Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estructuras Discretas

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Tarea 02: Lógica Proposicional.

Segundo Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Octubre 2024

Tarea 02: Lógica Proposicional

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

12 de octubre de 2024

Ejercicio 1

Ejercicio 1

1. De las siguientes expresiones, identificar las proposiciones atomicas y los conectores lógicos. Traducir de lenguaje natural a lenguaje lógico:

a) Penélope es griega.

b) Alonso Quijano no está cuerdo.

c) Si Juan fue al cine, seguro que Lupe también.

d) Melibea no está triste, porque cursó Estructuras Discretas.

e) Juan come y bebe.

f) Cuando María estudia, no reprueba los exámenes.

g) Armin no fuma ni bebe.

h) Juana juega fútbol, pero no baloncesto.

a)

$p =$ Penélope es griega $\qquad\qquad p$

b)

$p =$ Alonso Quijano está cuerdo $\qquad\qquad \neg p$

c)

$p =$ Juan fue al cine $\qquad\qquad p \implies q$
$q =$ Lupe fue al cine

d)

$p =$ Melibea cursó Estructuras Discretas $\qquad\qquad p \implies \neg q$
$q =$ Melibea está triste

e)

$p =$ Juan come $\qquad\qquad p \land q$
$q =$ Juan bebe

f)

$p =$ María estudia $\qquad p \implies \neg q$

$q =$ Maria reprueba los exámenes

g)

$p =$ Armin fuma $\qquad \neg p \land \neg q$

$q =$ Armin bebe

h)

$p =$ Juana juega fútbol $\qquad p \land \neg q$

$q =$ Juana juega baloncesto

Ejercicio 2

Ejercicio 2

Para las siguientes parejas, escribir en lenguaje natural las fórmulas:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad \neg p \wedge q, \quad p \wedge \neg q, \quad \neg p \vee q, \quad p \vee \neg q$$

a) $p = 1$ **es primo**, $\quad q = 1$ **es natural**

- $p \wedge q$: 1 es primo y 1 es natural.
- $p \vee q$: 1 es primo o 1 es natural.
- $\neg p \wedge q$: No es cierto que 1 sea primo y 1 es natural.
- $p \wedge \neg q$: 1 es primo y no es cierto que 1 sea natural.
- $\neg p \vee q$: No es cierto que 1 sea primo o 1 es natural.
- $p \vee \neg q$: 1 es primo o no es cierto que 1 sea natural.

b) $p =$ **El gato no es un vegetal**, $\quad q =$ **El perro es mamífero**

- $p \wedge q$: El gato no es un vegetal y el perro es mamífero.
- $p \vee q$: El gato no es un vegetal o el perro es mamífero.
- $\neg p \wedge q$: El gato es un vegetal y el perro es un mamifero.
- $p \wedge \neg q$: El gato no es un vegetal y el perro no es mamífero.
- $\neg p \vee q$: El gato es un vegetal o el perro es mamífero.
- $p \vee \neg q$: El gato no es un vegetal o el perro no es mamífero.

c) $p = 5 < 7, \quad q = 3 \leq 10$

- $p \wedge q$: 5 es menor que 1 y 5 es menor que 10.
- $p \vee q$: 5 es menor que 1 o 5 es menor que 10.
- $\neg p \wedge q$: 5 no es menor que 1 y 5 es meno que 10.
- $p \wedge \neg q$: 5 es menor que 1 y 5 no es menor que 10.
- $\neg p \vee q$: 5 no es menor qe 1 o 5 es mayor que 10.
- $p \vee \neg q$: 5 es menor que 1 o 5 no es menor que 10.

Ejercicio 3

Ejercicio 3

A partir de la siguiente gramática para expresiones proposicionales:

$$E \to T \mid \neg E \mid E \wedge E \mid E \vee E \mid E \to E \mid (E)$$
$$T \to p \mid q \mid r \mid a \mid b \mid c \mid d$$

a) $p \to q$

```
  →
 / \
p   q
```

b) $\neg(p \vee q)$

```
  ¬
  |
  ∨
 / \
p   q
```

c) $(a \wedge b) \vee c \to (a \wedge d)$

```
          →
       /     \
      ∨       ∧
     / \     / \
    ∧   c   a   b
   / \
  a   b
```

d) $(p \to a) \to (a \lor \neg b)$

```
        →
      /   \
     →     ∨
    / \   / \
   p   a a   ¬
             |
             b
```

e) $\neg p \land \neg q \lor r$

```
      ∨
     / \
    ∧   r
   / \
  ¬   ¬
  |   |
  p   q
```

f) $\neg a \to (b \land \neg c) \leftrightarrow \neg d$

```
          ↔
        /   \
       →     ¬
     /   \   |
    ¬     ∧  d
    |    / \
    a   b   ¬
            |
            c
```

Ejercicio 6

Ejercicio 6

Elaborar las tablas de verdad para las siguientes propocisoiones:

$$a)\quad \neg(p \wedge q), \quad b)\quad \neg(p \vee q), \quad c)\quad (r \vee (p \wedge q)) \rightarrow r,$$

$$d)\quad (p \wedge (r \wedge q)) \rightarrow q, \quad e)\quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$$

a)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

b)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

c)

p	q	r	$r \vee (p \wedge q)$	$(r \vee (p \wedge q)) \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

d)

p	q	r	$r \wedge q$	$p \wedge (r \wedge q)$	$(p \wedge (r \wedge q)) \rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

e)

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \to r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Ejercicio 11

Ejercicio 11

Demostrar que dada una fórmula de lógica proposicional E, la altura es menor o igual que la longitud. Esto es $h(E) \leq \text{len}(E)$.

1) Caso base: consideramos que $\text{len}(E) = 1$ y altura $h(E) = 1$, entonces este caso hace que se cumpla que

$$h(E) \leq \text{len}(E)$$

por lo tanto, es correcto.

2) Hipótesis de inducción: suponemos que para E_1 y E_2 se cumple que

$$h(E_1) \leq \text{len}(E_1) \quad \text{y} \quad h(E_2) \leq \text{len}(E_2).$$

Queremos probar que para las fórmulas $E = E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$, $E_1 \to E_2$, o $\neg E_1$, también se cumple la desigualdad.

- Caso $E = E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$, o $E_1 \to E_2$:
  - Longitud:
  $$\text{len}(E_1 \wedge E_2) = \text{len}(E_1) + \text{len}(E_2) + 1$$
  - Altura:
  $$h(E_1 \wedge E_2) = 1 + \text{máx}(h(E_1), h(E_2))$$
  Por la hipótesis de inducción, tenemos que $h(E_1) \leq \text{len}(E_1)$ y $h(E_2) \leq \text{len}(E_2)$. Entonces:
  $$\begin{aligned} h(E_1 \wedge E_2) = 1 + \text{máx}(h(E_1), h(E_2)) \leq 1 + \text{máx}(\text{len}(E_1), \text{len}(E_2)) &\leq \text{len}(E_1) + \text{len}(E_2) + 1 \\ &= \text{len}(E_1 \wedge E_2) \end{aligned}$$
  Por lo tanto, se cumple que $h(E_1 \wedge E_2) \leq \text{len}(E_1 \wedge E_2)$.
- Caso $E = \neg E_1$:
  - Longitud:
  $$\text{len}(\neg E_1) = \text{len}(E_1) + 1$$
  - Altura:
  $$h(\neg E_1) = h(E_1) + 1$$
  Por la hipótesis de inducción, sabemos que $h(E_1) \leq \text{len}(E_1)$, entonces se cumple que
  $$h(\neg E_1) = h(E_1) + 1 \leq \text{len}(E_1) + 1 = \text{len}(\neg E_1)$$
  Así, se cumple que $h(\neg E_1) \leq \text{len}(\neg E_1)$.

Conclusión: por inducción, sabemos que para una fórmula proposicional E, se cumple que

$$h(E) \leq \text{len}(E)$$

7. Demuestra que la función del complemento regresa la negación de la fórmula.
Esto es, que $comp(E) = \neg E$
Proposición. Sea *comp* la siguiente función recursiva:

1. $comp(\top) = \bot,\ comp(\bot) = \top,\ comp(p) = \neg p$ son atómicas.
2. Si P y Q son fórmulas: $comp(\neg Q) = \neg comp(Q),\ comp(P \wedge Q) = comp(P) \wedge comp(Q),\ comp(P \vee Q) = comp(P) \vee comp(Q)$

Entonces se cumple que $comp(E) = \neg E$
Demostración: Por inducción estructural sobre las fórmulas.
Caos base. Cuando E es atómica tal que $E = p$ donde p es una proposición ó $E = \top$ ó $E = \bot$

$$\begin{aligned} E = p \text{ tal que} & \quad \text{p es atómica} \\ comp(E) = comp(p) & \\ = \neg p & \quad \text{Por p atómica} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E = \top \therefore \\ comp(E) &= comp(\top) \\ &= \neg\top \\ &= \bot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E = \bot \therefore \\ comp(E) &= comp(\bot) \\ &= \neg\bot \\ &= \top \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para dos proposiciones P, Q tales que $comp(P) = \neg P$ y $comp(Q) = \neg Q$
Paso inductivo: Por demostrar que se cumple para los pasos recurisvos de la función $comp(E) = \neg E$

$$\begin{aligned} comp(\neg Q) &= \neg comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg\neg Q \\ \text{Por doble negación} &= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} comp(P \wedge Q) &= comp(P) \wedge comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg P \wedge \neg Q \\ \text{Por deMorgan} &= \neg(P \vee Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} comp(P \vee Q) &= \neg comp(P) \vee \neg comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg P \vee \neg Q \\ \text{Por deMorgan} &= \neg(P \wedge Q) \end{aligned}$$

$\therefore$ Se concluye que se cumple para todos los casos recurisvos de la función del complemento se cumple que

$$comp(E) = \neg E, \text{ para cualquier fórmula}$$

8. Demostra que a partir de los conjuntos de proposiciones dados Γ, si las siguientes proposiciones son o no consecuencias lógicas utilizando interpretaciones.

a) $\Gamma = \{p \wedge q, r \vee q\}$, proposición: $p \wedge q \vee r$

b) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \rightarrow \neg r, r \rightarrow s\}$, proposición: $q \rightarrow s$

c) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \rightarrow \neg r, r \rightarrow s\}$, proposición: $\neg(p \wedge r)$

d) $\Gamma = \{p \vee q, q \rightarrow r, \neg r \vee s\}$, proposición: $(p \vee q) \rightarrow s$

e) $\Gamma = \{p \wedge q, q \rightarrow r, r \vee \neg s\}$, proposición: $(p \wedge q) \rightarrow r$

Mostrar que a) $\Gamma = \{p \wedge q, r \vee q\} \vDash p \wedge q \vee r$**.**
Por ambigüedad consideraremos dos casos:
1) (Sea $B = (p \wedge q) \vee r$)Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Sea $\mathcal{I}$ un modelo Γ. Tenemos que demostrar que $\mathcal{I}((p \wedge q) \vee r) = 1$.
Como $\mathcal{I}(p \wedge q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$ y para $\mathcal{I}(r \vee q)$ tenemos dos casos

i) Cuando $\mathcal{I}(r) = 1$, y como $\mathcal{I}(q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(q \vee r) = 1$ siempre, por lo que $\mathcal{I}(p \wedge q \vee r) = 1$ dodo que $\mathcal{I}(p \wedge q) = 1$ y $\mathcal{I}(r) = 1$

ii) Por otro lado, Cuando $\mathcal{I}(r) = 0$, como $\mathcal{I}(q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(q \vee r) = 1$
$\therefore \mathcal{I}((p \wedge q) \vee r) = 1$

2) (Sea $B = p \wedge (q \vee r)$) Por otro lado, sin pérdida de generalidad sabemos que $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$ por lo que, para cualquier $\mathcal{I}(r)$ se cumple $\mathcal{I}(p \vee r)$, Esto quiere decir que $\mathcal{I}(p \vee r) = 1$.
$\therefore \mathcal{I}(p \wedge (q \vee r)) = 1$
$\therefore$ se concluye que es onsecuencia lógica. ■

Mostrar que b) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \rightarrow \neg r, r \rightarrow s\} \vDash q \rightarrow s$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i) Si $\mathcal{I}(q) = 0$ entonces $\mathcal{I}(q \rightarrow s) = 1$ por lo que es trivial.

ii) Si $\mathcal{I}(q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(p) = 1$ para que sea $\mathcal{I}(p \leftrightarrow q) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$ necesariamente, pues $\mathcal{I}(p \rightarrow \neg r) = 1$, entonces $\mathcal{I}(r) = 0$, quiere decir que $\mathcal{I}(r \rightarrow s) = 1$, en particular para $\mathcal{I}(s) = 0$, por lo que, si $\mathcal{I}(q) = 1$, como lo definimos anteriormente y si $\mathcal{I}(s) = 0$, quiere decir que $\mathcal{I}(r \rightarrow s) = 0$
$\therefore$ No es consecuencia lógica ■

Mostrar que c) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \rightarrow \neg r, r \rightarrow s\} \vDash \neg(p \wedge r)$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i) Si $\mathcal{I}(p) = 0$, entonces $\mathcal{I}(\neg(p \wedge r)) = 1$ pues $\mathcal{I}(p \wedge r) = 0$.

ii) Si $\mathcal{I}(p) = 1$ como $\mathcal{I}(p \leftrightarrow q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(q) = 1$, esto quiere decir que, como $\mathcal{I}(q \rightarrow \neg r) = 1$, tiene que pasar que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0$.
Esto quiere decir que $\mathcal{I}(p \wedge r) = 0$ y $\mathcal{I}(\neg(p \wedge r)) = 1$
$\therefore$ Si es consecuencia lógica.■

Mostrar que d) $\Gamma = \{p \vee q, q \rightarrow r, \neg r \vee s\} \vDash (p \vee q) \rightarrow s$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i)Supongamos que $\mathcal{I}(q) = 1$, dado que $\mathcal{I}(p \rightarrow r) = 1$ quiere decir que $\mathcal{I}(r) = 1$, entonces $\mathcal{I}(\neg r) = 0$, y como $\mathcal{I}(\neg r \vee s) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(s) = 1$, dado que suponemos que $\mathcal{I}(p \vee q) = 1$ es necesario que $\mathcal{I}(p) = 1$ pues $\mathcal{I}(q) = 0$ como suposimos anteriormente. $\therefore \mathcal{I}((p \vee q) \rightarrow s) = 1$

ii)Supongamos$\mathcal{I}(q) = 0$, entonces, en particular, suponemos que $\mathcal{I}(r) = 0$, esto significa que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$, como $\mathcal{I}(\neg r \vee s) = 1$ puede pasar que $\mathcal{I}(s) = 0$, y dado que $\mathcal{I}(p \vee q) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(p) = 1$ entonces decimos que $\mathcal{I}((p \vee q) \rightarrow s) = 0$ puesto que $\mathcal{I}(p \vee q) = 1$ pero $\mathcal{I}(s) = 0$
$\therefore$ No es consecuencia lógica. ■

Mostrar que e) $\Gamma = \{p \wedge q, q \rightarrow r, r \vee \neg s\} \vDash (p \wedge q) \rightarrow r$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Dado que $\mathcal{I}(p \wedge q) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$, entonces es necesario que $\mathcal{I}(r) = 1$ pues $\mathcal{I}(q \rightarrow r) = 1$, quiere decir se cumple $\mathcal{I}(r \vee \neg s) = 1$ pues basta que al menos uno sea 1 para que la proposición se cumpla, lo que quiere decir que $\mathcal{I}((p \wedge q) \rightarrow r) = 1$
$\therefore$ Es consecuencia lógica. ■