Lógica Computacional
Tarea 1

Rubí Rojas Tania Michelle

28 de febrero de 2019

1. Enuncia formalmente lo siguiente:

   a) Sintaxis de la lógica proposicional.
   Solución: Definamos un lenguaje para la lógica de proposiciones.
   El alfabeto consta de:

   - Símbolos o variables proposicionales (un número infinito) : $p_1, ..., p_n, ...$
   - Constantes lógicas: $\bot, \top$
   - Conectivos u operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow$
   - Símbolos auxiliares: $(,)$

   El conjunto de expresiones o fórmulas atómicas, denotado $ATOM$ consta de:

   - Las variables proposicionales: $p_1, ..., p_n, ...$
   - Las constantes $\bot, \top$

   Las expresiones que formarán nuestro lenguaje $PROP$, llamadas usualmente fórmulas, se definen recursivamente como sigue:

   - Si $\varphi \in ATOM$ entonces $\varphi \in PROP$. Es decir, toda fórmula atómica es una fórmula.
   - Si $\varphi \in PROP$ entonces $(\neg\varphi) \in PROP$.
   - φ, ψ entonces $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in PROP$.
   - Son todas.

   b) Semántica de la lógica proposicional.
   Solución: Definamos el significado de cada conectivo lógico:

   - **La negación**
     - La negación de la fórmula P es la fórmula $\neg P$.
     - Símbolo utilizado: $\neg$
     - Su significado en español es: No P, no es cierto que P, es falso que P, etc.
     - Semántica (tabla de verdad):

P	$\neg P$
1	0
0	1

- **La conjunción**
  - La conjunción de las fórmulas P, Q es la fórmula $P \wedge Q$. Las fórmulas P, Q se llaman conyuntos.
  - Símbolo utilizado: $\wedge$
  - Su significado en español es: P y Q, P además de Q, P pero Q, etc.
  - Semántica (tabla de verdad):

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- **La disyunción**
  - La disyunción de las fórmulas P, Q es la fórmula $P \vee Q$. Las fórmulas P, Q se llaman disyuntos.
  - Símbolo utilizado: $\vee$
  - Su significado en español es: P o bien Q, o P o Q, etc.
  - Semántica (tabla de verdad):

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- **La implicación**
  - La implicación o condicional de las fórmulas P, Q es la fórmula $P \to Q$. La fórmula P es el antecedente y la fórmula Q es el consecuente de la implicación.
  - Símbolo utilizado: $\to$
  - Su significado en español es: si P entonces Q, P implica Q, P es condición suficiente para Q, Q siempre que P, P sólo si Q, etc.
  - Semántica (tabla de verdad):

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **La equivalencia**
  - La equivalencia o bicondicional de las fórmulas P, Q es la fórmula $P \leftrightarrow Q$.
  - Símbolo utilizado: $\leftrightarrow$
  - Su significado en español es:P si y sólo si Q, P es equivalente a Q, P es condición necesaria y suficiente para Q, etc.
  - Semántica (tabla de verdad):

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Dado el conjunto de proposiciones $\Gamma = \{\neg(p \wedge q), (t \leftrightarrow r), q, (\neg r)\}$. Verifica si el conjunto Γ es tautología, satisfacible o insatisfacible.
   Solución: Veamos si Γ es satisfacible:
   Inicialmente podemos asignar los estados $\mathcal{I}(q) = 1$ y ($\mathcal{I}(\neg r) = 1$ sii $\mathcal{I}(r) = 0$) ya que q y r se encuentran solitas. Ahora, sabemos que $\mathcal{I}(t \leftrightarrow r) = 1$ sii $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(r)$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0 = \mathcal{I}(t)$. Finalmente, como $\mathcal{I}(q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(p) = 0$ para que $\mathcal{I}(\neg(p \wedge q)) = 1$.
   Por lo tanto, Γ es satisfacible.

3. Utilizando interpretaciones verifica si el siguiente argumento es verdadero o falso.

$$\{(p \wedge q), (q \vee r), (\neg s)\} \models p \wedge s$$

   Solución: Debemos mostrar que $\mathcal{I}(p \wedge s) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(p \wedge q) &= 1 && \text{Premisa (1)} \\
\mathcal{I}(q \vee r) &= 1 && \text{Premisa (2)} \\
\mathcal{I}(\neg s) &= 1 && \text{Premisa (3)} \\
\mathcal{I}(p) &= 1 && \text{por (1)} \\
\mathcal{I}(q) &= 1 && \text{por (1)} \\
\mathcal{I}(s) &= 0 && \text{por (3)}
\end{aligned}$$

   De manera que la interpretación dada por $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(s) = 0$ e $\mathcal{I}(r) =$ arbitrario, es un contraejemplo al argumento, pues con esta interpretación tenemos que $\mathcal{I}(p \wedge s) = 0$. Por lo tanto, el argumento es falso.

4. Demuestra que los siguientes secuentes son válidos usando deducción natural.

   a) $\{p \to (q \vee r)\} \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$

   Demostración. Utilizando reglas de deducción natural obtenemos que:

$$\begin{aligned} \{p \to (q \vee r)\} &\vdash (p \to q) \vee (p \to r) \\ \{p \to (q \vee r), (p \to q)\} &\vdash p \to r \\ \{p \to (q \vee r), (p \to q), p\} &\vdash r \end{aligned}$$

$\square$

   b) $\{\} \vdash p \vee (q \wedge r) \to (p \wedge r) \vee q$

   Demostración. Utilizando una regla de la implicación podemos hacer lo siguiente:

$$\{q \vee (q \wedge r)\} \vdash (p \wedge r) \vee q$$

   Por lo tanto, podemos afirmar que el secuente es válido. $\square$

5. Realiza las siguientes sustituciones eliminando los paréntesis innecesarios en el resultado:

   a) $((q \vee r)[q, p := \neg p, s] \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$
   Solución:

   $((q \vee r)[q, p := \neg p, s] \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$

   $= (((\neg p) \vee r) \to (r \wedge \neg(r \leftrightarrow p)))[p, r, q := r \vee q, q \wedge p, s]$
   $= ((\neg(r \vee q) \vee (q \wedge p)) \to ((q \wedge p) \wedge \neg((q \wedge p) \leftrightarrow (r \vee q))))$
   $= 7((\neg(r \vee q) \vee q \wedge p) \to ((q \wedge p) \wedge \neg(q \wedge p \leftrightarrow r \vee q)))$

   b) $(u \vee t) \to (\neg r \leftrightarrow (u \leftrightarrow s))[r, u, t := u, t, r]$
   Solución:

$$\begin{aligned} (u \vee t) \to (\neg r \leftrightarrow (u \leftrightarrow s))[r, u, t := u, t, r] &= (u \vee t) \to (\neg(u) \leftrightarrow ((t) \leftrightarrow s)) \\ &= (u \vee t) \to (\neg u \leftrightarrow (t \leftrightarrow s)) \end{aligned}$$

6. Realizar el Tableaux de la siguiente fórmula en PL y da el modelo que satisfaga la fórmula en caso de que el Tableaux sea abierto.

$$\neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r)))$$

Solución: Primero, eliminamos las implicaciones y simplificamos la expresión para facilitar la elaboración de nuestro Tableaux:

$$\begin{aligned}
\neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r))) &\equiv \neg(\neg(q \vee \neg(\neg p \vee r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \vee Q \\
&\equiv \neg(\neg(q \vee (p \wedge \neg r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan} \\
&\equiv \neg((\neg q \wedge (\neg p \vee r)) \vee (p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan} \\
&\equiv \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee r)) \wedge \neg(p \wedge (\neg q \vee r))) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (q \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) && \text{De Morgan} \\
&\equiv ((q \vee p) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r))) && \text{distributividad} \\
&\equiv (q \vee p) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) && \text{eliminando paréntesis} \\
&\equiv (q \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) && \text{resolución binaria} \\
&\equiv (q \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg p \vee \neg r) && \text{idempotencia y asocia.} \\
&\equiv q \vee (\neg r \wedge \neg p \vee \neg r) && \text{idempotencia} \\
&\equiv q \vee (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg r)) && \text{asociatividad y conmuta.} \\
&\equiv q \vee (\neg p \wedge \neg r) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge q && \text{asociatividad y conmuta.}
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos una expresión equivalente más simple a la original, procedemos a realizar su Tableaux:

$$\begin{array}{lcl}
1. & (\neg p \vee \neg r) \wedge q \checkmark & \\
2. & q & \text{ext. de } \alpha \text{ en 1} \\
3. & \neg p \vee \neg r \checkmark & \text{ext. de } \alpha \text{ en 1} \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
4. & p \qquad \neg r & \text{ext. de } \beta \text{ en 3}
\end{array}$$

Como el Tableaux es abierto, entonces podemos dar un modelo que satisfaga la fórmula. En particular, $\mathcal{I}(q) = 1$ e $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(r) = 0$ satisface la fórmula.

Nota: Una de las justificaciones para obtener una expresión equivalente es la resolución binaria. Por falta de tiempo ya no pude transcribirla a latex, pero la incluyo anexada junto con la tarea.

7. Obtener la forma normal conjuntiva de las siguientes fórmulas (mencionando la operación realizada en cada paso):

   a) $((q \to r) \to q) \wedge (r \to q)$
   Solución:

$$\begin{aligned}
((q \to r) \to q) \wedge (r \to q) &\equiv (\neg(\neg q \vee r) \vee q) \wedge (\neg r \vee q) && \text{ya que } P \to Q \equiv \neg P \vee Q \\
&\equiv ((q \wedge \neg r) \vee q) \wedge (\neg r \vee q) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg r \wedge (q \vee q)) \wedge (\neg r \vee q) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv (\neg r \wedge q) \wedge (\neg r \vee q) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (\neg r \wedge \neg r) \wedge (q \vee q) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv \neg r \wedge q && \text{idempotencia}
\end{aligned}$$

   Como $\varphi = \neg r \wedge q$ es una conjunción de literales, entonces φ es de la Forma Normal Conjuntiva.

b) $\neg p \wedge q \rightarrow p \wedge (r \rightarrow q)$
Solución:

$$\begin{aligned}
\neg p \wedge q \rightarrow p \wedge (r \rightarrow q) &\equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (r \rightarrow q)) && \text{precedencia y asociatividad de conectivos} \\
&\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q)) && \text{ya que } P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \\
&\equiv (p \vee \neg q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q)) && \text{De Morgan} \\
&\equiv (p \vee p) \vee (\neg q \wedge (\neg r \vee q)) && \text{asociatividad y conmutatividad} \\
&\equiv p \vee (\neg q \wedge (\neg r \vee q)) && \text{idempotencia} \\
&\equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q) && \text{asociatividad}
\end{aligned}$$

Como $\varphi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q)$ es una conjunción de disyunciones, entonces φ es de la Forma Normal Conjuntiva.

8. Obtener la Forma Normal Disyuntiva de $\neg(w \rightarrow \neg p) \vee \neg((\neg s \leftrightarrow w) \vee (p \wedge s))$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\neg(w \rightarrow \neg p) \vee \neg((\neg s \leftrightarrow w) \vee (p \wedge s)) &\equiv \neg(\neg w \vee \neg p) \vee \neg((\neg s \leftrightarrow w) \vee (p \wedge s)) \\
&\equiv \neg(\neg w \vee \neg p) \vee \neg(((s \vee w) \wedge (\neg s \vee \neg w)) \vee (p \wedge s)) \\
&\equiv (w \wedge p) \vee (((\neg s \wedge \neg w) \vee (s \wedge w)) \wedge (\neg p \vee \neg s)) \\
&\equiv (w \wedge p) \vee (\neg s \wedge \neg w) \vee (s \wedge w) \wedge (\neg p \vee \neg s) \\
&\equiv (w \wedge p) \vee (\neg s \wedge \neg w) \vee (s \wedge w \wedge \neg p) \vee \neg s
\end{aligned}$$

Por falta de espacio, no pude colocar arriba la justificación de cada paso, pero lo explico en seguida:

- Eliminamos la implicación, ya que $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
- Elimamos la doble implicación, ya que $P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- Hacemos que las negaciones figuren únicamente en las variables proposicionales.
- Eliminamos los paréntesis innecesarios, pues todos los operadores tienen la misma precedencia.
- Aplicamos asociatividad.

Como $\varphi = (w \wedge p) \vee (\neg s \wedge \neg w) \vee (s \wedge w \wedge \neg p) \vee \neg s$ es una disyunción de conjunciones o literales, entonces φ es de la Forma Normal Disyuntiva.

9. Obtener la Forma Normal Negativa de $(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow s$
Solución:

$$\begin{aligned}
(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow s &\equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee s && \text{ya que } P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \\
&\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee s && \text{prop. de } \neg \\
&\equiv (\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee s && \text{prop. de } \neg \\
&\equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s && \text{ya que } \neg\neg P \equiv P
\end{aligned}$$

Como $\varphi = (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee s$ no contiene implicaciones ni equivalencias, y las negaciones que figuran en φ sólo afectan a fórmulas atómicas, entonces φ es de la Forma Normal Negativa.

10. a) Define una función recursiva **pa** que, dada una fórmula ϕ, devuelve el número de paréntesis abiertos "(" que tiene ϕ.

Solución: Definimos recursivamente la función **pa** :: $PROP \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

- $pa(\top) = 0$
- $pa(\bot) = 0$
- $pa(VarP) = 0$
- $pa(\neg\varphi) = pa(\varphi)$
- $pa((\varphi \star \psi)) = pa(\varphi) + pa(\psi) + 1$

b) Define una función recursiva **pc** que dada una fórmula ϕ, devuelve el número de paréntesis cerrados ")" que tiene ϕ.

Solución: Definimos recursivamente la función **pc** :: $PROP \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

- $pc(\top) = 0$
- $pc(\bot) = 0$
- $pc(VarP) = 0$
- $pc(\neg\varphi) = pc(\varphi)$
- $pc((\varphi \star \psi)) = pc(\varphi) + pc(\psi) + 1$

c) Sea $\phi = (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)$. Prueba que **pa**($\phi$) - **pc**($\phi$) = 0.

Demostración. Aplicamos la definición de **pa** a ϕ:

$$\begin{aligned}
pa(\phi) &= pa((((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)) && \text{def. de } \phi. \\
&= pa(((\neg p \wedge q) \vee \neg r)) + pa(r) + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa((\neg p \wedge q)) + pa(\neg r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa(\neg p) + pa(q) + 1 + pa(r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= pa(p) + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pa} \\
&= 3 && \text{aritmética}
\end{aligned}$$

Análogamente, aplicamos la definición de **pc** a ϕ:

$$\begin{aligned}
pc(\phi) &= pc((((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to r)) && \text{def. de } \phi \\
&= pc(((\neg p \wedge q) \vee \neg r)) + pc(r) + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc((\neg p \wedge q)) + pc(\neg r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc(\neg p) + pc(q) + 1 + pa(r) + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= pc(p) + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 && \text{def. recursiva de } \mathbf{pc} \\
&= 3 && \text{aritmética}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, **pa**(ϕ) - **pc**(ϕ) $= 3 - 3 = 0$.

□

11. Define recursivamente una función **compress** que comprime los elementos consecutivos repetidos de una lista. Ejemplo: > *compress "mooloolaba" = "mololaba"*. Prueba, usando tu definición, que:

$$compress\ [1,2,2,3,3,3] = [1,2,3]$$

Solución:

```
compress :: (Eq a) => [a] -> [a]
compress [] = []
compress [a] = [a]
compress xs =
    if (head xs) == (head (tail xs)) then compress (drop 1 xs)
    else (head xs) : compress (tail xs)
```

Finalmente, probemos que *compress [1,2,2,3,3,3] = [1,2,3]*

Demostración.

$$\begin{aligned} compress[1,2,3,3,3] &= 1 : compress[2,3,3,3] \\ &= 1 : 2 : compress[3,3,3] \\ &= 1 : 2 : compress[3,3] \\ &= 1 : 2 : compress[3] \\ &= 1 : 2 : [3] \\ &= [1,2,3] \end{aligned}$$

$\square$