Lógica Computacional 2016-2, nota de clase 11
Lógica Ecuacional

Favio Ezequiel Miranda Perea   Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca

4 de mayo de 2016

1. Reglas de la lógica ecuacional

- Reflexividad (`reflexivity`[1])

$$\frac{}{s = s}$$

- Simetria (`symmetry`)

$$\frac{s = t}{t = s}$$

- Transitividad (`transitivity` r)

$$\frac{s = r \quad r = t}{s = t}$$

- Sustitución (`apply`): para cualquier sustitución σ,

$$\frac{s = r}{s\sigma = r\sigma}$$

- Congruencia

$$\frac{s_1 = t_1 \ldots s_n = t_n}{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)}$$

- Reescritura (`rewrite`)

$$\frac{s = t \quad E[t]}{E[s]}$$

- Reescritura de derecha a izquierda (`rewrite <-`)

$$\frac{s = t \quad E[s]}{E[t]}$$

En las reglas de reescritura $E[t]$ denota a una ecuación haciendo explícita una presencia de t, por ejemplo si $E =_{def} x + 2 = f\,y$ podemos hacer explícitos cualquiera de los términos involucrados en E, usando $E[x], E[x + 2], E[f\,y]$.

[1] estos son los nombres de los comandos de Coq

2. Ejemplos de derivaciones en lógica ecuacional

```
A1 : add(0,x) = x
A2 : add(suc(y),x) = suc(add(y,x))
M1 : mul(0,x) = 0
M2 : mul(suc(y),x) = add(mul(y,x),x)
```

```
1.  add(suc 0, suc 0) = suc (suc 0)    rewrite A2
2.  suc(add(0, suc 0)) = suc (suc 0)   rewrite A1
3.  suc(suc 0) = suc(suc 0)            reflexivity
4.
```

```
1. mul(suc(0),suc(0))= suc(0)   transitivity (add(mul(0,suc 0),suc 0)).
2. mul(suc(0),suc(0))= add(mul(0,suc 0),suc 0)  ;
   add(mul(0,suc 0),suc 0) = suc(0)  apply M2
3. add(mul(0,suc 0),suc 0) = suc(0)  rewrite M1
4. add(0,suc 0) = suc(0) apply A1
5.
```

Veamos ahora algunos ejemplos con ecuaciones que definen un evaluador de expresiones aritméticas simples (números y sumas), en este caso el trabajo lo hacen nada más las reglas de reescritura:

```
Axiom E1: forall n:nat, ev (vnum n)=  vnum n.

Axiom S1: forall e1 e2, ev (add e1 e2) = add (ev e1) e2.

Axiom S2: forall e2 n, ev (add (vnum n) e2) = add (vnum n) (ev e2).

Axiom S3: forall n m, add (vnum n) (vnum m) = vnum (n+m).

Axiom S4: forall e, ev (suc e) = suc (ev e).

Axiom S5: forall n, suc (vnum n) = vnum (n+1).
```

```
Lemma Ej1:  ev (add (vnum 3) (vnum 5)) = vnum (8).
Proof.
rewrite S3.
simpl.
rewrite E1.
reflexivity.
Qed.
```

```
Que corresponde a la siguiente prueba:

1. ev (add (vnum 3) (vnum 5)) = vnum (8) rewrite S3
2. ev (vnum (3 + 5)) = vnum 8 simplificar
3. ev (vnum 8) = vnum 8 rewrite E1
4. vnum 8 = vnum 8 reflexivity
5.


Lemma Ej2: ev (add (suc (vnum 2)) (vnum 9)) = ev (suc (suc (vnum 10))).
Proof.
rewrite S1.
rewrite S4.
rewrite E1.
rewrite S4.
rewrite S4.
rewrite E1.
rewrite S5.
simpl.
rewrite S3.
simpl.
rewrite S5.
rewrite S5.
simpl.
reflexivity.
Qed.

Que corresponde a (juntando un paso de simplificacion con su anterior):

1. ev (add (suc (vnum 2)) (vnum 9)) = ev (suc (suc (vnum 10))). rewrite S1
2. add (ev (suc (vnum 2))) (vnum 9) = ev (suc (suc (vnum 10)))  rewrite S4
3. add (suc (ev (vnum 2))) (vnum 9) = ev (suc (suc (vnum 10)))  rewrite E1
4. add (suc (vnum 2)) (vnum 9) = ev (suc (suc (vnum 10))) rewrite S4
5. add (suc (vnum 2)) (vnum 9) = suc (ev (suc (vnum 10))) rewrite S4
6. add (suc (vnum 2)) (vnum 9) = suc (suc (ev (vnum 10))) rewrite E1
7. add (suc (vnum 2)) (vnum 9) = suc (suc ((vnum 10))) rewrite S5, simpl
8. add (vnum 3) (vnum 9) = suc (suc (vnum 10)) rewrite S3,simpl
9. vnum 12 = suc (suc (vnum 10)) rewrite S5
10.vnum 12 = suc (vnum (10+1)) rewrite S5 simpl
11.vnum 12 = (vnum 12) reflexivity.
12.
```

3. Ejercicios

1. $h(hx) = x, s(hx) = sx \vdash s(s(ha)) = s(h(sa))$
2. $f(fx) = y \vdash x = y$
3. $f(f(fx)) = x, f(fx) = fx \vdash fx = x$
4. $x \cdot y = y \vdash x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
5. $x \cdot y = u \cdot v \vdash x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
6. $x \cdot y = u \cdot v \vdash y \cdot z = z \cdot y$
7. $x \cdot y = u \cdot v \vdash x \cdot x = y \cdot y$
8. Considere el siguiente conjunto de ecuaciones $\mathcal{A}$, que definen un anillo:

   A1 $x + 0 = x$
   A2 $x + (-x) = 0$
   A3 $x + y = y + x$
   A4 $x + (y + z) = (x + y) + z$
   A5 $x \cdot 1 = x$
   A6 $1 \cdot x = x$
   A7 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
   A8 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
   A9 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

   Demuestre lo siguiente:

   a) $\mathcal{A} \vdash 0 + x = x$
   b) $\mathcal{A} \vdash (-x) + x = 0$
   c) $\mathcal{A}, x + z = y + z \vdash x = y$
   d) $\mathcal{A}, z + x = z + y \vdash x = y$
   e) $\mathcal{A} \vdash -(-x) = x$
   f) $\mathcal{A} \vdash (-x) + (-y) = -(x + y)$
   g) $\mathcal{A} \vdash 0 \cdot x = 0$
   h) $\mathcal{A} \vdash x \cdot 0 = 0$
   i) $\mathcal{A} \vdash x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot 0$
   j) $\mathcal{A} \vdash (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
   k) $\mathcal{A} \vdash x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
   l) $\mathcal{A} \vdash (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$