Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURAS DISCRETAS

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

TAREA 03: CIRCUITOS Y LOGICA DE PRIMER ORDEN.

Primer Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

Tarea 03: Circuitos y logica de primer orden.

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

10 de noviembre de 2024

1) Asumiendo los axiomas de un álgebra booleana A = {0,1,+,·} demostrar las siguientes propiedades:

a) Idempotencia: $x + x = x$ y $xx = x$.

b) Idempotencia de complemento: $(\bar{\bar{x}}) = x$.

c) Elemento dominante: $x + 1 = 1$ y $x0 = 0$.

d) Absorción: $x + xy = x$ y $x(x + y) = x$.

$\underline{Dem\ a)}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} (x+x) &= (x+x)\cdot 1 \\ &= (x+x)\cdot(x+\bar{x}) \\ &= x + x\bar{x} \\ &= x + 0 \\ &= x \blacksquare \end{aligned}$$

$\underline{Dem}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} xx &= xx + 0 \\ &= xx + (x\bar{x}) \\ &= x\cdot(x+\bar{x}) \\ &= x \cdot 1 \\ &= x\blacksquare \end{aligned}$$

$\underline{Dem\ b)}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

Supongamos $\bar{\bar{x}} \neq x$

$$x + \bar{x} = 1; x \cdot \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1; \bar{x} \cdot \bar{\bar{x}} = 0$$

$$x + \bar{x} = \bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1$$

Unicidad del complemento, x y son complemento de $\bar{x}$

$$\implies x = \bar{\bar{x}} \, !$$

$$\therefore \bar{\bar{x}} = x \blacksquare$$

$\underline{Dem\ c)}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} (x+1) &= x + (x+\bar{x}) \\ &= (x+x) + \bar{x} \\ &= x + \bar{x} \\ &= 1 \blacksquare \end{aligned}$$

$\underline{Dem}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} x\cdot 0 &= x\cdot(x\cdot\bar{x}) \\ &= (x\cdot x)\cdot\bar{x} \\ &= (x\cdot x)\cdot\bar{x} \\ &= x\cdot\bar{x} \\ &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

$\underline{Dem\ d)}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} x + xy &= x \\ (x+x)(x+y) &= \\ x(x+y) &= \\ x(1\cdot(1+y)) &= \\ x(1\cdot 1) &= \\ x(1) &= \\ x &= x \blacksquare \end{aligned}$$

$\underline{Dem}$: Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned} x(x+y) &= x \\ x\cdot x + x\cdot y &= \\ x + x\cdot y &= \\ x(1 + 1\cdot y) &= \\ x(1) &= \\ x &= x \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio2

0.1. 2.Dibuja los circuitos lógicos para las siguientes expresiones:

(a) $xyz \oplus x\overline{y}z$

(b) $xy + x\overline{y}$

(c) $xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z}$

(d) $\overline{x} + \overline{y} + xyz$

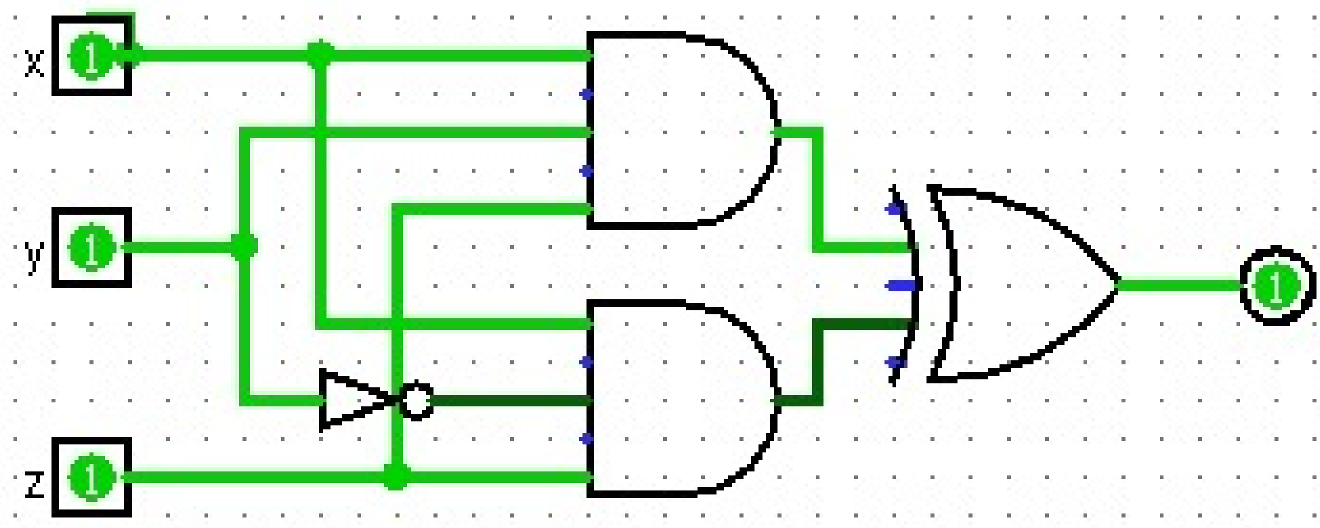


Figura 1: Circuito lógico para $xyz \oplus x\overline{y}z$

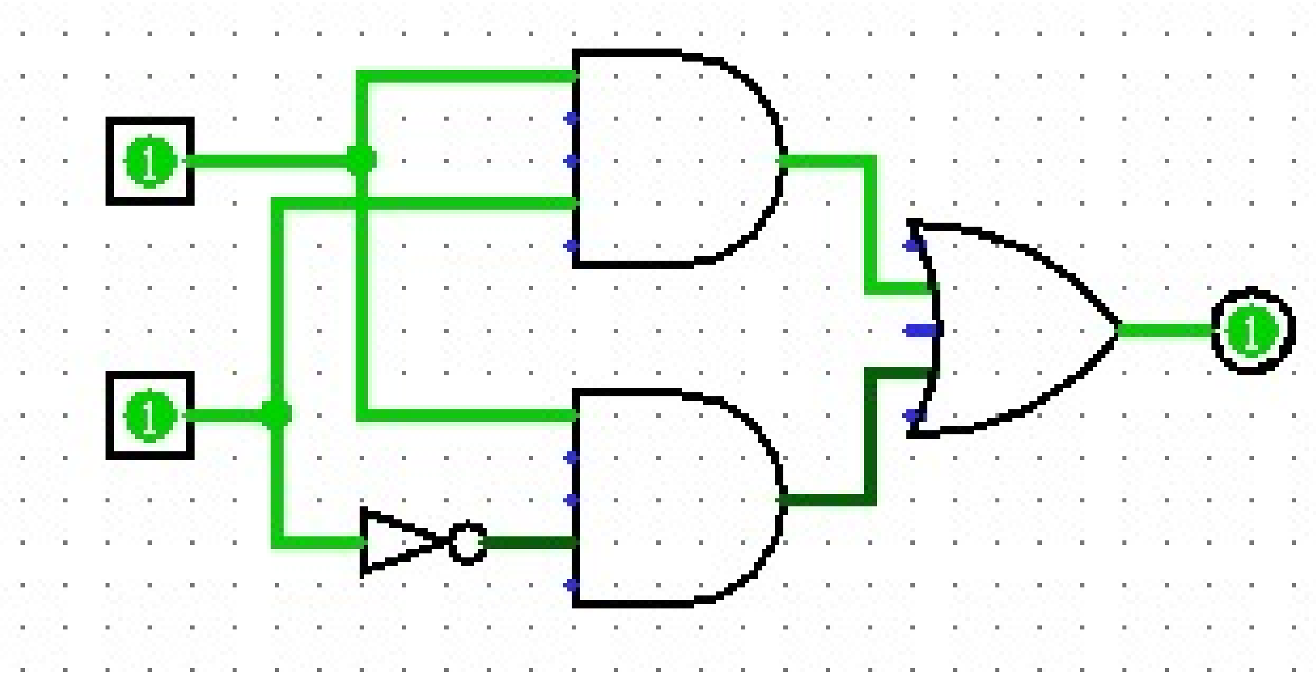


Figura 2: Circuito lógico para $xy + x\overline{y}$

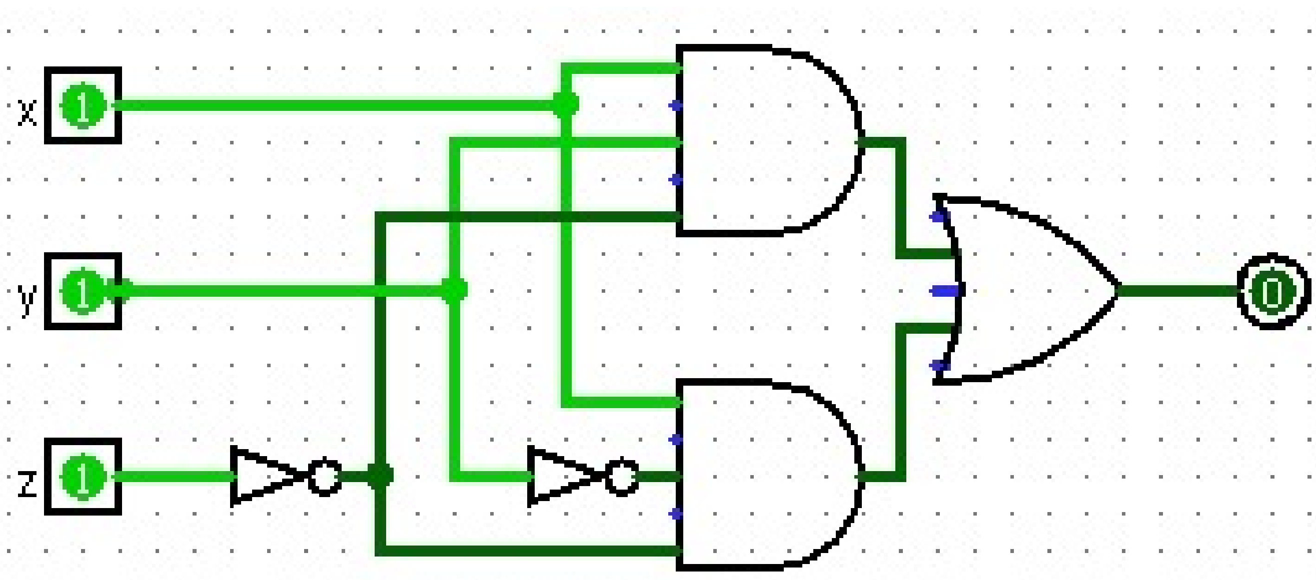


Figura 3: Circuito lógico para $xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z}$

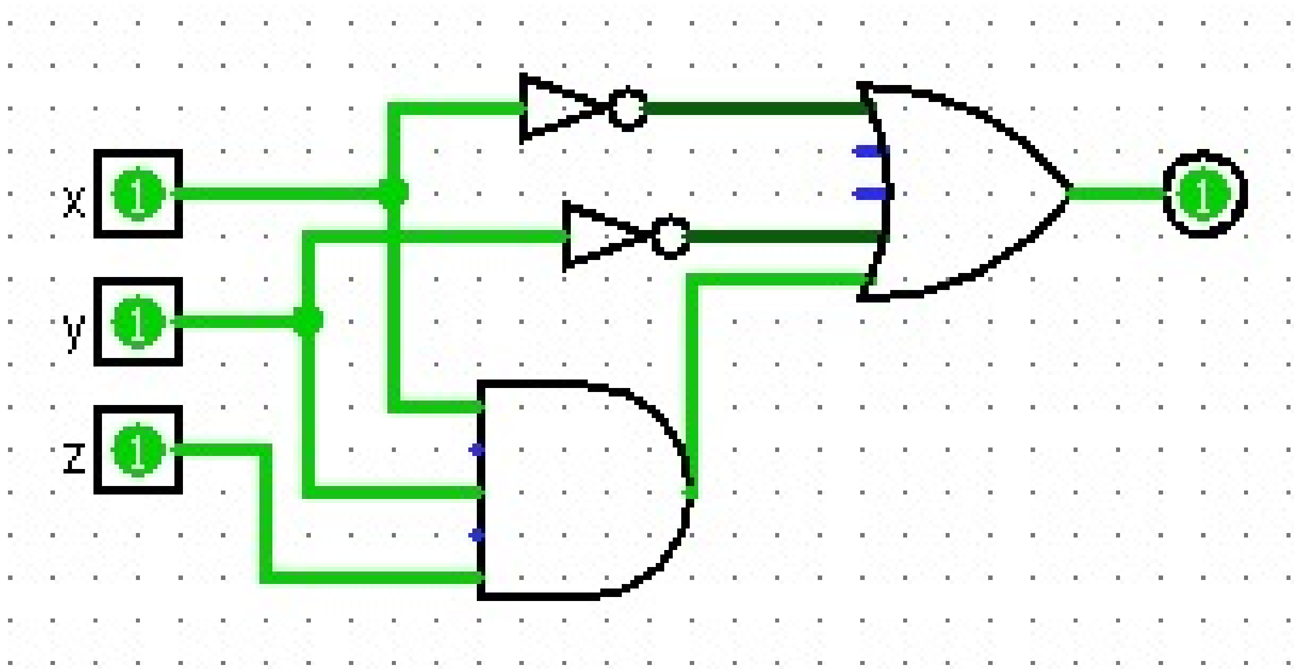


Figura 4: Circuito lógico para $\overline{x} + \overline{y} + xyz$

Ejercicio3

Utilizando mapas de Karnaugh, reducir las siguientes expresiones y dibujar los circuitos reducidos:

(a) $xy + x\overline{y}$

(b) $\overline{x}y + \overline{xy}$

(c) $xyz + \overline{x}yz$

(d) $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz}$

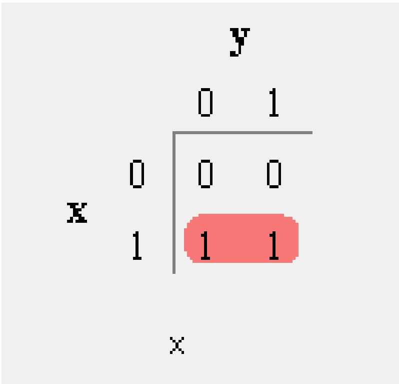
(e) $\overline{xy} + \overline{x}y + xy$

(f) $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

Soluciones

(a) $xy + x\overline{y}$

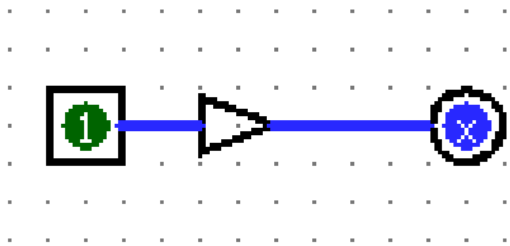
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

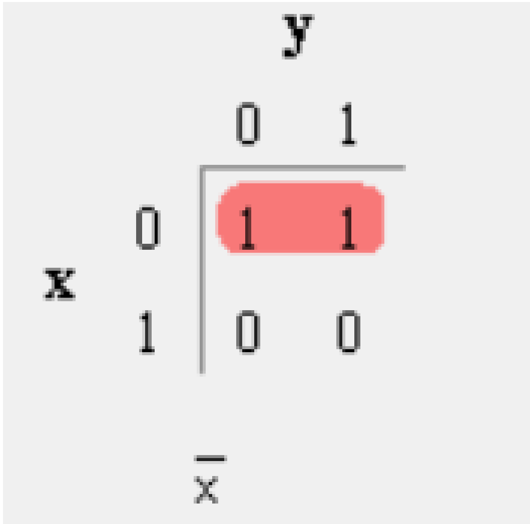
$$xy + x\overline{y} = x$$

- Circuito reducido:



(b) $\overline{x}y + \overline{xy}$

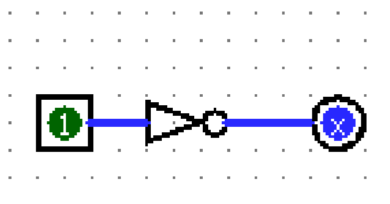
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

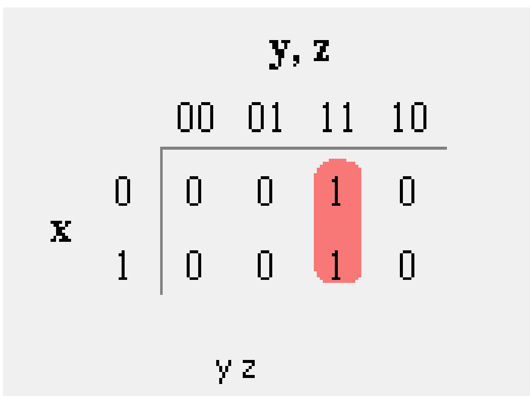
$$\overline{x}y + \overline{xy} = \overline{x}$$

- Circuito reducido:



(c) $xyz + \overline{x}yz$

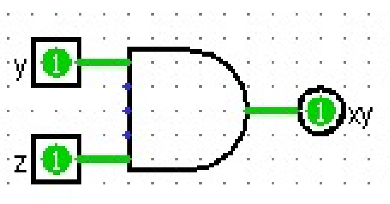
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

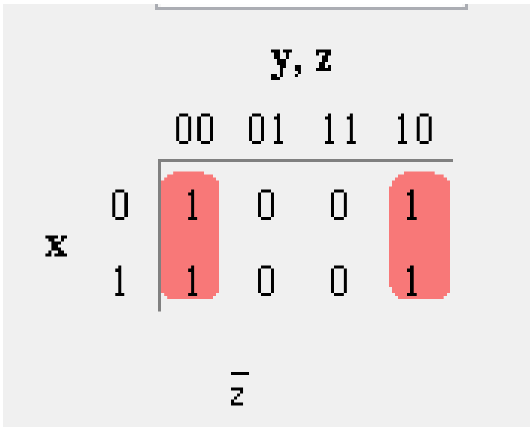
$$xyz + \overline{x}yz = yz$$

- Circuito reducido:



(d) $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz}$

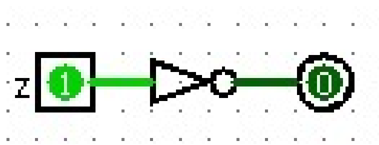
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

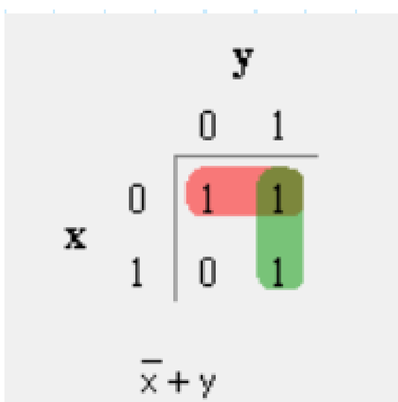
$$xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz} = \overline{z}$$

- Circuito reducido:



(e) $\overline{xy} + \overline{x}y + xy$

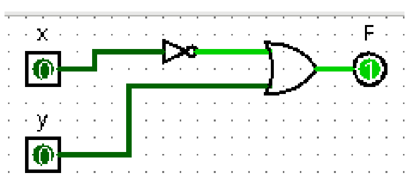
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

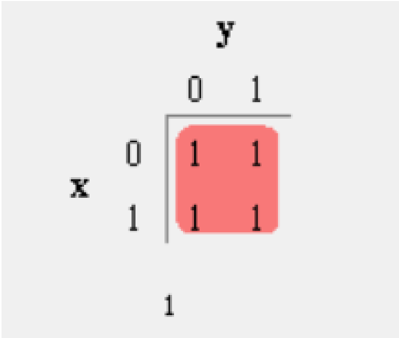
$$\overline{xy} + \overline{x}y + xy = \overline{x} + y$$

- Circuito reducido:



(f) $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

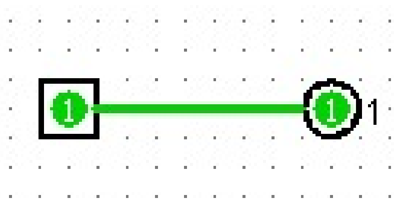
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

$$\overline{xy} + \overline{x}y + x + y = 1$$

- Circuito reducido:



Ejercicio 4

4. Diseñar un circuito decodificador con 4 entradas para la siguiente tabla de verdad, donde - denota cualquier valor, 0 o 1:

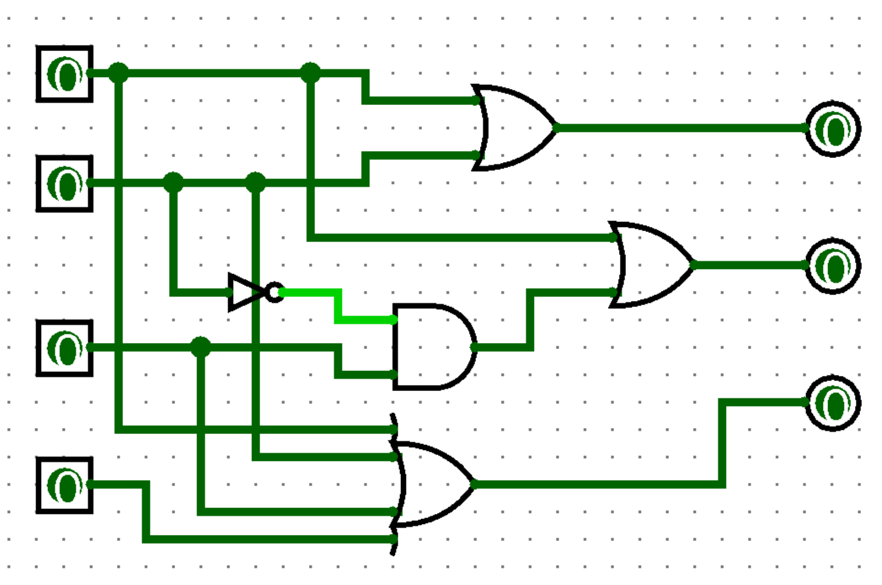
Entradas				Salidas		
E1	E2	E3	E4	S1	S2	S3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	-	0	1	1
0	1	-	-	1	0	1
1	-	-	-	1	1	1

Dadas estas entradas y Salidas, diseñaremos el circuito.
Primero, definamos las expresiones que con estas entradas generan cada salida.

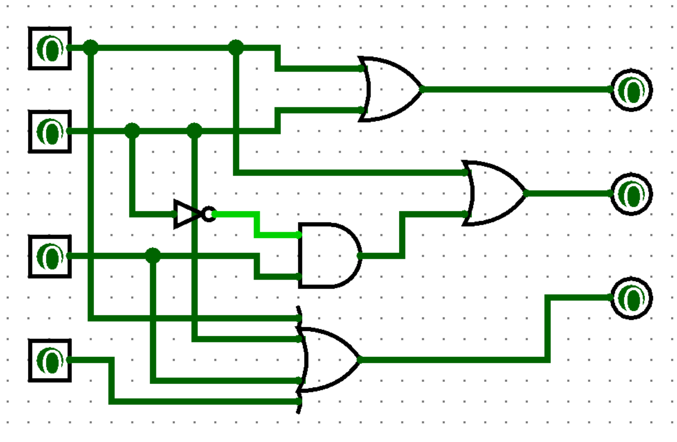
$$E_1 + E_2 = S_1$$
$$E_1 + \overline{E_2}E_3 = S_2$$
$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = S_3$$

Esto quiere decir que para la Salida 1 usaremos una compuerta OR con E_1 y E_1, para la Salida 2 usaremos una compuerta OR con E_1 y con la Salida de una entrada AND de el complemento de E_2 con E_3, por último para la Salida 3 usaremos una compuerta OR de todas las entradas.

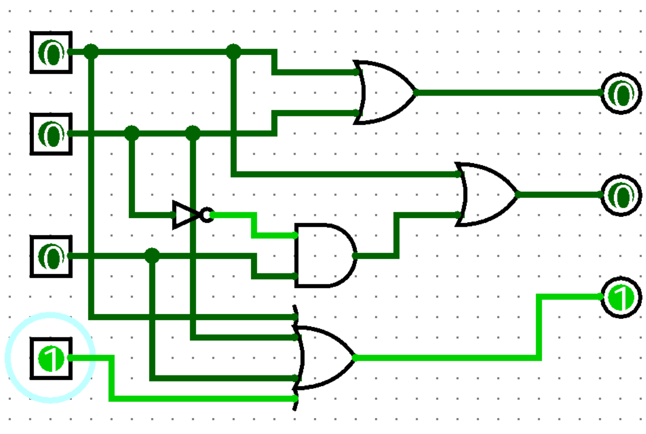
El circuito resulta así: (Veremos también lo que resulta con las diferentes entradas.)
NOTA: Para los Entradas con guión en la Tabla este circuito va a funcionar y regresará las salidas esperadas, ya sea 0 o 1.



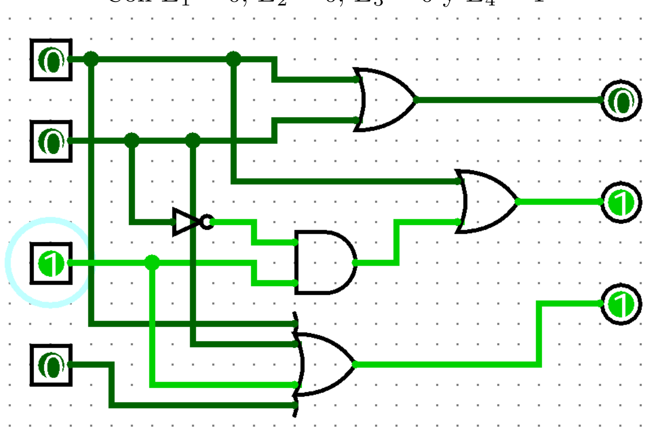
Circuito Decodificador



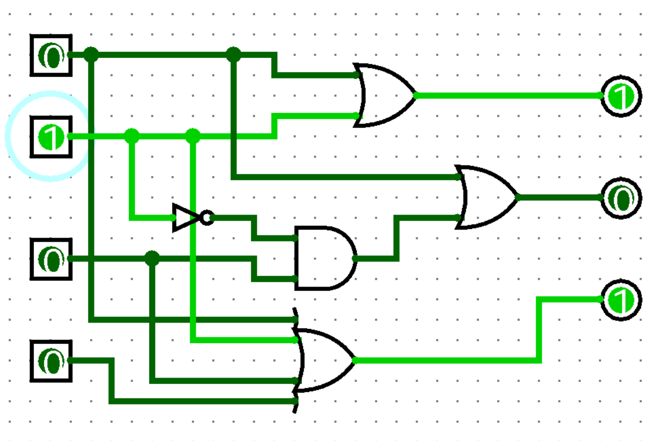
Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 0$



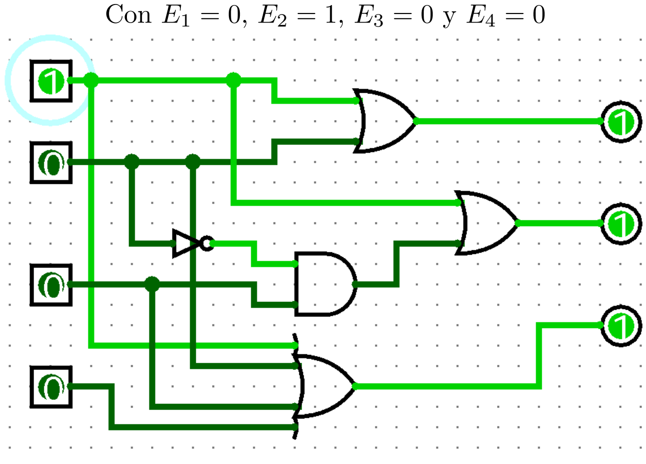
Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 1$



Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 1$ y $E_4 = 0$



Con $E_1 = 0$, $E_2 = 1$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 0$

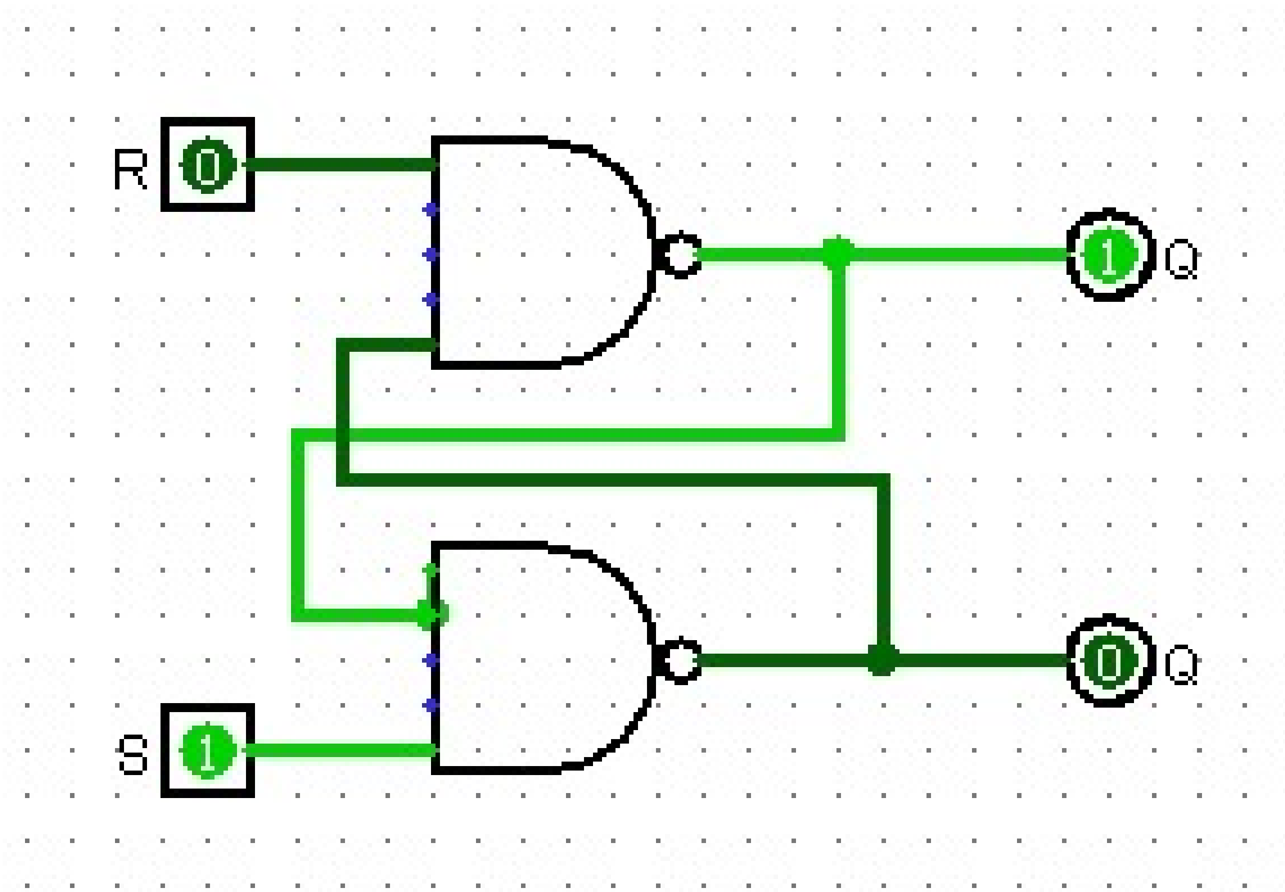


Con $E_1 = 1$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 0$

Ejercicio5

5. Disenar un circuito secuencial flip-flop SR, pero utilizando circuitos NAND y verificar que el resultado es el mismo que con puertas NOR.

1. Circuito Flip-Flop SR usando compuertas NAND:



Expresar las siguientes oraciones como fórmulas de la lógica de predicados; indicar las constantes, las variables, los cuantificadores y su alcance:

a) Hay algunos médicos que son odontologos.

b) Ninguna planta es mamífero o pez.

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.

f) Un estudiante reprobo el examen y abandono el curso

g) Los gatos son mamiferos.

h) Un perro mordio a María.

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamifero

a) Hay algunos médicos que son odontologos.
Variables: x es la variable
Constantes: $m =$ Médico, $o =$ Odontólogo
Funciones: $S(x, m) = x$ es Médico; $S(x, o) = x$ es Odontólogo
Cuantificadores: $\exists$ es el cuantificador
Expresión: $\exists x(S(x, m) \wedge S(x, o))$
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

b) Ninguna planta es mamífero o pez.
Variables: x es la variable
Constantes:
Funciones: $P(x) = x$ es planta; $M(x) = x$ es mamífero; $Pz(x) = x$ es pez.
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión $\forall x(P(x) \to \neg(M(x) \vee Pz(x)))$
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.
Variables: x, y
Constantes: $d = directora$
Funciones: $P(x, y) =$ x le toma el pelo a y
Cuantificadores: $\forall$ (para todo)
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue
Expresión: $\forall x(P(x, d))$

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo
Variables: x, y
Constantes: NO hay
Funciones: $P(x, y) =$ x le toma el pelo a y; $A(y) =$ y es abogado
Cuantificadores: $\exists$ y $\forall$ son los cuantificadores
Expresión: $\exists y(A(y) \wedge \forall x P(x, y))$
Alcance: El alcance de $\exists$ es sobre todas la expresión y para $\forall$ es para la el predicado P

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.
Variables: x, y
Constantes: $c = 10$
Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $A(x, c) = x$ aprobó el examen con c
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión: $\forall x(E(x) \wedge A(x, c))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión.

f) Un estudiante reprobo el examen y abandono el curso
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $R(x) = x$ reprobo el examen; $A(x) = x$ abandono el curso
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión: $\forall x(E(x) \wedge R(x) \wedge A(x))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión

g) Los gatos son mamiferos.
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $M(x) = x$ son mamíferos, $G(x) = x$ es gato
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(G(x) \to M(x))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión

h) Un perro mordio a María
Variables: x, y
Constantes:$m =$ María
Funciones: $P(x) = x$ es perro; $M(x, m) = x$ mordió a María
Cuantificadores: $\exists$
Expresión: $\exists x(P(x) \wedge M(x, m))$
Alcance: El alcance de $\exists$ es para toda la expresión

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas
Variables: x
Constantes: $c =$ Cervantes
Funciones: $N(x,c) = x$ novela de Cervantes; $B(x) = x$ es buena; $D(x) = x$ es divertida
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(N(x,c) \to (B(x) \wedge D(x)))$
Alcance: El alcance de $\forall$ abarca toda la expresión.

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamifero
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $G(x) = x$ es gato; $F(x) = x$ es felino; $M(x) = x$ es mamífero
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(G(x) \to F(x)) \to (\forall x(G(x) \to M(x)))$
Alcance: El alcance de $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \to F(x)$ y el alcance del segundo cuantificador $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \to M(x)$

Ejercicio 7

7. Por cada formula:

1. Clasificar la presencia de variables en libres y ligadas
2. Indicar el alcance del cuantificador

a)

$$R(x, y) \land L(y)$$

1. **Variables Libres:** x, y
   Variables Ligadas: No hay variables ligadas (ya que no hay cuantificadores)
2. No hay cuantificadores

b)

$$\forall x\, R(x, f(x, y)) \land L(y)$$

1. **Variables Libres:** y
   Variables Ligadas: x
2. EL alcance de $\forall x$ es $R(x, f(x, y))$

c)

$$\exists x\, \exists y\, R(x, y) \land L(x, y)$$

1. **Variables Libres:** x,y de $L(x, y)$
   Variables Ligadas: x,y de $R(x, y)$
2. EL alcance de $\exists x$ y de $\exists y$ es $R(x, y)$

d)

$$\exists y\, L(x, y) \lor \exists z\, R(x, z)$$

1. **Variables Libres:** x
   Variables Ligadas: y de $L(x, y)$ y z de $R(x, z)$
2. EL alcance de $\exists y$ es $L(x, y)$, y el Alcance de $\exists z$ es $R(x, z)$

e)

$$\exists y\, R(a, y) \lor L(a)$$

1. **Variables Libres:** a
   Variables Ligadas: y de $R(a, y)$
2. EL alcance de $\exists y$ es $R(a, y)$

f)

$$D(f(x, y)) \lor \forall z\, R(z, r(y))$$

1. **Variables Libres:** x,y
   Variables Ligadas: z de $R(z, r(y))$
2. EL alcance de $\forall z$ es $R(z, r(y))$

f)

$$\forall x\, (L(x) \to R(a, x) \land C(x, a))$$

1. **Variables Libres:** a
   Variables Ligadas: x

2. EL alcance de $\forall x$ es $L(x) \rightarrow (R(a,x) \wedge C(x,a))$

h)

$$R(x,y,z) \wedge \exists y\, R(y,x,z) \rightarrow \forall x\, I(x,y)$$

1. **Variables Libres:** x,y,z de $R(x,y,z)$, x,z de $R(y,x,z)$, y de $I(x,y)$
   Variables Ligadas: y de $R(y,x,z)$ y x de $I(x,y)$

2. EL alcance de $\exists y$ es $R(y,x,z)$, y de $\forall x$ es $I(x,y)$

i)

$$\forall x\, (C(x,z) \wedge R(x,y)) \rightarrow C(y,z)$$

1. **Variables Libres:** z,y de $C(x,z) \wedge R(x,y)$ y y,z de $C(y,z)$
   Variables Ligadas:x de $C(x,z) \wedge R(x,y)$

2. EL alcance de $\forall x$ es $C(x,z) \wedge R(x,y)$

j)

$$\forall x\, \exists z\, I(x,z) \rightarrow C(z,y) \wedge D(y)$$

1. **Variables Libres:** z,y de $(C(z,y) \wedge D(y))$
   Variables Ligadas: x de $I(x,z)$

2. EL alcance de $\forall x$ y de $\exists x$ es $I(x,z)$