

Lógica Computacional

Tarea Semanal 1

Rubí Rojas Tania Michelle
Universidad Nacional Autónoma de México
taniarubi@ciencias.unam.mx
cuenta: 315121719

21 de febrero de 2019

1. Define recursivamente la función icd que se especifica como sigue: icd toma como entrada una fórmula ϕ y devuelve la fórmula resultante al intercambiar en ϕ todas las conjunciones por disyunciones, y las disyunciones por conjunciones, respectivamente. Por ejemplo, se debe cumplir que:

$$icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) = p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t$$

Solución: Definimos recursivamente la función $icd :: PROP \rightarrow PROP$ de la siguiente forma:

- $icd(\top) = \top$.
- $icd(\perp) = \perp$.
- $icd(VarP) = VarP$.
- $icd(\neg\phi) = \neg icd(\phi)$.
- $icd(\phi \wedge \psi) = icd(\phi) \vee icd(\psi)$.
- $icd(\phi \vee \psi) = icd(\phi) \wedge icd(\psi)$.
- $icd(\phi \rightarrow \psi) = icd(\phi) \rightarrow icd(\psi)$.

2. Verifica tu definición mostrando paso a paso el cálculo del ejemplo de arriba.

Solución:

$$\begin{aligned} icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) &= icd(p \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s) \wedge t) \\ &= icd(p) \vee icd(q \vee \neg r) \rightarrow icd(\neg(r \vee s)) \vee icd(t) \\ &= p \vee (icd(q) \wedge icd(\neg r)) \rightarrow \neg icd(r \vee s) \vee t \\ &= p \vee (q \wedge \neg icd(r)) \rightarrow \neg(icd(r) \wedge icd(s)) \vee t \\ &= p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t \end{aligned}$$

3. Define la función $atom(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, devuelve el número de fórmulas atómicas (\top, \perp o variables) en ϕ .

Solución: Definimos la función $atom :: PL \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente forma: `beginitemize`

4. $atom(\top) = 1$.
5. $atom(\perp) = 1$.
6. $atom(VarP) = 1$.
7. $atom(\neg\phi) = atom(\phi)$.
8. $atom(\phi \star \psi) = atom(\phi) + atom(\psi)$.

Demuestra que para cualquier fórmula $\phi \in PL$ se cumple que:

$$atom(\phi) \leq con(\phi) + 1$$

donde $con(\phi)$ es la función que devuelve el número de conectivos de ϕ .

Demostración. Inducción sobre la fórmula ϕ .

Base de inducción: ϕ es atómica (no tiene operadores).

- $\phi = \top$. Entonces $atom(\top) = 1 = 0 + 1 = con(\top) + 1$
- $\phi = \perp$. Entonces $atom(\perp) = 1 = 0 + 1 = con(\perp) + 1$
- $\phi = VarP$. Entonces $atom(VarP) = 1 = 0 + 1 = con(VarP) + 1$

Hipótesis de inducción: Supongamos que

$$atom(\phi') \leq con(\phi') + 1 \text{ y } atom(\phi'') \leq con(\phi'') + 1$$

Paso inductivo: Probamos la propiedad para dos casos:

- i) $\phi = \neg\phi'$. Sabemos que $atom(\phi) = atom(\phi')$ y $con(\phi) = con(\phi')$. Entonces,

$$\begin{aligned} atom(\phi) &= atom(\neg\phi') && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } i) \\ &= atom(\phi') && \text{def. recursiva de } \phi \\ &\leq con(\phi') + 1 && \text{hipótesis de inducción} \\ &\leq con(\phi) + 1 && \text{ya que } con(\phi) = con(\phi') \end{aligned}$$

- ii) $\phi = (\varphi \star \psi)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} atom(\phi) &= atom(\varphi \star \psi) && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } ii) \\ &= atom(\varphi) + atom(\psi) && \text{def. recursiva de } atom \\ &\leq (con(\varphi) + 1) + (con(\psi) + 1) && \text{hipótesis de inducción} \\ &\leq (con(\varphi) + con(\psi) + 1) + 1 && \text{reagrupando} \\ &\leq con(\varphi \star \psi) + 1 && \text{def. recursiva de } con \\ &\leq con(\phi) + 1 && \text{def. de } \phi \text{ en el caso } ii) \end{aligned}$$

□