Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estructuras Discretas

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Tarea 01: Naturales, inducción y recursión.

Primer Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

Tarea 01: Naturales, inducción y recursión

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

September 3, 2024

1.- Demostrar por inducción que para todo natural n se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: *n=0*

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^{0+1} - 1$$

$$2^0 = 2^1 - 1$$

$$1 = 1$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{k+1} = 2^{n+2} - 1$$

Por H.I. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

$$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$2^1(2^{n+1}) - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{(n+1)+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Por lo tanto Demostramos que se cumple para toda n que:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

2.- Demostrar que para todo natural n se cumple la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: *n=0*

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$$

$$0(0+1) = \frac{0(1)(2)}{3}$$

$$0(1) = \frac{0}{3}$$

$$0 = 0$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)((n+1)+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Por H.I. $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)((n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Por lo tanto Demostramos que se cumple para toda n que:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3.- Para todo $n \in N$ se tiene que $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

Demostración por Inducción sobre n
1) Caso Base: *n=0*

$$2^{2(0)} - 1$$
$$2^0 - 1$$
$$1 - 1$$
$$\frac{0}{3} = 0$$
$$0$$

0 es múltiplo de 3, se cumple el Caso Base.

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$2^{2n} - 1 \text{ es Múltiplo de 3}$$
$$\frac{2^{2n} - 1}{3} \in N$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$2^{2(n+1)} - 1$$
$$2^{2n+2} - 1$$
$$(2^{2n})(2^2) - 1$$
$$(2^{2n})(4) - 1$$
$$(4)(2^{2n}) - 1$$
$$(4)(2^{2n}) - 4 + 3$$
$$((4)(2^{2n}) - 4) + 3$$
$$(4)(2^{2n} - 1) + 3$$

Por H.I. $2^{2n} - 1$ es Múltiplo de 3

4 por un Multiplo de 3 es Múltiplo de 3 más 3 sigue siendo un número de 3

Por lo tanto Demostramos que se cumple para toda n que:

$$2^{2n} - 1 \text{ es Múltiplo de 3}$$

4.- Demostrar que para todo natural $n \geq 24$, $n = 6p + 5q$ con $p, q \in N$.

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: $n = 24$

$$24 = 6(4) + 5(0), p = 4, q = 024 = 24 + 024 = 24$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$n = 6p + 5q \text{ con } p, q \in N$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$n + 1 = 6p' + 5q'$$

$$n + 1 = 6p + 5q + 1$$

$$n + 1 = 6p + 5(q - i) + 5 + 1$$

$$n + 1 = 6p + 5(q - i) + 6$$

$$n + 1 = (6p + 6) + 5(q - i)$$

$$n + 1 = 6(p + 1) + 5(q - i)$$

$$n + 1 = 6p' + 5q'$$

$$p' = p + 1, p' \in N$$

$$q' = q - 1, q' \in N$$

Por lo tanto Demostramos que se cumple para toda n que:

$$n \geq 6p + 5q,\ n \geq 24 \text{ con } p, q \in N$$

5.- Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$$

$$1^3 = (1)^2$$

$$1 = 1$$

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Por H.I. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Y sabemos que: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2 + (4)(n+1)^3}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Por lo Tanto demostramos que se cumple para toda n que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

6.- Demostrar que para los números de Fibonacci se cumle la siguiente igualdad para toda n natural:

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: $n = 0$

$$\begin{aligned} F_{0+2} - 1 &= \sum_{k=0}^{0} F_k \\ F_2 - 1 &= F_0 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para *n+1*

$$\begin{aligned} F_{(n+1)+2} - 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \\ F_{n+3} - 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \\ F_{(n+3)-1} + F_{(n+3)-2} - 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \\ F_{n+2} + F_{n+1} - 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \\ F_{n+2} - 1 + F_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \end{aligned}$$

Por H.I. $F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \\ \sum_{k=0}^{n+1} F_k &= \sum_{k=0}^{n+1} F_k \end{aligned}$$

Por lo Tanto demostramos que se cumple para toda n que:

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

12. Sea T un árbol binario con un $l = leafs(T)$ hojas y $h = depth(T) \geq 1$ de profundidad.

- a) Demostrar que el número de nodos es igual a $2l - 1$.
- b) Demostrar que $leafs(T) \leq 2^{h-1}$

Para a):

$$nn(T) = 2l - 1$$

1) Caso Base: $T = tree(void, c, void)$

$$nn(T) = nn(void) + nn(void) + 1$$

$$leafs(tree(void, c, void)) = leafs(void) + leafs(void) + 1$$

$$nn(void) + nn(void) + 1 = 2(leafs(void) + leafs(void) + 1) - 1$$

$$0 + 0 + 1 = 2(0 + 0 + 1) - 1$$

$$1 = 2(1) - 1$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

2) Hipótesis de Inducción: Suponemos que se cumple para T_1 y T_2

$$nn(T_1) = 2l_1 - 1 \text{ y } nn(T_2) = 2l_2 - 1$$

3) Paso Inductivo: Por Demostrar que se cumple T

$$T = tree(T_1, c, T_2)$$

$$nn(T) = 2l_T - 1$$

$$nn(T_1) + nn(T_2) + 1 = 2l_T - 1$$

Por H.I.: $nn(T_1) = 2l_1 - 1$ y $nn(T_2) = 2l_2 - 1$

$$2l_1 - 1 + 2l_2 - 1 + 1 = 2l_T - 1$$

$$2l_1 + 2l_2 - 1 - 1 + 1 = 2l_T - 1$$

$$2l_1 + 2l_2 - 1 = 2l_T - 1$$

$$2(l_1 + 1_2) - 1 = 2l_T - 1$$

Sabemos que:

$$leafs(T) = leafs(T_1) + leafs(T_2) l_T = l_1 + l_2$$

Entonces:

$$2l_T - 1 = 2l_T - 1$$

Por lo tanto: Demostramos que se cumple para todo T que:

$$nn(T) = 2l - 1$$

Para b):

$$leafs(T) \leq 2^{h-1}$$

1) Caso Base: $T = tree(void, c, void)$

$$leafs(T) = leafs(void) + leafs(void) + 1$$

$$depth(tree(void, c, void)) = 1 + max[depth(void), depth(void)]$$

Entonces:

$$leafs(void) + leafs(void) + 1 \leq 1 + max[depth(void), depth(void)]$$

$$0 + 0 + 1 \leq 1 + max[0, 0]$$

$$1 \leq 1$$

2) Hipótesis de Inducción: Suponemos que se cumple para T_1 y T_2

$$leafs(T_1) \leq 2^{h_1-1} \text{ y } leafs(T_2) \leq 2l^{h_2-1}$$

3) Paso Inductivo: Por Demostrar que se cumple para T

$$T = tree(T_1, c, T_2)$$

- $h_T = depth(T) = 1 + max(depth(T_1), depth(T_2))$
- $h_T = 1 + max(h_1, h_2)$

$$leafs(T) \leq 2^{h_T-1}$$

$$leafs(T_1) + leafs(T_2) \leq 2^{h_T-1}$$

Por H.I.: $leafs(T_1) \leq 2^{h_1-1}$ y $leafs(T_2) \leq 2^{h_2-1}$

$$leafs(T_1) + leafs(T_2) \leq 2^{h_1-1} + 2^{h_2-1}$$

Notar que:

- $h_1 \leq max(h_1, h_2)$
- $h_2 \leq max(h_1, h_2)$

$$2^{h_1-1} + 2^{h_2-1} \leq 2^{max(h_1,h_2)-1} + 2^{max(h_1,h_2)-1}$$

$$2^{max(h_1,h_2)-1} + 2^{max(h_1,h_2)-1} = (2^1)(2^{max(h_1,h_2)-1})$$

$$(2^1)(2^{max(h_1,h_2)-1}) = 2^{max(h_1,h_2)-1+1})$$

$$2^{1+max(h_1,h_2)-1}$$

Recordemos que:

$$1 + max(h_1, h_2) = h_T$$

Entonces:

$$2^{1+max(h_1,h_2)-1} = 2^{h_T-1}$$

Por lo Tanto: Demostramos que se cumple para todo árbol T que:

$$leafs(T) \leq 2^{h-1}$$

15. Demuestra que la siguiente funcion recursiva para lista de enteros:

$$max(a : []) = a$$