Reposiciones de ejercicios semanales

Rubí Rojas Tania Michelle
Universidad Nacional Autónoma de México
taniarubi@ciencias.unam.mx
de cuenta: 315121719

29 de mayo de 2019

1. **Semanal 1**

   a) Defina recursivamente la función **nn** especificada como sigue:
   Dada una fórmula φ, $\mathbf{nn}(\varphi)$ devuelve el número de símbolos de negación en la fórmula.
   Solución: Definimos la función $nn :: PROP \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} nn(\top) &= 0 \\ nn(\bot) &= 0 \\ nn(VarP) &= 0 \\ nn(\neg\varphi) &= nn(\varphi) + 1 \\ nn(\varphi \star \psi) &= nn(\varphi) + nn(\psi) + 0 \end{aligned}$$

   b) Demuestre utilizando inducción estructural que para cualquier fórmula φ se cumple

$$\mathbf{nn}(\varphi) \leq \mathbf{nn}(\mathbf{qi}(\varphi)).$$

   Donde la función qi devuelve una fórmula lógicamente equivalente en la que no figura el símbolo de implicación.

   Demostración. Inducción sobre la fórmula φ.

   - *Base de inducción.*
     - $\varphi = \top$. Entonces $nn(\top) = 0 = nn(\top) = nn(qi(\top))$
     - $\varphi = \bot$. Entonces $nn(\bot) = 0 = nn(\bot) = nn(qi(\bot))$
     - $\varphi = VarP$. Entonces $nn(VarP) = 0 = nn(VarP) = nn(qi(VarP))$
   - *Hipótesis de inducción.*
     Supongamos que se cumple para $nn(\varphi') \leq nn(qi(\varphi'))$ y $nn(\varphi'') \leq nn(qi(\varphi''))$.

- *Paso inductivo.*
  Tenemos dos casos:
  1) $\varphi = \neg\varphi'$. Entonces

$$\begin{aligned}
nn(\varphi) &= nn(\neg\varphi') && \text{def. de } \varphi \\
&= nn(\varphi') + 1 && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\varphi')) + 1 && \text{H.I.} \\
&\leq nn(\neg(qi(\varphi'))) && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\neg\varphi')) && \text{def. recursiva de qi} \\
&\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
\end{aligned}$$

  2) $\varphi = \phi \star \psi$. Tenemos tres subcasos:
     i) $\varphi = \phi \star \psi$ con $\star \in \{\wedge, \vee\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
nn(\varphi) &= nn(\phi \star \psi) && \text{def. de } \varphi \\
&= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
&\leq nn(qi(\phi) \star qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\phi \star \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
&\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
\end{aligned}$$

     ii) $\varphi = \phi \star \psi$ con $\star \in \{\rightarrow\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
nn(\varphi) &= nn(\phi \rightarrow \psi) && \text{def. de } \varphi \\
&= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
&\leq nn(qi(\phi) \rightarrow qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(\neg qi(\phi) \vee qi(\psi)) && \text{equivalencia lógica} \\
&\leq nn(qi(\phi \rightarrow \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
&\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
\end{aligned}$$

     iii) $\varphi = \phi \star \psi$ con $\star \in \{\leftrightarrow\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
nn(\varphi) &= nn(\phi \leftrightarrow \psi) && \text{def. de } \varphi \\
&= nn(\phi) + nn(\psi) + 0 && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn(qi(\phi)) + nn(qi(\psi)) + 0 && \text{H.I.} \\
&\leq nn(qi(\phi) \leftrightarrow qi(\psi)) && \text{def. recursiva de nn} \\
&\leq nn((\neg qi(\phi) \vee qi(\psi)) \wedge (qi(\phi) \vee \neg qi(\psi))) && \text{equivalencia lógica} \\
&\leq nn(qi(\phi \leftrightarrow \psi)) && \text{def. recursiva de qi} \\
&\leq nn(qi(\varphi)) && \text{def. de } \varphi
\end{aligned}$$

$\square$

2. **Semanal 2**

   a) Sea $\varphi = \neg(q \wedge ((r \to \neg s \vee r) \to p))$. Convierta a φ en una fórmula lógicamente equivalente φ' que se encuentre en Forma Normal Negativa.
   SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} fnn(\varphi) &= \neg(q \wedge ((\neg r \vee \neg s \vee r) \to p)) \\ &= \neg(q \wedge ((r \wedge s \wedge \neg r) \vee p)) \\ &= \neg q \vee ((\neg r \vee \neg s \vee r) \wedge \neg p) \end{aligned}$$

   b) Sea $\Gamma = \{(a \vee b) \wedge c, \neg b \vee \neg c\}$ y $\varphi = a$. Determine mediante el método de tableaux si $\Gamma \models \varphi$.

   Demostración. Para mostrar que $\Gamma \models \varphi$ entonces hay que trabajar nuestro Tableaux con $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Así,

1.	$(a \vee b) \wedge c$ ✓		Hip
2.	$\neg b \vee \neg c$ ✓		Hip
3.	$\neg a$ ✓		Hip
4.	c ✓		ext. de α en 1
5.	$a \vee b$ ✓		ext. de α en 1
6.	a ✓ $\otimes$ 3,6	b ✓	ext. de β en 5
7.		$\neg b$ ✓ $\otimes$ 6,7 $\neg c$ ✓ $\otimes$ 4,7	ext. de β en 2

   Como todas las ramas se cerraron entonces podemos concluir que $\Gamma \models \varphi$.

   $\square$

3. **Semanal 3**

   a) Da la especificación formal del siguiente argumento, definiendo previamente un glosario adecuado.

   Todos los estudiantes cursan al menos una materia

   SOLUCIÓN:

   - Universo del discurso: Todas las personas.
   - Predicados: $E(x) : x$ es estudiante y $C(x, y) : x$ cursa la materia y.
   - Especificación Formal: $\forall x(E(x) \to \exists y C(x, y))$

b) Considere la siguiente expresión.

$$\forall x \exists y (A(y,x) \to M(x,y) \land (\exists z A(x,z) \land M(z,x)))$$

Aplique la siguiente sustitución: $\sigma = [u := a][z := x][x := n]$.

Solución: Primero aplicamos $\alpha-$equivalencia, donde obtenemos

$$\forall w \exists s (A(s,w) \to M(w,s) \land (\exists r A(w,r) \land M(z,w)))$$

Así, al aplicar la sustitución σ tenemos que
$(\forall w \exists s (A(s,w) \to M(w,s) \land (\exists r A(w,r) \land M(z,w))))[u := a][z := x][x := n]$
$= (\forall w \exists s (A(s,w) \to M(w,s) \land (\exists r A(w,r) \land M(z,w))))[z := x][x := n]$
$= (\forall w \exists s (A(s,w) \to M(w,s) \land (\exists r A(w,r) \land M(x,w))))[x := n]$
$= (\forall w \exists s (A(s,w) \to M(w,s) \land (\exists r A(w,r) \land M(n,w))))$

4. **Semanal 4**

a) $\Gamma = \{\forall x (Qy \to Px)\}$. utilizando Tableaux demuestre lo siguiente:

$$\Gamma \models Qy \to \forall x Px$$

Demostración. Para mostrar que $\Gamma \models Qy \to \forall x Px$ entonces hay que trabajar nuestro Tableaux con $\Gamma \cup \{Qy \land \exists x \neg Px\}$. Así,

$$\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{\forall x (Qy \to Px)} & \text{Hip} \\
2. & \multicolumn{2}{c}{Qy \land \exists x \neg Px \checkmark} & \text{Hip} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{Qy \checkmark} & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 2 \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\exists x \neg Px \checkmark} & \text{ext. de } \alpha \text{ en } 2 \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\neg Pa \checkmark} & \text{ext. de } \delta \text{ en } 4 \\
6. & \multicolumn{2}{c}{Qy \to Pa \checkmark} & \text{ext. de } \gamma \text{ en } 1 \\
7. & \neg Qy \checkmark & Pa \checkmark & \text{ext. de } \beta \text{ en } 6 \\
 & \underset{3,7}{\otimes} & \underset{5,7}{\otimes} &
\end{array}$$

Como todas las ramas se cerraron entonces podemos concluir que $\Gamma \models Qy \to \forall x Px$.

□

5. **Semanal 5**

a) Sea $\varphi = \forall x \exists y (Pxyz \to (Qz \lor Ryx)) \to Qy \land (\exists x \forall z Rxz \lor \exists w Sx)$. Obten la Forma Normal Clausular de φ.
Solución: Primero, rectificamos a φ.

$$rect(\varphi) = \forall m \exists n (Pmnz \to (Qz \lor Rnm)) \to Qy \land (\exists s \forall u Rsu \lor Sx)$$

Así,

$$\begin{aligned}
fnp(\varphi) &= \exists s \forall u (\forall m \exists n (Pmnz \to (Qz \lor Rnm)) \to Qy \land (Rsu \lor Sx)) && \text{eq. lógica} \\
&= \exists s \forall u \exists m \forall n ((Pmnz \to (Qz \lor Rnm)) \to Qy \land (Rsu \lor Sx)) && \text{eq. lógica}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$fns(\varphi) = \forall u \forall n((Pfunz \to (Qz \vee Rnfu)) \to Qy \wedge (Rau \vee Sx))$$

Luego,

$$fnn(\varphi) = \forall u \forall n((Pfunz \wedge (\neg Qz \wedge \neg Rnfu)) \vee Qy \wedge (Rau \vee Sx))$$

Por lo tanto,

$$Cl(\varphi) = Pfunz \wedge \neg Qz \wedge (\neg Rnfu \vee Qy) \wedge (Rau \vee Sx)$$

6. **Semanal 6**

   a) Transforme a Forma Normal Clausular y decida mediante resolución binaria si se cumple la siguiente consecuencia lógica.

   $$\{\forall x(Pxy \to \exists y Qy), \exists x \forall y(Qy \to Pyz \vee Rx), \forall y(Ry \to \exists x \neg Qa)\} \models \forall x(Qfa \to Qa)$$

   SOLUCIÓN: Ya que trabajaremos con resolución binaria entonces debemos trabajar con el conjunto

   $$\varphi = \{\forall x(Pxy \to \exists y Qy), \exists x \forall y(Qy \to Pyz \vee Rx), \forall y(Ry \to \exists x \neg Qa), \exists x(Qfa \wedge \neg Qa)\}$$

   Para obtener la Forma Normal Clausular, primero rectificamos φ.

   $$rect(\varphi) = \forall m(Pmy \to \exists n Qn) \wedge \exists s \forall r(Qr \to Prz \vee Rs) \wedge \forall u(Ru \to \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

   Así,

   $$fnn(\varphi) = \forall m(\neg Pmy \vee \exists n Qn) \wedge \exists s \forall r(\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge \forall u(\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

   Después,

   $$fnp(\varphi) = \forall m \exists n \exists s \forall r \forall u((\neg Pmy \vee Qn) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa)$$

   Luego,

   $$\begin{aligned} fns(\varphi) &= \forall m \exists s \forall r \forall u((\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rs) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa) \\ &= \forall m \forall r \forall u((\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rgm) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa) \end{aligned}$$

   Finalmente,

   $$Cl(\varphi) = (\neg Pmy \vee Qfm) \wedge (\neg Qr \vee Prz \vee Rgm) \wedge (\neg Ru \vee \neg Qa) \wedge Qfa \wedge \neg Qa$$

   Haciendo resolución binaria tenemos que

1.$(\neg Pmy \vee Qfm)$	Hip
2.$(\neg Qr \vee Prz \vee Rgm)$	Hip
3.$(\neg Ru \vee \neg Qa)$	Hip
4. Qfa	Hip
5. $\neg Qa$	Hip
6. $\square$	$Res(4,5)[a := b][b := fa]$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\varphi = \{\forall x(Pxy \to \exists yQy), \exists x\forall y(Qy \to Pyz \lor Rx), \forall y(Ry \to \exists x\neg Qa), \exists x(Qfa \land \neg Qa)\}$$

7. **Semanal 7**

   a) Demuestre lo siguiente mediante deducción natural.

$$\exists xFx \to \forall y(Gy \to Hy), \exists zJz \to \exists wGw \vdash \exists z(Fz \land Jz) \to \exists vHv$$

Demostración. Por el Teo. de DN basta mostrar

$$\Gamma = \{\exists xFx \to \forall y(Gy \to Hy), \exists zJz \to \exists wGw, \exists z(Fz \land Jz)\} \vdash \exists vHv$$

Entonces

1.	$\Gamma \vdash \exists xFx \to \forall y(Gy \to Hy)$	Hip
2.	$\Gamma \vdash \exists zJz \to \exists wGw$	Hip
3.	$\Gamma \vdash \exists z(Fz \land Jz)$	Hip
4.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash Fz \land Jz$	Hip
5.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash Fz$	$(\land E)4$
6.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash Jz$	$(\land E)4$
7.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash \exists xFx$	$(\exists I)4$
8.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash \forall y(Gy \to Hy)$	$(\to E)6, 1$
9.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash \exists zJz$	$(\exists I)5$
10.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash \exists Gw$	$(\to E)8, 2$
11.	$\Gamma, Fz \land Jz, Gw \vdash Gw$	Hip
12.	$\Gamma, Fz \land Jz, Gw \vdash Gw \to Hw$	$(\forall E)7$
13.	$\Gamma Fz \land Jz, Gw \vdash Hw$	$(\to E)11, 10$
14.	$\Gamma, Fz \land Jz, Gw \vdash \exists uHu$	$(\exists I)12$
15.	$\Gamma, Fz \land Jz \vdash \exists uHu$	$(\exists E)9, 12$
16.	$\Gamma \vdash \exists uHu$	$(\exists E)3, 15$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\exists xFx \to \forall y(Gy \to Hy), \exists zJz \to \exists wGw \vdash \exists z(Fz \land Jz) \to \exists vHv$$

$\square$