Lógica Computacional
Proyecto 2: Implementación de un laberinto en PROLOG

González Montiel Luis Fernando
Rubí Rojas Tania Michelle
Universidad Nacional Autónoma de México
fercho_gm96@ciencias.unam.mx
taniarubi@ciencias.unam.mx
de cuenta: 312275136
de cuenta: 315121719

24 de mayo de 2019

Índice

1. Lógica de Primer Órden

1.1. Sintaxis de la Lógica de Predicados

En contraposición al lenguaje de la Lógica Proposicional que está determinado de manera única, no es posible hablar de un sólo lenguaje para la Lógica de Predicados. Dependiendo de la estructura semántica que tengamos en mente será necesario agregar símbolos particulares para denotar objetos y relaciones entre objetos. De esta manera, el alfabeto consta de dos partes ajenas entre sí, la parte común a todos los lenguajes determinada por los símbolos lógicos y auxiliares y la parte particular, llamada tipo de semejanza o signatura del lenguaje.

- La parte común a todos los lenguajes consta de:
  - Un conjunto finito de variables $Var\{x_1, ..., x_n, ...\}$
  - Constantes lógicas: $\top, \bot$
  - Conectivos u operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$
  - Símbolos auxiliares: (,) y , (coma).
  - Si se agrega el símbolo de igualdad $=$, decimos que el lenguaje tiene igualdad.
- La signatura de un lenguaje en particular está dada por:
  - Un conjunto $\mathcal{P}$, posiblemente vacío, de símbolos o letras de predicado:

    $$P_1, ..., P_n, ...$$

    A cada símbolo se le asigna un índice o número de argumentos m, el cual se hace explícito escribiendo $P_n^{(m)}$ lo cual significará que el símbolo P_n necesita de m argumentos.
  - Un conjunto $\mathcal{F}$, posiblemente vacío, de símbolos o letras de función:

    $$f_1, ..., f_n, ...$$

    Análogamente a los símbolos de predicado cada símbolo de función tiene un índice asignado, $f_n^{(m)}$ significará que el símbolo f_n necesita de m argumentos.
  - Un conjunto $\mathcal{C}$, posiblemente vacío, de símbolos de constante:

    $$c_1, ..., c_n, ...$$

    En algunos libros los símbolos de constante se consideran como parte del conjunto de símbolos de función, puesto que pueden verse como funciones de índice cero, es decir, funciones que no reciben argumentos.

  Dado que un lenguaje de primer órden queda determinado de manera única por su signatura, abusaremos de la notación y escribiremos

  $$\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

  para denotar al lenguaje dado por tal signarura.

Los términos del lenguaje son variables, constantes y funciones aplicados a estos.

Definición 1 (Términos). *Los términos son definidos como sigue:*

- *Una variable es un término.*
- *Si $c \in F$ es una función nula, entonces c es un término.*
- *Si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos y $f \in F$ tiene índice $n > 0$, entonces $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ es un término.*
- *Son todos.*

En forma de Backus Naur se escribe:

$$t :: x \mid c \mid f(t_1, ..., t_n)$$

donde x son variables, c constantes y f funciones sobre términos con índice $n > 0$.

Definición 2. *Sean P el conjunto de predicados y F el conjunto de símbolos de función. Se define el conjunto de fórmulas sobre (F, P) inductivamente usando la definición de Términos sobre F.*

- *Si $p \in \mathcal{P}$ (símbolo de predicado) con índice $n \geq 1$ y si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos sobre $\mathcal{F}$ entonces $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ es una fórmula.*
- *Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ también lo es.*
- *φ, ψ son fórmulas, entonces $\varphi \star \psi$ también lo son; donde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*
- *Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $\forall x\varphi$ es una fórmula.*
- *Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $\exists x\varphi$ es una fórmula.*
- *No hay más.*

Es decir, la sintaxis de la lógica de predicados en forma de Backus Naur se define como:

$$\varphi :: P(t_1, ..., t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi \mid t_1 = t_2 \mid \bot \mid \top$$

Ejemplo 1. *Supongamos que el universo del discurso consta de los países del mundo y sus ciudades.*

- *Las variables x e y denotan países cualesquiera.*
- *La constante a denota a Alemania y la constante i a Italia.*
- *El símbolo funcional f de índice 1 denota a la operación que recibe un país y devuelve su ciudad capital. Es decir, $f(x)$ es la capital de x. Esto es posible dado que cada país tiene una única capital, en particular $f(a)$ es Berlín y $f(i)$ es Roma.*

Ejemplo 2. *Si el universo consta de números naturales, entonces:*

- *La constante a denota al individuo 0 y la constante b al individuo 1.*
- *Los términos $f^2(x, y)$ y $g^2(x, y)$ denotan a los individuos $x + y$ y $x * y$, respectivamente.*
- *En tal caso, los individuos 2 y 4 se representan mediante $f(b, b)$ y $g(f(b, b), f(b, b))$, respectivamente.*

1.2. Especificación Formal

El proceso de especificación o traducción del español a la Lógica Formal no es siempre sencillo. Algunas frases del español no se pueden traducir o especificar de una manera completamente fiel a la lógica de predicados, como veremos en algunos ejemplos.

1.2.1. Algunos consejos

- Únicamente podemos especificar afirmaciones o porposiciones, no es posible traducir preguntas, exclamaciones, órdenes, invitaciones, etc.

- La idea básica es extraer predicados a partir de los enunciados dados en español de manera que el enunciado completo se construya al combinar dichos predicados mediante conectivos y cuantificadores. Por ejemplo, la frase *me gustan las alitas y el color rosa* debe entenderse como *me gustan las alitas* y *me gusta el color rosa.*

- La conjunción *y* se traduce como $\wedge$. La palabra *pero* también corresponde a una conjunción aunque el sentido original del español se pierde. Por ejemplo, *te doy mis audífonos pero me los devuelves* sólo puede especificarse como *te doy mis audifonos y me los devuelves*. Lo cual es diferente en español.

- La disyunción es incluyente: *iremos al parque o al cine*, incluye el caso en que se vayan a ambos lados.

- Con la implicación hay que ser cautelosos, sobre todo en el caso de frases de la forma A sólo si B, lo cual es equivalente a *Si no* B *entonces no* A, que a su vez es equivalente con *Si* A *entonces* B. Es un error común intentar especificar dicha frase inicial mediante $B \to A$.

- Si en el español aparecen frases como *para todos, para cualquier, todos, cualesquiera, los, las*, etc; debe usarse el cuantificador universal $\forall$.

- Si en el español aparecen frases como *para algún, existe un, alguno, alguna, uno, una*, etc; debe usarse el cuantificador existencial $\exists$.

- Cualquier especificación compuesta que involucre cuantificadores puede formarse identificando en ella alguno de los cuatro juicios aristotélicos:

  - Universal Afirmativo: Todo S es P traducido mediante $\forall x(S(x) \to P(x))$.
  - Existencial afirmativo: Algún S es P traducido mediante $\exists x(S(x) \wedge P(X))$.
  - Universal negativo: Ningún S es P traducido mediante $\forall x(S(x) \to \neg P(x))$
  - Existencial negativo: Algún S no es P traducido mediante $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

  Por supuesto que en especificaciones complicadas, Sy P no serán predicados sino fórmulas compuestas.

- Pronombres como *él, ella, eso* no se refieren a un individuo particular, sino que se usan como referencia a algo o alguien mencionado previamente, por lo que obtienen significado del contexto particular. Cuando un pronombre aparezca en un enunciado, hay que averiguar a quién o qué se refiere.
  Por ejemplo, en el enunciado *Hércules es mascota de Sebastián pero él no es mascota de Mía* debe traducirse como *Hércules es mascota de Sebastián y Hércules no es mascota de Mía.*

- Las variables no se mencionan en español, son sólo un formalismo para representar individuos, por ejemplo la fórmula $\forall x(G(x) \to P(x))$ puede escribirse en español como *Todo gato es pequeño* y no como *Para todo x, si x es gato entonces x es pequeño.*

- Los esquemas $\forall x(A \to B)$ y $\exists x(A \wedge B)$ son de gran utilidad y bastante comúnes. Menos comúnes, aunque también adecuados, son los esquemas $\forall x(A \wedge B)$, $\forall x(A \vee B)$ y $\exists x(A \vee B)$.

- El esquema $\exists x(A \to B)$, si bien es una fórmula sintácticamente correcta, es extremadamente raro que figure en una traducción del español.

- El hecho de que se usen dos o más variables distintas no implica que éstas representen a elementos distintos del universo, de manera que para especificar dos individuos distintos no es suficiente contar simplemente con variables distintas.
  Las fórmulas $\exists x P(x)$ y $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y))$ expresan ambas lo mismo, a saber que un objeto del universo cumple P. Se debe agregar explícitamente que x e y tienen la propiedad de ser distintos, es decir $x \neq y$.

Ejemplo 3. *Tenemos los siguientes predicados en el universo de discurso de los habitantes de la Ciudad de México:*

$I(x)$: *x es inteligente.*
$E(x)$: *x es estudiante de la Facultad de Ciencias.*
$M(x)$:*a x le gusta la música.*

Especificar con cuantificadores los siguientes enunciados:

- *Todos los estudiantes de la Facultad de Ciencias son inteligentes.*

$$\forall x(E(x) \to I(x))$$

- *A algunos estudiantes inteligentes les gusta la música.*

$$\exists x(E(x) \wedge I(x) \wedge M(x))$$

- *Todo aquel a quien le gusta la música es un estudiante que no es inteligente.*

$$\forall x(M(x) \to E(x) \wedge \neg I(x))$$

Ejemplo 4. *En este ejemplo observamos el significado de las distintas combinaciones de dos cuantificadores. Sea $Q(x, y)$ el predicado x quiere a y.*

- *Todos quieren a alguien.*

$$\forall x \exists y Q(x, y)$$

- *Alguien quiere a todos.*

$$\exists x \forall y Q(x, y)$$

- *Todos se quieren, o bien, todos quieren a todos.*

$$\forall x \forall y (Q(x,y))$$

- *Algunos se quieren entre sí, o bien, alguien quiere a alguien.*

$$\exists x \exists y Q(x,y)$$

- *Alguno no es querido por nadie.*

$$\exists x \forall y \neg Q(y,x)$$

- *Alguien no quiere a nadie.*

$$\exists x \forall y \neg Q(x,y)$$

- *Todos no quieren a alguien.*

$$\forall x \exists y \neg Q(x,y)$$

- *Nadie quiere a todos.*

$$\neg \exists x \forall y Q(x,y)$$

- *Nadie quiere a nadie.*

$$\forall x \forall y \neg Q(x,y)$$

1.3. Semántica de la Lógica de Predicados

Definición 3. *Sea $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ un lenguaje de primer órden. Una estructura o interpretación para $\mathcal{L}$ es un par $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M \neq \varnothing$ es un conjunto no vacío llamado el universo de la estructura e $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ tal que*

- *Si $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{I}(P)$ es una relación de m-argumentos sobre M, es decir, $\mathcal{I}(\mathcal{P}) \subseteq M^n$. Alternativamente podemos definir la interpretación de $\mathcal{P}$ como una función booleana que decide si una tupla está o no en la relación deseada, es decir, $\mathcal{I}(\mathcal{P}) : M^n \to Bool$.*

- *Si $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{I}(f)$ es una función con dominio M^n y contradominio M, es decir, $\mathcal{I}(f) : M^n \to M$.*

- *Si $c \in \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{I}(c)$ es un elemento de M, es decir, $\mathcal{I}(c) \in M$*

Dada una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$, la siguiente notación es de utilidad:

$$|\mathcal{M}| =_{def} M$$
$$P^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(P)$$
$$f^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(f)$$
$$c^{\mathcal{I}} =_{def} \mathcal{I}(c)$$

1.4. Interpretación de términos

Definición 4 (**Estado o Asignación**). *Un estado, asignación o evaluación de las variables es una función* $\sigma : Var \to M$

Definición 5 (**Interpretación de Términos**). *Sea* σ *un estado de las variables. Definimos la función de interpretación o significado de los términos con respecto a* $\sigma, \mathcal{I}_\sigma : TERM \to |\mathcal{M}|$ *como sigue:*

$$\mathcal{I}_\sigma(x) = \sigma(x)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(c) = \mathcal{I}(c)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}_\sigma(t_1), ..., \mathcal{I}_\sigma(t_n))$$

Lema 1 (**Lema de coincidencia para términos**). *Sean* $t \in TERM$ *y* σ_1, σ_2 *dos estados de las variables tales que* $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ *para toda variable* x *que figura en* t*. Entonces* $\mathcal{I}_{\sigma_1}(t) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(t)$*.*

1.5. Interpretación de fórmulas

Definición 6 (**Interpretación de fórmulas**). *Sea* σ *un estado de las variables. Definimos la función de interpretación o significado de las fórmulas con respecto a* $\sigma, \mathcal{I}_\sigma : FORM \to \{0, 1\}$ *como sigue:*

$$\mathcal{I}_\sigma(\bot) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\top) = 1$$
$$\mathcal{I}_\sigma(P(t_1, ..., t_m)) = 1 \textit{ si y sólo si } (\mathcal{I}_\sigma(t_1), ..., \mathcal{I}_\sigma(t_m)) \in P^{\mathcal{I}}$$
$$\mathcal{I}_\sigma(t_1 = t_2) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(t_1) = \mathcal{I}_\sigma(t_2)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\neg\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \wedge \psi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 1$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \vee \psi) = 0 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \to \psi) = 0 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1 \textit{ e } \mathcal{I}_\sigma(\psi) = 0$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_\sigma(\varphi) = \mathcal{I}_\sigma(\psi)$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \textit{ para todo } m \in M$$
$$\mathcal{I}_\sigma(\exists x\varphi) = 1 \textit{ si y sólo si } \mathcal{I}_{\sigma[x/m]}(\varphi) = 1 \textit{ para algún } m \in M.$$

Lema 2 (**Lema de coincidencia para fórmulas**). *Sean* φ *y* σ_1, σ_2 *dos estados de las variables tales que* $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ *para toda variable* $x \in FV(\varphi)$*. Entonces* $\mathcal{I}_{\sigma_1}(\varphi) = \mathcal{I}_{\sigma_2}(\varphi)$

1.5.1. Verdad

Definición 7 (**Satisfacibilidad y Verdad**). *Sean* φ *una fórmula y* $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I}\rangle$ *una interpretación. Entonces*

- φ *es satisfacible en* $\mathcal{M}$ *si existe un estado de las variables* σ *tal que* $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$*, lo cual suele denotarse como* $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$*.*

- φ *es verdadera en* $\mathcal{M}$ *si para todo estado de las variables* σ *se tiene que* $\mathcal{I}_\sigma(\varphi) = 1$*, es decir, si* φ *es satisfacible en* $\mathcal{M}$ *en todos los estados posibles. En tal caso también decimos que* M *es un modelo de* φ*, lo cual se denotará con* $\mathcal{M} \models \varphi$*.*

Las definiciones anteriores aplican también para conjuntos de fórmulas, por ejemplo, $\mathcal{M} \models \Gamma$ denota el hecho de que Γ tiene un modelo, y $\mathcal{M} \models_\sigma \Gamma$ que todas las fórmulas de Γ se satisfacen en $\mathcal{M}$ en el estado σ.

1.5.2. Falsedad

Definición 8. *Sean $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación y φ una fórmula. Decimos que φ es falsa en $\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Es decir, φ es falsa sy y sólo si su negación $\neg\varphi$ es verdadera.*

Así, una fórmula no verdadera es aquella tal que es insatisfacible en algún estado de sus variables, o bien tal que su negación es satisfacible en algún estado de sus variables. Sin embargo, para poder afirmar que φ es falsa, por definición tendríamos que mostrar que $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir que $\neg\varphi$ es satisfacible en todos los estados posibles.

Ejemplo 5. *Sean $\mathcal{L} = \{P^{(1)}, Q^{(1)}\}$, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \mathcal{I} \rangle$ donde $P^{\mathcal{I}}$ es la propiedad ser par y $Q^{\mathcal{I}}$ es la propiedad ser impar.*
Entonces, $\mathcal{M} \models P(x) \vee Q(x)$ puesto que cualquier número natural es par o impar. Sin embargo, no se cumple que $\mathcal{M} \models P(x)$ ni que $\mathcal{M} \models Q(x)$. Puesto que el valor de x no puede ser siempre par o siempre impar, todo depende del estado de las variables.

1.5.3. Propiedades de satisfacibilidad

Proposición 1. *Sean $\mathcal{M}$ una interpretación y φ, ψ fórmulas. Entonces*

- *Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$.*
- *Si $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ y $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \psi$*
- *Si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi$ y $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \forall\varphi$, donde $\forall\varphi$ denota a la cerradura universal de φ, es decir, a la fórmula obtenida al cuantificar universalmente todas las variables libres de φ.*

Proposición 2. *Sean φ un enunciado y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ una interpretación. Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{M} \models \varphi$, es decir, φ es verdadero en $\mathcal{M}$.*
2. *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$, es decir, φ es falso en $\mathcal{M}$.*

Corolario 1. *Si φ es un enunciado, entonces φ es falso si y sólo si φ es no verdadero en $\mathcal{M}$.*

1.6. Modelos

Sabemos que un modelo para una fórmula φ es una interpretación $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$. Entonces, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 6. *Sea $\Gamma = \{P(b), Q(b), R(b), \exists(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x))), \forall x(R(x) \to P(x))\}$. Queremos ver si Γ tiene un modelo.*
En este caso, lo más fácil es ir construyendo un modelo para cada fórmula de Γ. Si logramos que todas las fórmulas de Γ sean verdaderas al mismo tiempo entonces habremos construido un modelos para Γ. Analicemos cada fórmula de Γ.

1. *$P(b)$. Para que $\mathcal{M} \models P(b)$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in P^{\mathcal{I}}$. Así que al menos debemos tener $P^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}\}$.*

2. $Q(b)$. Para que $\mathcal{M} \models Q(b)$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in Q^{\mathcal{I}}$, asi que basta $Q^{I} = \{b^{\mathcal{I}}\}$.

3. $R(b)$. Para que $\mathcal{M} \models Q(b)$ se debe cumplir que $b^{\mathcal{I}} \in R^{\mathcal{I}}$ por lo que basta con $R = \{b^{\mathcal{I}}\}$.

4. $\exists(P(x) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x)))$. Es decir, hay un elemento de $|\mathcal{M}|$ tal que cumple P y no cumple Q ni R. Claramente este elemento no puede ser $b^{\mathcal{I}}$ por lo que $P^{\mathcal{I}}$ debe tener al menos otro elemento, digamos $P^{I} = \{b^{\mathcal{I}}, m\}$.

5. $\forall x(R(x) \to P(x))$. Debemos tener que todo elemento de Γ que cumple $R^{\mathcal{I}}$, debe cumplir $P^{\mathcal{I}}$, pero de acuerdo a cómo definimos $R^{\mathcal{I}}$ esto ya se cumple pues $b^{\mathcal{I}} \in R^{\mathcal{I}}$ y $b^{\mathcal{I}} \in P^{\mathcal{I}}$.

De manera que $P^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}, m\}$ y $Q^{\mathcal{I}} = \{b^{\mathcal{I}}\} = R^{\mathcal{I}}$ y para que el modelo resulte más natural podemos tomar $M = \{0,1\}$, $b^{\mathcal{I}} = 0$ y $m = 1$, con lo que queda $\mathcal{M} = \langle\{0,1\}, \mathcal{I}\rangle$ con $P^{\mathcal{I}} = \{0,1\}, Q^{\mathcal{I}} = \{0\} = R^{\mathcal{I}}$ y $b^{\mathcal{I}} = 0$.

Ejemplo 7. *Sea $\Gamma = \{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x), \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x \neg R(x,x), \forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)),$ $\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y))), \forall x(Q(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))\}$*
Queremos hallar un modelo de Γ, para ello, analicemos cada fórmula:

1. $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$. Es decir, debe existir $a_1 \in |M|$ tal que $P^{\mathcal{I}}(a_1)$ y además debe existir $a_2 \in |\mathcal{M}|$ tal que $Q^{\mathcal{I}}(a_2)$. Obsérvese que podríamos tener $a_1 = a_2$.

2. $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$. La fórmula indica que no hay un individuo que cumpla $P^{\mathcal{I}}$ y $Q^{\mathcal{I}}$, de manera que los invididuos encontrados en (1) deben ser diferentes.

3. $\forall x \neg R(x,x)$. Significa que $R^{\mathcal{I}}$ es antirreflexiva, por lo que los pares (a,a) no pueden pertenecer a $R^{\mathcal{I}}$. Obsérvese que esto ya se cumple pues hasta ahora $R^{\mathcal{I}} = \varnothing$.

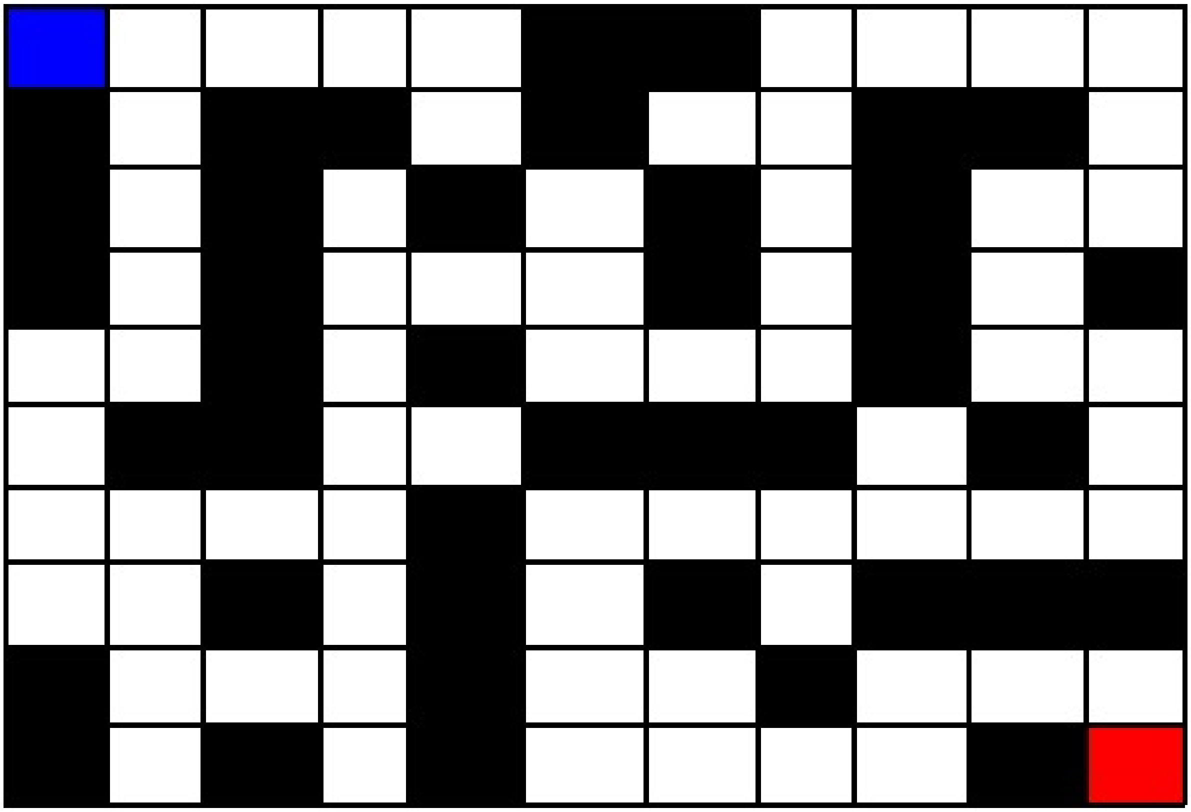
4. $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$. La fórmula indica que la relación $R^{\mathcal{I}}$ es simétrica, pero aún no exige que haya un par relacionado, por lo que aún tenemos $R^{\mathcal{I}} = \varnothing$.

5. $\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$. Significa que para cada elemento a que cumpla $P^{\mathcal{I}}$ debe existir un elemento b que cumpla $Q^{\mathcal{I}}$ de manera que el par (a,b) esté en la relación $R^{\mathcal{I}}$. Como en (1) obtuvimos que $P^{\mathcal{I}}(a_1)$ entonces debe existir $b \in |\mathcal{M}|$ tal que $Q^{\mathcal{I}}(b)$ y $R^{I}(a_1, b)$. Obsérvese que podemos tomar $b = a_2$, además, por (4), también debemos tener $R^{\mathcal{I}}(a_2, a_1)$

6. $\forall x(Q(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$. Es similar a la anterior. Como tenemos que $Q^{\mathcal{I}}(a_2)$, por (1), entonces debe existir $a_3 \in |\mathcal{M}|$ tal que $Q^{\mathcal{I}}(a_3)$ y $R^{\mathcal{I}}(a_2, a_3)$, además por (3) tenemos que $a_3 \neq a_2$ y por (2), $a_3 \neq a_1$. Finalmente también debemos tener que $R^{\mathcal{I}}(a_3, a_2)$ para que se cumpla (4).

De manera que las interpretaciones pueden quedar como sigue:
$|\mathcal{M}| = \{1,2,3\}$, $P^{\mathcal{I}} = \{1\}$, $Q^{\mathcal{I}} = \{2,3\}$, $R^{\mathcal{I}} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

2. El laberinto a resolver



3. Solución del problema

3.0.1. Técnica de Backtracking

Esto consiste en recordar los momentos de la ejecución donde un objetivo tenía varias soluciones para posteriormente dar marcha atrás y seguir la ejecución utilizando otra solución como alternativa.

3.0.2. Implementación de la solución

Primero para crear el tablero del laberinto se crearon casillas con sus coordenadas de cada una. Es decir, se crea el universo del discurso.

```
casilla(0,0).
casilla(0,1).
casilla(0,2).
.
.
casilla(10,6).
casilla(10,8).
casilla(10,9).
```

El conjunto de conocimiento (tablero) está representado con la regla conexion(A, B). Simplemente indicamos explícitamente cuáles casillas están conectadas entre sí. Así las casillas negras solo existen ficticiamente porque en realidad no hay conexiones para ellas.

```
conexion(casilla(0,0),casilla(0,1)).
conexion(casilla(0,1),casilla(0,2)).
conexion(casilla(0,2),casilla(0,3)).
.
.
conexion(casilla(8,8),casilla(8,9)).
conexion(casilla(8,9),casilla(8,10)).
conexion(casilla(8,10),casilla(9,10)).
```

Se hicieron simétricas las conexiones para evitar repeticiones.

```
conexion(A, B) :- casilla(A, B).
conexion(A, B) :- casilla(B, A).
```

Obtenemos a un vecino de la casilla I, verificamos que ese vecino sea diferente de la casilla F, verificamos que ese vecino no esté en la lista de casillas visitadas y hacemos recursión sobre el vecino, la casilla F, la lista que contiene al veicno y a la lista de casillas ya visitadas, y el camino C.

Todo esto basandonos en el algoritmo de DFS(Depth First Search) para hacer el recorrido de la gráfica viendola como un árbol y haciendo una busqueda por profundidad hasta llegar a la casilla final. DFS recibe cuatro parámetros: I, F, V, C. La regla se satisface si C es el camino que va de la casilla inicial I y la casilla final F, y V son las casillas visitadas al buscar C.

```
busca(I, I, []).
busca(I, F, C) :- dfs(I, F, [I], P), reverse(P, C).

dfs(I, F, V, [I|V]) :- conexion(I, F).
dfs(I, F, V, C) :- conexion(I, B), B \== F, \+ (member(B, V)), dfs(B, F, [B|V], C).
```

4. Bibliografía

http://interactivepython.org/runestone/static/pythoned/Recursion/ExploracionDeUnLaberinto.html

https://users.dcc.uchile.cl/ peortega/guiaprolog/leccion5.html

https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/huejutla/n5/a1.html

http://www.complang.tuwien.ac.at/SWI-Prolog/Manual/aggregate.html