Lógica Computacional
Tarea Semanal 1

Rubí Rojas Tania Michelle

21 de febrero de 2019

1. Define recursivamente la función *icd* que se especifica como sigue: *icd* toma como entrada una fórmula ϕ y devuelve la fórmula resultante al intercambiar en ϕ todas las conjunciones por disyunciones, y las disyunciones por conjunciones, respectivamente. Por ejemplo, se debe cumplir que:

$$icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) = p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t$$

   Solución: Definimos recursivamente la función $icd :: PROP \rightarrow PROP$ de la siguiente forma:

   - $icd(\top) = \top$.
   - $icd(\bot) = \bot$.
   - $icd(VarP) = VarP$.
   - $icd(\neg\phi) = \neg icd(\phi)$.
   - $icd(\phi \wedge \psi) = icd(\phi) \vee icd(\psi)$.
   - $icd(\phi \vee \psi) = icd(\phi) \wedge icd(\psi)$.
   - $icd(\phi \rightarrow \psi) = icd(\phi) \rightarrow icd(\psi)$.

2. Verifica tu definición mostrando paso a paso el cálculo del ejemplo de arriba.

   Solución:

$$\begin{aligned} icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) &= icd(p \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s) \wedge t) \\ &= icd(p) \vee icd(q \vee \neg r) \rightarrow icd(\neg(r \vee s)) \vee icd(t) \\ &= p \vee (icd(q) \wedge icd(\neg r)) \rightarrow \neg icd(r \vee s) \vee t \\ &= p \vee (q \wedge \neg icd(r)) \rightarrow \neg(icd(r) \wedge icd(s)) \vee t \\ &= p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t \end{aligned}$$

3. Define la función $atom(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, devuelve el número de fórmulas atómicas ($\top, \bot$ o variables) en ϕ.

   Solución: Definimos la función $atom :: PL \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

   - $atom(\top) = 1$.
   - $atom(\bot) = 1$.
   - $atom(VarP) = 1$.
   - $atom(\neg\phi) = atom(\phi)$.
   - $atom(\phi \star \psi) = atom(\phi) + atom(\psi)$.

4. Demuestra que para cualquier fórmula $\phi \in PL$ se cumple que:

$$atom(\phi) \leq con(\phi) + 1$$

   donde $con(\phi)$ es la función que devuelve el número de conectivos de ϕ.

   Demostración. Inducción sobre la fórmula ϕ.

   Base de inducción: ϕ es atómica (no tiene operadores).

   - $\phi = \top$. Entonces $atom(\top) = 1 = 0 + 1 = con(\top) + 1$
   - $\phi = \bot$. Entonces $atom(\bot) = 1 = 0 + 1 = con(\bot) + 1$
   - $\phi = VarP$. Entonces $atom(VarP) = 1 = 0 + 1 = con(VarP) + 1$

   Hipótesis de inducción: Supongamos que

$$atom(\phi') \leq con(\phi') + 1 \text{ y } atom(\phi'') \leq con(\phi'') + 1$$

   Paso inductivo: Probamos la propiedad para dos casos:

   i) $\phi = \neg\phi'$. Sabemos que $atom(\phi) = atom(\phi')$ y $con(\phi) = con(\phi')$. Entonces,

$$\begin{aligned}
atom(\phi) &= atom(\neg\phi') && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } i) \\
&= atom(\phi') && \text{def. recursiva de } \phi \\
&\leq con(\phi') + 1 && \text{hipótesis de inducción} \\
&\leq con(\phi) + 1 && \text{ya que } con(\phi) = con(\phi')
\end{aligned}$$

   ii) $\phi = (\varphi \star \psi)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
atom(\phi) &= atom(\varphi \star \psi) && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } ii) \\
&= atom(\varphi) + atom(\psi) && \text{def. recursiva de } atom \\
&\leq (con(\varphi) + 1) + (con(\psi) + 1) && \text{hipótesis de inducción} \\
&\leq (con(\varphi) + con(\psi) + 1) + 1 && \text{reagrupando} \\
&\leq con(\varphi \star \psi) + 1 && \text{def. recursiva de } con \\
&\leq con(\phi) + 1 && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } ii)
\end{aligned}$$

$\square$