

# Reposiciones de ejercicios semanales

Rubí Rojas Tania Michelle  
Universidad Nacional Autónoma de México  
taniarubi@ciencias.unam.mx  
# de cuenta: 315121719

29 de mayo de 2019

## 1. Semanal 1

- a) Defina recursivamente la función **nn** especificada como sigue:  
Dada una fórmula  $\varphi$ , **nn**( $\varphi$ ) devuelve el número de símbolos de negación en la fórmula.  
Solución: Definimos la función  $nn :: PROP \rightarrow \mathbb{N}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}nn(\top) &= 0 \\nn(\perp) &= 0 \\nn(VarP) &= 0 \\nn(\neg\varphi) &= nn(\varphi) + 1 \\nn(\varphi \star \psi) &= nn(\varphi) + nn(\psi) + 0\end{aligned}$$

- b) Demuestre utilizando inducción estructural que para cualquier fórmula  $\varphi$  se cumple

$$\mathbf{nn}(\varphi) \leq \mathbf{nn}(\mathbf{qi}(\varphi)).$$

Donde la función  $qi$  devuelve una fórmula lógicamente equivalente en la que no figura el símbolo de implicación.

*Demostración.* Inducción sobre la fórmula  $\varphi$ .

■ *Base de inducción.*

- $\varphi = \top$ . Entonces  $nn(\top) = 0 = nn(\top) = nn(qi(\top))$
- $\varphi = \perp$ . Entonces  $nn(\perp) = 0 = nn(\perp) = nn(qi(\perp))$
- $\varphi = VarP$ . Entonces  $nn(VarP) = 0 = nn(VarP) = nn(qi(VarP))$

■ *Hipótesis de inducción.*

Supongamos que se cumple para  $nn(\varphi') \leq nn(qi(\varphi'))$  y  $nn(\varphi'') \leq nn(qi(\varphi''))$ .

■ *Paso inductivo.*

Tenemos dos casos:

1)  $\varphi = \neg\varphi'$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 nn(\varphi) &= nn(\neg\varphi') && \text{def. de } \varphi \\
 &= nn(\varphi') + 1 && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\varphi')) + 1 && \text{H.I.} \\
 &\leq nn(\neg(qi(\varphi'))) && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\neg\varphi')) && \text{def. recursiva de qi} \\
 &\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
 \end{aligned}$$

2)  $\varphi = \phi \star \psi$ . Tenemos tres subcasos:

i)  $\varphi = \phi \star \psi$  con  $\star \in \{\wedge, \vee\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 nn(\varphi) &= nn(\phi \star \psi) && \text{def. de } \varphi \\
 &= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
 &\leq nn(qi(\phi) \star qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\phi \star \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
 &\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
 \end{aligned}$$

ii)  $\varphi = \phi \star \psi$  con  $\star \in \{\rightarrow\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 nn(\varphi) &= nn(\phi \rightarrow \psi) && \text{def. de } \varphi \\
 &= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
 &\leq nn(qi(\phi) \rightarrow qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(\neg qi(\phi) \vee qi(\psi)) && \text{equivalencia l3gica} \\
 &\leq nn(qi(\phi \rightarrow \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
 &\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
 \end{aligned}$$

iii)  $\varphi = \phi \star \psi$  con  $\star \in \{\leftrightarrow\}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 nn(\varphi) &= nn(\phi \leftrightarrow \psi) && \text{def. de } \varphi \\
 &= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
 &\leq nn(qi(\phi) \leftrightarrow qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
 &\leq nn((\neg qi(\phi) \vee qi(\psi)) \wedge (qi(\phi) \vee \neg qi(\psi))) && \text{equivalencia l3gica} \\
 &\leq nn(qi(\phi \leftrightarrow \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
 &\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
 \end{aligned}$$

□

## 2. Semanal 2

- a) Sea  $\varphi = \neg(q \wedge ((r \rightarrow \neg s \vee r) \rightarrow p))$ . Convierta a  $\varphi$  en una fórmula lógicamente equivalente  $\varphi'$  que se encuentre en Forma Normal Negativa.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} fnn(\varphi) &= \neg(q \wedge ((\neg r \vee \neg s \vee r) \rightarrow p)) \\ &= \neg(q \wedge ((r \wedge s \wedge \neg r) \vee p)) \\ &= \neg q \vee ((\neg r \vee \neg s \vee r) \wedge \neg p) \end{aligned}$$

- b) Sea  $\Gamma = \{(a \vee b) \wedge c, \neg b \vee \neg c\}$  y  $\varphi = a$ . Determine mediante el método de tableaux si  $\Gamma \models \varphi$ .

*Demostración.* Para mostrar que  $\Gamma \models \varphi$  entonces hay que trabajar nuestro Tableaux con  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . Así,

1.	$(a \vee b) \wedge c \checkmark$	Hip
2.	$\neg b \vee \neg c \checkmark$	Hip
3.	$\neg a \checkmark$	Hip
4.	$c \checkmark$	ext. de $\alpha$ en 1
5.	$a \vee b \checkmark$	ext. de $\alpha$ en 1
<div style="text-align: center;">└───┬───┘</div>		
6.	$a \checkmark$ $b \checkmark$	ext. de $\beta$ en 5
<div style="text-align: center;">└───┬───┘</div>		
7.	$\otimes$ $\neg b \checkmark$ $\neg c \checkmark$	ext. de $\beta$ en 2
	$\otimes$ $\otimes$	
	3,6      6,7      4,7	

Como todas las ramas se cerraron entonces podemos concluir que  $\Gamma \models \varphi$ . □

## 3. Semanal 3

- a) Da la especificación formal del siguiente argumento, definiendo previamente un glosario adecuado.

*Todos los estudiantes cursan al menos una materia*

SOLUCIÓN:

- Universo del discurso: Todas las personas.
- Predicados:  $E(x) : x$  es estudiante y  $C(x, y) : x$  cursa la materia  $y$ .
- Especificación Formal:  $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y C(x, y))$

b) Considere la siguiente expresión.

$$\forall x \exists y (A(y, x) \rightarrow M(x, y) \wedge (\exists z A(x, z) \wedge M(z, x)))$$

Aplique la siguiente sustitución:  $\sigma = [u := a][z := x][x := n]$ .

Solución: Primero aplicamos  $\alpha$ -equivalencia, donde obtenemos

$$\forall w \exists s (A(s, w) \rightarrow M(w, s) \wedge (\exists r A(w, r) \wedge M(z, w)))$$

Así, al aplicar la sustitución  $\sigma$  tenemos que

$$\begin{aligned} & (\forall w \exists s (A(s, w) \rightarrow M(w, s) \wedge (\exists r A(w, r) \wedge M(z, w))))[u := a][z := x][x := n] \\ &= (\forall w \exists s (A(s, w) \rightarrow M(w, s) \wedge (\exists r A(w, r) \wedge M(z, w))))[z := x][x := n] \\ &= (\forall w \exists s (A(s, w) \rightarrow M(w, s) \wedge (\exists r A(w, r) \wedge M(x, w))))[x := n] \\ &= (\forall w \exists s (A(s, w) \rightarrow M(w, s) \wedge (\exists r A(w, r) \wedge M(n, w)))) \end{aligned}$$

#### 4. Semanal 4

a)  $\Gamma = \{\forall x(Qy \rightarrow Px)\}$ . utilizando Tableaux demuestre lo siguiente:

$$\Gamma \models Qy \rightarrow \forall x Px$$

*Demostración.* Para mostrar que  $\Gamma \models Qy \rightarrow \forall x Px$  entonces hay que trabajar nuestro Tableaux con  $\Gamma \cup \{Qy \wedge \exists x \neg Px\}$ . Así,

1.	$\forall x(Qy \rightarrow Px)$	Hip
2.	$Qy \wedge \exists x \neg Px \checkmark$	Hip
3.	$Qy \checkmark$	ext. de $\alpha$ en 2
4.	$\exists x \neg Px \checkmark$	ext. de $\alpha$ en 2
5.	$\neg Pa \checkmark$	ext. de $\delta$ en 4
6.	$Qy \rightarrow Pa \checkmark$	ext. de $\gamma$ en 1
$\swarrow \quad \searrow$		
7.	$\neg Qy \checkmark \quad Pa \checkmark$	ext. de $\beta$ en 6
	$\otimes \quad \otimes$	
	3,7      5,7	

Como todas las ramas se cerraron entonces podemos concluir que  $\Gamma \models Qy \rightarrow \forall x Px$ . □

#### 5. Semanal 5

a) Sea  $\varphi = \forall x \exists y (Pxyz \rightarrow (Qz \vee Ryx)) \rightarrow Qy \wedge (\exists x \forall z Rxz \vee \exists w Sx)$ . Obten la Forma Normal Clausular de  $\varphi$ .

SOLUCIÓN: Primero, rectificamos a  $\varphi$ .

$$rect(\varphi) = \forall m \exists n (Pmnz \rightarrow (Qz \vee Rnm)) \rightarrow Qy \wedge (\exists s \forall u Rsu \vee Sx)$$

Así,

$$\begin{aligned} fnp(\varphi) &= \exists s \forall u (\forall m \exists n (Pmnz \rightarrow (Qz \vee Rnm)) \rightarrow Qy \wedge (Rsu \vee Sx)) && \text{eq. lógica} \\ &= \exists s \forall u \exists m \forall n ((Pmnz \rightarrow (Qz \vee Rnm)) \rightarrow Qy \wedge (Rsu \vee Sx)) && \text{eq. lógica} \end{aligned}$$

Entonces,

$$fns(\varphi) = \forall u \forall n ((Pfunz \rightarrow (Qz \vee Rnfu)) \rightarrow Qy \wedge (Rau \vee Sx))$$

Luego,

$$fnn(\varphi) = \forall u \forall n ((Pfunz \wedge (\neg Qz \wedge \neg Rnfu)) \vee Qy \wedge (Rau \vee Sx))$$

Por lo tanto,

$$Cl(\varphi) = Pfunz \wedge \neg Qz \wedge (\neg Rnfu \vee Qy) \wedge (Rau \vee Sx)$$

## 6. Semanal 6

- a) Transforme a Forma Normal Clausular y decida mediante resolución binaria si se cumple la siguiente consecuencia lógica.

$$\{\forall x (Pxy \rightarrow \exists y Qy), \exists x \forall y (Qy \rightarrow Pyz \vee Rx), \forall y (Ry \rightarrow \exists x \neg Qa)\} \models \forall x (Qfa \rightarrow Qa)$$

SOLUCIÓN: Ya que trabajaremos con resolución binaria entonces debemos trabajar con el conjunto

$$\varphi = \{\forall x (Pxy \rightarrow \exists y Qy), \exists x \forall y (Qy \rightarrow Pyz \vee Rx), \forall y (Ry \rightarrow \exists x \neg Qa), \exists x (Qfa \wedge \neg Qa)\}$$

Para obtener la Forma Normal Clausular, primero rectificamos  $\varphi$ .

$$rect(\varphi) = \forall m (Pmy \rightarrow \exists n Qn) \wedge \exists s \forall r (Qr \rightarrow Prz \vee Rs) \wedge \forall u (Ru \rightarrow \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

Así,

$$fnn(\varphi) = \forall m (\neg Pmy \vee \exists n Qn) \wedge \exists s \forall r (\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge \forall u (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

Después,

$$fnp(\varphi) = \forall m \exists n \exists s \forall r \forall u ((\neg Pmy \vee Qn) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa)$$

Luego,

$$\begin{aligned} fns(\varphi) &= \forall m \exists s \forall r \forall u ((\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa) \\ &= \forall m \forall r \forall u ((\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rgm) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$Cl(\varphi) = (\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rgm) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

Haciendo resolución binaria tenemos que

1. $(\neg Pmy \vee Qfm)$	Hip
2. $(\neg Qr \vee Prz \vee Rgm)$	Hip
3. $(\neg Ru \vee \neg Qa)$	Hip
4. $Qfa$	Hip
5. $\neg Qa$	Hip
6. $\square$	$Res(4, 5)[a := b][b := fa]$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\varphi = \{\forall x(Pxy \rightarrow \exists yQy), \exists x \forall y(Qy \rightarrow Pyz \vee Rx), \forall y(Ry \rightarrow \exists x \neg Qa), \exists x(Qfa \wedge \neg Qa)\}$$

## 7. Semanal 7

a) Demuestre lo siguiente mediante deducción natural.

$$\exists x Fx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy), \exists z Jz \rightarrow \exists w Gw \vdash \exists z(Fz \wedge Jz) \rightarrow \exists v Hv$$

*Demostración.* Por el Teo. de DN basta mostrar

$$\Gamma = \{\exists x Fx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy), \exists z Jz \rightarrow \exists w Gw, \exists z(Fz \wedge Jz)\} \vdash \exists v Hv$$

Entonces

1. $\Gamma \vdash \exists xFx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy)$	Hip
2. $\Gamma \vdash \exists zJz \rightarrow \exists wGw$	Hip
3. $\Gamma \vdash \exists z(Fz \wedge Jz)$	Hip
4. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Fz \wedge Jz$	Hip
5. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Fz$	$(\wedge E)4$
6. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash Jz$	$(\wedge E)4$
7. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists xFx$	$(\exists I)4$
8. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \forall y(Gy \rightarrow Hy)$	$(\rightarrow E)6, 1$
9. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists zJz$	$(\exists I)5$
10. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists wGw$	$(\rightarrow E)8, 2$
11. $\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash Gw$	Hip
12. $\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash Gw \rightarrow Hw$	$(\forall E)7$
13. $\Gamma Fz \wedge Jz, Gw \vdash Hw$	$(\rightarrow E)11, 10$
14. $\Gamma, Fz \wedge Jz, Gw \vdash \exists uHu$	$(\exists I)12$
15. $\Gamma, Fz \wedge Jz \vdash \exists uHu$	$(\exists E)9, 12$
16. $\Gamma \vdash \exists uHu$	$(\exists E)3, 15$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\exists xFx \rightarrow \forall y(Gy \rightarrow Hy), \exists zJz \rightarrow \exists wGw \vdash \exists z(Fz \wedge Jz) \rightarrow \exists vHv$$

□