9ª lista de exercícios

① Calcule a derivada das funções abaixo:

1) $f(u) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ R: $f'(u) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$

2) $f(\theta) = 2\cos(\theta^2)\cdot\operatorname{sen}(2\theta)$ R: $f'(\theta) = 4\cos(\theta^2)\cos(2\theta) - 4\theta\operatorname{sen}(2\theta)\cdot\operatorname{sen}(\theta^2)$

3) $f(x) = \operatorname{sen}^3(3x^2+6x)$ R: $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(3x^2+6x)\cos(3x^2+6x)(6x+6)$

4) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ R: $f'(x) = 0$

5) $f(x) = 3\operatorname{tg}(2x+1) + \sqrt{x}$ R: $f'(x) = 6\sec^2(2x+1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $f(x) = e^{2x}\cdot\cos(3x)$ R: $f'(x) = e^{2x}(2\cos(3x) - 3\operatorname{sen}(3x))$

7) $f(t) = \ln(\cos^2(x))$ R: $f'(t) = -2\operatorname{tg}(t)$

8) $f(x) = (\operatorname{arc\,sen}(x))^2$ R: $f'(x) = \frac{2\operatorname{arc\,sen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ R: $f'(x) = \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$

10) $f(x) = \operatorname{senh}(2x-1)$ R: $f'(x) = 2\cosh(2x-1)$

② Calcular as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

① $y = 3x^4 - 2x$; $n = 5$ R: $y^{(v)} = 0$

② $y = 3 - 2x^2 + 4x^5$; $n = 10$ R: $y^{(10)} = 0$

③ $y = \sqrt{3-x^2}$; $n = 2$ R: $y'' = \frac{-3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$

④ $y = \operatorname{sen}(ax)$; $n = 7$ R: $y^{(vii)} = -a^7\cos(ax)$

③ Mostre a seguinte versão da regra do produto para a derivada segunda

$$(f \cdot g)'' = f'' g + 2 f' g' + f \cdot g''$$

④ Mostrar que as curvas cujas equações são $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ interceptam-se no ponto $(1, 1)$ e que suas tangentes nesse ponto são perpendiculares.

⑤ Encontrar Δy e dy para os valores dados.

a) $y = \frac{1}{2x^2}$, $\Delta x = 0{,}001$, $x = 1$ R: $\Delta y = -0{,}000998$ $dy = -0{,}001$

b) $y = 5x^2 - 6x$, $\Delta x = 0{,}02$, $x = 0$ R: $\Delta y = -0{,}118$ $dy = -0{,}12$

⑥ Calcular um valor aproximado para as seguintes raízes, usando diferencial.

a) $\sqrt{50}$ R: 7,071

b) $\sqrt[4]{13}$ R: 1,906

⑦ Influências externas produzem uma aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento retilíneo é $y = \frac{3}{t} + 2t$, onde y é o deslocamento e t é o tempo.

a) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 2$? R: $\frac{5}{4}$ m/s

b) Qual é a aceleração no instante $t = 3$? R: $\frac{2}{9}$ m/s^2

8) Uma peça de carne foi colocada no freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 5$$

Qual é a velocidade que sua temperatura está reduzindo após 2 horas? R: $-5,444\ldots$ °c / hora

9) Uma piscina está sendo drenada para limpeza. Se o seu volume de água inicial era de 90.000 litros e depois de um tempo de t horas este volume diminuiu $2500\,t^2$ litros, determinar:

a) tempo necessário para esvaziamento da piscina R: 6 horas

b) taxa média de escoamento no intervalo $[2,5]$ R: $17500 \frac{l}{h}$

c) taxa de escoamento depois de 2 horas do início do processo.

R: $10.000 \frac{l}{h}$

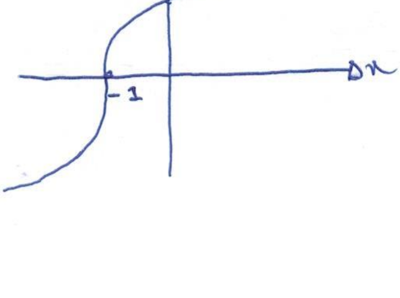
10) Usando derivadas faça o esboço do gráfico de

a) $f(x) = x^4 - x^2$

R: Veja exemplo em sala de aula

b) $f(x) = (x+1)^{1/3}$

R:



(11) Demonstrar que a função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ tem máximo se, e somente se, $a < 0$ e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

(12) Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

R: $x = \frac{5}{3}$; $(-\infty, \frac{5}{3})$ Côncava para cima
$(5/3, \infty)$ " " baixo

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$

R: $\nexists$ $(-4, \infty)$ Côncava para cima
$(-\infty, -4)$ " " baixo

c) $f(x) = 2x e^{-3x}$

R: $x = \frac{2}{3}$ $(2/3, \infty)$ Côncava para cima
$(-\infty, 2/3)$ " " baixo.

(13) Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja $2.500\ m^3$. O material da base vai custar R\$ 1200,00 por m^2 e o material dos lados R\$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

R: base com $x = 15,983\ m$
altura com $y = 9,785\ m$

(14) Determinar o ponto P situado sobre o gráfico da hipérbole $xy = 1$, que está mais próximo da origem.

R: $P = (1, 1)$ ou $(-1, -1)$

(15) Um fio de comprimento l é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado.

a) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja mínima?

R: 1º pedaço $\frac{4l}{4+\pi}$ 2º pedaço $\frac{l\pi}{4+\pi}$

b) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das áreas compreendidas seja máxima?

R: Deve-se fazer um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$

(16) Determinar os seguintes limites com o auxílio das regras de L'Hospital.

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$ R: 0

2) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$ R: -1

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5-5x^3}{2-2x^3}$ R: $\frac{5}{2}$

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$ R: ∞

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{99}}{e^x}$ R: 0

6) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$ R: 1

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ R: 1

8) $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$ R: 1