Lógica Computacional
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle
Universidad Nacional Autónoma de México
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

28 de febrero de 2019

1. Enuncia formalmente lo siguiente:

   a) Sintaxis de la lógica proposicional.
   Solución: Definamos un lenguaje para la lógica de proposiciones.
   El alfabeto consta de:

   - Símbolos o variables proposicionales (un número infinito) : $p_1, ..., p_n, ...$
   - Constantes lógicas: $\bot, \top$
   - Conectivos u operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow$
   - Símbolos auxiliares: (,)

   El conjunto de expresiones o fórmulas atómicas, denotado $ATOM$ consta de:

   - Las variables proposicionales: $p_1, ..., p_n, ...$
   - Las constantes $\bot, \top$

   Las expresiones que formarán nuestro lenguaje $PROP$, llamadas usualmente fórmulas, se definen recursivamente como sigue:

   - Si $\varphi \in ATOM$ entonces $\varphi \in PROP$. Es decir, toda fórmula atómica es una fórmula.
   - Si $\varphi \in PROP$ entonces $(\neg\varphi) \in PROP$.
   - φ, ψ entonces $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in PROP$.
   - Son todas.

   b) Semántica de la lógica proposicional.
   Solución:

   Definición 1. *El tipo de valores booleanos denotado* ***Bool*** *se define como* $Bool = \{0, 1\}$

   Definición 2. *Un estado o asignación de las variables (proposicionales) es una función*

   $$\mathcal{I} : (VarP) \rightarrow Bool$$

   Dadas n variables proposicionales existen 2^n estados distintos para estas variables.

   Definición 3. *Dado un estado de las variables $\mathcal{I} : (VarP) \rightarrow Bool$, definamos la interpretación de las fórmulas con respecto a $\mathcal{I}$ como la función $\mathcal{I}^\star : PROP \rightarrow Bool$ tal que:*

   - $\mathcal{I}^\star(p) = \mathcal{I}(p)$ *para* $p \in VarP$, *es decir,* $\mathcal{I}^\star|_{VarP} = \mathcal{I}$
   - $\mathcal{I}^\star(\top) = 1$
   - $\mathcal{I}^\star(\bot) = 0$
   - $\mathcal{I}^\star(\neg\varphi) = 1$ *sii* $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 0$
   - $\mathcal{I}^\star(\varphi \wedge \psi) = 1$ *sii* $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 1$
   - $\mathcal{I}^\star(\varphi \vee \psi) = 0$ *sii* $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi) = 0$
   - $\mathcal{I}^\star(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ *sii* $\mathcal{I}^\star(\varphi) = 1$ *e* $\mathcal{I}^\star(\psi) = 0$
   - $\mathcal{I}^\star(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ *sii* $\mathcal{I}^\star(\varphi) = \mathcal{I}^\star(\psi)$

2. Dado el conjunto de proposiciones $\Gamma = \{\neg(p \wedge q), (t \leftrightarrow r), q, (\neg r)\}$. Verifica si el conjunto Γ es tautología, satisfacible o insatisfacible.
   Solución: Veamos si Γ es satisfacible:
   Inicialmente podemos asignar los estados $\mathcal{I}(q) = 1$ y ($\mathcal{I}(\neg r) = 1$ sii $\mathcal{I}(r) = 0$) ya que q y r se encuentran solitas. Ahora, sabemos que $\mathcal{I}(t \leftrightarrow r) = 1$ sii $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(r)$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0 = \mathcal{I}(t)$. Finalmente, como $\mathcal{I}(q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(p) = 0$ para que $\mathcal{I}(\neg(p \wedge q)) = 1$.
   Por lo tanto, como $\mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(t) = 0$ hacen que $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$, entonces Γ es satisfacible.

   Más aún, podemos afirmar que Γ no es una tautología, ya que se puede dar una asignación de estado que no hace a Γ verdadera. En particular, $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(r) = 1$ hacen que $\mathcal{I}(\Gamma) = 0$.

3. Utilizando interpretaciones verifica si el siguiente argumento es verdadero o falso.

$$\{(p \wedge q), (q \vee r), (\neg s)\} \models p \wedge s$$

   Solución: Debemos mostrar que $\mathcal{I}(p \wedge s) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(p \wedge q) &= 1 && \text{Premisa (1)}\\
\mathcal{I}(q \vee r) &= 1 && \text{Premisa (2)}\\
\mathcal{I}(\neg s) &= 1 && \text{Premisa (3)}\\
\mathcal{I}(p) &= 1 && \text{por (1)}\\
\mathcal{I}(q) &= 1 && \text{por (1)}\\
\mathcal{I}(s) &= 0 && \text{por (3)}
\end{aligned}$$

   De manera que la interpretación dada por $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(s) = 0$ e $\mathcal{I}(r) =$ arbitrario, es un contraejemplo al argumento, pues con esta interpretación tenemos que $\mathcal{I}(p \wedge s) = 0$. Por lo tanto, el argumento es falso.

4. Demuestra que los siguientes secuentes son válidos usando deducción natural.

   a) $\{p \to (q \vee r)\} \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$

   Demostración. Sabemos que en DN es válido utilizar equivalencias lógicas, por lo que nuestro contexto queda de la forma:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= p \to (q \vee r) && \text{Hip.}\\
&= \neg p \vee (q \vee r) && \text{equiv. logica}\\
&= (\neg p \vee \neg p) \vee (q \vee r) && \text{idempotencia}\\
&= (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) && \text{conmutatividad y asociatividad}\\
&= (p \to q) \vee (p \to r) && \text{equiv. lógica}
\end{aligned}$$

   Así, por la definición de consecuencia lógica, podemos concluir que $\{p \to (q \vee r)\} \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$. □

   b) $\{\} \vdash p \vee (q \wedge r) \to (p \wedge r) \vee q$

   Demostración. Por el Teo. de DN basta derivar $\{p \vee (q \wedge r)\} \vdash (p \wedge r) \vee q$. Sabemos que es válido utilizar equivalencias lógicas en DN, por lo que nuestro contexto queda de la forma

$$\begin{aligned}
\Gamma &= p \vee (q \wedge r) && \text{Hip.}\\
&= q \vee (p \wedge r) && \text{conmutatividad y asociatividad}\\
&= (p \wedge r) \vee q && \text{conmutatividad}
\end{aligned}$$

   Así, por la definición de consecuencia lógica, podemos concluir que $\{p \vee (q \wedge r)\} \vdash (p \wedge r) \vee q$ □

5. Realiza las siguientes sustituciones eliminando los paréntesis innecesarios en el resultado:

   a) $((q \vee r)[q, p := \neg p, s] \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$
   Solución:

   $((q \vee r)[q, p := \neg p, s] \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$

   $= (((\neg p) \vee r) \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$
   $= ((\neg(r \vee q) \vee (q \wedge p)) \to ((q \wedge p) \wedge \neg((q \wedge p) \leftrightarrow (r \vee q))))$
   $= 7((\neg(r \vee q) \vee q \wedge p) \to ((q \wedge p) \wedge \neg(q \wedge p \leftrightarrow r \vee q)))$

   b) $(u \vee t) \to (\neg r \leftrightarrow (u \leftrightarrow s))[r, u, t := u, t, r]$
   Solución:

$$\begin{aligned}(u \vee t) \to (\neg r \leftrightarrow (u \leftrightarrow s))[r, u, t := u, t, r] &= (u \vee t) \to (\neg(u) \leftrightarrow ((t) \leftrightarrow s))\\ &= (u \vee t) \to (\neg u \leftrightarrow (t \leftrightarrow s))\end{aligned}$$

6. Realizar el Tableaux de la siguiente fórmula en PL y da el modelo que satisfaga la fórmula en caso de que el Tableaux sea abierto.

$$\neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r)))$$

   Solución: Primero, eliminamos las implicaciones y simplificamos la expresión para facilitar la elaboración de nuestro Tableaux:

$$\begin{aligned}
\neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r))) &\equiv \neg(\neg(q \vee \neg(\neg p \vee r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \vee Q\\
&\equiv \neg(\neg(q \vee (p \wedge \neg r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan}\\
&\equiv \neg((\neg q \wedge (\neg p \vee r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan}\\
&\equiv \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee r)) \wedge \neg(p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan}\\
&\equiv (q \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) && \text{De Morgan}\\
&\equiv ((q \vee p) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r))) && \text{distributividad}\\
&\equiv (q \vee p) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) && \text{eliminando paréntesis}\\
&\equiv (q \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) && \text{resolución binaria}\\
&\equiv (q \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg p \vee \neg r) && \text{idempotencia y asocia.}\\
&\equiv q \vee (\neg r \wedge \neg p \vee \neg r) && \text{idempotencia}\\
&\equiv q \vee (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg r)) && \text{asociatividad y conmuta.}\\
&\equiv q \vee (\neg p \wedge \neg r) && \text{idempotencia}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge q && \text{asociatividad y conmuta.}
\end{aligned}$$

   Ahora que tenemos una expresión equivalente más simple a la original, procedemos a realizar su Tableaux:

$$\begin{array}{lcl}
1. & (\neg p \vee \neg r) \wedge q \checkmark & \\
2. & q & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 1\\
3. & \neg p \vee \neg r \checkmark & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 1\\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
4. & p \qquad \neg r & \text{ext. de } \beta \text{ en } 3
\end{array}$$

   Como el Tableaux es abierto, entonces podemos dar un modelo que satisfaga la fórmula. En particular, $\mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(r) = 0$ satisface la fórmula.

   Nota: Una de las justificaciones para obtener una expresión equivalente es la resolución binaria. Por falta de tiempo ya no pude transcribirla a latex, pero la incluyo anexada junto con la tarea.

7. Obtener la forma normal conjuntiva de las siguientes fórmulas (mencionando la operación realizada en cada paso):

   a) $((q \to r) \to q) \land (r \to q)$
   Solución:

$$
\begin{aligned}
((q \to r) \to q) \land (r \to q) &\equiv (\neg(\neg q \lor r) \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \lor Q \\
&\equiv ((q \land \neg r) \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg r \land (q \lor q)) \land (\neg r \lor q) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv (\neg r \land q) \land (\neg r \lor q) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (\neg r \land \neg r) \land (q \lor q) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv \neg r \land q && \text{idempotencia}
\end{aligned}
$$

   Como $\varphi = \neg r \land q$ es una conjunción de literales, entonces φ es de la Forma Normal Conjuntiva.

   b) $\neg p \land q \to p \land (r \to q)$
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\neg p \land q \to p \land (r \to q) &\equiv (\neg p \land q) \to (p \land (r \to q)) && \text{precedencia y asociatividad de conectivos} \\
&\equiv \neg(\neg p \land q) \lor (p \land (\neg r \lor q)) && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \lor Q \\
&\equiv (p \lor \neg q) \lor (p \land (\neg r \lor q)) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (p \lor p) \lor (\neg q \land (\neg r \lor q)) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv p \lor (\neg q \land (\neg r \lor q)) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q) && \text{asociatividad}
\end{aligned}
$$

   Como $\varphi = (p \lor \neg q) \land (\neg r \lor q)$ es una conjunción de disyunciones, entonces φ es de la Forma Normal Conjuntiva.

8. Obtener la Forma Normal Disyuntiva de $\neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s))$.
   Solución:

$$
\begin{aligned}
\neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s)) &\equiv \neg(\neg w \lor \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s)) \\
&\equiv \neg(\neg w \lor \neg p) \lor \neg(((s \lor w) \land (\neg s \lor \neg w)) \lor (p \land s)) \\
&\equiv (w \land p) \lor (((\neg s \land \neg w) \lor (s \land w)) \land (\neg p \lor \neg s)) \\
&\equiv (w \land p) \lor (\neg s \land \neg w) \lor (s \land w) \land (\neg p \lor \neg s) \\
&\equiv (w \land p) \lor (\neg s \land \neg w) \lor (s \land w \land \neg p) \lor \neg s
\end{aligned}
$$

   Por falta de espacio, no pude colocar arriba la justificación de cada paso, pero lo explico en seguida:

   - Eliminamos la implicación, ya que $P \to Q \equiv \neg P \lor Q$.
   - Elimamos la doble implicación, ya que $P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$
   - Hacemos que las negaciones figuren únicamente en las variables proposicionales.
   - Eliminamos los paréntesis innecesarios, pues todos los operadores tienen la misma precedencia.
   - Aplicamos asociatividad.

   Como $\varphi = (w \land p) \lor (\neg s \land \neg w) \lor (s \land w \land \neg p) \lor \neg s$ es una disyunción de conjunciones o literales, entonces φ es de la Forma Normal Disyuntiva.

9. Obtener la Forma Normal Negativa de $(p \wedge (q \to r)) \to s$
Solución:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge (q \to r)) \to s &\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee s && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \vee Q \\
&\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee s && \text{prop. de } \neg \\
&\equiv (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee s && \text{prop. de } \neg \\
&\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s && \text{ya que } \neg\neg P \equiv P
\end{aligned}
$$

Como $\varphi = (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s$ no contiene implicaciones ni equivalencias, y las negaciones que figuran en φ sólo afectan a fórmulas atómicas, entonces φ es de la Forma Normal Negativa.

10. a) Define una función recursiva **pa** que, dada una fórmula ϕ, devuelve el número de paréntesis abiertos "(" que tiene ϕ.
Solución: Definimos recursivamente la función **pa** :: $PROP \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:
    - $pa(\top) = 0$
    - $pa(\bot) = 0$
    - $pa(VarP) = 0$
    - $pa(\neg\varphi) = pa(\varphi)$
    - $pa((\varphi \star \psi)) = pa(\varphi) + pa(\psi) + 1$

    b) Define una función recursiva **pc** que dada una fórmula ϕ, devuelve el número de paréntesis cerrados ")" que tiene ϕ.
Solución: Definimos recursivamente la función **pc** :: $PROP \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:
    - $pc(\top) = 0$
    - $pc(\bot) = 0$
    - $pc(VarP) = 0$
    - $pc(\neg\varphi) = pc(\varphi)$
    - $pc((\varphi \star \psi)) = pc(\varphi) + pc(\psi) + 1$

    c) Sea $\phi = (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)$. Prueba que **pa**$(\phi)$ - **pc**$(\phi) = 0$.

Demostración. Aplicamos la definición de **pa** a ϕ:

$$
\begin{aligned}
pa(\phi) &= pa((((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)) && \text{def. de } \phi. \\
&= pa(((\neg p \wedge q) \vee \neg r)) + pa(r) + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa((\neg p \wedge q)) + pa(\neg r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa(\neg p) + pa(q) + 1 + pa(r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa(p) + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= 3 && \text{aritmética}
\end{aligned}
$$

Análogamente, aplicamos la definición de **pc** a ϕ:

$$
\begin{aligned}
pc(\phi) &= pc((((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)) && \text{def. de } \phi \\
&= pc(((\neg p \wedge q) \vee \neg r)) + pc(r) + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc((\neg p \wedge q)) + pc(\neg r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc(\neg p) + pc(q) + 1 + pa(r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc(p) + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= 3 && \text{aritmética}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, **pa**(ϕ) - **pc**$(\phi) = 3 - 3 = 0$. □

11. Define recursivamente una función **compress** que comprime los elementos consecutivos repetidos de una lista. Ejemplo: > *compress "mooloolaba" = "mololaba"*. Prueba, usando tu definición, que:

$$compress\ [1,2,2,3,3,3] = [1,2,3]$$

Solución:

```
compress :: (Eq a) => [a] -> [a]
compress [] = []
compress [a] = [a]
compress xs =
    if (head xs) == (head (tail xs)) then compress (drop 1 xs)
    else (head xs) : compress (tail xs)
```

Finalmente, probemos que *compress [1,2,2,3,3,3] = [1,2,3]*

Demostración.

$$\begin{aligned}
compress[1,2,3,3,3] &= 1 : compress[2,3,3,3] \\
&= 1 : 2 : compress[3,3,3] \\
&= 1 : 2 : compress[3,3] \\
&= 1 : 2 : compress[3] \\
&= 1 : 2 : [3] \\
&= [1,2,3]
\end{aligned}$$

□