Exposición: Problemas de Análisis y Diseño de Algoritmos

Brute Force vs Greedy

Delgado Romero, Gustavo
Torres Reategui, Joaquin
Quintanilla Quispe, Dylan

Universidad Nacional de Ingeniería
CC371 - Análisis y Diseño de Algoritmos

25 de septiembre de 2025

Tabla de Contenidos

Resumen de Problemas

Problemas a Desarrollar

1. **Activity Selection Problem** - Selección de actividades
2. **Graph Coloring** - Coloreo de grafos
3. **Job Scheduling with Deadlines** - Programación de trabajos
4. **Huffman Codes** - Códigos de Huffman

Enfoques Comparados

- **Fuerza Bruta**: Solución óptima garantizada, complejidad exponencial
- **Greedy**: Solución eficiente, no siempre óptima, complejidad polinomial

Tabla de Contenidos

Activity Selection Problem - Enunciado

Descripción del Problema

Seleccionar el máximo número de actividades mutuamente compatibles de un conjunto dado.
Cada actividad tiene:

- Tiempo de inicio y finalización
- Compatibilidad: No deben solaparse en el tiempo
- Objetivo: Maximizar el número de actividades seleccionadas

Ejemplo

Actividades: [(1,2), (3,4), (0,6), (5,7), (8,9), (5,9)]
Solución óptima: 4 actividades

Activity Selection - Fuerza Bruta

Estrategia

- Generar todos los subconjuntos posibles de actividades
- Verificar compatibilidad para cada subconjunto
- Seleccionar el subconjunto válido de mayor tamaño

Complejidad

$O(2^n \cdot n^2)$ - Exponencial

Activity Selection - Pseudocódigo Fuerza Bruta

```
1: [Entrada:]Un arreglo activities de n elementos donde cada elemento es una tupla (start, end)
2: [Salida:]El subconjunto de máximo tamaño de actividades mutuamente compatibles
3: n ← longitud de activities                                   ▷ Cantidad de actividades
4: best ← lista vacía          ▷ Mejor subconjunto encontrado   ▷ Probar todos los subconjuntos posibles
5: for r = 1 to n do
6:     for cada subset en combinations(activities, r) do
7:         if is_valid(subset) ∧ |subset| > |best| then          ▷ Compatibilidad y tamaño
8:             best ← subset                                    ▷ Actualizar mejor solución
9:         end if
10:    end for
11: end forreturn best
```

Activity Selection - Ejemplo Fuerza Bruta I

Actividades: [(1,3), (2,5), (4,6)]

Paso 1: Identificar actividades A=(1,3), B=(2,5), C=(4,6)

Paso 2: Subconjuntos de tamaño 1

- {A}, {B}, {C}: Todos válidos

Mejor hasta ahora: tamaño 1

Paso 3: Subconjuntos de tamaño 2

- {A,B}: $3 > 2 \rightarrow$ Se solapan $\rightarrow$ Inválido
- {A,C}: $3 \leq 4 \rightarrow$ No se solapan $\rightarrow$ Válido
- {B,C}: $5 > 4 \rightarrow$ Se solapan $\rightarrow$ Inválido

Mejor hasta ahora: {A,C}

Paso 4: Subconjunto de tamaño 3

- {A,B,C}: Hay solapamientos $\rightarrow$ Inválido

Activity Selection - Ejemplo Fuerza Bruta II

Solución óptima

{A,C} con 2 actividades

Activity Selection - Enfoque Greedy

Estrategia Óptima

- Ordenar actividades por tiempo de finalización
- Seleccionar siempre la siguiente actividad que termina primero y no se solape

Complejidad

$O(n \log n)$ - Polinomial (óptimo)

Activity Selection - Pseudocódigo Greedy

1: [**Entrada:**]Arreglos *start* y *finish* de n elementos con tiempos de inicio y fin
2: [**Salida:**]El número máximo de actividades mutuamente compatibles
3: *activities* $\leftarrow$ lista de tuplas $(start[i], finish[i])$ para $i = 0..n-1$ ▷ Crear pares inicio-fin
4: Ordenar *activities* por tiempo de finalización ascendente ▷ Clave para optimalidad
5: *count* $\leftarrow 1$ ▷ Al menos una actividad puede realizarse
6: $j \leftarrow 0$ ▷ Índice de la última actividad seleccionada
7: **for** $i = 1$ to $n-1$ **do**
8: **if** $activities[i].start > activities[j].finish$ **then** ▷ Verifica no solapamiento
9: $count \leftarrow count + 1$ ▷ Selecciona actividad
10: $j \leftarrow i$ ▷ Actualiza última seleccionada
11: **end if**
12: **end forreturn** *count*

Activity Selection - Ejemplo Greedy I

Actividades = [(1, 2), (3, 4), (0, 6), (5, 7), (8, 9), (5, 9)]

Paso 1: Crear tuplas y ordenar por fin: (1,2), (3,4), (0,6), (5,7), (8,9), (5,9)

Iteraciones

- i=1: (3,4). ¿3 $>$ 2? Sí $\rightarrow$ Seleccionar, count=2, j=1
- i=2: (0,6). ¿0 $>$ 4? No $\rightarrow$ Omitir
- i=3: (5,7). ¿5 $>$ 4? Sí $\rightarrow$ Seleccionar, count=3, j=3
- i=4: (8,9). ¿8 $>$ 7? Sí $\rightarrow$ Seleccionar, count=4, j=4
- i=5: (5,9). ¿5 $>$ 9? No $\rightarrow$ Omitir

Resultado Final

4 actividades: (1,2), (3,4), (5,7), (8,9)

Activity Selection - Análisis Comparativo

Enfoque	**Complejidad**	**Optimalidad**
Fuerza Bruta	$O(2^n \cdot n^2)$	✓
Greedy	$O(n \log n)$	✓

Activity Selection - Análisis Comparativo

Algoritmo	Actividades	Tiempo (segundos)
Greedy	4	0.000016
Greedy	5	0.000012
Greedy	6	0.000008
Greedy	6	0.000009
Brute Force	4	0.000065
Brute Force	5	0.001175
Brute Force	10	0.156779
Brute Force	12	76.587371

Cuadro: Tiempos de ejecución comparativos

Conclusión

- Greedy es óptimo y eficiente para este problema
- Fuerza bruta solo práctico para instancias pequeñas ($n < 20$)
- El ordenamiento por tiempo de finalización garantiza optimalidad

Tabla de Contenidos

Graph Coloring - Enunciado

Descripción del Problema

Asignar colores a vértices de un grafo tal que:

- Vértices adyacentes tengan colores diferentes
- Minimizar el número de colores usado (número cromático)
- Problema NP-completo en general

Aplicaciones

- Scheduling de procesos
- Asignación de registros
- Sudoku

Graph Coloring - Fuerza Bruta

Estrategia

- Probar todas las asignaciones de k colores a n vértices
- Verificar validez para cada asignación
- Encontrar el mínimo k que permita coloreo válido

Complejidad

$O(k^n \cdot n \cdot m)$ - Exponencial

Graph Coloring - Pseudocódigo Fuerza Bruta

```
1: [Entrada:]Grafo G (lista de adyacencia), número máximo de colores k
2: [Salida:]Asignación válida de colores o null
3: for cada assignment en product(range(k), repeat = n) do        ▷ Todas las asignaciones de k colores
4:     if is_valid(G, assignment) then                            ▷ Verifica restricción de coloreo return assignment
5:     end if
6: end forreturn null
```

```
1: function IS_VALID(G, colors)
2:     for u = 0 to |G| − 1 do                                    ▷ Recorrer todos los vértices
3:         for cada v en G[u] do                                  ▷ Revisar vecinos
4:             if colors[u] = colors[v] then return false         ▷ Vértices adyacentes con mismo color
5:             end if
6:         end for
7:     end forreturn true
8: end function
```

Graph Coloring - Ejemplo Fuerza Bruta

Grafo con 3 vértices: Triángulo

- **k=2**: Probar $2^3 = 8$ asignaciones, ninguna válida
- **k=3**: Probar $3^3 = 27$ asignaciones
- Encontrar solución: [0,1,2] - 3 colores

Limitaciones

- 10 vértices con 3 colores: $3^{10} = 59,049$ pruebas
- 20 vértices: $3^{20} > 3.4$ billones de pruebas

Graph Coloring - Enfoque Greedy

Estrategia

- Procesar vértices en orden fijo
- Asignar el menor color disponible no usado por vecinos
- No garantiza número cromático mínimo

Complejidad

$O(V^2 + E)$ - Polinomial

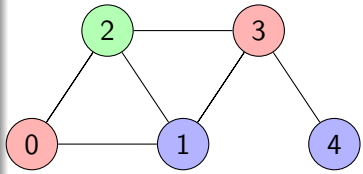
Graph Coloring - Pseudocódigo Greedy

```
1: [Entrada:]Grafo G (lista de adyacencia) con V vértices
2: [Salida:]Asignación válida de colores
3: result ← arreglo de tamaño V inicializado en −1                ▷ Colores por vértice
4: result[0] ← 0                                                  ▷ Color al primer vértice
5: available ← arreglo booleano de tamaño V en false             ▷ Colores ocupados por vecinos
6: for u = 1 to V − 1 do                                          ▷ Marcar colores de vecinos como no disponibles
7:     for i = 0 to |adj[u]| − 1 do
8:         if result[adj[u][i]] ≠ −1 then
9:             available[result[adj[u][i]]] ← true
10:        end if
11:    end for                                                    ▷ Encontrar el primer color disponible
12:    cr ← 0
13:    while cr < V do
14:        if available[cr] = false then
15:            break
16:        end if
17:        cr ← cr + 1
18:    end while
19:    result[u] ← cr                ▷ Asignar color encontrado  ▷ Resetear disponibilidad para el siguiente vértice
20:    for i = 0 to |adj[u]| − 1 do
21:        if result[adj[u][i]] ≠ −1 then
22:            available[result[adj[u][i]]] ← false
23:        end if
```

Graph Coloring - Ejemplo Greedy

Grafo de 5 vértices

- V0: Color 0
- V1: Color 1 (vecino de V0)
- V2: Color 2 (vecino de V0,1)
- V3: Color 0 (vecino de V1,2)
- V4: Color 1 (vecino de V3)



Resultado

3 colores usados (óptimo para este grafo)

Graph Coloring - Análisis Comparativo

Enfoque	**Complejidad**	**Optimalidad**
Fuerza Bruta	$O(k^n \cdot n \cdot m)$	✓
Greedy	$O(V^2 + E)$	×

Graph Coloring - Análisis Comparativo

Grafo	Algoritmo	Colores	Tiempo (segundos)
Graph 1	Greedy	3	0.000007
Graph 1	Brute Force	3	0.000022
Graph 2	Greedy	4	0.000006
Graph 2	Brute Force	3	0.000025

Cuadro: Tiempos de ejecución comparativos

Conclusión

- Fuerza bruta garantiza optimalidad pero es impráctica
- Greedy es eficiente pero puede usar más colores de los necesarios
- En la práctica: Greedy para grafos grandes, heurísticas avanzadas para mejor aproximación

Tabla de Contenidos

Job Scheduling - Enunciado

Descripción del Problema

Programar trabajos con:

- Deadline: Tiempo límite para completar
- Profit: Ganancia por completar a tiempo
- Cada trabajo toma 1 unidad de tiempo
- Objetivo: Maximizar ganancia total

Aplicaciones

- Scheduling de procesos en CPU
- Planificación de producción
- Asignación de recursos limitados

Job Scheduling - Fuerza Bruta

Estrategia

- Generar todas las permutaciones de trabajos
- Para cada permutación, programar trabajos en orden
- Solo incluir trabajos que cumplan deadline
- Seleccionar permutación con máxima ganancia

Complejidad

$O(n! \cdot n)$ - Factorial

Job Scheduling - Pseudocódigo Fuerza Bruta

```
1: [Entrada:]Una lista jobs de n elementos donde cada elemento es (id, deadline, profit)
2: [Salida:]La mejor programación y la ganancia máxima
3: max_profit ← 0
4: best_schedule ← lista vacía                          ▷ Probar todas las permutaciones posibles
5: for cada perm en permutations(jobs) do
6:     time ← 0                                         ▷ Tiempo actual
7:     profit ← 0                                       ▷ Ganancia acumulada
8:     schedule ← lista vacía                           ▷ Programación actual
9:     for cada job en perm do
10:        if time < job.deadline then                  ▷ Verifica deadline
11:            schedule.append(job)
12:            profit ← profit + job.profit
13:            time ← time + 1
14:        end if
15:    end for
16:    if profit > max_profit then
17:        max_profit ← profit
18:        best_schedule ← schedule
19:    end if
20: end forreturn best_schedule, max_profit
```

Job Scheduling - Ejemplo Fuerza Bruta

Trabajos: [(a,2,100), (b,1,19), (c,2,27), (d,1,25), (e,3,15)]

- **Permutación 1**: [a,b,c,d,e] $\rightarrow$ Ganancia: 142
- **Permutación 2**: [b,a,c,d,e] $\rightarrow$ Ganancia: 134
- **Permutación 3**: [d,a,c,b,e] $\rightarrow$ Ganancia: 140
- **Mejor**: [a,c,e] con ganancia 142

Limitaciones

5 trabajos = 120 permutaciones, 10 trabajos = 3.6 millones

Job Scheduling - Enfoque Greedy

Estrategia

- Ordenar trabajos por profit descendente
- Para cada trabajo, asignar al slot más tardío disponible dentro de su deadline

Complejidad

$O(n \log n + n \cdot d)$ - Polinomial

Job Scheduling - Pseudocódigo Greedy

```
1: [Entrada:]Lista jobs donde cada trabajo tiene (id, deadline, profit)
2: [Salida:]Lista de trabajos seleccionados y ganancia total
3: Ordenar jobs por ganancia en orden descendente                    ▷ Prioriza ganancias altas
4: max_deadline ← máx{job.deadline ∀job ∈ jobs}
5: slots ← arreglo de tamaño max_deadline + 1 inicializado en −1     ▷ Slots de tiempo
6: total_profit ← 0, scheduled_jobs ← lista vacía
7: for cada job en jobs do
8:     for t ← job.deadline; t ≥ 1; t ← t − 1 do                     ▷ Buscar slot más tardío disponible
9:         if slots[t] = −1 then
10:            slots[t] ← job.id
11:            total_profit ← total_profit + job.profit
12:            scheduled_jobs.append(job.id)
13:            break
14:        end if
15:    end for
16: end forreturn scheduled_jobs, total_profit
```

Job Scheduling - Ejemplo Greedy I

Trabajos = [A(2,100), B(1,19), C(2,27), D(1,25), E(3,15)]

Orden por ganancia: A(100), C(27), D(25), B(19), E(15)

Asignación

- A (d=2): buscar t=2..1 → t=2 libre → slots[2]=A, total=100
- C (d=2): t=2 ocupado, t=1 libre → slots[1]=C, total=127
- D (d=1): t=1 ocupado → no asignar
- B (d=1): t=1 ocupado → no asignar
- E (d=3): t=3 libre → slots[3]=E, total=142

Resultado Final

Programación: [C, A, E] con ganancia total 142

Job Scheduling - Análisis Comparativo

Enfoque	**Complejidad**	**Optimalidad**
Fuerza Bruta	$O(n! \cdot n)$	✓
Greedy	$O(n \log n + n \cdot d)$	×

Job Scheduling - Análisis Comparativo

Ejemplo	Algoritmo	Ganancia	Tiempo (segundos)
Ejemplo 1	Brute Force	142	0.000051
Ejemplo 1	Greedy	142	0.000017
Ejemplo 2	Brute Force	190	0.001998
Ejemplo 2	Greedy	190	0.000020

Cuadro: Tiempos de ejecución comparativos

Conclusión

- Greedy no siempre es óptimo pero es muy eficiente
- En la práctica funciona bien para la mayoría de casos
- Fuerza bruta solo para instancias muy pequeñas ($n < 10$)

Tabla de Contenidos

Huffman Codes - Enunciado

Descripción del Problema

Encontrar código de prefijo óptimo para compresión de datos:

- Símbolos con frecuencias dadas
- Código de longitud variable
- Objetivo: Minimizar longitud promedio
- Costo $= \sum f_i \cdot l_i$

Aplicaciones

- Compresión de archivos (ZIP, JPEG, MP3)
- Transmisión eficiente de datos

Huffman Codes - Fuerza Bruta

Estrategia

- Generar todos los árboles binarios completos con n hojas
- Para cada árbol, calcular longitudes de código
- Probar todas las asignaciones de símbolos a hojas
- Seleccionar asignación con mínimo costo

Complejidad

$O(C_{n-1} \cdot n! \cdot n)$ - Super-exponencial

Huffman Codes - Pseudocódigo Fuerza Bruta

1: [**Entrada:**]Símbolos y frecuencias
2: [**Salida:**]Asignación óptima de códigos
3: $n \leftarrow$ número de símbolos
4: $best\_cost \leftarrow \infty$, $best\_assignment \leftarrow$ null
5: **for** cada *tree* en $generate\_trees(n)$ **do**
6: $\quad lengths \leftarrow code\_lengths(tree)$
7: $\quad$ **for** cada *perm* en $permutations(range(n))$ **do**
8: $\quad\quad cost \leftarrow \sum freqs[perm[i]] \cdot lengths[i]$
9: $\quad\quad$ **if** $cost < best\_cost$ **then**
10: $\quad\quad\quad best\_cost \leftarrow cost$, $best\_assignment \leftarrow$ asignación
11: $\quad\quad$ **end if**
12: $\quad$ **end for**
13: **end forreturn** $best\_cost, best\_assignment$

Huffman Codes - Ejemplo Fuerza Bruta

4 símbolos: [A:5, B:2, C:1, D:1]

- Número de árboles: $C_3 = 5$
- Permutaciones por árbol: $4! = 24$
- Total: $5 \times 24 = 120$ asignaciones
- **Mejor**: A$\rightarrow$1, B$\rightarrow$2, C$\rightarrow$2, D$\rightarrow$3 (Costo=14)

Limitaciones

6 símbolos: $C_5 = 42$ árboles $\times$ $6! = 720 \times 6 = 181{,}440$ operaciones

Huffman Codes - Enfoque Greedy

Estrategia Óptima

- Usar min-heap por frecuencias
- Combinar siempre los dos nodos de menor frecuencia
- Construir árbol de abajo hacia arriba

Complejidad

$O(n \log n)$ - Polinomial (óptimo)

Huffman Codes - Pseudocódigo Greedy

1: [**Entrada:**]Lista de símbolos s y frecuencias *freq*
2: [**Salida:**]Códigos Huffman óptimos
3: $n \leftarrow$ longitud de s
4: $pq \leftarrow$ cola de prioridad (min-heap) vacía ▷ Menor frecuencia primero ▷ Crear nodos hoja para cada símbolo
5: **for** $i = 0$ to $n - 1$ **do**
6: $tmp \leftarrow Node(freq[i])$
7: $pq.push(tmp)$
8: **end for** ▷ Construir árbol de Huffman
9: **while** $|pq| \geq 2$ **do**
10: $l \leftarrow pq.pop()$ ▷ Nodo con menor frecuencia
11: $r \leftarrow pq.pop()$ ▷ Siguiente menor
12: $new \leftarrow Node(l.freq + r.freq)$
13: $new.left \leftarrow l$, $new.right \leftarrow r$
14: $pq.push(new)$
15: **end while**
16: $root \leftarrow pq.pop()$
17: Generar códigos con recorrido preorden desde *root* **return** lista de códigos por símbolo

Huffman Codes - Ejemplo Greedy

Símbolos: [a:5, b:9, c:12, d:13, e:16, f:45]

- Combinar a(5) + b(9) = 14
- Combinar c(12) + d(13) = 25
- Combinar 14 + e(16) = 30
- Combinar 25 + 30 = 55
- Combinar f(45) + 55 = 100

Resultado

Códigos óptimos: f→0, c→100, d→101, a→1100, b→1101, e→111

Huffman Codes - Análisis Comparativo

Enfoque	Complejidad	Optimalidad
Fuerza Bruta	$O(C_{n-1} \cdot n! \cdot n)$	✓
Greedy	$O(n \log n)$	✓

Conclusión

- Huffman greedy es óptimo y eficiente
- Raro caso donde greedy garantiza optimalidad
- Fuerza bruta completamente impráctica
- Algoritmo ampliamente usado en compresión

Huffman Codes - Análisis Comparativo

Ejemplo	Algoritmo	Costo	Tiempo (segundos)
Ejemplo 1	Brute Force	11	0.000039
Ejemplo 1	Greedy	11	0.000017
Ejemplo 2	Brute Force	15	0.000149
Ejemplo 2	Greedy	15	0.000019

Cuadro: Tiempos de ejecución comparativos

Conclusión

- Huffman greedy es óptimo y eficiente
- Raro caso donde greedy garantiza optimalidad
- Fuerza bruta completamente impráctica
- Algoritmo ampliamente usado en compresión

Tabla de Contenidos

Conclusiones Generales

Comparativa de Enfoques

Problema	BF Optimal	Greedy Optimal	BF Complejidad	Greedy Complejidad
Activity Selection	✓	✓	$O(2^n n^2)$	$O(n \log n)$
Graph Coloring	✓	×	$O(k^n nm)$	$O(V^2 + E)$
Job Scheduling	✓	×	$O(n! n)$	$O(n \log n + nd)$
Huffman Codes	✓	✓	$O(C_{n-1} n! n)$	$O(n \log n)$

Insights Clave

- Greedy es óptimo cuando el problema exhibe **subestructura óptima**
- La **elección greedy** debe preservar la posibilidad de solución óptima
- Fuerza bruta es invaluable para verificar correctitud de algoritmos

Recomendaciones Prácticas

Cuándo usar cada enfoque

- **Fuerza Bruta**:
  - Problemas pequeños ($n \leq 20$)
  - Verificación de algoritmos
  - Casos donde se necesita optimalidad garantizada
- **Greedy**:
  - Problemas grandes donde optimalidad no es crítica
  - Cuando el problema exhibe subestructura óptima
  - Aplicaciones en tiempo real que requieren rapidez

Estrategia Híbrida

En la práctica: Empezar con greedy, usar fuerza bruta para casos pequeños o como verificación

Preguntas y Discusión

¿Preguntas?

Contacto

- Delgado Romero
- Torres Reategui
- Quintanilla Quispe

¡Gracias por su atención!