Distribuição Log-Bilal Reparametrizada

Joaquim Silvestre Reis

April 17, 2025

1 Função de Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade da distribuição log-Bilal reparametrizada é dada por:

$$f(y) = \frac{12}{\left(\frac{\mu}{\mu+24}\right)^{-1/2} - 5} \cdot y^{\left(\frac{4}{\left(\frac{\mu}{\mu+24}\right)^{-1/2}-5}\right)-1} \cdot \left(1 - y^{\frac{2}{\left(\frac{\mu}{\mu+24}\right)^{-1/2}-5}}\right) \tag{1}$$

com suporte $0 < y < 1$.

2 Função de Distribuição Acumulada (CDF)

A função de distribuição acumulada correspondente é:

$$F(y) = 3y^{\frac{4}{\left(\frac{\mu}{\mu+24}\right)^{-1/2}-5}} - 2y^{\frac{6}{\left(\frac{\mu}{\mu+24}\right)^{-1/2}-5}} \tag{2}$$

3 Função Quantílica

Tivemos que utilizar a função inversa como método para gerar números aleatórios, já que a função quantilica não pôde ser usada diretamente. Isso ocorreu porque a função quantilica resultava em números complexos, o que a tornava inaplicável. Assim, para contornar esse problema, foi necessário utilizar o método da inversão, que envolve a resolução da equação $f(x) = y$ para um valor dado de y, onde f é a função de interesse.

4 Geração de Números Aleatórios

A geração de números aleatórios segue o método da inversão, aplicando-se a função quantílica aproximada sobre valores aleatórios.

5 Estimativa via Máxima Verossimilhança

Dado um vetor de observações $x_1, \ldots, x_n$, a função de log-verossimilhança da distribuição log-Bilal é definida como:

$$\ell(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log \left(\frac{12}{\left(\left(\frac{\mu}{\mu+24} \right)^{-1/2} - 5 \right)} \right) + \left(\frac{4}{\left(\frac{\mu}{\mu+24} \right)^{-1/2} - 5} - 1 \right) \log x_i + \log \left(1 - x_i^{\frac{2}{\left(\frac{\mu}{\mu+24} \right)^{-1/2} - 5}} \right) \right]$$

O parâmetro μ é estimado via maximização dessa função usando métodos numéricos.