



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURAS DISCRETAS

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

TAREA 03: CIRCUITOS Y LOGICA DE PRIMER ORDEN.

Primer Parcial

Autores:

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

Tarea 03: Circuitos y logica de primer orden.

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

10 de noviembre de 2024

1) Asumiendo los axiomas de un álgebra booleana $A = \{0,1,+, \cdot\}$ demostrar las siguientes propiedades:

- a) Idempotencia: $x + x = x$ y $xx = x$.
- b) Idempotencia de complemento: $(\bar{\bar{x}}) = x$.
- c) Elemento dominante: $x + 1 = 1$ y $x0 = 0$.
- d) Absorción: $x + xy = x$ y $x(x + y) = x$.

Dem a) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}(x + x) &= (x + x) \cdot 1 \\ &= (x + x) \cdot (x + \bar{x}) \\ &= x + x\bar{x} \\ &= x + 0 \\ &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}xx &= xx + 0 \\ &= xx + (x\bar{x}) \\ &= x \cdot (x + \bar{x}) \\ &= x \cdot 1 \\ &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem b) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

Supongamos $\bar{\bar{x}} \neq x$

$$\begin{aligned}x + \bar{x} &= 1; x \cdot \bar{x} = 0 \\ \bar{x} + \bar{\bar{x}} &= 1; \bar{x} \cdot \bar{\bar{x}} = 0 \\ x + \bar{x} &= \bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1\end{aligned}$$

Unicidad del complemento, x y \bar{x} son complemento de \bar{x}

$$\begin{aligned}\implies x &= \bar{\bar{x}} ! \\ \therefore \bar{\bar{x}} &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem c) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}(x + 1) &= x + (x + \bar{x}) \\ &= (x + x) + \bar{x} \\ &= x + \bar{x} \\ &= 1 \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x \cdot 0 &= x \cdot (x \cdot \bar{x}) \\ &= (x \cdot x) \cdot \bar{x} \\ &= (x \cdot x) \cdot \bar{x} \\ &= x \cdot \bar{x} \\ &= 0 \blacksquare\end{aligned}$$

Dem d) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x + xy &= x \\ (x + x)(x + y) &= \\ x(x + y) &= \\ x(1 \cdot (1 + y)) &= \\ x(1 \cdot 1) &= \\ x(1) &= \\ x &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x(x + y) &= x \\ x \cdot x + x \cdot y &= \\ x + x \cdot y &= \\ x(1 + 1 \cdot y) &= \\ x(1) &= \\ x &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio2

0.1. 2. Dibuja los circuitos lógicos para las siguientes expresiones:

- (a) $xyz \oplus x\bar{y}z$
- (b) $xy + x\bar{y}$
- (c) $xy\bar{z} + x\bar{y}z$
- (d) $\bar{x} + \bar{y} + xyz$

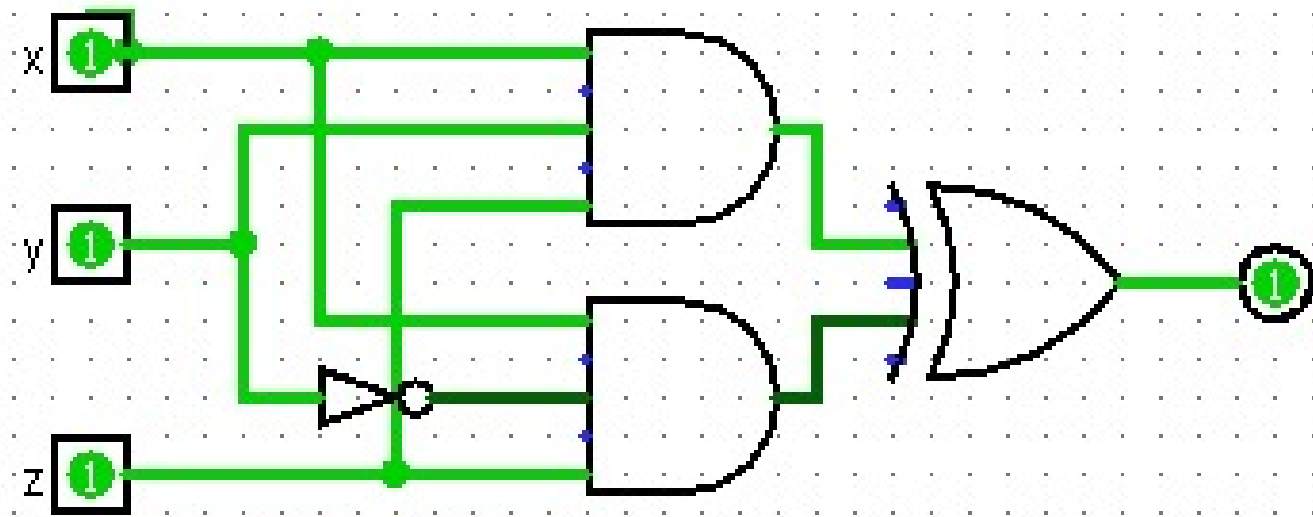


Figura 1: Circuito lógico para $xyz \oplus x\bar{y}z$

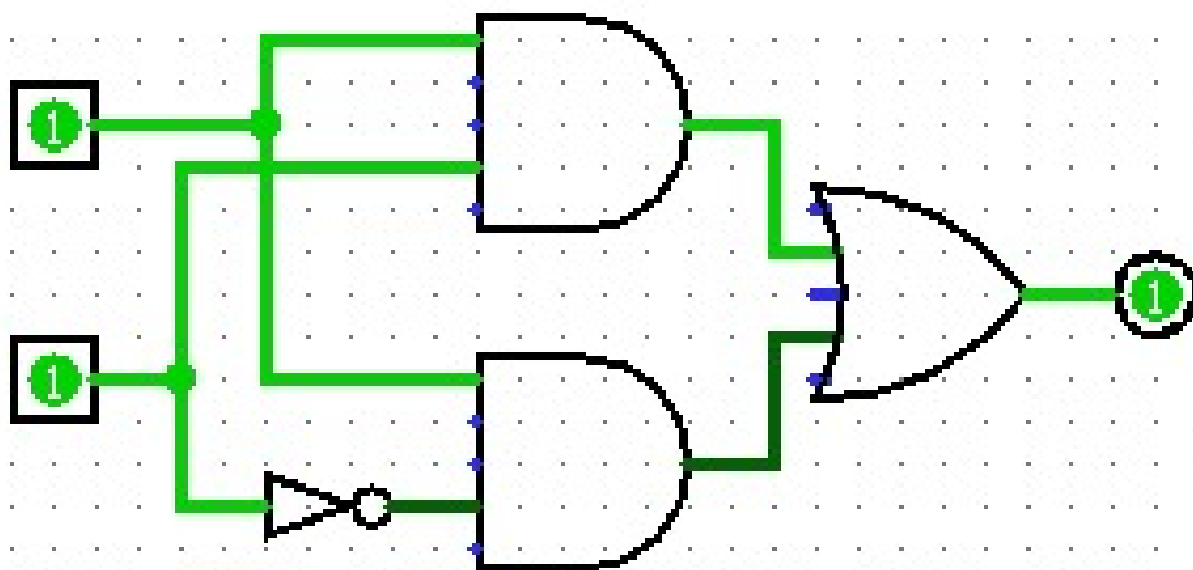


Figura 2: Circuito lógico para $xy + x\bar{y}$

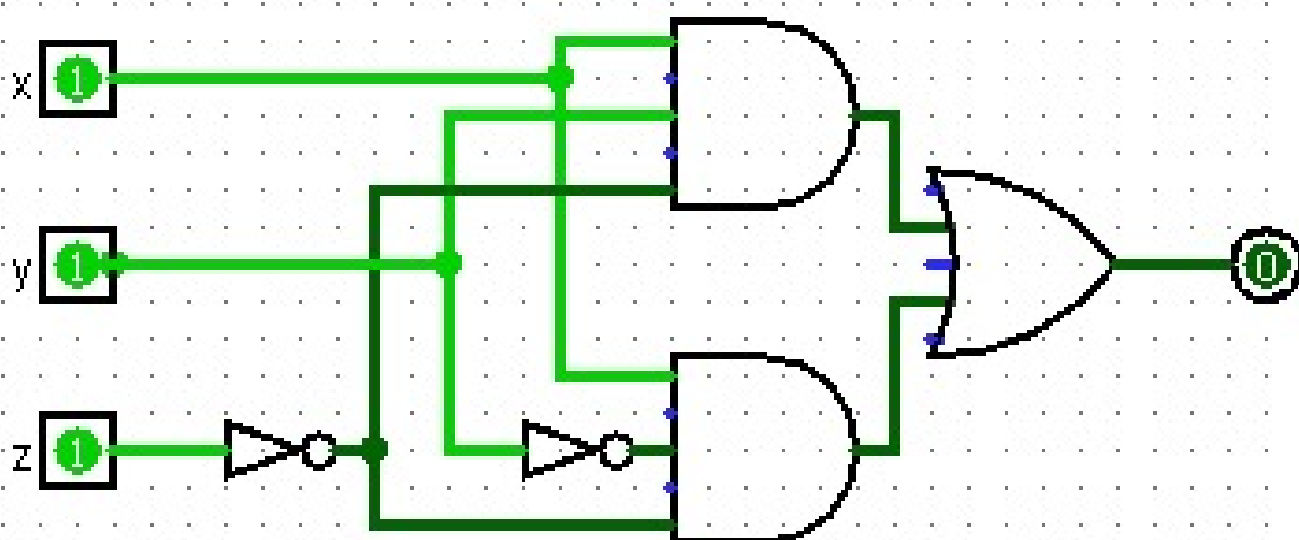


Figura 3: Circuito lógico para $xy\bar{z} + x\bar{y}z$

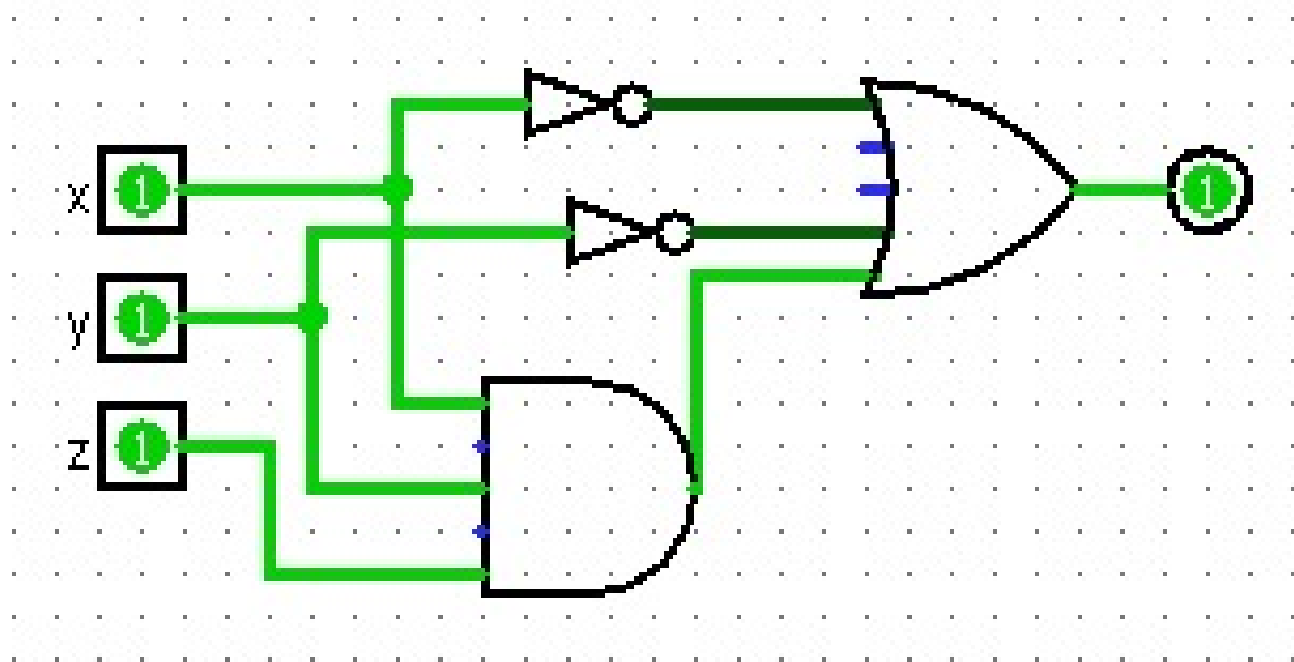


Figura 4: Circuito lógico para $\bar{x} + \bar{y} + xyz$

Ejercicio3

Utilizando mapas de Karnaugh, reducir las siguientes expresiones y dibujar los circuitos reducidos:

- (a) $xy + x\bar{y}$
- (b) $\bar{x}y + \overline{xy}$
- (c) $xyz + \bar{x}yz$
- (d) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \overline{xy}\bar{z}$
- (e) $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + xy$
- (f) $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + x + y$

Soluciones

(a) $xy + x\bar{y}$

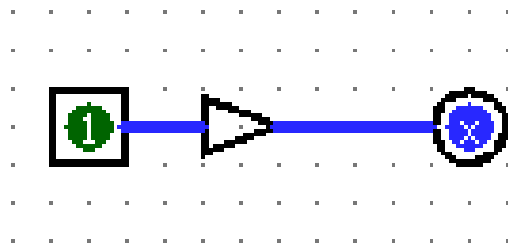
- Mapa de Karnaugh:

		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	1	1
		x	

- Simplificación:

$$xy + x\bar{y} = x$$

- Circuito reducido:



(b) $\bar{x}y + \overline{xy}$

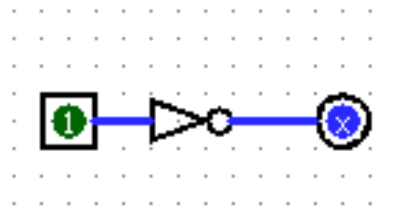
- Mapa de Karnaugh:

		y	
		0	1
x	0	1	1
	1	0	0
		\bar{x}	

- Simplificación:

$$\bar{x}y + x\bar{y} = \bar{x}$$

- Circuito reducido:



(c) $xyz + \bar{x}yz$

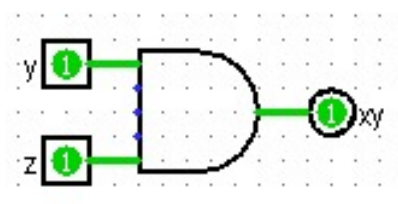
- Mapa de Karnaugh:

		y, z			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	0
		$y\ z$			

- Simplificación:

$$xyz + \bar{x}yz = yz$$

- Circuito reducido:



(d) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

- Mapa de Karnaugh:

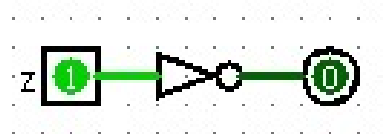
		y, z			
		00	01	11	10
x	0	1	0	0	1
	1	1	0	0	1

\bar{z}

- Simplificación:

$$xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = \bar{z}$$

- Circuito reducido:



(e) $\bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + xy$

- Mapa de Karnaugh:

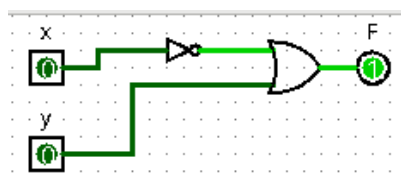
		y	
		0	1
x	0	1	1
	1	0	1

$\bar{x} + y$

- Simplificación:

$$\bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + xy = \bar{x} + y$$

- Circuito reducido:



(f) $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

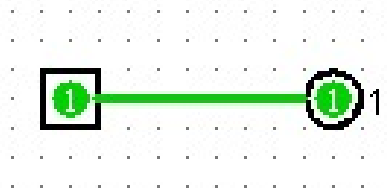
- Mapa de Karnaugh:

		y	
		0	1
x	0	1	1
	1	1	1
		1	

- Simplificación:

$$\overline{xy} + \overline{x}y + x + y = 1$$

- Circuito reducido:



Ejercicio 4

4. Diseñar un circuito decodificador con 4 entradas para la siguiente tabla de verdad, donde - denota cualquier valor, 0 o 1:

Entradas				Salidas		
E1	E2	E3	E4	S1	S2	S3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	-	0	1	1
0	1	-	-	1	0	1
1	-	-	-	1	1	1

Dadas estas entradas y Salidas, diseñaremos el circuito.
Primero, definamos las expresiones que con estas entradas generan cada salida.

$$E_1 + E_2 = S_1$$

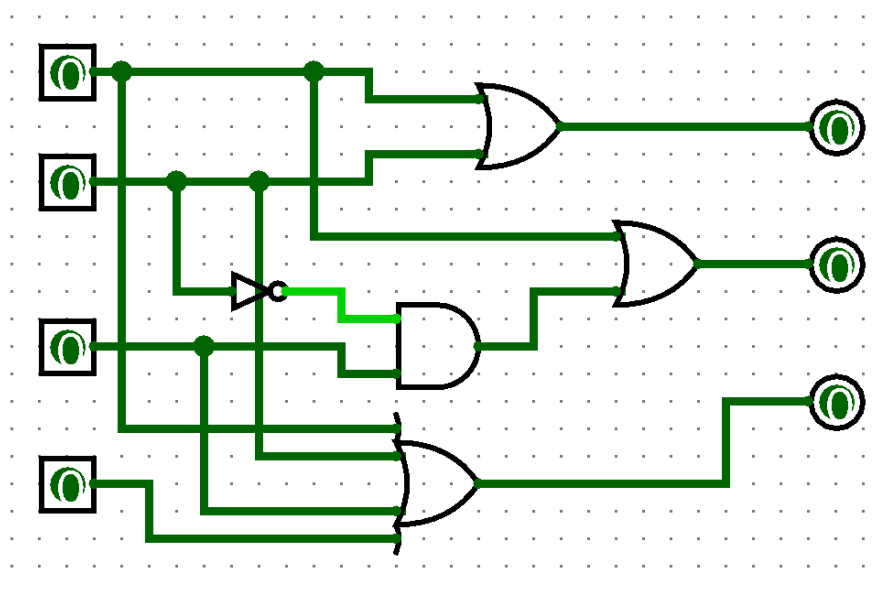
$$E_1 + \overline{E_2}E_3 = S_2$$

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = S_3$$

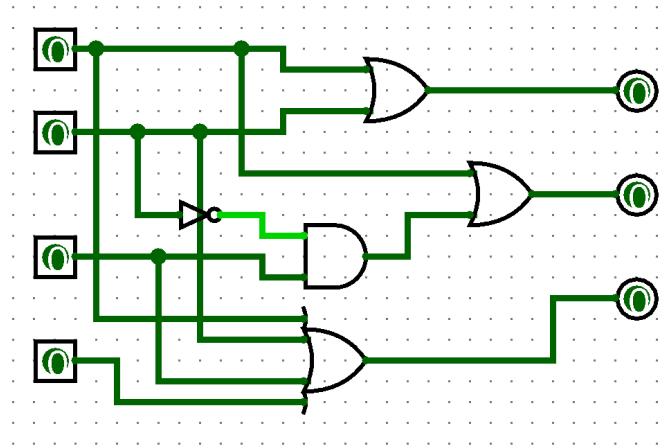
Esto quiere decir que para la Salida 1 usaremos una compuerta *OR* con E_1 y E_2 , para la Salida 2 usaremos una compuerta *OR* con E_1 y con la Salida de una entrada *AND* de el complemento de E_2 con E_3 , por último para la Salida 3 usaremos una compuerta *OR* de todas las entradas.

El circuito resulta así: (Veremos también lo que resulta con las diferentes entradas.)

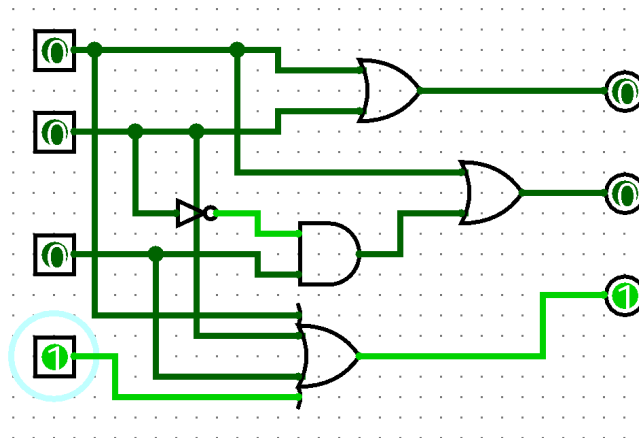
NOTA: Para los Entradas con guión en la Tabla este circuito va a funcionar y regresará las salidas esperadas, ya sea 0 o 1.



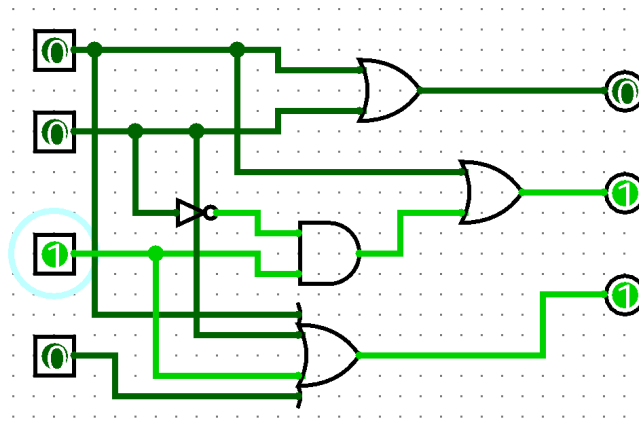
Circuito Decodificador



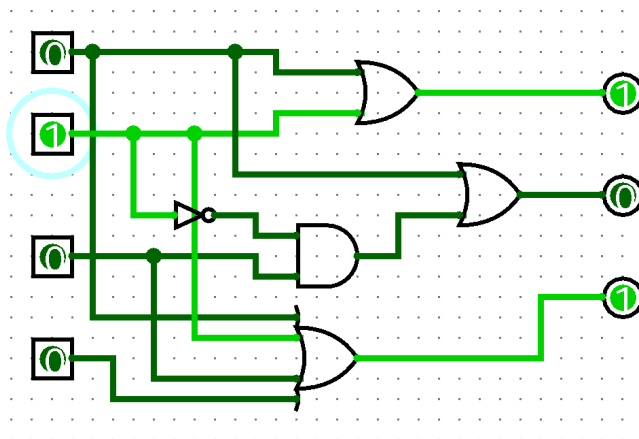
Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 0$



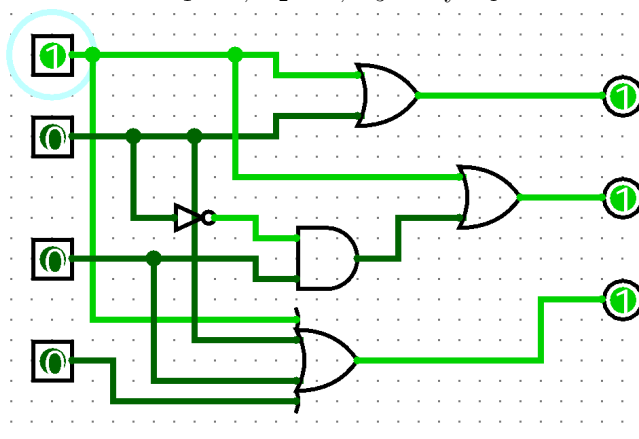
Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ y $E_4 = 1$



Con $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 1$ y $E_4 = 0$



Con $E_1 = 0, E_2 = 1, E_3 = 0$ y $E_4 = 0$

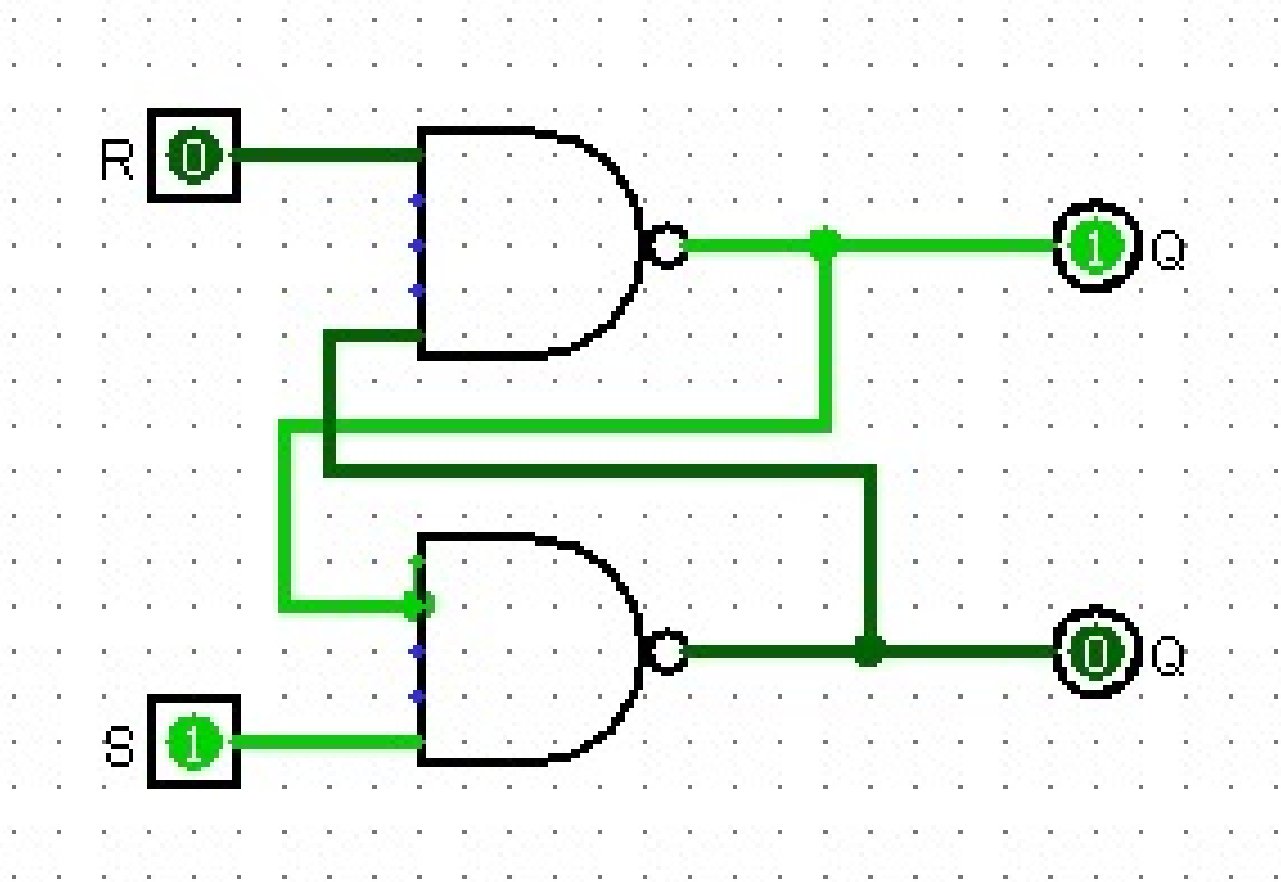


Con $E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0$ y $E_4 = 0$

Ejercicio5

5. Diseñar un circuito secuencial flip-flop SR, pero utilizando circuitos NAND y verificar que el resultado es el mismo que con puertas NOR.

1. Circuito Flip-Flop SR usando compuertas NAND:



Expresar las siguientes oraciones como fórmulas de la lógica de predicados; indicar las constantes, las variables, los cuantificadores y su alcance:

a) Hay algunos médicos que son odontólogos.

b) Ninguna planta es mamífero o pez.

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.

a) Hay algunos médicos que son odontólogos.

Variables: x es la variable

Constantes: m = Médico, o = Odontólogo

Funciones: $S(x, m) = x$ es Médico; $S(x, o) = x$ es Odontólogo

Cuantificadores: \exists es el cuantificador

Expresión: $\exists x(S(x, m) \wedge S(x, o))$

Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

b) Ninguna planta es mamífero o pez.

Variables: x es la variable

Constantes:

Funciones: $P(x) = x$ es planta; $M(x) = x$ es mamífero; $Pz(x) = x$ es pez.

Cuantificadores: \forall es el cuantificador

Expresión $\forall x(P(x) \rightarrow \neg(M(x) \vee Pz(x)))$

Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.

Variables: x, y

Constantes: d = directora

Funciones: $P(x, y) = x$ le toma el pelo a y

Cuantificadores: \forall (para todo)

Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

Expresión: $\forall x(P(x, d))$

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo

Variables: x, y

Constantes: NO hay

Funciones: $P(x, y) = x$ le toma el pelo a y ; $A(y) = y$ es abogado

Cuantificadores: \exists y \forall son los cuantificadores

Expresión: $\exists y(A(y) \wedge \forall x P(x, y))$

Alcance: El alcance de \exists es sobre todas la expresión y para \forall es para la el predicado P

f) Un estudiante reprobó el examen y abandono el curso

g) Los gatos son mamíferos.

h) Un perro mordió a María.

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamífero

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.

Variables: x, y

Constantes: $c = 10$

Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $A(x, c) = x$ aprobó el examen con c

Cuantificadores: \forall es el cuantificador

Expresión: $\forall x(E(x) \wedge A(x, c))$

Alcance: El alcance de \forall es para toda la expresión.

f) Un estudiante reprobó el examen y abandono el curso

Variables: x

Constantes: No hay

Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $R(x) = x$ reprobó el examen; $A(x) = x$ abandono el curso

Cuantificadores: \forall es el cuantificador

Expresión: $\forall x(E(x) \wedge R(x) \wedge A(x))$

Alcance: El alcance de \forall es para toda la expresión

g) Los gatos son mamíferos.

Variables: x

Constantes: No hay

Funciones: $M(x) = x$ son mamíferos, $G(x) = x$ es gato

Cuantificadores: \forall

Expresión: $\forall x(G(x) \rightarrow M(x))$

Alcance: El alcance de \forall es para toda la expresión

h) Un perro mordió a María

Variables: x, y

Constantes: m = María

Funciones: $P(x) = x$ es perro; $M(x, m) = x$ mordió a María

Cuantificadores: \exists

Expresión: $\exists x(P(x) \wedge M(x, m))$

Alcance: El alcance de \exists es para toda la expresión

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas

Variables: x

Constantes: $c = \text{Cervantes}$

Funciones: $N(x, c) = x$ novela de Cervantes; $B(x) = x$ es buena; $D(x) = x$ es divertida

Cuantificadores: \forall

Expresión: $\forall x(N(x, c) \rightarrow (B(x) \wedge D(x)))$

Alcance: El alcance de \forall abarca toda la expresión.

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamífero

Variables: x

Constantes: No hay

Funciones: $G(x) = x$ es gato; $F(x) = x$ es felino; $M(x) = x$ es mamífero

Cuantificadores: \forall

Expresión: $\forall x(G(x) \rightarrow F(x)) \rightarrow (\forall x(G(x) \rightarrow M(x)))$

Alcance: El alcance de $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \rightarrow F(x)$ y el alcance del segundo cuantificador $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \rightarrow M(x)$

Ejercicio 7

7. Por cada formula:

1. Clasificar la presencia de variables en libres y ligadas
2. Indicar el alcance del cuantificador

a)

$$R(x, y) \wedge L(y)$$

1. **Variables Libres:** x, y
Variables Ligadas: No hay variables ligadas (ya que no hay cuantificadores)
2. No hay cuantificadores

b)

$$\forall x R(x, f(x, y)) \wedge L(y)$$

1. **Variables Libres:** y
Variables Ligadas: x
2. EL alcance de $\forall x$ es $R(x, f(x, y))$

c)

$$\exists x \exists y R(x, y) \wedge L(x, y)$$

1. **Variables Libres:** x, y de $L(x, y)$
Variables Ligadas: x, y de $R(x, y)$
2. EL alcance de $\exists x$ y de $\exists y$ es $R(x, y)$

d)

$$\exists y L(x, y) \vee \exists z R(x, z)$$

1. **Variables Libres:** x
Variables Ligadas: y de $L(x, y)$ y z de $R(x, z)$
2. EL alcance de $\exists y$ es $L(x, y)$, y el Alcance de $\exists z$ es $R(x, z)$

e)

$$\exists y R(a, y) \vee L(a)$$

1. **Variables Libres:** a
Variables Ligadas: y de $R(a, y)$
2. EL alcance de $\exists y$ es $R(a, y)$

f)

$$D(f(x, y)) \vee \forall z R(z, r(y))$$

1. **Variables Libres:** x, y
Variables Ligadas: z de $R(z, r(y))$
2. EL alcance de $\forall z$ es $R(z, r(y))$

g)

$$\forall x (L(x) \rightarrow R(a, x) \wedge C(x, a))$$

1. **Variables Libres:** a
Variables Ligadas: x

2. EL alcance de $\forall x$ es $L(x) \rightarrow (R(a, x) \wedge C(x, a))$

h)

$$R(x, y, z) \wedge \exists y R(y, x, z) \rightarrow \forall x I(x, y)$$

1. **Variables Libres:** x,y,z de $R(x, y, z)$, x,z de $R(y, x, z)$, y de $I(x, y)$
Variables Ligadas: y de $R(y, x, z)$ y x de $I(x, y)$

2. EL alcance de $\exists y$ es $R(y, x, z)$, y de $\forall x$ es $I(x, y)$

i)

$$\forall x (C(x, z) \wedge R(x, y)) \rightarrow C(y, z)$$

1. **Variables Libres:** z,y de $C(x, z) \wedge R(x, y)$ y y,z de $C(y, z)$
Variables Ligadas: x de $C(x, z) \wedge R(x, y)$

2. EL alcance de $\forall x$ es $C(x, z) \wedge R(x, y)$

j)

$$\forall x \exists z I(x, z) \rightarrow C(z, y) \wedge D(y)$$

1. **Variables Libres:** z,y de $(C(z, y) \wedge D(y))$
Variables Ligadas: x de $I(x, z)$

2. EL alcance de $\forall x$ y de $\exists x$ es $I(x, z)$