Lógica Computacional
Tarea-Examen Semanal

Rubí Rojas Tania Michelle
Universidad Nacional Autónoma de México
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

30 de abril de 2019

1. Enuncia la sintaxis y semnántica de la lógica de predicados.
   SOLUCIÓN:

   a) Sintaxis de la lógica de predicados.
   Dependiendo de la estructura semnántica que tengamos en mente será necesario agregar símbolos particulares para denotar objetos y relaciones entre objetos. De esta manera, el alfabeto consta de dos partes ajenas entre sí, la parte común a todos los lenguajes determinada por los símbolos lógicos y auxiliares y la parte particular, llamada tipo de semejanza o signatura del lenguaje.

   - La parte común a todos los lenguajes consta de:
     - Un conjunto finito de variables $Var\{x_1, ..., x_n, ...\}$
     - Constantes lógicas: $\top, \bot$
     - Conectivos u operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
     - Cuantificadores: $\forall, \exists$
     - Símbolos auxiliares: (,) y , (coma).
     - Si se agrega el símbolo de igualdad $=$, decimos que el lenguaje tiene igualdad.
   - La signatura de un lenguaje en particular está dada por:
     - Un conjunto $\mathcal{P}$, posiblemente vacío, de símbolos o letras de predicado:
       $$P_1, ..., P_n, ...$$
       A cada símbolo se le asigna un índice o número de argumentos m, el cual se hace explícito escribiendo $P_n^{(m)}$ lo cual significará que el símbolo P_n necesita de m argumentos.
     - Un conjunto $\mathcal{F}$, posiblemente vacío, de símbolos o letras de función:
       $$f_1, ..., f_n, ...$$
       Análogamente a los símbolos de predicado cada símbolo de función tiene un índice asignado, $f_n^{(m)}$ significará que el símbolo f_n necesita de m argumentos.
     - Un conjunto $\mathcal{C}$, posiblemente vacío, de símbolos de constante:
       $$c_1, ..., c_n, ...$$
       En algunos libros los símbolos de constante se consideran como parte del conjunto de símbolos de función, puesto que pueden verse como funciones de índice cero, es decir, funciones que no reciben argumentos.

Dado que un lenguaje de primer órden queda determinado de manera única por su signatura, abusaremos de la notación y escribiremos

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

para denotar al lenguaje dado por tal signarura.

Los términos del lenguaje son variables, constantes y funciones aplicados a estos.

Definición 1 (Términos). *Los términos son definidos como sigue:*

- *Una variable es un término.*
- *Si $c \in F$ es una función nula, entonces c es un término.*
- *Si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos y $f \in F$ tiene índice $n > 0$, entonces $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ es un término.*
- *Son todos.*

En forma de Backus Naur se escribe:

$$t :: x \mid c \mid f(t_1, ..., t_n)$$

Definición 2. *Sean P el conjunto de predicados y F el conjunto de símbolos de función. Se define el conjunto de fórmulas sobre (F, P) inductivamente usando la definición de Términos sobre F.*

- *Si $p \in \mathcal{P}$ (símbolo de predicado) con índice $n \geq 1$ y si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos sobre $\mathcal{F}$ entonces $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ es una fórmula.*
- *Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ φ también lo es.*
- *φ, ψ son fórmulas, entonces $\varphi \star \psi$ también lo son; donde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*
- *Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $\forall x\varphi$ es una fórmula.*
- *Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $\exists x\varphi$ es una fórmula.*
- *No hay más.*

Es decir, la sintaxis de la lógica de predicados en forma de Backus Naur se define como:

$$\varphi :: P(t_1, ..., t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi \mid t_1 = t_2 \mid \bot \mid \top$$

b) Semántica de la lógica de predicados.

Definición 3. *Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje de primer órden. Una estructura o interpretación para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que*

- *Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una relación de m-argumentos sobre M, es decir, $\mathcal{I}(\mathcal{P}) \subseteq M^n$. Alternativamente podemos definir la interpretación de $\mathcal{P}$ como una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(\mathcal{P}) : M^n \rightarrow Bool$.*
- *Si $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{I}(f)$ es una función con dominio M^n y contradominio M, es decir, $\mathcal{I}(f) : M^n \rightarrow M$.*
- *Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{I}(c)$ es un elemento de M, es decir, $\mathcal{I}(c) \in M$*

Dada una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, la siguiente notación es de utilidad:

$$|\mathcal{M}| =_{def} M$$
$$P^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(P)$$
$$f^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(f)$$
$$c^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(c)$$

Definición 4 (Estado o Asignación). *Un estado, asignación o evaluación de las variables es una función* $\sigma : Var \to M$

Definición 5 (Interpretación de Términos). *Sea* σ *un estado de las variables. Definimos la función de interpretación o significado de los términos con respecto a* $\sigma, \mathcal{I}_\sigma : TERM \to |\mathcal{M}|$ *como sigue:*

$$\mathcal{I}_\sigma(x) = \sigma(x)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(c) = \mathcal{I}(c)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}_\sigma(t_1), ..., \mathcal{I}_\sigma(t_n))$$

Definición 6 (Interpretación de fórmulas). *Sea* σ *un estado de las variables. Definimos la función de interpretación o significado de las fórmulas con respecto a* $\sigma, \mathcal{I}_\sigma : FORM \to \{0, 1\}$ *como sigue:*

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\top) = 1$$
$$\mathcal{I}_\sigma(P(t_1, ..., t_m)) = 1 \textit{ si y sólo si } (\mathcal{I}_\sigma(t_1), ..., \mathcal{I}_\sigma(t_m)) \in P^{\mathcal{I}}$$
$$\mathcal{I}_\sigma(t_1 = t_2) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(t_1) = \mathcal{I}_\sigma(t_2)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \vee \psi) = 0 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \to \psi) = 0 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \textit{ e } \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \textit{ para todo } m \in M$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \textit{ para algún } m \in M.$$

2. Obtén la Forma Normal Prenex de la siguiente fórmula:

$$\forall x \forall y[\exists z(A(x, z) \wedge B(y, z)) \to \exists u C(x, y, z)]$$

Solución:
Sea $\varphi = \forall x \forall y[\exists z(A(x, z) \wedge B(y, z)) \to \exists u C(x, y, z)]$. Primero, rectificamos a φ:

$$\begin{aligned} rec(\varphi) &= \forall x \forall y[\exists z(A(x, z) \wedge B(y, z)) \to C(x, y, z)] && \text{eliminamos cuantificadores vacuos} \\ &= \forall x \forall y[\exists w(A(x, w) \wedge B(y, w)) \to C(x, y, z)] && \alpha - equivalencia \end{aligned}$$

Ahora, obtenemos $fnn(\varphi)$:

$$\begin{aligned} fnn(\varphi) =& \forall x \forall y[\neg\exists w(A(x, w) \wedge B(y, w)) \vee C(x, y, z)] && \text{eq. lógica} \\ =& \forall x \forall y[\forall w \neg(A(x, w) \wedge B(y, w)) \vee C(x, y, z)] && \text{eq. lógica} \\ =& \forall x \forall y[\forall w(\neg A(x, w) \vee \neg B(y, w)) \ lor C(x, y, z)] && \text{eq. lógica} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos $fnp(\varphi)$:

$$fnp(\varphi) = \forall x \forall y \forall w[(\neg A(x, w) \vee \neg B(y, w)) \vee C(x, y, z)]$$

Por lo tanto, la Forma Normal Prenex de φ es $fnp(\varphi)$, definido anteriormente.

3. Obtén la Forma Normal de Skolem de la siguiente fórmula:

$$\forall x[(A(x,y) \to \exists y P(x,y,z)) \to \neg\forall z Q(x,z)]$$

Solución:
Sea $\varphi = \forall x[(A(x,y) \to \exists y P(x,y,z)) \to \neg\forall z Q(x,z)]$. Primero, rectificamos φ:

$$rec(\varphi) = \forall x[(A(x,y) \to \exists u P(x,u,z)) \to \neg\forall w Q(x,w)] \qquad \alpha \text{ - equivalencia}$$

Ahora, obtenemos $fnn(\varphi)$:

$$\begin{aligned} fnn(\varphi) &= \forall x[\neg(\neg A(x,y) \vee \exists u P(x,u,z)) \vee \neg\forall w Q(x,w)] && \text{eq. lógica} \\ &= \forall x[(A(x,y) \wedge \neg\exists u P(x,u,z)) \vee \neg\forall w Q(x,w)] && \text{eq. lógica} \\ &= \forall x[(A(x,y) \wedge \forall u \neg P(x,u,z)) \vee \exists w \neg Q(x,w)] && \text{eq. lógica} \end{aligned}$$

Luego, obtenemos $fnp(\varphi)$:

$$fnp(\varphi) = \forall x \forall u \exists w[(A(x,y) \wedge \neg P(x,u,z)) \vee \neg Q(x,w)]$$

Finalmente, obtenemos $fns(\varphi)$:

$$fns(\varphi) = \forall x \forall u[(A(x,y) \wedge \neg P(x,u,z)) \vee \neg Q(x, f(x,u))]$$

4. Obtén la Forma Normal Clausular de la siguiente fórmula:

$$\{\forall x(P(x,y) \to \exists y Q(y)), \exists x \forall y(Q(y) \to P(y,x) \vee R(x)), \forall y(R(y) \to \exists x \neg Q(a))\}$$
$$\models \forall x(Q(fa) \to Q(a))$$

Solución:
Primero, reorganizamos nuestro conjunto de fórmulas:

$$\{\forall x(P(x,y) \to \exists y Q(y)), \exists x \forall y(Q(y) \to P(y,x) \vee R(x)), \forall y(R(y) \to \exists x \neg Q(a)), \neg\forall x(Q(fa) \to Q(a))\}$$

de donde

$$\varphi = \forall x(P(x,y) \to \exists y Q(y)) \wedge \exists x \forall y(Q(y) \to P(y,x) \vee R(x)) \wedge \forall y(R(y) \to \exists x \neg Q(a)) \wedge \neg\forall x(Q(fa) \to Q(a))$$

Así, primero rectificamos a φ:

$$\begin{aligned} rec(\varphi) &= \forall x(P(x,y) \to \exists y Q(y)) \wedge \exists x \forall y(Q(y) \to P(y,x) \vee R(x)) \wedge \forall y(R(y) \to \neg Q(a)) \wedge \neg(Q(fa) \to Q(a)) \\ &= \forall x(P(x,y) \to \exists s Q(s)) \wedge \exists w \forall u(Q(u) \to P(u,w) \vee R(w)) \wedge \forall z(R(z) \to \neg Q(a)) \wedge \neg(Q(fa) \to Q(a)) \end{aligned}$$

donde eliminamos los cuantificadores vacuos y aplicamos α- equivalencia.
Ahora, obtenemos $fnn(\varphi)$:

$$\begin{aligned} fnn(\varphi) =& \forall x(\neg P(x,y) \lor \exists s Q(s)) \land \exists w \forall u(\neg Q(u) \lor P(u,w) \lor R(w)) \land \forall z(\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land \neg(\neg Q(fa) \lor Q(a)) \\ =& \forall x(\neg P(x,y) \lor \exists s Q(s)) \land \exists w \forall u(\neg Q(u) \lor P(u,w) \lor R(w)) \land \forall z(\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land (Q(fa) \land \neg Q(a)) \end{aligned}$$

Luego, obtenemos $fnp(\varphi)$:

$$\begin{aligned} fnp(\varphi) =& \forall x \exists s(\neg P(x,y) \lor Q(s)) \land \exists w \forall u(\neg Q(u) \lor P(u,w) \lor R(w)) \land \forall z(\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land (Q(fa) \land \neg Q(a)) \\ =& \forall x \exists s \exists w \forall u \forall z[(\neg P(x,y) \lor Q(s)) \land (\neg Q(u) \lor P(u,w) \lor R(w)) \land (\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land (Q(fa) \land \neg Q(a))] \end{aligned}$$

Después, obtenemos $fns(\varphi)$:

$$\begin{aligned} fns(\varphi) =& \forall x \exists w \forall u \forall z[(\neg P(x,y) \lor Q(f(x))) \land (\neg Q(u) \lor P(u,w) \lor R(w)) \land (\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land (Q(fa) \land \neg Q(a))] \\ =& \forall x \forall u \forall z[(\neg P(x,y) \lor Q(f(x))) \land (\neg Q(u) \lor P(u,h(x)) \lor R(h(x))) \land (\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land (Q(fa) \land \neg Q(a) \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos $Cl(\varphi)$:

$$Cl(\varphi) = (\neg P(x,y) \lor Q(f(x))) \land (\neg Q(u) \lor P(u,h(x)) \lor R(h(x))) \land (\neg R(z) \lor \neg Q(a)) \land Q(fa) \land \neg Q(a)$$

5. Demuestra mediante deducción natural lo siguiente:

- $\forall x(Hx \to Gx \land Kx), \neg\exists z(Fz \land Gz) \vdash \forall w \neg(Fw \land Hw)$

  Demostración. Utilizando equivalencias lógicas, basta mostrar que

  $$\Gamma = \{\forall x(Hx \to Gx \land Kx), \forall z(\neg Fz \lor \neg Gz)\} \vdash \forall w \neg(Fw \land Hw)$$

  Entonces

1. $\Gamma \vdash \forall x(Hx \to Gx \land Kx)$	Hip
2. $\Gamma \vdash \forall z(\neg Fz \lor \neg Gz)$	Hip
3. $\Gamma \vdash Hw \to Gw \land Kw$	$(\forall E)1$
4. $\Gamma \vdash \neg Fw \lor \neg Gw$	$(\forall E)2$

  de donde, tenemos dos casos:

5.	$\Gamma, \neg Fw \vdash \neg Fw$	Hip
6.	$\Gamma, \neg Fw \vdash \neg Fw \vee \neg Hw$	$(\vee I)5$
7.	$\Gamma, \neg Fw \vdash \neg(Fw \wedge Hw)$	De Morgan, 6
8.	$\Gamma, \neg Fw \vdash \forall w \neg(Fw \wedge Hw)$	$(\forall I)7$
9.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg Gw$	Hip
10.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg Gw \vee \neg Kw$	$(\vee I)9$
11.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg(Gw \wedge Kw)$	De Morgan, 10
12.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg Hw$	MT 11, 3
13.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg Fw \vee \neg Hw$	$(\vee I)12$
14.	$\Gamma, \neg Gw \vdash \neg(Fw \wedge Hw)$	De Morgan, 13
15.	$\Gamma, \neg Fw \vdash \forall w \neg(Fw \wedge Hw)$	$(\forall I)14$

Por $(\vee E)$ podemos concluir que $\Gamma \vdash \forall w \neg(Fw \wedge Hw)$. $\square$

- $\exists x Fx \to \forall y(Gy \to Hy), \exists z Jz \to \exists w Gw \vdash \exists z(Fz \wedge Jz) \to \exists v Hv$

Demostración. Por el Teo. de DN basta mostrar

$$\Gamma = \{\exists x Fx \to \forall y(Gy \to Hy), \exists z Jz \to \exists w Gw, \exists z(Fz \wedge Jz)\} \vdash \exists v Hv$$

Entonces

1.	$\Gamma \vdash \exists x Fx \to \forall y(Gy \to Hy)$	Hip
2.	$\Gamma \vdash \exists z Jz \to \exists w Gw$	Hip
3.	$\Gamma \vdash \exists z(Fz \wedge Jz)$	Hip
4.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Fz \wedge Jz$	Hip
5.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Fz$	$(\wedge E)4$
6.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Jz$	$(\wedge E)4$
7.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists x Fx$	$(\exists I)4$
8.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \forall y(Gy \to Hy)$	$(\to E)6, 1$
9.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists z Jz$	$(\exists I)5$
10.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists Gw$	$(\to E)8, 2$
11.	$\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash Gw$	Hip
12.	$\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash Gw \to Hw$	$(\forall E)7$
13.	$\Gamma Fz \wedge Jz, Gw \vdash Hw$	$(\to E)11, 10$
14.	$\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash \exists u Hu$	$(\exists I)12$
15.	$\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists u Hu$	$(\exists E)9, 12$
16.	$\Gamma \vdash \exists u Hu$	$(\exists E)3, 15$

Por lo tanto, podemos concluir que $\Gamma \vdash \exists u Hu$. $\square$