Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estructuras Discretas

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Tarea 02: Lógica Proposicional.

Segundo Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Octubre 2024

Tarea 02: Lógica Proposicional

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

12 de octubre de 2024

Ejercicio 1

Ejercicio 1

1. De las siguientes expresiones, identificar las proposiciones atomicas y los conectores lógicos. Traducir de lenguaje natural a lenguaje lógico:

a) Penélope es griega.

b) Alonso Quijano no está cuerdo.

c) Si Juan fue al cine, seguro que Lupe también.

d) Melibea no está triste, porque cursó Estructuras Discretas.

e) Juan come y bebe.

f) Cuando María estudia, no reprueba los exámenes.

g) Armin no fuma ni bebe.

h) Juana juega fútbol, pero no baloncesto.

a) $p =$ Penélope es griega

$$p$$

b) $p =$ Alonso Quijano está cuerdo

$$\neg p$$

c) $p =$ Juan fue al cine
$q =$ Lupe fue al cine

$$p \implies q$$

d) $p =$ Melibea cursó Estructuras Discretas
$q =$ Melibea está triste

$$p \implies \neg q$$

e) $p =$ Juan come
$q =$ Juan bebe

$$p \wedge q$$

f) $p =$ María estudia
$q =$ Maria reprueba los exámenes

$$p \implies \neg q$$

g) $p =$ Armin fuma
$q =$ Armin bebe

$$\neg p \wedge \neg q$$

h) $p =$ Juana juega fútbol
$q =$ Juana juega baloncesto

$$p \wedge \neg q$$

Ejercicio 2

Para las siguientes parejas, escribir en lenguaje natural las fórmulas:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad \neg p \wedge q, \quad p \wedge \neg q, \quad \neg p \vee q, \quad p \vee \neg q$$

a) $p = 1$ **es primo**, $\quad q = 1$ **es natural**

- $p \wedge q$: 1 es primo y 1 es natural.
- $p \vee q$: 1 es primo o 1 es natural.
- $\neg p \wedge q$: No es cierto que 1 sea primo y 1 es natural.
- $p \wedge \neg q$: 1 es primo y no es cierto que 1 sea natural.
- $\neg p \vee q$: No es cierto que 1 sea primo o 1 es natural.
- $p \vee \neg q$: 1 es primo o no es cierto que 1 sea natural.

b) $p =$ **El gato no es un vegetal**, $\quad q =$ **El perro es mamífero**

- $p \wedge q$: El gato no es un vegetal y el perro es mamífero.
- $p \vee q$: El gato no es un vegetal o el perro es mamífero.
- $\neg p \wedge q$: El gato es un vegetal y el perro es un mamifero.
- $p \wedge \neg q$: El gato no es un vegetal y el perro no es mamífero.
- $\neg p \vee q$: El gato es un vegetal o el perro es mamífero.
- $p \vee \neg q$: El gato no es un vegetal o el perro no es mamífero.

c) $p = 5 < 7, \quad q = 3 \leq 10$

- $p \wedge q$: 5 es menor que 1 y 5 es menor que 10.
- $p \vee q$: 5 es menor que 1 o 5 es menor que 10.
- $\neg p \wedge q$: 5 no es menor que 1 y 5 es meno que 10.
- $p \wedge \neg q$: 5 es menor que 1 y 5 no es menor que 10.
- $\neg p \vee q$: 5 no es menor qe 1 o 5 es mayor que 10.
- $p \vee \neg q$: 5 es menor que 1 o 5 no es menor que 10.

Ejercicio 3

A partir de la siguiente gramática para expresiones proposicionales:

$$E \to T \mid \neg E \mid E \wedge E \mid E \vee E \mid E \to E \mid (E)$$
$$T \to p \mid q \mid r \mid a \mid b \mid c \mid d$$

a) $p \to q$

$$\begin{array}{ccc} & \to & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

b) $\neg(p \vee q)$

$$\begin{array}{ccc} & \neg & \\ & | & \\ & \vee & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

c) $(a \wedge b) \vee c \to (a \wedge d)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \to & & & \\ & & / & & \backslash & & \\ & \vee & & & & \wedge & \\ / & & \backslash & & / & & \backslash \\ \wedge & & c & & a & & b \\ / & & \backslash & & & & \\ a & & b & & & & \end{array}$$

d) $(p \to a) \to (a \vee \neg b)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \to & & & \\ & & / & & \backslash & & \\ & & \to & & & \vee & \\ & / & & \backslash & / & & \backslash \\ p & & a & & a & & \neg \\ & & & & | & & \\ & & & & b & & \end{array}$$

e) $\neg p \wedge \neg q \vee r$

```
      ∨
     / \
    ∧   r
   / \
  ¬   ¬
  |    |
  p    q
```

f) $\neg a \rightarrow (b \wedge \neg c) \leftrightarrow \neg d$

```
          ↔
         /   \
       →       ¬
      /   \      |
    ¬       ∧    d
    |      / \
    a      b   ¬
               |
               c
```

Ejercicio 4

4.- Utilizar el algoritmo de analisis de proposiciones sobre las siguientes fórmulas. Dibuja los arboles binarios resultantes. Señalar si el algoritmo acepta o no la fórmula:

1. $(p \wedge q) \vee r) \rightarrow (p \wedge s)$
2. $(p \rightarrow q)\neg \wedge r$
3. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg r)$
4. $\neg p \wedge \neg q \vee r$
5. $(\neg a \rightarrow (b \wedge \neg c)) \leftrightarrow \neg d$

Para a)

$$((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (p \wedge s)$$

El algoritmo si acepta la fórmula y genera el siguiente árbol binario:

```
          →
         /  \
        ∨     ∧
       / \   / \
      ∧   r  p   s
     / \
    p   q
```

Para b)

$$(p \rightarrow q)\neg \wedge r$$

El algoritmo NO acepta la fórmula y NO genera el árbol binario esto por no ser wff (well formed formula).

El algoritmo regresa fail, puesto que al evaluar rankL(E) lo que recibe es:
$(p \rightarrow q)\neg$ lo cual es ínvalido puesto que al tener la negación el algoritmo requiere el caso de tipo $\neg(E)$ lo cual no se tiene en este caso.
Regresa $Fail$.

Para c)

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg r)$$

El algoritmo si acepta la fórmula y genera el siguiente árbol binario:

```
          →
         /  \
        ¬     ∨
        |    /  \
        →   q    ¬
       / \       |
      p   q      r
```

Para d)

$$\neg p \wedge \neg q \vee r$$

El algoritmo si acepta la fórmula y genera el siguiente árbol binario:

```
      ∧
     / \
    ¬   ∨
    |  / \
    p ¬   r
      |
      q
```

Para e)

$$(\neg a \rightarrow (b \wedge \neg c)) \leftrightarrow \neg d$$

El algoritmo si acepta la fórmula y genera el siguiente árbol binario:

```
        ↔
       / \
      →   ¬
     / \   |
    ¬   ∧   d
    |  / \
    a b   ¬
          |
          c
```

Ejercicio 5

5.- Demostrar que el algoritmo de analisis ANALYSIS(E) de expresiones proposicionales es completo, cuando la expresion tiene longitud finita.

Demostracion sobre los pasos del algoritmo

Despúes de haver visto el pseudocódigo del algoritmo, veremos el algoritmo en casos:

$$ANALYSIS(E) = \begin{cases} Tree(void, E, void) & \text{si } E = \text{prop. atómica.} \\ Tree(void, \neg, ANALISIS(E) & \text{si } E = \neg E \\ Tree(ANALYSIS(rankL(E)), \Diamond, ANALYSIS(rankR(E)) & \text{si } E = E\Diamond E \end{cases}$$

1) CASO BASE:

Para E = prop. atómica (var p,q... o constante $\bot$ o $\top$) Regresa $tree(void, E, void)$, si se cumple el algoritmo el regresa el árbol de E.

2) HIPOTESIS DE INDUCCIÓN:

Sean A y B proposiciones con las longitudes de A y B menores que n

- ANALYSIS(A) regresa el árbol sintáctico de A (se cumple para A).
- ANALYSIS(B) regresa el árbol sintáctico de B (se cumple para B).

3) PASO INDUCTIVO:

Por Demostrar para: ANALYSIS(E) es completo cuando E es de longitud n.
Tenemos dos casos, el caso de la negación y el caso con un operador binario:

- Si $E = \neg A$, en esta situación caemos en el segundo caso de nuestro algoritmo
  Por lo tanto se debe aplicar $\neg ANALYSIS(A)$, y por **H.I.** sabemos que $ANALYSIS(A)$ se cumple. Así podemos decir que el algoritmo se cumple también para este caso.
- Si $E = A\Diamond B$, en esta situación se presenta el tercer caso definido por nuestro algoritmo
  Por lo tanto como se generará,
  $Tree(ANALYSIS(rankL(E)), \Diamond, Tree(ANALYSIS(rankR(E)))$, por la función MainOP sabemos que $rankL(E) = A$ y $rankR(E) = B$, así tenemos $Tree(ANALYSIS(A), \Diamond, Tree(ANALYSIS(B))$, por **H.I.** sabemos que $ANALYSIS(A)$ y $ANALYSIS(B)$ se cumplen. Así podemos decir que el algoritmo también se cumple para este caso.

Asi vemos como se funciona para E cuando E es compuesta de longitud n.

Además se E es wff siempre llegaremos a una E atómica y si E NO es wff el algoritmo regresará $fail$.

Por lo tanto, Demostramos que el algoritmo de ANALYSIS(E) es completo cuando la expresión tiene longitud finita.

Ejercicio 6

Elaborar las tablas de verdad para las siguientes propocisoiones:

$$a)\quad \neg(p\wedge q),\quad b)\quad \neg(p\vee q),\quad c)\quad (r\vee(p\wedge q))\rightarrow r,$$

$$d)\quad (p\wedge(r\wedge q))\rightarrow q,\quad e)\quad (p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$$

a)

p	q	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

b)

p	q	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

c)

p	q	r	$r\vee(p\wedge q)$	$(r\vee(p\wedge q))\rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

d)

p	q	r	$r\wedge q$	$p\wedge(r\wedge q)$	$(p\wedge(r\wedge q))\rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

e)

p	q	r	$p\rightarrow q$	$p\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Ejercicio 7

7. Demuestra que la función del complemento regresa la negación de la fórmula.
Esto es, que $comp(E) = \neg E$

Proposición. Sea *comp* la siguiente función recursiva:

1. $comp(\top) = \bot,\ comp(\bot) = \top,\ comp(p) = \neg p$ son atómicas.
2. Si P y Q son fórmulas: $comp(\neg Q) = \neg comp(Q),\ comp(P \wedge Q) = comp(P) \wedge comp(Q),\ comp(P \vee Q) = comp(P) \vee comp(Q)$

Entonces se cumple que $comp(E) = \neg E$

Demostración: Por inducción estructural sobre las fórmulas.

Caos base. Cuando E es atómica tal que $E = p$ donde p es una proposición ó $E = \top$ ó $E = \bot$

$$\begin{aligned} E = p \text{ tal que} & \quad \text{p es atómica} \\ comp(E) &= comp(p) \\ &= \neg p \quad \text{Por p atómica} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E = \top \therefore \\ comp(E) &= comp(\top) \\ &= \neg \top \\ &= \bot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E = \bot \therefore \\ comp(E) &= comp(\bot) \\ &= \neg \bot \\ &= \top \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para dos proposiciones P, Q tales que $comp(P) = \neg P$ y $comp(Q) = \neg Q$

Paso inductivo: Por demostrar que se cumple para los pasos recurisvos de la función $comp(E) = \neg E$

$$\begin{aligned} comp(\neg Q) &= \neg comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg\neg Q \\ \text{Por doble negación} &= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} comp(P \wedge Q) &= comp(P) \wedge comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg P \wedge \neg Q \\ \text{Por deMorgan} &= \neg(P \vee Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} comp(P \vee Q) &= \neg comp(P) \vee \neg comp(Q) \\ \text{Por H.I} &= \neg P \vee \neg Q \\ \text{Por deMorgan} &= \neg(P \wedge Q) \end{aligned}$$

$\therefore$ Se concluye que se cumple para todos los casos recurisvos de la función del complemento se cumple que

$$comp(E) = \neg E, \text{ para cualquier fórmula}$$

Ejercicio 8

8. Demostra que a partir de los conjuntos de proposiciones dados Γ, si las siguientes proposiciones son o no consecuencias lógicas utilizando interpretaciones.

a) $\Gamma = \{p \land q, r \lor q\}$, proposición: $p \land q \lor r$

b) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \to \neg r, r \to s\}$, proposición: $q \to s$

c) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \to \neg r, r \to s\}$, proposición: $\neg(p \land r)$

d) $\Gamma = \{p \lor q, q \to r, \neg r \lor s\}$, proposición: $(p \lor q) \to s$

e) $\Gamma = \{p \land q, q \to r, r \lor \neg s\}$, proposición: $(p \land q) \to r$

Mostrar que a) $\Gamma = \{p \land q, r \lor q\} \models p \land q \lor r$**.**
Por ambigüedad consideraremos dos casos:
1) (Sea $B = (p \land q) \lor r$)Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Sea $\mathcal{I}$ un modelo Γ. Tenemos que demostrar que $\mathcal{I}((p \land q) \lor r) = 1$.
Como $\mathcal{I}(p \land q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$ y para $\mathcal{I}(r \lor q)$ tenemos dos casos

i) Cuando $\mathcal{I}(r) = 1$, y como $\mathcal{I}(q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(q \lor r) = 1$ siempre, por lo que $\mathcal{I}(p \land q \lor r) = 1$ dodo que $\mathcal{I}(p \land q) = 1$ y $\mathcal{I}(r) = 1$

ii) Por otro lado, Cuando $\mathcal{I}(r) = 0$, como $\mathcal{I}(q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(q \lor r) = 1$
$\therefore \mathcal{I}((p \land q) \lor r) = 1$
2) (Sea $B = p \land (q \lor r)$) Por otro lado, sin pérdida de generalidad sabemos que $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$ por lo que, para cualquier $\mathcal{I}(r)$ se cumple $\mathcal{I}(p \lor r)$, Esto quiere decir que $\mathcal{I}(p \lor r) = 1$.
$\therefore \mathcal{I}(p \land (q \lor r)) = 1$
$\therefore$ se concluye que es onsecuencia lógica. ■

Mostrar que b) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \to \neg r, r \to s\} \models q \to s$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i) Si $\mathcal{I}(q) = 0$ entonces $\mathcal{I}(q \to s) = 1$ por lo que es trivial.

ii) Si $\mathcal{I}(q) = 1$, entonces $\mathcal{I}(p) = 1$ para que sea $\mathcal{I}(p \leftrightarrow q) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$ necesariamente, pues $\mathcal{I}(p \to \neg r) = 1$, entonces $\mathcal{I}(r) = 0$, quiere decir que $\mathcal{I}(r \to s) = 1$, en particular para $\mathcal{I}(s) = 0$, por lo que, si $\mathcal{I}(q) = 1$, como lo definimos anteriormente y si $\mathcal{I}(s) = 0$, quiere decir que $\mathcal{I}(r \to s) = 0$
$\therefore$ No es consecuencia lógica ■

Mostrar que c) $\Gamma = \{p \leftrightarrow q, p \to \neg r, r \to s\} \models \neg(p \land r)$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i) Si $\mathcal{I}(p) = 0$, entonces $\mathcal{I}(\neg(p \land r)) = 1$ pues $\mathcal{I}(p \land r) = 0$.

ii) Si $\mathcal{I}(p) = 1$ como $\mathcal{I}(p \leftrightarrow q) = 1$ entonces $\mathcal{I}(q) = 1$, esto quiere decir que, como $\mathcal{I}(q \to \neg r) = 1$, tiene que pasar que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(r) = 0$.
Esto quiere decir que $\mathcal{I}(p \land r) = 0$ y $\mathcal{I}(\neg(p \land r)) = 1$
$\therefore$ Si es consecuencia lógica.■

Mostrar que d) $\Gamma = \{p \lor q, q \to r, \neg r \lor s\} \models (p \lor q) \to s$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Tenemos dos casos:

i)Supongamos que $\mathcal{I}(q) = 1$, dado que $\mathcal{I}(p \to r) = 1$ quiere decir que $\mathcal{I}(r) = 1$, entonces $\mathcal{I}(\neg r) = 0$, y como $\mathcal{I}(\neg r \lor s) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(s) = 1$, dado que suponemos que $\mathcal{I}(p \lor q) = 1$ es necesario que $\mathcal{I}(p) = 1$ pues $\mathcal{I}(q) = 0$ como suposimos anteriormente. $\therefore \mathcal{I}((p \lor q) \to s) = 1$

ii)Supongamos$\mathcal{I}(q) = 0$, entonces, en particular, suponemos que $\mathcal{I}(r) = 0$, esto significa que $\mathcal{I}(\neg r) = 1$, como $\mathcal{I}(\neg r \lor s) = 1$ puede pasar que $\mathcal{I}(s) = 0$, y dado que $\mathcal{I}(p \lor q) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(p) = 1$ entonces decimos que $\mathcal{I}((p \lor q) \to s) = 0$ puesto que $\mathcal{I}(p \lor q) = 1$ pero $\mathcal{I}(s) = 0$
$\therefore$ No es consecuencia lógica. ■

Mostrar que e) $\Gamma = \{p \land q, q \to r, r \lor \neg s\} \models (p \land q) \to r$
Suponemos la veracidad de $\mathcal{I}(\Gamma) = 1$
Dado que $\mathcal{I}(p \land q) = 1$ tiene que pasar que $\mathcal{I}(p) = 1 = \mathcal{I}(q)$, entonces es necesario que $\mathcal{I}(r) = 1$ pues $\mathcal{I}(q \to r) = 1$, quiere decir se cumple $\mathcal{I}(r \lor \neg s) = 1$ pues basta que al menos uno sea 1 para que la proposición se cumpla, lo que quiere decir que $\mathcal{I}((p \land q) \to r) = 1$
$\therefore$ Es consecuencia lógica. ■

Ejercicio 9

Ejercicio 9

9. Construir las Tableaux de las siguientes proposiciones y, a partir de estas, determinar si son tautologías, contradicciones o contingentes:

1. $p \to (q \vee p)$
2. $p \to (q \wedge p)$
3. $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \vee s)$
4. $((p \to q) \wedge q) \to q$
5. $(\neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \to q)) \to q$
6. $((p \to q) \wedge (q \to \neg r)) \wedge r) \to (\neg p \wedge \neg q)$

Para la consrucción de los tableaux debemos tener presentes las $\alpha - reglas$, $\beta - reglas$ y $\sigma - reglas$.
También recordemos que toda hoja qe tenga como ancestro a su negación será una rama cerrada.

Con esto podemos empezar la contrucción de los tableux.

Para a)

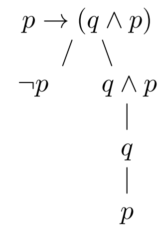
$$\begin{array}{ccccc} & & p \to (q \vee p) & & \\ & / & & \backslash & \\ \neg p & & & q \vee p & \\ & & & / \quad \backslash & \\ & & & q \quad\; p & \end{array}$$

Ya que no podemos expandir más el árbol y ninguna rama cerró debemos probar con la negación de la proposición.

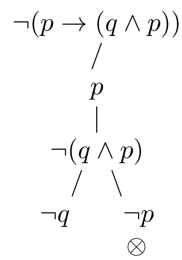
$$\begin{array}{c} \neg(p \to (q \vee p)) \\ | \\ p \\ | \\ \neg(q \vee p) \\ | \\ \neg q \\ | \\ \neg p \\ \otimes \end{array}$$

Se cierra ya que p y $\neg p$ están en la misma rama.
$\therefore p \to (q \vee p)$ es tautología.

Para b)



Ya que no podemos expandir más el árbol y ninguna rama cerró debemos probar con la negación de la proposición.



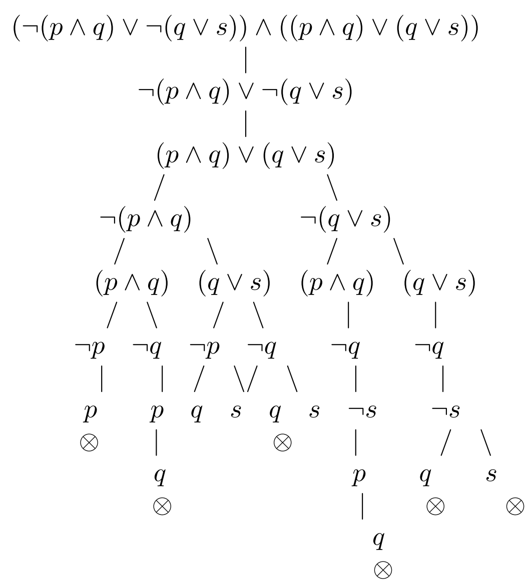
En ninguno de los casos se cierra por completo el tableux
$\therefore p \to (q \wedge p)$ es contingencia.

Para c)
Empezando por la eliminación de $\leftrightarrow$

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \vee s)$$

$$(\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \vee s)) \wedge ((p \wedge q) \vee (q \vee s))$$

Para formar el tableux



Puesto que no todas las ramas se cerraron probaremos con la negación de la proposición.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \vee s)) \wedge ((p \wedge q) \vee (q \vee s))) & \\
 / & & \backslash \\
\neg(\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \vee s)) & & \neg((p \wedge q) \vee (q \vee s)) \\
| & & | \\
p \wedge q & & \neg(p \wedge q) \\
| & & | \\
q \vee s & & \neg(q \vee s) \\
| & & / \quad \backslash \\
q & & \neg p \quad \neg q \\
/ \quad \backslash & & | \qquad | \\
q \qquad s & & \neg q \qquad \neg q \\
 & & | \qquad | \\
 & & \neg s \qquad \neg s
\end{array}
$$

Puesto que tampoco se llego a una contradicción
$\therefore (p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \vee s)$ es contingencia.

Para d)

$$
\begin{array}{c}
((p \to q) \wedge q) \to q \\
/ \quad \backslash \\
\neg(p \to q) \wedge p \quad q \\
| \\
\neg(p \to q) \\
| \\
p \\
| \\
p \\
| \\
\neg q
\end{array}
$$

Ya que no podemos expandir más el árbol y ninguna rama cerró debemos probar con la negación de la proposición.

$$
\begin{array}{c}
\neg(((p \to q) \wedge q) \to q) \\
| \\
(p \to q) \wedge p \\
| \\
\neg q \\
| \\
p \to q \\
| \\
p \\
/ \quad \backslash \\
\neg p \qquad q \\
\otimes \qquad \otimes
\end{array}
$$

Se cierra ya que la negación de $\neg p$ y q se encuentran en sus respectivas ramas.
$\therefore ((p \to q) \wedge q) \to q$ es tautología.

Para e)

$$(\neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \to q)) \to q$$

$$(\neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \wedge (p \to q)) \to q$$

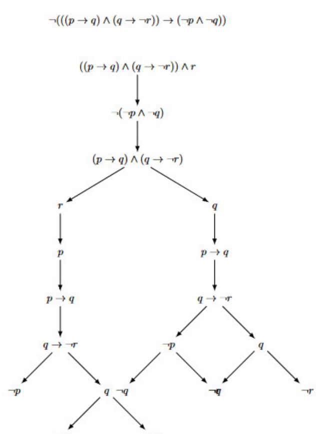
$$
\begin{array}{c}
(\neg((p \to q) \land (q \to p)) \land (p \to q)) \to q \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \\
\neg(\neg((p \to q) \land (q \to p)) \land (p \to q)) \qquad q \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \\
(p \to q) \land (q \to p) \quad \neg(p \to q) \\
| \qquad\qquad\qquad | \\
(p \to q) \qquad\qquad p \\
| \qquad\qquad\qquad | \\
(q \to p) \qquad\qquad \neg q \\
/ \quad \backslash \\
\neg p \qquad q \\
/ \ \backslash \quad / \ \backslash \\
\neg q \quad p \quad \neg q \quad p \\
\otimes \quad \otimes
\end{array}
$$

Vemos que hay ramas que cierran y también ramas que no se cierran
$\therefore (\neg(p \leftrightarrow q) \land (p \to q)) \to q$ es contingencia.

Para f)

$$
\begin{array}{c}
(((p \to q) \land (q \to \neg r)) \land r) \to (\neg p \land \neg q) \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \\
\neg(((p \to q) \land (q \to \neg r)) \land r) \qquad (\neg p \land \neg q) \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \qquad\qquad\qquad | \\
\neg((p \to q) \land (q \to \neg r)) \quad \neg r \qquad\qquad \neg p \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \qquad\qquad\qquad | \\
\neg(p \to q) \qquad \neg(q \to \neg r) \qquad\qquad \neg q \\
| \qquad\qquad\qquad | \\
p \qquad\qquad\qquad q \\
| \qquad\qquad\qquad | \\
\neg q \qquad\qquad\qquad \neg(\neg r) \\
r
\end{array}
$$

Puesto que no tiene ramas que cierren debemos probar con la negación de la proposición.



Puesto que en la negación de la proposición se genera una contradición $\therefore (((p \to q) \land (q \to \neg r)) \land r) \to (\neg p \land \neg q)$ es tautología.

Ejercicio 10

10. Probar que el operador de disyuncion exclusiva (XOR) $p \veebar q$ es equivalente a $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$.

(Proposiciones equivalentes). Decimos que dos formulas proposicionales p y q son equivalentes si y solo si en todos sus posibles estados tienen el mismo valor de verdad. Por lo tanto para probar la equivalencia de $p \veebar q$ y $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ generaremos su tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge a)$	$\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$	$p \veebar q$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Dado este resultado podemos ver que los valores de $\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ y $p \veebar q$ son iguales en todos sus posibles estados. Por lo tanto son proposiciones equivalentes.

Ejercicio 11

Demostrar que dada una fórmula de lógica proposicional E, la altura es menor o igual que la longitud. Esto es $h(E) \leq \text{len}(E)$.

1) Caso base: consideramos que $\text{len}(E) = 1$ y altura $h(E) = 1$, entonces este caso hace que se cumpla que

$$h(E) \leq \text{len}(E)$$

por lo tanto, es correcto.

2) Hipótesis de inducción: suponemos que para E_1 y E_2 se cumple que

$$h(E_1) \leq \text{len}(E_1) \quad \text{y} \quad h(E_2) \leq \text{len}(E_2).$$

Queremos probar que para las fórmulas $E = E_1 \diamondsuit E_2$, o $\neg E_1$, también se cumple la desigualdad.

- Caso $E = E_1 \diamondsuit E_2$:

  Longitud:
  $$\text{len}(E_1 \diamondsuit E_2) = \text{len}(E_1) + \text{len}(E_2) + 1$$
  Altura:
  $$h(E_1 \diamondsuit E_2) = 1 + \text{máx}(h(E_1), h(E_2))$$
  Por la hipótesis de inducción, tenemos que $h(E_1) \leq \text{len}(E_1)$ y $h(E_2) \leq \text{len}(E_2)$. Entonces:
  $$h(E_1 \diamondsuit E_2) = 1 + \text{máx}(h(E_1), h(E_2)) \leq 1 + \text{máx}(\text{len}(E_1), \text{len}(E_2)) \leq \text{len}(E_1) + \text{len}(E_2) + 1$$
  $$= \text{len}(E_1 \diamondsuit E_2)$$
  Por lo tanto, se cumple que $h(E_1 \diamondsuit E_2) \leq \text{len}(E_1 \diamondsuit E_2)$.

- Caso $E = \neg E_1$:

  Longitud:
  $$\text{len}(\neg E_1) = \text{len}(E_1) + 1$$
  Altura:
  $$h(\neg E_1) = h(E_1) + 1$$
  Por la hipótesis de inducción, sabemos que $h(E_1) \leq \text{len}(E_1)$, entonces se cumple que
  $$h(\neg E_1) = h(E_1) + 1 \leq \text{len}(E_1) + 1 = \text{len}(\neg E_1)$$
  Así, se cumple que $h(\neg E_1) \leq \text{len}(\neg E_1)$.

Conclusión: por inducción, sabemos que para una fórmula proposicional E, se cumple que

$$h(E) \leq \text{len}(E)$$