Lista Geometria Analítica - 1

1. a) $A = (3, 5, 1)$ e $B = (-2, 3, 2)$

$\vec{AB} = B - A = (-2, 3, 2) - (3, 5, 1) = (-5, -2, 1)$

Vetorial: $P = P_0 + vt$

$(x, y, z) = (3, 5, 1) + (-5, -2, 1)t$ → Forma vetorial

$\therefore (x, y, z) = (3, 5, 1) + (-5t, -2t, 1t)$

$\therefore (x, y, z) = (3 - 5t, 5 - 2t, 1 + t)$

$$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{(Paramétrica)}$$

$5t = 3 - x$ $\quad$ $2t = 5 - y$ $\quad$ $t = z - 1$

$t = \dfrac{3 - x}{5}$ $\quad$ $t = \dfrac{5 - y}{2}$

$t = \dfrac{x - 3}{-5}$ $\quad$ $t = \dfrac{y - 5}{-2}$

Forma Simétrica

$$\boxed{\dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-5}{-2} = z - 1}$$

b) $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$

$\vec{AB} = B - A = (1, 0, 0) - (0, 1, 0) = (1, -1, 0)$

Vetorial $= (x, y, z) = (0, 1, 0) + (1, -1, 0)t$

$\therefore (x, y, z) = (0, 1, 0) + (1t, -1t)$

$\therefore (x, y, z) = (t, 1 - t)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} \text{(Paramétrica)}$$

c) $A = (0, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 0)$

Paramétrica $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - T \\ z = 1 - T \end{cases}$

d) $A = (3, 2, 1)$ e $B = (6, 1, 4)$

$\overrightarrow{AB}$ paramétrica $\begin{cases} x = 3 + 3t \rightarrow 3t = x - 3 \rightarrow t = \frac{x-3}{3} \\ y = 2 - T \rightarrow T = -y + 2 \rightarrow T = \frac{y+2}{-1} \\ z = 1 + 3t \rightarrow 3t = z - 1 \rightarrow T = \frac{z-1}{3} \end{cases}$

Forma simetrica: $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$

2. $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$

a) Pontos iniciais: {1, 0, 4} e para $\lambda = 1$ {0, 1, 6}
Vetor Diretor: {-1, 1, 2} coeficientes de λ e seu múltiplo: {-2, 2, 4}

b) Verifique se os pontos $P = (1, 3, -3)$ e $Q = (-3, 4, 12)$ pertencem à reta r.

Substituindo na equação paramétrica, temos:

$P = \begin{cases} 1 = 1 - \lambda \\ 3 = \lambda \\ -3 = 4 + 2\lambda \end{cases}$

$\lambda = 3$ e $1 \neq 1 - 3$ portanto não há um "λ" que satisfaz toda a equação, ou seja "P" não pertence à reta r.

$Q = \begin{cases} -3 = 1 - \lambda \\ 4 = \lambda \\ 12 = 4 + 2\lambda \end{cases}$

$4 = \lambda$ e $-3 = 1 - 4$ e $12 = 4 + 2 \cdot 4$, portanto há um "λ" que satisfaz toda a equação, ou seja "Q" pertence à reta r.

c) Equação paramétrica de (1, 4, -1), paralela à reta r.

$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

3- a) Para que três pontos e um vetor formem um triângulo, basta apenas que eles não estejam alinhados.

Primeiro é preciso calcular os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$

$\vec{AB} = B - A = (-5, 2, 3) - (3, 6, -7) = (-5-3, 2-6, 3-(-7)) = (-8, -4, 10)$

$\vec{AC} = C - A = (4, -7, -6) - (3, 6, -7) = (4-3, -7-6, -6+7) = (4, -13, 1)$

$$\begin{cases} -8 = 1\lambda \Rightarrow -8 = \lambda \\ -4 = -13\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-4}{-13} \\ 10 = 1\lambda \Rightarrow \lambda = 10 \end{cases}$$

não há um "λ" que satisfaz a equação completa, ou seja, os pontos não são colineares, portanto formam um triângulo.

b) Ponto médio de AB $\Rightarrow \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-7+3}{2}\right) =$

$= \left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (-1, 4, -2) \Rightarrow$ Ponto médio de AB = M

Agora só é preciso achar a equação vetorial que passa por C e o ponto médio de $\vec{AB}$ = M

Eq. da reta na forma vetorial: $C + t\,\vec{CM} \Rightarrow$

$\Rightarrow (4, -7, -6) + t(-5, 11, 4) \Rightarrow (4-5t, -7+11t, -6+4t)$

$\vec{CM} = M - C = (-1-4, 4-(-7), -2-(-6)) = (-5, 11, 4)$

2/. Para que forme um triângulo retângulo é necessário que tenha um ângulo de 90°.

ou seja $\rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| . \cos 90°$ $\qquad \cos 90° = 0$

$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$\vec{AB} = B - A = (-3, 0, 9) - (0, 1, 8) = (-3, -1, 1)$

$\vec{AC} = C - A = (T1 + 1, T1 + 2, T(-3).0) - (0, 1, 6) = (T1 + 1, T1 + 1, 8)$

$AB \cdot AC = (-3 . T1 + 1 + (-1) . T1 + 1 + 8) = 0$

$= -3T + 3 - T - 1 + 8 = 0$

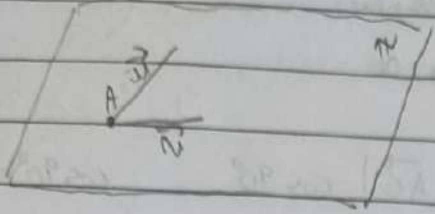
$= -4T + 2 + 8 = 0$

$= 10 = 4T$

$= \frac{10}{4} = T \rightarrow \frac{5}{2} = T$

portanto para que A, B e C seja vértices de um triângulo retângulo $C = (5/2, 5/2, -15/2)$

5: a)



$\pi: X = A + \lambda \vec{u} + \beta(\vec{v})$

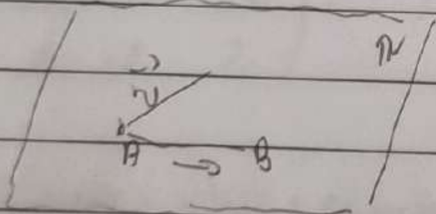
$\pi: x, y, z = x_A, y_A, z_A + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$

$\pi: X = (1, 2, 0) + \lambda((1, 1, 0) + \beta(2, 3, -1))$ → equação vetorial do plano

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda 1 + \beta . 2 \\ y = 2 + \lambda 1 + \beta . 3 \\ z = 0 + \lambda 0 + \beta . -1 \end{cases}$$

→ Equação paramétrica do plano

b)



$\pi: X = A + \lambda \vec{v} + \beta \vec{AB}$

$\cancel{X}\ \pi: X = B + \lambda \vec{v} + \beta \vec{BA}$

5-c) $A: (1,0,1)$, $B: (2,1,-2)$ e $C: (1,-1,0)$

$\vec{AB} = B - A = (2,1,-2) - (1,0,1) = (1,1,-3)$

Vetorial → $(x,y,z) = (1,0,1) + (1,1,-3)t$

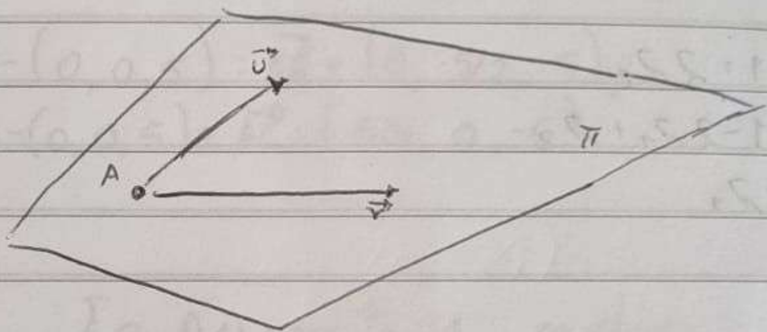
Vetorial → $(1+t, t, 1-3t)$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}$$ Paramétrica

6-a) $A: (9,-1,0)$

$\vec{u} = (0,1,0)$

$\vec{v} = (1,1,1)$



$\pi: X = A + \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$

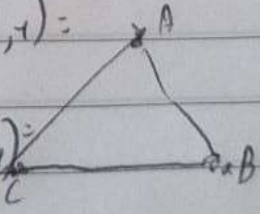
$\pi: X = (9,-1,0) + \lambda_1(0,1,0) + \lambda_2(1,1,1)$ ← Eq. vetorial do plano π.

$$\begin{cases} x = 9 + \lambda_2 \\ y = -1 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = 0 + \lambda_2 \end{cases}$$ Eq. Paramétrica do plano

b) $A = (1,0,1)$ $\quad \vec{AB} = B - A = (-1,0,1) - (1,0,1) = (-2,0,0)$

$B: (-1,0,1)$

$C = (2,1,2)$ $\quad \vec{BC} = C - B = (2,1,2) - (-1,0,1) = (1,1,1)$



$\pi = X = A + \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{BC}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$

$X = (1,0,1) + \lambda_1(-2,0,0) + \lambda_2(1,1,1)$ ← Eq. vetorial do plano π

7-a) $4x + 2y - z + 5 = 0$

$A \rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = ?$

$4.0 + 2.0 - z + 5 = 0$

$-z = -5 \rightarrow z = 5$

$B \rightarrow x = 0,\ y = ?,\ z = 0$

$4.0 + 2y - 0 + 5 = 0$

$2y + 5 = 0$

$2y = -5$

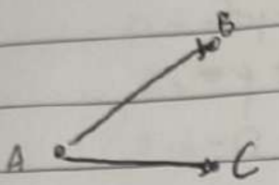
$y = \dfrac{-5}{2}$

$C \rightarrow x = ?,\ y = 0,\ z = 0$

$4x + 2.0 - 0 + 5 = 0$

$4x = -5$

$x = \dfrac{-5}{4}$



$\vec{AB} = B - A = (0, -5/2, 0) - (0, 0, 5) = \vec{AB} = (0, -5/2, -5)$

$\vec{AC} = C - A = (-5/4, 0, 0) - (0, 0, 5) = \vec{AC} = (-5/4, 0, -5)$

$$\pi: \begin{cases} x = -5/4\,\lambda_2 \\ y = -5/2\,\lambda_1 \\ z = 5 - 5\lambda_1 - 5\lambda_2 \end{cases}$$

Eq paramétrica do plano

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_2 \\ z = 1 + \lambda_2 \end{cases}$$ → Eq paramétrica do plano π

c) π contém → $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, -1, -1)$ $\vec{v} = (2, 1, 0)$

$\vec{AB} = B - A = (1, -1, -1) - (1, 1, 0) = (0, -2, -1)$

$X = A + \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{v}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R})$

$X = (1, 1, 0) + \lambda_1(0, -2, -1) + \lambda_2(2, 1, 0)$ → Eq Geral do plano

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda_2 \\ y = 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = -\lambda_1 \end{cases}$$

8-a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ $A(1,0,3)$, $\vec{u} = (1,2,0)$, $\vec{v} = (-1,1,1)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \rightarrow$

$\rightarrow (2, -1, 3)$

$ax + by + cz = d$

$2x - y + 3z = d \leftarrow A$

$2.1 - 0 + 3.3 = d$

$11 = d$ $\therefore$ $2x - y + 3z = 11 \leftarrow$ Eq. Geral do Plano

b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$ $A(1,2,3)$, $\vec{u} = (1,0,-1)$, $\vec{v} = (0,0,1)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \rightarrow (0,-1,0)$

$\rightarrow ax + by + cz = d$

$0.x - y + 0z = d \leftarrow A$

$0.1 - 2 + 0.3 = d$

$d = -2$ $\therefore$ $y = 2 \leftarrow$ Eq. Geral do plano

c) $\begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ $A(-2,0,0)$, $\vec{u} = (1,2,1)$, $\vec{v} = (-1,2,1)$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$ax + by + cz = d$

$\rightarrow 0.x - 2y + 4z = d \leftarrow A$

$(0, -2, 4)$

$d = 0$ $\therefore$ $-2y + 4z = 0$

$-y + 2z = 0 \leftarrow$ Eq. Geral do Plano

tilibra

9. a) r: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow A = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$

s: $\begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -2 + 6\mu \end{cases} \Rightarrow B = (-1, -1, -2) + \mu(4, 2, 6)$

Primeiro verificar se (1, 0, 1) pertence a s:

$\begin{cases} 1 = -1 + 4\mu \Rightarrow 2 = 4\mu \Rightarrow 1/2 = \mu \\ 0 = -1 + 2\mu \Rightarrow 1 = 2\mu \Rightarrow 1/2 = \mu \\ 1 = -2 + 6\mu \Rightarrow 3 = 6\mu \Rightarrow 3/6 = \mu \Rightarrow 1/2\mu \end{cases}$ Resolvendo as três equações temos que $1/2 = \mu$

Logo r e s paralelas coincidentes

b) $r: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ $s: X = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$

$$\begin{cases} 1 = 2 + 3\mu \Rightarrow -1 = 3\mu \Rightarrow -1/3 = \mu \\ 1 = 3 + 2\mu \Rightarrow -2 = 2\mu \Rightarrow -2/2 = \mu \Rightarrow -1 = \mu \\ 0 = 3 + \mu \Rightarrow -3 = \mu \end{cases}$$

Não são concorrentes

c) $r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}$ $s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$

$\frac{x}{2} = \mu \Rightarrow x = 2\mu$ $\frac{y-1}{-2} = \mu$

Agora que as duas $y - 1 = -2\mu$

estão na forma paramétrica $y = -2\mu + 1$

verificar se $(2, 4, 11)$ pertencem a s

$$\begin{cases} 2 = 2\mu \Rightarrow \mu = 1 \\ 4 = 1 - 2\mu \Rightarrow 3 = -2\mu \Rightarrow 3/-2 = \mu \Rightarrow -3/2 = \mu \\ 11 = \mu \Rightarrow 11 = \mu \end{cases}$$

Não são concorrentes

d) $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = z$ $s: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$ → primeiro passar as duas para forma paramétrica

$\frac{x-2}{3} = \lambda$ $\frac{y+2}{4} = \lambda$

$x - 2 = 3\lambda$ $y + 2 = 4\lambda$

$x = 3\lambda + 2$ $y = 4\lambda - 2$

$z = \lambda$

$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = 2\mu \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 = 4\mu \Rightarrow 1/2\ \mu \\ -2 = 2\mu \Rightarrow -1 = \mu \\ 0 = 3 + 2\mu \Rightarrow 3/2 = \mu \end{cases}$$

Não são concorrentes

Agora verificar se $(2, -2, 0)$ pertencem a s

40- a) $r: \begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

Calculando o produto vetorial desses vetores normais

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad -y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$z \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Forma vetorial

~~$(x,y,z) = (7,1,-3) + (-2,0,1)t$~~

$= \{7, 1, -3\} \to$ vetor diretor

$(x,y,z) = (-2,0,1) + t(7,1,-3)$

$x+2y+3z-1+x-y+2z=0 \to$ ~~$x+2(1-5z-2x)-1+x$~~

$\to 2x+y+5z-1=0$ ~~$2x+(1-5z-2x)+5z-1=0$~~

$2x+y+5z=1$

$y=1-5z-2x$

$x+2(1-5z-2x)+3z-1=0$

$x+2-10z-4x+3z-1=0$

$-3x+1-7z=0$

$1=7z+3x \to x=\frac{1-7z}{3} \to$

$\to \frac{1-7z}{3}+1-5z-2x+3z-1=0$

$\frac{1-7z}{3}+1-5z-2x+3z=1$

$\frac{1-7z}{3}+1-5z-2\left(\frac{1-7z}{3}\right)+3z=1 \to \frac{1-7z}{3}-2z-2\left(\frac{1-7z}{3}\right)=0 \to$

$-2z-\left(\frac{1-7z}{3}\right)=0 \to -\left(\frac{1-7z}{3}\right)=2z \to \frac{-1+7z}{3}=2z \to -1+7z=6z \to$

$-1=-z=z=1$

$x-y+2=0$

$x+2=y$

$x+2(x+2)+3-1=0$

$x+2x+4+3-1=0$

$3x+6=0$

$x=\frac{-6}{3} \to x=-2$

$-2-y+2=0$

$y=0$

40 - b) $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ → Produto vetorial dos vetores normais.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Vetor diretor: $\{-2, 2, 0\}$

$$-y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Agora calcular um ponto em comum

$x+y=z$

$x+y+x+y-1=0$

$2x+2y-1=0$

$x = \frac{-2y+1}{2}$

$$\rightarrow \frac{-2y+1}{2} - \left(\frac{-2y+1}{2}+y\right)+y=0$$

$$z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2y=0$

$y=0$

$(x,y,z) = \cancel{\{-2,2,0\} + (1/2, 0, 1/2)\lambda}$

$(x,y,z) = \{1/2, 0, 1/2\} + (1,1,0)\lambda$

$x+0-z=0$ $\quad$ $x+z=1$

$x=z$ $\quad$ $x=\frac{1}{2}$ $\quad$ $z=\frac{1}{2}$ $\quad$ $y=0$

c) $r: \begin{cases} x=3 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ → $6-z+1=0$

$7=z$

$y=0$

$\cancel{(x,y,z) = \{3,0,7\} + (3,0,7)\lambda}$

$(x,y,z) = \{3,0,7\} + (0,1,0)\lambda$

11 - a) r: $X = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1)$, s: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

42. a) $r: X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$, $\pi: x - y - z = 2$

$n = (1,-1,-1)$ $v = (0,1,1)$

$\langle n . v \rangle = 1.0 + (-1).1 + (-1).1 = \underline{-2} \neq 0$ portanto π e r são transversais

b) $r: \frac{x-1}{2} = y = z$, $\pi: X = (3,0,4) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$

$r: X = (1,0,0) + \lambda(2,1,1)$

$n = (3,0,1)$ $v = (1,0,0)$

$\langle n . v \rangle = 3.1 + 0.0 + 1.0 = 3 \neq 0$ portanto π e r são transversais

13 - a) r: $X = (1, 1, 1) + \lambda(2, m, 1)$ e $\pi: X = (0,0,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(1,0,1)$

~~r.~~ $v . n = 0$ são paralelos

$(2, m, 1) . (1, 2, 0) = 0$

$(2 + 2m + 0) = 0$

$2m = -2$

$m = \frac{-2}{2} \Rightarrow m = -1$