

# Tableaux semánticos

## Lógica Computacional 2016-2, nota de clase 7

Favio Ezequiel Miranda Perea      Araceli Liliana Reyes Cabello  
Lourdes Del Carmen González Huesca

31 de marzo de 2016

### 1. Introducción

Los *tableaux* o *tablas semánticas* son un método de demostración por refutación, el cual fue introducido en los años cincuenta de manera independiente por Hintikka y Beth. Este método se basa en la semántica más que en la sintaxis de las fórmulas. Sin embargo, se requiere de una clasificación de las fórmulas basada en la sintaxis.

La base de este método es el principio de refutación: dado un conjunto de premisas  $\Gamma$  y una conclusión  $\varphi$ , mostrar que el conjunto  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  no tiene un modelo el cual equivale a  $\Gamma \models \varphi$  es decir, a que  $\varphi$  sea consecuencia lógica de  $\Gamma$ .

Es Smullyan quien estandariza la notación y realiza la clasificación de las fórmulas en cuatro tipos: son *tipo  $\alpha$*  las fórmulas conjuntivas y son *tipo  $\beta$*  las fórmulas disyuntivas. Con lo que respecta a los cuantificadores, son *tipo  $\gamma$*  las fórmulas universales mientras que las existenciales corresponden al *tipo  $\delta$* . De acuerdo a su tipo una fórmula genera una extensión en el tableau. Veamos ahora los detalles del método.

**Definición 1** Una literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

**Definición 2** El conjunto de fórmulas no literales se clasifica en cuatro tipos, en cada tipo de fórmula se distinguen ciertas subfórmulas necesarias posteriormente:

**Tipo  $\alpha$ :** si la fórmula es conjuntiva o es equivalente a una fórmula conjuntiva. Una fórmula  $\chi \in \text{PROP}$  es tipo  $\alpha$ , si tiene alguna de las siguientes formas:

- a)  $\chi = \varphi \wedge \psi$ , con subfórmulas  $\alpha_1 = \varphi$  y  $\alpha_2 = \psi$ .
- b)  $\chi = \neg(\varphi \vee \psi)$ , con subfórmulas  $\alpha_1 = \neg\varphi$  y  $\alpha_2 = \neg\psi$ .
- c)  $\chi = \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ , con subfórmulas  $\alpha_1 = \varphi$  y  $\alpha_2 = \neg\psi$ .

**Tipo  $\beta$ :** si la fórmula es disyuntiva o es equivalente a una fórmula disyuntiva. Una fórmula  $\chi \in \text{PROP}$  es tipo  $\beta$ , si tiene alguna de las siguientes formas:

- a)  $\chi = \varphi \vee \psi$ , con subfórmulas  $\beta_1 = \varphi$  y  $\beta_2 = \psi$ .
- b)  $\chi = \neg(\varphi \wedge \psi)$ , con subfórmulas  $\beta_1 = \neg\varphi$  y  $\beta_2 = \neg\psi$ .
- c)  $\chi = \varphi \rightarrow \psi$ , con subfórmulas  $\beta_1 = \neg\varphi$  y  $\beta_2 = \psi$ .

- d)  $\chi = (\varphi \leftrightarrow \psi)$ , con subfórmulas  $\beta_1 = \varphi \wedge \psi$  y  $\beta_2 = \neg\varphi \wedge \neg\psi$ .  
e)  $\chi = \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ , con subfórmulas  $\beta_1 = \neg\varphi \wedge \psi$  y  $\beta_2 = \varphi \wedge \neg\psi$ .

**Tipo  $\gamma$ :** si la fórmula está cuantificada universalmente o es equivalente a una fórmula cuantificada universalmente. Una fórmula  $\varphi$  es de tipo  $\gamma$ , si tiene alguna de las siguientes formas:

- a)  $\chi = \forall x\varphi$ .  
b)  $\chi = \neg\exists x\varphi$ .

**Tipo  $\delta$ :** si la fórmula está cuantificada existencialmente o es equivalente a una fórmula cuantificada existencialmente. Una fórmula  $\varphi$  es tipo  $\gamma$ , si tiene alguna de las siguientes formas:

- a)  $\chi = \exists x\varphi$ .  
b)  $\chi = \neg\forall x\varphi$ .

De esta manera cualquier fórmula pertenece a una de cinco categorías: literales,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ó  $\delta$ . Obsérvese que una equivalencia es una fórmula  $\beta$  al igual que su negación, la cual podría haberse definido como una fórmula  $\alpha$  pero la clasificación elegida aquí es óptima para construir los tableaux. En particular notese que la negación de una fórmula  $\beta$  no es necesariamente una fórmula  $\alpha$ .

## 2. Tableaux Semánticos

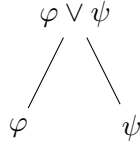
Un tableau es un árbol binario donde cada nodo está etiquetado con una fórmula. La construcción del árbol la dictan las reglas de extensión que introducimos enseguida. Inicialmente el árbol únicamente contiene una rama en donde cada uno de los nodos que la conforman están etiquetados con una de las fórmulas del conjunto  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ , si lo que queremos probar es que  $\Gamma \models \varphi$ ; o bien,  $\Gamma$  si lo queremos probar es que este conjunto se satisface (encontrando un modelo).

**Definición 3** Las reglas de extensión de tableaux, son definidas de acuerdo a la clasificación antes mencionada, y son:

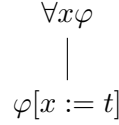
1. Regla de extensión  $\alpha$ :

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ | \\ \varphi \\ | \\ \psi \end{array}$$

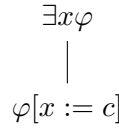
2. Regla de extensión  $\beta$ :



3. Regla de extensión  $\gamma$ :



4. Regla de extensión  $\delta$ :



donde  $c$  es una constante nueva.

A continuación definimos formalmente un tableau semántico:

**Definición 4 (*Tableaux semánticos*)** Sea  $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  un conjunto de fórmulas, un tableau para  $\Gamma$  denotado  $\mathcal{T}(\Gamma)$  es una extensión obtenida recursivamente como sigue:

1. El árbol formado por la rama cuyos nodos son  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  es un tableau para  $\Gamma$ .
2. Si  $\mathcal{T}_1$  es un tableau para  $\Gamma$ , entonces la extensión que se obtiene después de aplicarle alguna de las reglas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  es un tableau para  $\Gamma$ .
3. Son todos

Dado un conjunto inicial  $\Gamma$  denotamos con  $\mathcal{T}(\Gamma)$  a cualquier extensión de  $\Gamma$ , obtenida mediante las reglas recién definidas, la cual por supuesto no es única.

Las siguientes observaciones acerca del uso de las reglas de extensión son de gran importancia:

- Las reglas de extensión  $\alpha, \beta, \delta$  se utilizan una única vez para cada fórmula. Es decir, si  $\varphi$  es una fórmula a la que se puede aplicar la extensión  $\alpha, \beta, \delta$  entonces una vez hecha la extensión la fórmula  $\varphi$  no puede usarse nuevamente para una extensión.
- En contraste la regla  $\gamma$  puede utilizarse para realizar una extensión cualquier número de veces, por supuesto utilizando distintos términos cerrados  $t$  en cada ocasión. Por esto decimos que la regla  $\gamma$  permanece siempre activa.

- Cualquier extensión de una fórmula  $\varphi$  debe realizarse sobre todas las ramas del tableau a las que pertenece la fórmula  $\varphi$  y únicamente sobre estas.
- Para extender un tableau es conveniente preferir el uso de fórmulas  $\alpha$  sobre fórmulas  $\beta$  para evitar ramificar el tableau lo más posible.
- Similarmente el uso de la regla  $\gamma$  se debe postponer hasta que sea estrictamente necesario.
- La regla  $\gamma$  debe utilizar en su extensión términos cerrados ya presentes en el tableau, excepto cuando estos no existan. Únicamente en este caso se permite aplicar la regla  $\gamma$  usando una nueva constante  $a$ .

**Definición 5 (Tableau cerrado)** Una rama  $\Gamma$  de un tableau es cerrada (atómicamente) si tanto una fórmula(atómica)  $\varphi$  como su negación figuran en  $\Gamma$ . Un tableau es cerrado (atómicamente) si todas sus ramas que lo están cerradas (atómicamente).

**Definición 6 (Tableau abierto)** Una rama  $\Gamma$  de una tableau es abierta si no es cerrada. Un tableau se considera abierto si contiene al menos una rama abierta.

## 2.1. Los teoremas de correctud y completud refutacional

El método de tableaux se relaciona con la semántica de la lógica mediante los siguientes teoremas de correctud y completud refutacional.

**Teorema 1 (Correctud)** Si hay un tableau cerrado para  $\Gamma$  entonces  $\Gamma$  no tiene un modelo.

Es decir, si un tableaux con conjunto inicial  $\Gamma$  se cierra entonces dicho conjunto es insatisfacible.

**Teorema 2 (Completud refutacional)** Si  $\Gamma$  no tiene un modelo entonces existe un tableau  $\mathcal{T}(\Gamma)$  cerrado.

Es decir si un conjunto inicial  $\Gamma$  es insatisfacible entonces existe una extensión  $\mathcal{T}(\Gamma)$  cerrada.

Con respecto a la consecuencia lógica se tienen los siguientes corolarios:

**Corolario 1**  $\Gamma \models \varphi$  syss existe una extensión  $\mathcal{T}(\Gamma \cup \{\neg\varphi\})$  cerrada.

**Corolario 2**  $\models \varphi$  syss existe una extensión  $\mathcal{T}(\neg\varphi)$  cerrada.

## 3. Tableaux en lógica de predicados

Es bien sabido que la lógica de predicados es indecidible, es decir:

- No existe un algoritmo que reciba una fórmula  $\varphi$  y decida si ésta es o no una fórmula universalmente válida. En particular
- No existe un algoritmo que reciba un conjunto de premisas  $\Gamma$  y una fórmula  $\varphi$  y decida si se cumple o no  $\Gamma \models \varphi$ .

- Podemos preguntarnos entonces por que los algoritmos de decisión para la lógica de proposiciones fallan, en particular porque el método de tableaux no nos permitirá decidir la consecuencia lógica en la lógica de predicados. ¿Donde está la falla?

Considérese el siguiente tableaux:

$$\begin{array}{c}
 \forall x \exists y P(x, y) \\
 | \\
 \exists y P(c_1, y) \\
 | \\
 P(c_1, c_2) \\
 | \\
 \exists y P(c_2, y) \\
 | \\
 P(c_2, c_3) \\
 | \\
 \exists y P(c_3, y) \\
 | \\
 P(c_3, c_4) \\
 | \\
 \vdots
 \end{array}$$

- Al aplicar la regla  $\gamma$  a la primera fórmula hacemos la extensión con una nueva constante  $a_1$  obteniendo una fórmula existencial  $\exists y P(a_1, y)$
- Al aplicar la regla  $\delta$  a  $\exists y P(a_1, y)$  debemos elegir una constante  $a_2$  distinta de  $a_1$  obteniendo  $P(a_1, a_2)$ .
- Como las fórmulas universales están siempre activas entonces podemos aplicar la regla  $\gamma$  nuevamente a la primera fórmula pero ahora con la constante  $a_2$  obteniendo  $\exists y P(a_2, y)$ , etc.
- Se observa que este proceso se puede continuar indefinidamente por lo que podemos obtener una rama infinita.
- Como pueden existir ramas infinitas no tiene sentido hablar de ramas completas como en la lógica de proposiciones. Pueden existir ramas, como la de arriba que sigan extendiéndose indefinidamente, por lo que nunca sabremos si la rama se podrá cerrar o no.
- De este ejemplo debe quedar claro entonces por que los tableaux en lógica de predicados únicamente pueden ser utilizados para tratar de establecer *insatisfacibilidad*, *validez* ó *consecuencia lógica* y por lo general NO son un método apto para construir modelos como en el caso de la lógica de proposiciones.
- Existen formas de construir modelos a partir de un tableaux en lógica de predicados pero son mas bien casos particulares basados en ciertas heurísticas.
- En lógica de proposiciones la construcción de un modelo se sirve del concepto de rama completa y abierta, pero en lógica de predicados no existe un concepto de rama completa.

- Esto debe convencernos de la indecidibilidad de la lógica de predicados.
- Como ejemplo considerese lo siguiente:

$$\forall x \exists y P(x, y), R(a, b) / \therefore \exists x R(x, b)$$

este argumento es claramente correcto pues la conclusión es consecuencia de la segunda premisa, la primera no aporta nada pues habla de otra relación. Aunque existe un tableau cerrado generado por el argumento también existe un tableau infinito. Por lo tanto si en el análisis de un argumento nos encontramos ante un tableau que no se ha cerrado no podemos asegurar nada.