



## Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURAS DISCRETAS

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

## Tarea 01: Naturales, inducción y recursión.

Primer Parcial

Autores:

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo Villalobos Juárez Gontran Eliut Treviño Puebla Héctor Jerome

## Tarea 01: Naturales, inducción y recursión

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo Villalobos Juárez Gontran Eliut Treviño Puebla Héctor Jerome

3 de septiembre de 2024

1.- Demostrar por inducción que para todo natural n se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: n=0

$$\sum_{k=0}^{0} 2^{k} = 2^{0+1} - 1$$
$$2^{0} = 2^{1} - 1$$
$$1 = 1$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{k+1} = 2^{n+2} - 1$$
Por H.I.  $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ 

$$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{1}(2^{n+1}) - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{(n+1)+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$2^{n+2} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

**2.-** Demostrar que para todo natural n se cumple la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: n=0

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$$
$$0(0+1) = \frac{0(1)(2)}{3}$$
$$0(1) = \frac{0}{3}$$
$$0 = 0$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)((n+1)+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$
Por H.I.  $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)((n+2)) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

**3.-** Para todo  $n \in N$  se tiene que  $2^{2n} - 1$  es múltiplo de 3.

Demostración por Inducción sobre  $\boldsymbol{n}$ 

1) Caso Base: n=0

$$2^{2(0)} - 1$$
$$2^{0} - 1$$
$$1 - 1$$
$$\frac{0}{3} = 0$$
$$0$$

0 es múltiplo de 3, se cumple el Caso Base.

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$2^{2n}-1$$
 es Múltiplo de 3 
$$\frac{2^{2n}-1}{3}\in N$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$2^{2(n+1)} - 1$$

$$2^{2n+2} - 1$$

$$(2^{2n})(2^2) - 1$$

$$(2^{2n})(4) - 1$$

$$(4)(2^{2n}) - 1$$

$$(4)(2^{2n}) - 4 + 3$$

$$((4)(2^{2n}) - 4) + 3$$

$$(4)(2^{2n} - 1) + 3$$

**Por H.I.**  $2^{2n} - 1$  es Múltiplo de 3

 $4~{\rm por}$  un Multiplo de  $3~{\rm es}$  Múltiplo de  $3~{\rm más}$   $3~{\rm sigue}$  siendo un número de 3

$$2^{2n}-1$$
es Múltiplo de 3

4.- Demostrar que para todo natural  $n \ge 24, n = 6p + 5q$  con  $p, q \in N$ .

Demostración por Inducción sobre  $\boldsymbol{n}$ 

1) Caso Base: n = 24

$$24 = 6(4) + 5(0), p = 4, q = 024 = 24 + 024 = 24$$

2) Hipótesis de Inducción: Se cumple para n

$$n = 6p + 5q \operatorname{con} p, q \in N$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$n+1 = 6p' + 5q'$$

$$n+1 = 6p + 5q + 1$$

$$n+1 = 6p + 5(q-i) + 5 + 1$$

$$n+1 = 6p + 5(q-i) + 6$$

$$n+1 = (6p+6) + 5(q-i)$$

$$n+1 = 6(p+1) + 5(q-i)$$

$$n+1 = 6p' + 5q'$$

$$p' = p+1, p' \in N$$

$$q' = q-1, q' \in N$$

$$n \ge 6p + 5q, n \ge 24 \text{ con } p, q \in N$$

5.- Demostrar por inducción la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: n=1

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$$

$$1^3 = (1)^2$$

$$1 = 1$$

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
Por H.I.  $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ 

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
Y sabemos que:  $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2 + (4)(n+1)^3}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

6.- Demostrar que para los números de Fibonacci se cumle la siguiente igualdad para toda n natural:

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

Demostración por Inducción sobre n

1) Caso Base: n = 0

$$F_{0+2} - 1 = \sum_{k=0}^{0} F_k$$
$$F_2 - 1 = F_0$$
$$1 - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

2) Hipótesis de Inducción: La propiedad se cumple para n

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

3) Paso Inductivo: Por demostrar que se cumple para n+1

$$F_{(n+1)+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

$$F_{n+3} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

$$F_{(n+3)-1} + F_{(n+3)-2} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

$$F_{n+2} + F_{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

$$F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

**Por H.I.** 
$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k = \sum_{k=0}^{n+1} F_k$$

$$F_{n+2} - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k$$