Lógica Computacional 2016-2
Reglas de Deducción Natural

Favio Ezequiel Miranda Perea

13 de mayo de 2016
Facultad de Ciencias UNAM

1. Lógica Minimal

- Regla de hipótesis:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (Hip)$$

- Implicación:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\to E)$$

- Conjunción:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge E) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge E)$$

- Disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee E)$$

- Cuantificador Universal:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad x \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall E)$$

- Cuantificador Existencial:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ (\exists I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \notin FV(\Gamma, B)}{\Gamma \vdash B}\ (\exists E)$$

- Negación: no hay reglas primitivas y la negación no es un conectivo primitivo sino que se define como

$$\neg A =_{def} A \rightarrow \bot$$

derivandose las siguientes reglas:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg E)$$

2. Lógica intuicionista

Las reglas de la lógica minimal más:

- Falsedad: eliminación de $\bot$, tambien conocida como *ex-falso-quodlibet*:

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot E)$$

- Negación: misma definición que en la lógica minimal, la regla derivada $(\neg E)$ se modifica como:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg E)$$

3. Lógica Clásica

Las reglas de la lógica intuicionista más alguna de las siguientes (suponiendo una las otras dos son derivables), donde la negación se considera un conectivo primitivo:

- Tercero Excluido:

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (TE)$$

- Reducción al absurdo:

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (RAA)$$

- Eliminación de la doble negación

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg E)$$