Lógica Computacional 2016-2, nota de clase 12
Sistemas de Deducción Natural

Favio Ezequiel Miranda Perea   Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca

19 de mayo de 2016
Facultad de Ciencias UNAM

1. Introducción

Los sistemas de deducción natural, introducidos por Gentzen en 1935, son formalismos deductivos que modelan el razonamiento matemático ordinario de manera más fiel que un sistema axiomático o que el método de tableaux. Un sistema de deducción natural consiste de reglas de inferencia para *introducir* y *eliminar* cada uno de los conectivos lógicos. Las pruebas o derivaciones se construyen mediante la aplicación de dichas reglas en una sucesión adecuada que relaciona conclusiones con premisas de reglas posteriores. De igual forma que en el razonamiento ordinario se pueden hacer hipótesis temporales durante la prueba, las cuales se pueden *descargar* al incorporarlas a la conclusión. Mientras que los sistemas computacionales de razonamiento automatizado usualmente se basan en métodos refutacionales como los tableaux, los asistentes de prueba interactivos útiles para razonar acerca de las propiedades de programas se basan frecuentemente en los sistemas lógicos de deducción natural.
Por otra parte, en fundamentos de lenguajes de programación la deducción natural juega también un papel importante por medio de la llamada correspondencia de Curry-Howard también conocida como el paradigma de *fórmulas como tipos*, cuya idea a grandes rasgos es que las pruebas lógicas contienen ciertas construcciones las cuales pueden interpretarse como programas, de modo que las proposiciones lógicas se convierten en tipos de un lenguaje de programación. La última parte de nuestro curso se dedicará en gran parte a mostrar tal correspondencia.

El adjetivo *natural* dado por Gentzen a estos sistemas deductivos se refiere al hecho de que modelan de manera tan cercana como sea posible el razonamiento natural de un humano, o al menos el razonamiento matemático hecho por personas mediante distintos juicios.

1.1. Significado de conectivos y cuantificadores

El significado de una fórmula lógica se entenderá si comprendemos cuando ésta es verdadera. Analicemos a este respecto cada clase de fórmula de acuerdo a su conectivo o cuantificador principal:

- Información básica: A es cierta, lo cual podemos denotar con: $A\ \mathsf{true}$.
- Conjunción: $A \wedge B$ es cierta solo sí ambas A y B son ciertas. Lo cual nos lleva al juicio:

$$\frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{true}}{A \wedge B\ \mathsf{true}}$$

Esta clase de regla se conoce como regla de introducción porque introduce un conectivo en la conclusión en este caso $\wedge$.

La siguiente cuestión es preguntarnos como usar la información $A \wedge B$ true, a cuya respuesta nos lleva de nuevo el razonamiento natural:

$$\frac{A \wedge B \ \mathsf{true}}{A \ \mathsf{true}} \qquad \frac{A \wedge B \ \mathsf{true}}{B \ \mathsf{true}}$$

- Implicación: ¿Cuando es verdadera una implicación ? El razonamiento matemático nos dice que la implicación $A \to B$ es cierta si el suponer el antecedente A cierto nos permite probar que el consecuente B es cierto. Esto nos lleva a la siguiente regla de introducción:

$$\frac{\begin{array}{c}[A \ \mathsf{true}] \\ \vdots \\ B \ \mathsf{true}\end{array}}{A \to B \ \mathsf{true}}$$

Aquí los corchetes que encierran al juicio hipotético A true indican que en la conclusión tal hipotésis fue descargada, es decir despues de introducir la implicación tal hipótesis ya no es necesaria, es decir, se trataba de una hipótesis temporal.

La regla de eliminación de la implicación modela una forma de razonamiento conocida desde Aristóteles y llamada "modus ponens". De los juicios $A \to B$ true y A true podemos obtener el juicio B true.

$$\frac{A \to B \ \mathsf{true} \qquad A \ \mathsf{true}}{B \ \mathsf{true}}$$

- La disyunción nos lleva a las siguientes reglas de introducción

$$\frac{A \ \mathsf{true}}{A \vee B \ \mathsf{true}} \qquad \frac{B \ \mathsf{true}}{A \vee B \ \mathsf{true}}$$

Lo cual captura el hecho de que una disyunción es cierta sólo si alguna de sus dos componentes lo es.
Para obtener la regla de eliminación debemos considerar como utilizar correctamente el juicio $A \vee B$ true dado que no sabemos con certeza cual de las dos componentes es cierta. Si tratamos de probar C true a partir de $A \vee B$ true debemos llegar a tal juicio sin importar cual de A true o B true es válido. Esto nos lleva a hacer una prueba por casos capturada en la siguiente regla:

$$\frac{A \vee B \ \mathsf{true} \qquad \begin{array}{c}[A \ \mathsf{true}] \\ \vdots \\ C \ \mathsf{true}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B \ \mathsf{true}] \\ \vdots \\ C \ \mathsf{true}\end{array}}{C \ \mathsf{true}}$$

Al igual que en la introducción de la implicación los corchetes indican que tal hipótesis es temporal y ha sido descargada.

- La falsedad $\perp$ representa una contradicción y no debería ser probable, por lo que no tiene regla de introducción. Inversamente si llegamos en algún momento al juicio $\perp$ true deberiamos poder concluir cualquier cosa, lo cual genera la regla de eliminación:

$$\frac{\perp \ \mathsf{true}}{A \ \mathsf{true}}$$

- La verdad debe ser demostrable sin importar que hipótesis tenemos, de manera que su regla de introducción es:

$$\frac{}{\top \ \mathsf{true}}$$

  Dado que no tenemos información de como introducir la verdad, tampoco podemos tener información de como eliminarla, por lo que no hay regla de eliminación.

- Cuantificación Universal: ¿Bajo que circunstancias debe la fórmula $\forall x A$ ser verdadera?, la respuesta depende claramente del dominio de cuantificación. Por ejemplo, si sabemos que la variable x toma como valores números naturales, entonces podemos concluir que $\forall x A$ es verdadera si podemos probar que las fórmulas $A[x := 0], A[x := 1], \ldots, A[x := n], \ldots$ son todas verdaderas, lo cual nos lleva a la siguiente regla:

$$\frac{A[x := 0] \ \mathsf{true} \quad A[x := 1] \ \mathsf{true} \ldots A[x := n] \ \mathsf{true} \ldots}{\forall x A \ \mathsf{true}}$$

  Tal regla no es efectiva dado que tendríamos un número infinito de premisas, usualmente se usa la regla de inducción en su lugar. Sin embargo la elección de tal regla depende fuertemente de un dominio de cuantificación particular mientras que lo que nos interesa es probar la verdad en cualquier dominio posible. De manera que podremos decir que $\forall x A$ es verdadera si sin asumir nada acerca de x, podemos cercioranos de la verdad de A, es decir tenemos la siguiente regla informal:

$$\frac{A \ \mathsf{true} \qquad x \text{ parámetrica en } A}{\forall x A \ \mathsf{true}}$$

  Por otro lado si sabemos que la fórmula $\forall x A$ es cierta entonces deberíamos poder concluir la verdad de $A[x := t]$ para cualquier objeto t, lo cual nos lleva a la siguiente regla:

$$\frac{\forall x A \ \mathsf{true}}{A[x := t] \ \mathsf{true}}$$

- Cuantificación Existencial: Si sabemos que $A[x := t]$ es cierta para algún objeto t entonces podemos concluir que $\exists x A$ es cierta, lo cual se modela mediante la regla:

$$\frac{A[x := t] \ \mathsf{true}}{\exists x A \ \mathsf{true}}$$

  Por otro lado cuando conocemos la verdad de $\exists x A$ no sabemos cual es el objeto t cuya existencia se asegura de manera que sólo podemos asumir A sin hacer ninguna suposición acerca del valor representado por x, lo cual se puede hacer sin problemas dado que la x

estaba ligada en A. La regla de eliminación para el existencial es entonces similar al caso de la disyunción:

$$\frac{\exists x A \ \mathsf{true} \qquad \begin{array}{c}[A \ \mathsf{true}] \\ \vdots \\ B \ \mathsf{true}\end{array} \qquad x \notin FV(B)}{B \ \mathsf{true}}$$

Se observa que no hemos hablado de la negación, conectivo de suma importancia que discutiremos más tarde. Como siempre la equivalencia se considera una abreviatura $A \leftrightarrow B =_{def} (A \to B) \wedge (B \to A)$

2. Sistemas de Deducción Natural con Contextos

En esta sección presentamos sistemas de deducción natural con contextos o hipótesis localizadas, es decir, en cada paso de la deducción estarán disponibles todas las hipótesis. Esta presentación podría parecer más complicada que otras, sin embargo la disponibilidad de todo el conjunto de hipótesis en cada momento es de gran utilidad como se verá al estudiar sistemas de tipos.

Definición 1 *Un contexto es un conjunto finito de fórmulas* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *. Usualmente denotaremos un contexto con* Γ, Δ, Π*. En lugar de* $\Gamma \cup \Delta$ *escribimos* Γ, Δ*. Analogamente* Γ, A *denota al contexto* $\Gamma \cup \{A\}$*.*

En adelante hacemos la siguiente convención: siempre que un contexto sea de la forma Γ, A, suponemos que la fórmula A no figura en Γ.

Si $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ entonces el conjunto de variables libres de Γ, denotado $FV(\Gamma)$, se define como la unión de los conjuntos de variables libres $FV(A_i)$.

2.1. Reglas de inferencia

La relación de derivabilidad o deducibilidad $\Gamma \vdash A$, leida "la fórmula A es derivable o deducible en el contexto Γ", se define recursivamente a partir de la regla de inicio

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(Hip)$$

dando reglas de introducción y eliminación para cada conectivo que queremos esté presente en el sistema:

- Implicación:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,(\to E)$$

- Conjunción:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,(\wedge E) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,(\wedge E)$$

- Disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee E)$$

- Cuantificador Universal:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall E)$$

- Cuantificador Existencial:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \notin FV(\Gamma, B)}{\Gamma \vdash B}\ (\exists E)$$

Obsérvese que mediante estas reglas de inferencia no estamos derivando fórmulas sino expresiones de la forma $\Gamma \vdash A$, conocidas como *secuentes*. En particular las reglas de inferencia son correctas con respecto a la consecuencia lógica, es decir transforman secuentes válidos (respecto a $\models$) en secuentes válidos como lo asegura la siguiente

Proposición 1 *Sean Γ un contexto y A, B, C fórmulas. Se cumple lo siguiente*

- *Si $\Gamma, A \models B$ entonces $\Gamma \models A \to B$.*
- *Si $\Gamma \models A$ y $\Gamma \models A \to B$ entonces $\Gamma \models B$.*
- *$\Gamma \models A \wedge B$ si y sólo si $\Gamma \models A$ y $\Gamma \models B$.*
- *Si $\Gamma \models A$ entonces $\Gamma \models A \vee B$.*
- *Si $\Gamma \models B$ entonces $\Gamma \models A \vee B$.*
- *Si $\Gamma \models A \vee B$, $\Gamma, A \models C$ y $\Gamma, B \models C$ entonces $\Gamma \models C$.*
- *Si $\Gamma \models A$ y $x \notin FV(\Gamma)$ entonces $\Gamma \models \forall x A$.*
- *Si $\Gamma \models \forall x A$ entonces $\Gamma \models A[x := t]$ siendo t cualquier término*
- *Si $\Gamma \models A[x := t]$ para algún término t entonces $\Gamma \models \exists x A$.*
- *Si $\Gamma \models \exists x A$ y $\Gamma, A \models B$ donde $x \notin FV(\Gamma, B)$ entonces $\Gamma \models B$.*

Demostración. Ejercicio $\dashv$

Definición 2 *Una derivación del secuente $\Gamma \vdash A$ es una sucesión finita de secuentes $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ tal que:*

- *$\Gamma_i \vdash A_i$ es instancia de la regla (Hip) ó*

- $\Gamma_i \vdash A_i$ *es conclusión de alguna regla de inferencia tal que las premisas necesarias figuran antes en la sucesión.*
- $\Gamma \vdash A$ *es el último elemento de la sucesión.*

Definición 3 *Si* $\vdash A$ *es derivable, es decir si* $\varnothing \vdash A$ *es derivable (*A *es derivable sin hipótesis) entonces decimos que* A *es un teorema.*

Mostramos ahora algunas reglas estructurales que pueden ser de ayuda en la construcción de derivaciones:

Proposición 2 *Las siguientes reglas de inferencia son válidas:*

- *Intercambio de premisas:*
$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}$$
- *Monotonía o debilitamiento:*
$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$
- *Contracción:*
$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$
- *Sustitución o Corte:*
$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

3. La Negación

La negación es quizás el conectivo lógico más importante, recordemos por ejemplo que para definir en lógica clásica todos los conectivos y cuantificadores, basta quedarnos con uno de los conectivos binarios, un cuantificador y la negación, la cual es imprescindible.

Sin importar que otros conectivos estén presentes, un sistema de deducción natural puede clasificarse, de acuerdo a qué clase de negación tenga, como minimal, intuicionista o clásico.

3.1. Lógica Minimal $\mathsf{DN_m}$

Se dice que la lógica es minimal si no hay reglas para la negación $\neg$ ni para lo falso $\perp$. En un sistema minimal la constante $\perp$ está presente pero no tiene propiedades particulares. En la presencia de $\perp$ el símbolo de negación se define como

$$\neg A =_{def} A \to \perp$$

En cuyo caso hablamos de la negación constructiva, cuyas reglas de inferencia son:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp}\,(\neg E)$$

Obsérvese que, de acuerdo a la definición de $\neg A$, estas reglas no son más que casos particulares de las reglas para la implicación $(\to I)$ y (MP) respectivamente.

3.2. Lógica Intuicionista $\mathsf{DN_i}$

La lógica intuicionista[1] se obtiene al agregar a la lógica minimal la regla de eliminación de lo falso ($\bot E$) conocida también como *ex-falso-quodlibet*.

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (EFQ)$$

Se observa que cualquier fórmula derivada en la lógica minimal sigue siendo derivable en la lógica intuicionista. Además se pueden derivar nuevas fórmulas, en particular la regla de eliminación de la negación puede modificarse como sigue en la lógica intuicionista:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg E)$$

Más aún, el carácter constructivo de la negación restringe a la lógica de una manera importante, en particular el sistema no permite probar la tautología clásica

$$A \vee \neg A$$

conocida como el principio del tercero excluido. Para convencernos de tal situación basta recordar qué significa el hecho de que una disyunción sea demostrable. En el caso del tercero excluido tendríamos que construir una prueba de A o bien una prueba de $\neg A$ lo cual no es posible en general. Este hecho implica igualmente que la fórmula $\neg\neg A \to A$ NO es válida. Por otro lado es fácil dar una derivación de $A \to \neg\neg A$ desde la lógica minimal. Otras fórmulas `NO` válidas en la lógica intuicionista son:

- $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.
- $(A \to B) \vee (B \to A)$.
- $\neg\forall x A \to \exists x \neg A$.
- $\forall x(A \vee B) \to A \vee \forall x B$ con $x \notin FV(A)$.
- $(B \to \exists x A) \leftrightarrow \exists x(B \to A)$ con $x \notin FV(B)$.
- $(\forall x A \to B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$ con $x \notin FV(B)$.
- $\forall x \neg\neg A \to \neg\neg\forall x A$.

Las demostraciones de la invalidez intuicionista de tales fórmulas utilizan técnicas de semánticas de Heyting ó forzamiento mediante marcos que no pertenecen a nuestro curso.

Las lógicas minimal e intuicionista también se conocen como lógicas constructivas porque toda fórmula se puede construir o derivar directamente, en particular se tienen las siguientes propiedades no válidas en la lógica clásica:

- Propiedad Disyuntiva: Si $\vdash_i A \vee B$ entonces $\vdash_i A$ ó $\vdash_i B$.
- Propiedad Existencial: Si $\vdash_i \exists x A$ entonces existe un término t tal que $\vdash_i A[x := t]$.

[1] El nombre se debe a una corriente lógica para fundamentar las matemáticas desarrollada a principios del siglo XX.

3.3. Lógica clásica $\mathsf{DN_c}$

Para recuperar a la lógica clásica tenemos que postular alguna de las siguientes reglas:

- Tercero Excluido:

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (TE)^2$$

- Reducción al absurdo:

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (RAA)$$

  Esta regla es muy utilizada en razonamientos matemáticos.

- Eliminación de la doble negación[3]

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg E)$$

Obsérvese que la regla (TE) permite probar $\vdash A \vee \neg A$ situación imposible de motivar en el ámbito constructivo. Esta situación rompe con la simetría de los conectivos dada por las reglas de introducción y eliminación. En particular en la lógica clásica podemos deducir disyunciones por medio de una regla distinta a la regla de introducción de la disyunción, a saber mediante el uso de la regla del tercero excluido.

3.4. Otras reglas de la negación clásica

Las siguientes reglas son de utilidad en la lógica clásica. Se deja como ejercicio mostrar que son derivables a partir de las reglas de negación dadas.

- Modus Tollens:

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

- Silogismo disyuntivo:

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

[2]También conocida como (TND) por su nombre en latín *Tertium non datur*.

[3]La regla dual para introducción de la doble negación:

$$\frac{A}{\neg\neg A}\ (\neg\neg I)$$

es válida desde la lógica minimal.

4. Ejemplos de derivaciones

En lo que sigue denotamos con $\vdash_m, \vdash_i, \vdash_c$ a las relaciones de derivación en los sistemas minimal, intuicionista y clásico, respectivamente. De las definiciones es claro que el sistema intuicionista es una extensión conservativa del minimal y el clásico del intuicionista. Es decir, $\Gamma \vdash_m A$ implica $\Gamma \vdash_i A$ implica $\Gamma \vdash_c A$. Sin embargo ninguna de las afirmaciones recíprocas es válida en general. En los ejemplos siguientes debe entenderse que el sistema correspondiente es estrictamente necesario, es decir, para las derivaciones en $\vdash_i$ (respectivamente $\vdash_c$) no existe una derivación en $\vdash_m$ (respectivamente $\vdash_i$), aunque para mostrar formalmente estas afirmaciones se necesitan técnicas semánticas que van más allá del alcance de nuestro curso.

- Mostrar que: $\vdash_m (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$

1	$p \wedge q \to r \, , \, p \, , \, q \vdash p$	Hip
2	$p \wedge q \to r \, , \, p \, , \, q \vdash q$	Hip
3	$p \wedge q \to r \, , \, p \, , \, q \vdash p \wedge q$	$(\wedge I \;\; 1,2)$
4	$p \wedge q \to r \, , \, p \, , \, q \vdash p \wedge q \to r$	Hip
5	$p \wedge q \to r \, , \, p \, , \, q \vdash r$	$(\to E \;\; 3,4)$
6	$p \wedge q \to r \, , \, p \vdash q \to r$	$(\to I \;\; 5)$
7	$p \wedge q \to r \vdash p \to q \to r$	$(\to I \;\; 6)$
8	$\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$	$(\to I \;\; 7)$

- Sea $\Gamma = \{p \to q \vee r \, , \, q \to r \, , \, r \to s\}$, queremos mostrar $\Gamma \vdash_m p \to s$

1	$\Gamma, \, p \vdash p$	(Hip)
2	$\Gamma, \, p \vdash p \to q \vee r$	(Hip)
3	$\Gamma, \, p \vdash q \vee r$	$(\to E)$ $1, 2$
4	$\Gamma, \, p, \, q \vdash q$	(Hip)
5	$\Gamma, \, p, \, q \vdash q \to r$	(Hip)
6	$\Gamma, \, p, \, q \vdash r$	$(\to E)$ $4, 5$
7	$\Gamma, \, p, \, r \vdash r$	(Hip)
8	$\Gamma, \, p \vdash r$	$(\vee E)$ $3, 6, 7$
9	$\Gamma, \, p \vdash r \to s$	(Hip)
10	$\Gamma, \, p \vdash s$	$(\to E)$ $8, 9$
11	$\Gamma \vdash p \to s$	$(\to I)$ 10

- $\vdash_m A \to \neg\neg A$. Basta mostrar que $A, A \to \bot \vdash \bot$.

1.	$A, A \to \bot \vdash A$	(Hip)
2.	$A, A \to \bot \vdash A \to \bot$	(Hip)
3.	$A, A \to \bot \vdash \bot$	$(\to E)$ $1, 2$

- $\vdash_m \neg\neg(A \vee \neg A)$. Basta derivar $A \vee \neg A \to \bot \vdash_m \bot$.

$$\begin{array}{lll}
1. & A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A & (Hip) \\
2. & A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A \vee \neg A & (\vee I)\ 1 \\
3. & A \vee \neg A \to \bot, A \vdash A \vee \neg A \to \bot & (Hip) \\
4. & A \vee \neg A \to \bot, A \vdash \bot & (\to E)\ 2,3 \\
5. & A \vee \neg A \to \bot \vdash A \to \bot & (\to I)\ 4 \\
6. & A \vee \neg A \to \bot \vdash A \vee \neg A & (\vee I)\ 5 \\
7. & A \vee \neg A \to \bot \vdash \bot & (\to E)\ 3,6
\end{array}$$

- $\vdash_m \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$. Hay que mostrar ambas implicaciones:

  - $\vdash_m \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$. Basta mostrar $A \vee B \to \bot, A \vdash_m \bot$ y $A \vee B \to \bot, B \vdash_m \bot$.

$$\begin{array}{lll}
1. & A \vee B \to \bot, A \vdash A & (Hip) \\
2. & A \vee B \to \bot, A \vdash A \vee B & (\vee I)\ 1 \\
3. & A \vee B \to \bot, A \vdash A \vee B \to \bot & (Hip) \\
4. & A \vee B \to \bot, A \vdash \bot & (\to E)\ 2,3
\end{array}$$

  la derivación faltante es análoga.

  - $\vdash_m \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$. Basta mostrar $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \bot$.

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B & (Hip) \\
2. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A \wedge \neg B & (Hip) \\
3. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A & (Hip) \\
4. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A & (\wedge E)\ 2 \\
5. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \bot & (\to E)\ 3,4 \\
6. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg A \wedge \neg B & (Hip) \\
7. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B & (Hip) \\
8. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B & (\wedge E)\ 6 \\
9. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \bot & (\to E)\ 7,8 \\
10. & \neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \bot & (\vee E)\ 1,5,9
\end{array}$$

- $\vdash_i \neg A \vee B \to A \to B$. Basta mostrar $\neg A \vee B, A \vdash B$

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B & (Hip) \\
2. & \neg A \vee B, A, \neg A \vdash A & (Hip) \\
3. & \neg A \vee B, A, \neg A \vdash \neg A & (Hip) \\
4. & \neg A \vee B, A, \neg A \vdash \bot & (\to E)\ 2,3 \\
5. & \neg A \vee B, A, \neg A \vdash B & (\bot E)\ 4 \\
6. & \neg A \vee B, A, B \vdash B & (Hip) \\
7. & \neg A \vee B, A \vdash B & (\vee E)\ 1,5,6
\end{array}$$

- $\vdash_i A \vee \neg A \to \neg\neg A \to A$. Basta mostrar $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A$.

1.	$A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A \vee \neg A$	(Hip)
2.	$A \vee \neg A, \neg\neg A, A \vdash A$	(Hip)
3.	$A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \neg A$	(Hip)
4.	$A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A$	(Hip)
5.	$A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash \bot$	$(\to E)\ 3, 4$
6.	$A \vee \neg A, \neg\neg A, \neg A \vdash A$	$(\bot E)\ 5$
7.	$A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A$	$(\vee E)\ 1, 2, 6$

- $\vdash_c \neg\neg A \leftrightarrow A$. La parte $\vdash A \to \neg\neg A$ ya fue probada. Basta probar entonces $\vdash \neg\neg A \to A$, es decir, $\neg\neg A \vdash A$. Pero esto es inmediato por la regla $(\neg\neg E)$

- $\vdash_c \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. La parte "$\leftarrow$ " es válida minimalmente. Basta probar $\neg(A \wedge B) \vdash_c \neg A \vee \neg B$.

1.	$\neg(A \wedge B) \vdash A \vee \neg A$	(TE)
2.	$\neg(A \wedge B), A \vdash B \vee \neg B$	(TE)
3.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash A$	(Hip)
4.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash B$	(Hip)
5.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash A \wedge B$	$(\wedge I)\ 3, 4$
6.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg(A \wedge B)$	(Hip)
7.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash \bot$	$(\to E)\ 5, 6$
8.	$\neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\bot E)\ 7$
9.	$\neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg B$	(Hip)
10.	$\neg(A \wedge B), A, \neg B \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee I)\ 9$
11.	$\neg(A \wedge B), A \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee E)\ 2, 8, 10$
12.	$\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A$	(Hip)
13.	$\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee I)\ 12$
14.	$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$	$(\vee E)\ 1, 11, 13$

- $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$. Por la ley de contrapositiva basta mostrar $\neg A \vdash_c \neg((A \to B) \to A)$. Por otra parte, se puede probar que $C \wedge \neg D \vdash_m \neg(C \to D)$, por lo que basta mostrar $\neg A \vdash_c (A \to B) \wedge \neg A$, lo cual se sigue de $\neg A, A \vdash_c B$. Pero esto es inmediato de la regla $(\bot E)$.

Veamos ahora algunos ejemplos con cuantificadores.

- Mostrar que: $\vdash_m \forall v(Pv \to Qv) \to \forall x(\exists y(Py \wedge Rxy) \to \exists z(Qz \wedge Rxz))$

1	$\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \forall v(Pv \to Qv)$	Hip
2	$\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy) \vdash \exists y(Py \wedge Rxy)$	Hip
3	$\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py \wedge Rxy$	Hip
4	$\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py \to Qy$	$\forall E$ 1
5	$\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \wedge Rxy)\,,\, Py \wedge Rxy \vdash Py$	$\wedge E$ 3

6 $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \land Rxy)\,,\, Py \land Rxy \vdash Rxy$ $\quad \land E\ 3$

7 $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \land Rxy)\,,\, Py \land Rxy \vdash Qy$ $\quad \to E\ 4,5$

8 $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \land Rxy)\,,\, Py \land Rxy \vdash Qy \land Rxy$ $\quad \land I\ 6,7$

9 $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \land Rxy)\,,\, Py \land Rxy \vdash \exists z(Qz \land Rxz)$ $\quad \exists I\ 8$

10 $\forall v(Pv \to Qv)\,,\, \exists y(Py \land Rxy) \vdash \exists z(Qz \land Rxz)$ $\quad \exists E\ 2,9$

11 $\forall v(Pv \to Qv) \vdash \exists y(Py \land Rxy) \to \exists z(Qz \land Rxz)$ $\quad \to I\ (0$

12 $\forall v(Pv \to Qv) \vdash \forall x(\exists y(Py \land Rxy) \to \exists z(Qz \land Rxz))$ $\quad \forall I\ 11$

13 $\vdash \forall v(Pv \to Qv) \to \forall x(\exists y(Py \land Rxy) \to \exists z(Qz \land Rxz))$ $\quad \to I\ 12$

- $\vdash_m A \lor \forall xB \to \forall x(A \lor B)$ con $x \notin FV(A)$.

1.	$A \lor \forall xB, A \vdash A \lor \forall xB$	(Hip)
2.	$A \lor \forall xB, A \vdash A$	(Hip)
3.	$A \lor \forall xB, A \vdash A \lor B$	$(\lor I, 2)$
4.	$A \lor \forall xB, A \vdash \forall x(A \lor B)$	$(\forall I, 3),\ x \notin FV(\{A \lor \forall xB, A\})$
5.	$A \lor \forall xB, \forall xB \vdash \forall xB$	(Hip)
6.	$A \lor \forall xB, \forall xB \vdash B$	$(\forall E, 5)$
7.	$A \lor \forall xB, \forall xB \vdash A \lor B$	$(\lor I, 6)$
8.	$A \lor \forall xB, \forall xB \vdash \forall x(A \lor B)$	$(\forall I, 7),\ x \notin FV(\{A \lor \forall xB, \forall xB\})$
9.	$A \lor \forall xB \vdash \forall x(A \lor B)$	$(\lor E, 1, 4, 8)$

- $\vdash_c \forall x(A \lor B) \to A \lor \forall xB$ con $x \notin FV(A)$. Basta probar que $\forall x(A \lor B), \neg A \vdash_c \forall xB$

1.	$\forall x(A \lor B), \neg A \vdash \forall x(A \lor B)$	(Hip)
2.	$\forall x(A \lor B), \neg A \vdash \neg A$	(Hip)
3.	$\forall x(A \lor B), \neg A \vdash A \lor B$	$(\forall E, 1)$
4.	$\forall x(A \lor B), \neg A \vdash B$	$(RB, 2, 3)$
5.	$\forall x(A \lor B), \neg A \vdash \forall xB$	$(\forall I, 4), x \notin FV(\{\forall x(A \lor B), \neg A\})$

  Aquí RB denota a la regla de resolución binaria, válida en lógica clásica.

- $\vdash_m \exists x(A \to B) \to (\forall xA \to B)$ con $x \notin FV(B)$. Basta ver que $\exists x(A \to B),\ \forall xA \vdash_m B$

1.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA \vdash \exists x(A \to B)$	(Hip)
2.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA, A \to B \vdash \forall xA$	(Hip)
3.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA, A \to B \vdash A$	$(\forall E, 2)$
4.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA, A \to B \vdash A \to B$	(Hip)
5.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA, A \to B \vdash B$	$(\to E, 3, 4)$
6.	$\exists x(A \to B),\ \forall xA \vdash B$	$(\exists E, 1, 5),\ x \notin FV(\{\exists x(A \to B), B\})$

- $\vdash_c (\forall xA \to B) \to \exists x(A \to B)$ con $x \notin FV(B)$. Puesto que estamos en lógica clásica basta probar $\forall xA \to B \vdash_c \neg\forall x\neg(A \to B)$, es decir, $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash_c \bot$.

1. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \forall x\neg(A \to B)$ (Hip)
2. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$ $(\forall E, 1)$
3. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash A \wedge \neg B$ $(equiv.\ logica, 2)$
4. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash A$ $(\wedge E, 3)$
5. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \forall xA$ $(\forall I, 4),\ x \notin FV(\{\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B)\})$
6. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \forall xA \to B$ (Hip)
7. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash B$ $(\to E, 5, 6)$
8. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \neg B$ $(\wedge E, 3)$
9. $\forall xA \to B,\ \forall x\neg(A \to B) \vdash \perp$ $(\to E, 7, 8)$

- $\vdash_m \forall xA \to \neg\exists x\neg A$. Basta ver que $\forall xA,\ \exists x\neg A \vdash_m \perp$

1. $\forall xA, \exists x\neg A \vdash \exists x\neg A$ (Hip).
2. $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A$ (Hip).
3. $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \forall xA$ (Hip).
4. $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash A$ $(\forall E, 3)$.
5. $\forall xA, \exists x\neg A, \neg A \vdash \perp$ $(\to E, 2, 4)$.
6. $\forall xA, \exists x\neg A \vdash \perp$ $(\exists E, 1, 5),\ x \notin FV(\{\forall xA, \exists x\neg A, \perp\})$.

- $\vdash_c \neg\exists x\neg A \to \forall xA$. Basta ver que $\neg\exists x\neg A \vdash_c \forall xA$ y como $x \notin FV(\neg\exists x\neg A)$ basta con $\neg\exists x\neg A \vdash_c A$, para lo cual mostramos $\neg\exists x\neg A \vdash_c \neg\neg A$, es decir $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash_c \perp$

1. $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\neg A \to \perp$ (Hip).
2. $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A$ (Hip).
3. $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\neg A$ $(\exists I, 2)$.
4. $\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \perp$ $(\to E, 1, 3)$.

5. Estrategias de derivación

Las siguientes estrategias se basan en las reglas de introducción y permiten construir una fórmula de acuerdo a su conectivo principal.

- Para derivar $\Gamma \vdash A \to B$ basta derivar $\Gamma, A \vdash B$.
- Para derivar $\Gamma \vdash A \wedge B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash B$
- Para derivar $\Gamma \vdash A \vee B$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ o bien $\Gamma \vdash B$
- Para derivar $\Gamma \vdash \forall xA$ basta derivar $\Gamma \vdash A$ donde s.p.g. $x \notin FV(\Gamma)$
- Para derivar $\Gamma \vdash \exists xA$ basta encontrar un término t tal que $\Gamma \vdash A[x := t]$

Las siguientes estrategias se basan en las reglas de eliminación y permiten construir una fórmula C usando una premisa particular:

- Aplicación: para derivar $\Gamma, A \to C \vdash C$, basta derivar

$$\Gamma, A \to C \vdash A$$

- Para derivar $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ basta derivar

$$\Gamma, A, B \vdash C$$

- Para derivar $\Gamma, A \vee B \vdash C$ basta derivar

$$\Gamma, A \vdash C \;\text{ y }\; \Gamma, B \vdash C$$

- Para derivar $\Gamma, \exists x A \vdash C$ basta derivar

$$\Gamma, A \vdash C$$

  donde $x \notin FV(\Gamma, C)$

La siguiente estrategia corresponde al uso de un lema, la fórmula A, en matemáticas. Se recomienda utilizarla cuando las anteriores no funcionan directamente.

- Aserción: Para derivar $\Gamma \vdash C$ basta proponer A y derivar

  $\Gamma \vdash A$ y

  $\Gamma, A \vdash C$

El uso adecuado de las estrategias anteriores nos llevar eventualmente a buscar pruebas triviales. Las siguientes estrategias permiten concluir pruebas o disminuir el número de subpruebas en una prueba particular.

- Para derivar

$$\Gamma, A \vdash A$$

  no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.

- Para derivar

$$\Gamma, \forall x A \vdash A[x := t]$$

  no hay nada más que hacer pues esta es una derivación válida.

6. Tácticas

Las estrategias anteriores pueden mecanizarse mediante un procedimiento de búsqueda de pruebas orientado a metas. Una meta es simplemente un secuente $\Gamma \vdash A$ correspondiente a la prueba deseada. Usando las estrategias definidas arriba este secuente se transforma en una secuencia de uno o más secuentes digamos $\Gamma_1 \vdash A_1; \ldots ; \Gamma_k \vdash A_k$ siendo la nueva meta a resolver el secuente $\Gamma_1 \vdash A_1$, el cual genera nuevas submetas, y así sucesivamente. El proceso de búsqueda se simplifica con las siguientes definiciones.

- $\mathcal{S}$ denota a una secuencia finita de metas (posiblemente vacía, denotada $\Box$)

$$\mathcal{S} =_{def} \mathcal{G}_1; \ldots ; \mathcal{G}_k$$

- El proceso de búsqueda aplica una estrategia a la primera meta de la secuencia actual Si al aplicar cierta estrategia a la meta $\mathcal{G}_1$ se generan las submetas $\mathcal{G}'_{11}; \mathcal{G}'_{12}; \ldots ; \mathcal{G}'_{1k}$ entonces escribimos

$$\mathcal{G}_1; \mathcal{S} \; \triangleright \; \mathcal{G}'_{11}; \mathcal{G};_{12}; \ldots ; \mathcal{G}_{1k}; \mathcal{S}$$

  y a este proceso le llamamos táctica.

- La relación $\mathcal{S} \triangleright \mathcal{S}'$ puede leerse como *para demostrar la secuencia $\mathcal{S}$ es suficiente demostrar la secuencia $\mathcal{S}'$*. Por ejemplo:

  Para demostrar que $p, q \vdash (q \vee r) \wedge p$
  es suficiente demostrar que $p, q \vdash q \vee r$ y que $p, q \vdash p$
  por lo que escribimos $p, q \vdash (q \vee r) \wedge p \; \triangleright \; p, q \vdash q \vee r \; ; \; p, q \vdash p$.

  Para demostrar que $p, q \vdash q \vee r$ y $p, q \vdash p$
  es suficiente demostrar $p, q \vdash q$ y $p, q \vdash p$
  por lo que escribimos $p, q \vdash q \vee r \; ; \; p, q \vdash p \; \triangleright \; p, q \vdash q \; ; \; p, q \vdash p$.

  Para demostrar que $p, q \vdash q$ y $p, q \vdash p$
  es suficiente demostrar $p, q \vdash p$ (pues $p, q \vdash q$ es inmediato)
  por lo que escribimos $p, q \vdash q \; ; \; p, q \vdash p \; \triangleright \; p, q \vdash p$.

  Para demostrar $p, q \vdash p$
  hemos terminado pues $p, q \vdash p$ es inmediato por lo que escribimos $p, q \vdash p \; \triangleright \; \Box$

A continuación definimos las tácticas particulares. Aquí $\mathcal{S}$ denota a una secuencia arbitraria de metas. Aquí una expresión de la forma $H : A$ denota a una hipótesis etiquetada con el nombre H el cual se usa como referencia en la definición de la táctica. En general un contexto tiene todas las hipótesis etiquetadas, es decir, es de la forma $\Gamma = \{H_1 : A_1, \ldots , H_n : A_n\}$.

- `intro`: $\Gamma \vdash A \to B; \mathcal{S} \; \triangleright \; \Gamma, A \vdash B; \mathcal{S}$

- `split`: $\Gamma \vdash A \wedge B; \mathcal{S} \; \triangleright \; \Gamma \vdash A; \Gamma \vdash B; \mathcal{S}$

- `left`: $\Gamma \vdash A \vee B; \mathcal{S} \; \triangleright \; \Gamma \vdash A; \mathcal{S}$

- `right`: $\Gamma \vdash A \vee B; \mathcal{S} \; \triangleright \; \Gamma \vdash B; \mathcal{S}$

- `intro`: $\Gamma \vdash \forall x A; \mathcal{S} \; \triangleright \; \Gamma \vdash A; \mathcal{S}$ donde s.p.g $x \notin FV(\Gamma)$

- `exists t`: $\Gamma \vdash \exists x A; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma \vdash A[x := t]; \mathcal{S}$ para algún t.
- `apply` H: $\Gamma, H : A \to B \vdash B; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma, H : A \to B \vdash A; \mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : A \wedge B \vdash C; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma, H_1 : A, H_2 : B \vdash C; \mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : A \vee B \vdash C; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma, H_1 : A \vdash C; \Gamma, H_2 : B \vdash C; \mathcal{S}$
- `apply` H: $\Gamma, H : \forall x A \vdash A[x := t]; \mathcal{S} \ \triangleright \ \mathcal{S}$
- `destruct` H: $\Gamma, H : \exists x A \vdash C; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma, H_1 : A \vdash C; \mathcal{S}$ donde $x \notin FV(\Gamma)$
- `trivial`: $\Gamma, H : A \vdash A; \mathcal{S} \ \triangleright \ \mathcal{S}$ en particular $\Gamma, A \vdash A \ \triangleright \ \square$
- `assert` A: $\Gamma \vdash C; \mathcal{S} \ \triangleright \ \Gamma \vdash A; \Gamma, \ H : A \vdash C; \mathcal{S}$

Los nombres de las tácticas corresponden al nombre del comando en el asistente de prueba Coq que usaran en el laboratorio.

Veamos algunos ejemplos de derivación mediante tácticas.

- Probar que: $\vdash (p \wedge q \to r) \to p \to q \to r$

1	$H_1 : p \wedge q \to r \vdash p \to q \to r$	intro
2	$H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \vdash q \to r$	intro
3	$H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \ , \ H_3 : q \vdash r$	intro
4	$H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \ , \ H_3 : q \vdash p \wedge q$	apply H_1
5	$H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \ , \ H_3 : q \vdash p \ ; \ H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \ , \ H_3 : q \vdash q$	split
6	$H_1 : p \wedge q \to r \ , \ H_2 : p \ , \ H_3 : q \vdash q$	trivial
7	$\square$	trivial

- Sea $\Gamma = \{H : p \to q \vee r, \ H' : q \to r, \ H'' : r \to s\}$. Queremos mostrar que $\Gamma \vdash p \to s$

1	$\Gamma \vdash p \to s$	
2	$\Gamma, \ H_1 : p \vdash s$	intro
3	$\Gamma, \ H_1 : p \vdash r$	apply H''
4	$\Gamma, \ H_1 : p \vdash q \vee r \quad ; \quad \Gamma, \ H_1 : p, \ H_2 : q \vee r \vdash r$	assert $q \vee r$
5	$\Gamma, \ H_1 : p \vdash p \quad ; \quad \Gamma, \ H_1 : p, \ H_2 : q \vee r \vdash r$	apply H
6	$\Gamma, \ H_1 : p, \ H_2 : q \vee r \vdash r$	trivial
7	$\Gamma, \ H_1 : p, \ H_2 : q \vdash r \quad ; \quad \Gamma, \ H_1 : p, \ H_3 : r \vdash r$	destruct H_2
8	$\Gamma, \ H_1 : p, \ H_2 : q \vdash q \quad ; \quad \Gamma, \ H_2 : p, \ H_3 : r \vdash r$	apply H'
9	$\Gamma, \ H_1 : p, \ H_3 : r \vdash r$	trivial
10	$\square$	trivial

6.1. Tácticas para la negación

Las siguientes tácticas son útiles cuando hay que razonar con negación:

- `absurd (A) :` $\Gamma \vdash B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma \vdash A \;;\; \Gamma \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$
- `contradict H:` $\Gamma, H : \neg A \vdash B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma \vdash A\,;\mathcal{S}$
- `contradict H:` $\Gamma, H : \neg A \vdash \neg B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma, H : B \vdash A\,;\mathcal{S}$
- `contradict H:` $\Gamma, H : A \vdash B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$
- `contradict H:` $\Gamma, H : A \vdash \neg B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma, H : B \vdash \neg A\,;\mathcal{S}$

Las siguientes tácticas sólo están disponibles en la lógica clásica al importar la biblioteca `Classical`

- `exact (classic (A)):` $\Gamma \vdash A \vee \neg A\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \mathcal{S}$
- `exact (NNPP (A)):` $\Gamma \vdash \neg\neg A \to A\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \mathcal{S}$

La primera de estas tácticas es útil en combinación con `assert` para agregar una instancia del tercero excluido al contexto y la segunda para agregar una instancia de la parte clásica de la ley de doble negación . Otras tácticas útiles derivada de éstas son:

- `destruct (classic (A)):` $\Gamma \vdash B\,;\mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma, A \vdash B \;;\; \Gamma, \neg A \vdash B;\; \mathcal{S}.$
- `apply (NNPP(A)):` $\Gamma \vdash A \;;\; \mathcal{S} \;\rhd\; \Gamma \vdash \neg\neg A \;;\; \mathcal{S}$

7. Los teoremas de completud y correctud para la lógica clásica

Finalizamos nuestras consideraciones acerca de los sistemas de deducción natural mencionando los teoremas de correctud y completud para la lógica clásica $\mathsf{DN_c}$ que vinculan el mundo de la semántica con el de la sintáxis de manera biunívoca.

Teorema 1 (Correctud de $\mathsf{DN_c}$) *Sean Γ un conjunto de fórmulas y A una fórmula. La relación $\vdash_c$ es correcta con respecto a la consecuencia lógica,es decir:*

$$\textit{Si } \Gamma \vdash_c A \textit{ entonces } \Gamma \models A.$$

Demostración. Inducción sobre $\Gamma \vdash_c A$. Lo cual equivale a probar que todas las reglas del sistema $\mathsf{DN_c}$ preservan la noción $\models$ pero esto es justo lo que dice la proposición 1.

Teorema 2 (Completud de $\mathsf{DN_c}$) *Sean Γ un conjunto de fórmulas y A una fórmula. El sistema $\mathsf{DN_c}$ es completo con respecto a la relación $\vdash_c$, es decir:*

$$\textit{Si } \Gamma \models A \textit{ entonces } \Gamma \vdash_c A.$$

Demostración. Omitimos la demostración dado que las técnicas necesarias pertenecen al ámbito de la lógica matemática pura.

8. Reglas del sistema de Fitch (con cajas)

Una presentación común del sistema de deducción natural es usando el llamado sistema de Fitch o sistema de cajas. Enunciamos aquí sus reglas por ser un sistema importante, aunque no lo usaremos en este curso. En este sistema las derivaciones son sucesiones de fórmulas y no de secuentes.

- Conjunción:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge E) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge E)$$

- Implicación:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \vdots\\ \mathrm{B}\end{array}}}{A \to B}\ (\to I)$$

$$\frac{A \to B \quad A}{B}\ (MP)$$ [4]

- Disyunción

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee I) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee I)$$

$$\frac{\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{B}\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}}}{\mathrm{C}}$$

- Verdad:

$$\frac{}{\top}\ (\top I)$$

- Cuantificación universal:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}x_0 \text{ parámetro}\\ \vdots\\ A[x := x_0]\end{array}}}{\forall x A}\ (\forall I)$$

[4] Tambien denotada como $(\to E)$

La condición de que x_0 sea un parámetro significa que x_0 no puede figurar libre fuera de su caja.

$$\frac{\forall x \mathrm{A}}{\mathrm{A}[x := t]}\ (\forall E)$$

- Cuantificación existencial:

$$\frac{A[x := t]}{\exists x A}\ (\exists I)$$

$$\frac{\exists x A \qquad \boxed{\begin{array}{c} A[x := x_0] \\ \vdots \\ B \end{array}} \qquad x_0 \ \text{parámetro}}{B}\ (\exists E)$$

x_0 parámetro significa que x_0 no puede estar libre fuera de su caja, en particular x_0 no debe estar libre en B.