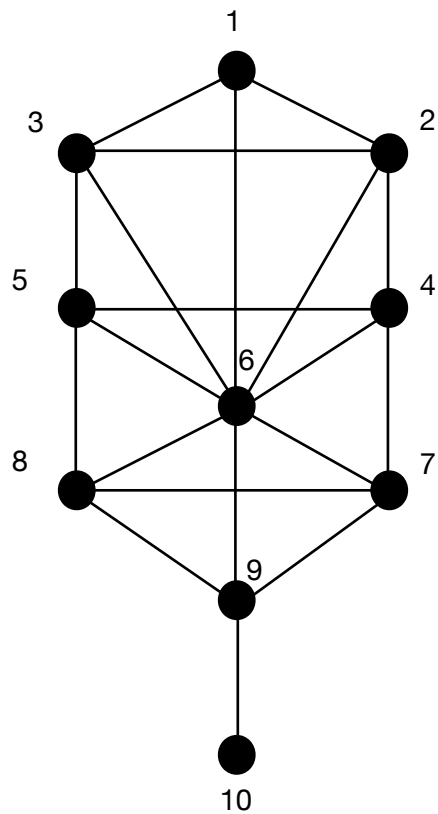
4.1. Quais vértices não são ditos isolados?

- a) V_a, V_d, V_h, V_e
- b) V_a, V_c, V_d, V_e
- c) **V_a, V_c, V_h, V_e**
- d) V_a, V_c, V_h, V_d

4.2 Quais vértices são ditos folhas?

- a) **V_a, V_b, V_e, V_g, V_h**
- b) V_a, V_d, V_e, V_c, V_h
- c) V_f, V_b, V_c, V_g, V_h
- d) V_a, V_b, V_d, V_g, V_f

5. Sobre o grafo a seguir, é correto afirmar que:



- a) **É um grafo conexo; completo; irregular; possui um vértice folha.**
- b) É um grafo conexo; incompleto; irregular; não possui vértice folha.
- c) Não é conexo; completo; regular; possui um vértice folha.
- d) É um grafo conexo, completo; regular; possui um vértice folha.