Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estructuras Discretas

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Tarea 03: Circuitos y logica de primer orden.

Primer Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

Tarea 03: Circuitos y logica de primer orden.

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

10 de noviembre de 2024

1) Asumiendo los axiomas de un álgebra booleana A = {0,1,+,·} demostrar las siguientes propiedades:

a) Idempotencia: $x + x = x$ y $xx = x$.

b) Idempotencia de complemento: $(\bar{\bar{x}}) = x$.

c) Elemento dominante: $x + 1 = 1$ y $x0 = 0$.

d) Absorción: $x + xy = x$ y $x(x + y) = x$.

Dem a) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}(x + x) &= (x + x) \cdot 1\\ &= (x + x) \cdot (x + \bar{x})\\ &= x + x\bar{x}\\ &= x + 0\\ &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}xx &= xx + 0\\ &= xx + (x\bar{x})\\ &= x \cdot (x + \bar{x})\\ &= x \cdot 1\\ &= x\blacksquare\end{aligned}$$

Dem b) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

Supongamos $\bar{\bar{x}} \neq x$

$$x + \bar{x} = 1; x \cdot \bar{x} = 0$$

$$\bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1; \bar{x} \cdot \bar{\bar{x}} = 0$$

$$x + \bar{x} = \bar{x} + \bar{\bar{x}} = 1$$

Unicidad del complemento, x y son complemento de $\bar{x}$

$$\implies x = \bar{\bar{x}}\,!$$

$$\therefore \bar{\bar{x}} = x \blacksquare$$

Dem c) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}(x + 1) &= x + (x + \bar{x})\\ &= (x + x) + \bar{x}\\ &= x + \bar{x}\\ &= 1 \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x \cdot 0 &= x \cdot (x \cdot \bar{x})\\ &= (x \cdot x) \cdot \bar{x}\\ &= (x \cdot x) \cdot \bar{x}\\ &= x \cdot \bar{x}\\ &= 0 \blacksquare\end{aligned}$$

Dem d) : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x + xy &= x\\ (x + x)(x + y) &=\\ x(x + y) &=\\ x(1 \cdot (1 + y)) &=\\ x(1 \cdot 1) &=\\ x(1) &=\\ x &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Dem : Sea $x \in A$ un elemento del álgebra booleana

$$\begin{aligned}x(x + y) &= x\\ x \cdot x + x \cdot y &=\\ x + x \cdot y &=\\ x(1 + 1 \cdot y) &=\\ x(1) &=\\ x &= x \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio2

0.1. 2.Dibuja los circuitos lógicos para las siguientes expresiones:

(a) $xyz \oplus x\overline{y}z$

(b) $xy + x\overline{y}$

(c) $xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z}$

(d) $\overline{x} + \overline{y} + xyz$

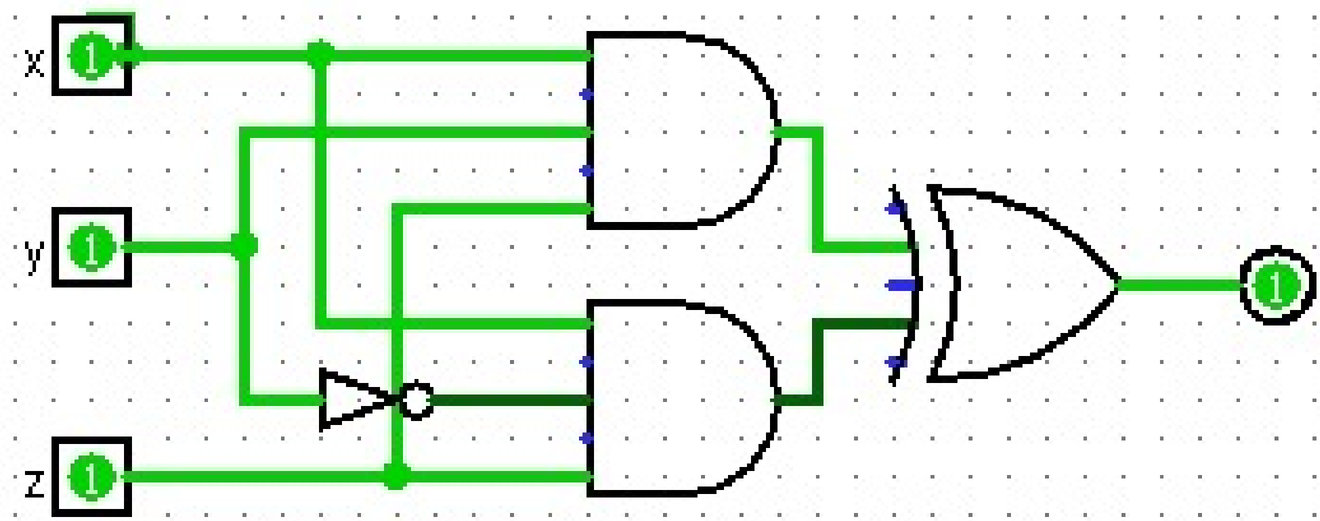


Figura 1: Circuito lógico para $xyz \oplus x\overline{y}z$

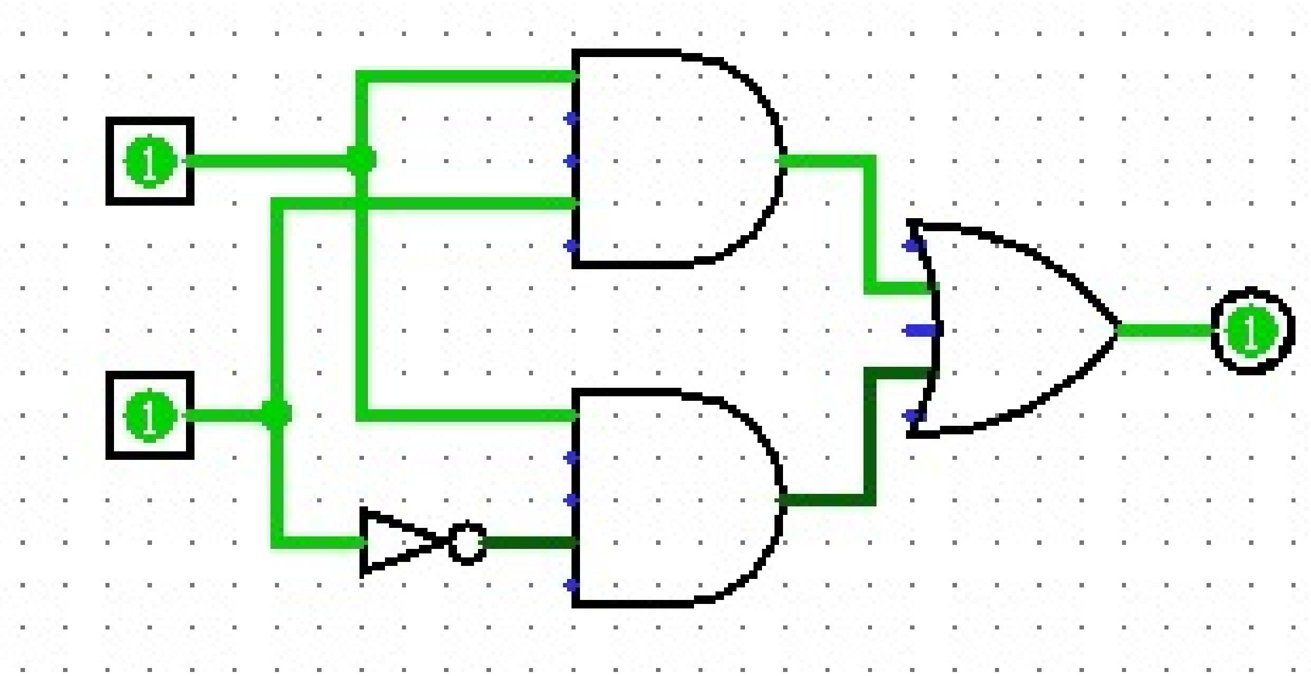


Figura 2: Circuito lógico para $xy + x\overline{y}$

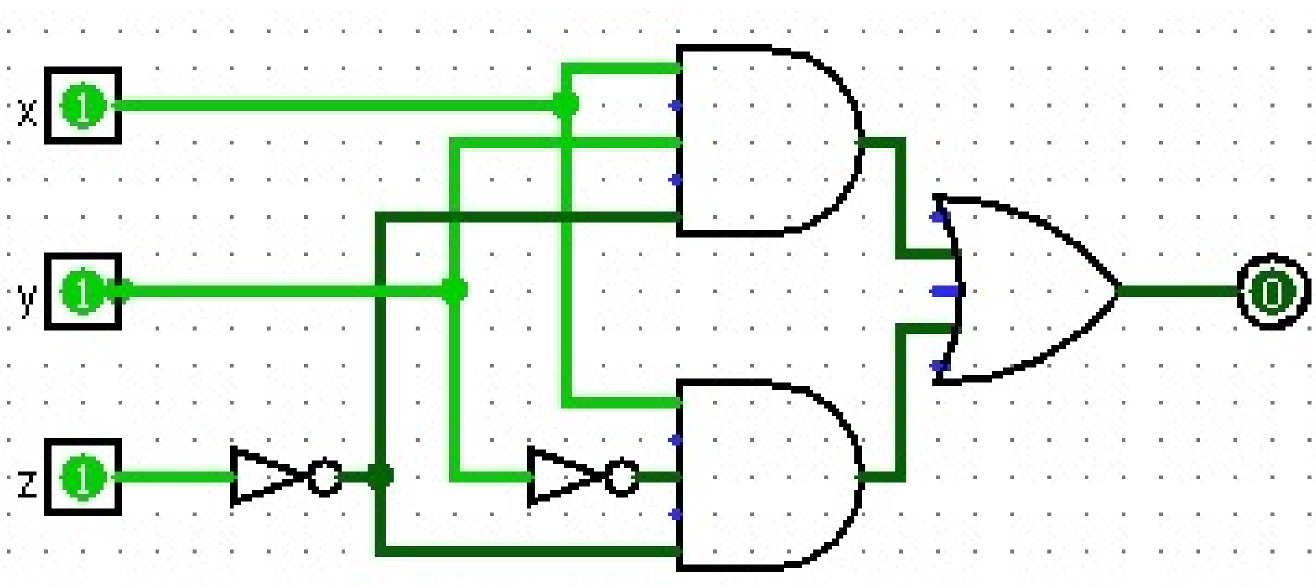


Figura 3: Circuito lógico para $xy\overline{z} + x\overline{yz}$

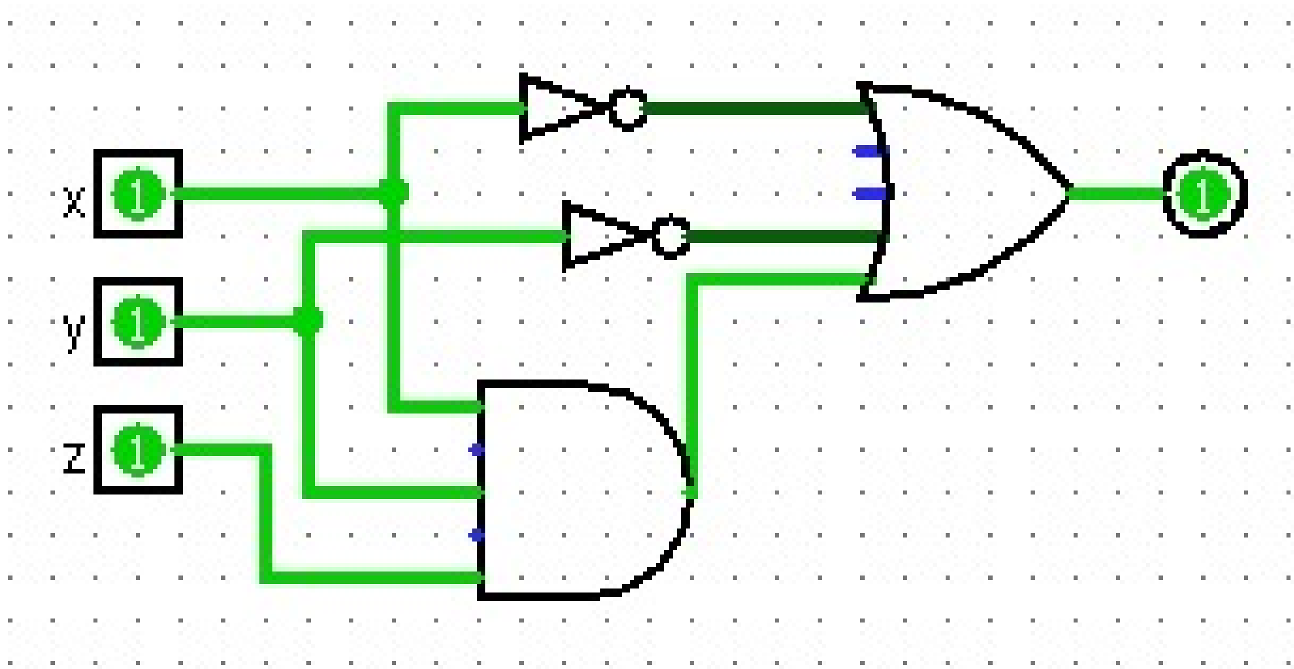


Figura 4: Circuito lógico para $\overline{x} + \overline{y} + xyz$

Ejercicio3

Utilizando mapas de Karnaugh, reducir las siguientes expresiones y dibujar los circuitos reducidos:

(a) $xy + x\overline{y}$

(b) $\overline{x}y + \overline{xy}$

(c) $xyz + \overline{x}yz$

(d) $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz}$

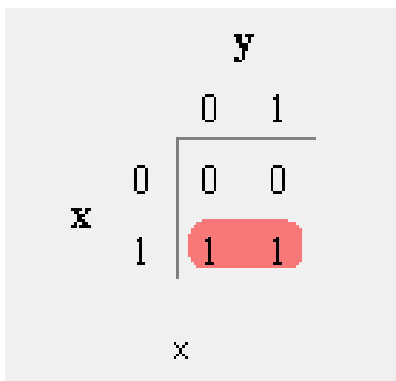
(e) $\overline{xy} + \overline{x}y + xy$

(f) $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

Soluciones

(a) $xy + x\overline{y}$

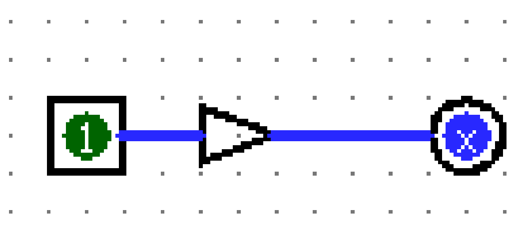
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

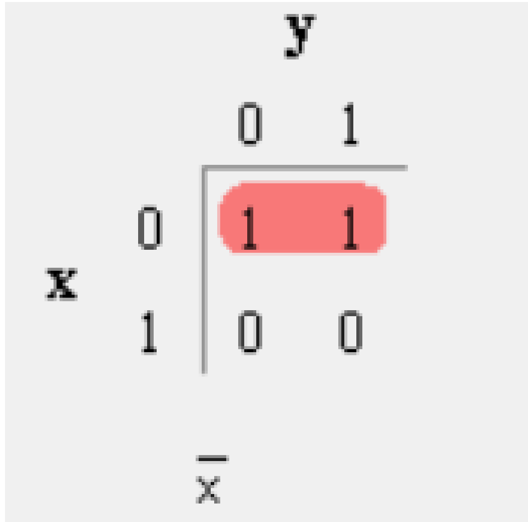
$$xy + x\overline{y} = x$$

- Circuito reducido:



(b) $\overline{x}y + \overline{xy}$

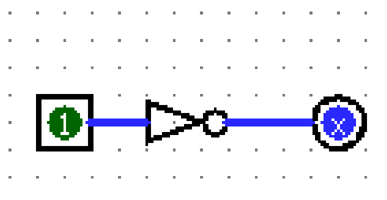
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

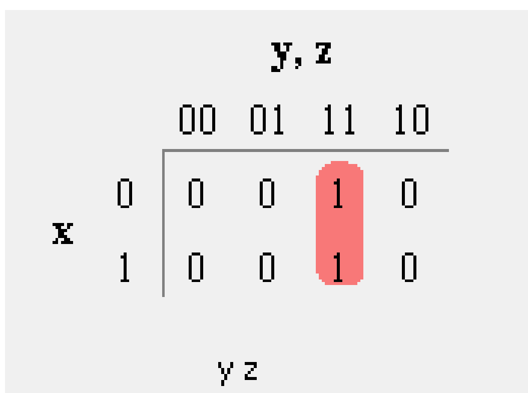
$$\overline{x}y + \overline{xy} = \overline{x}$$

- Circuito reducido:



(c) $xyz + \overline{x}yz$

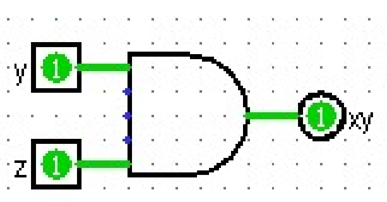
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

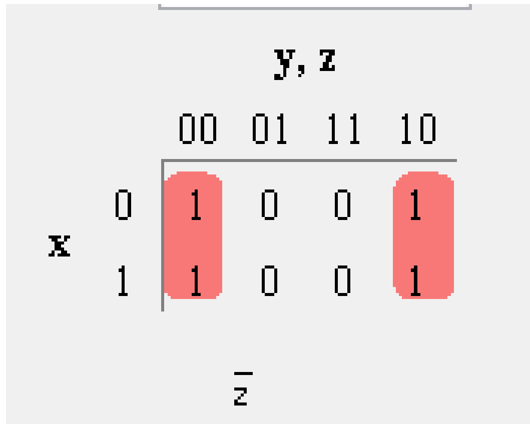
$$xyz + \overline{x}yz = yz$$

- Circuito reducido:



(d) $xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz}$

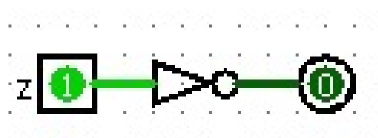
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

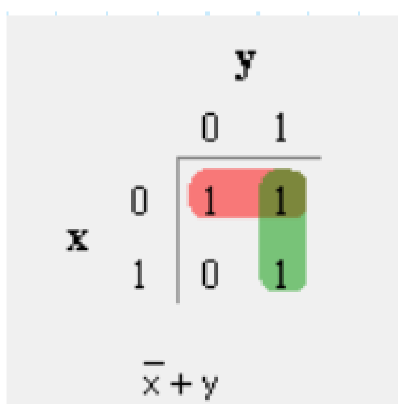
$$xy\overline{z} + x\overline{yz} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{xyz} = \overline{z}$$

- Circuito reducido:



(e) $\overline{xy} + \overline{x}y + xy$

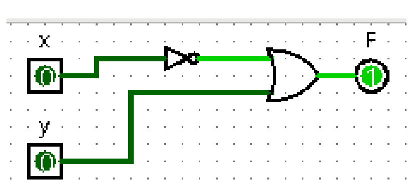
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

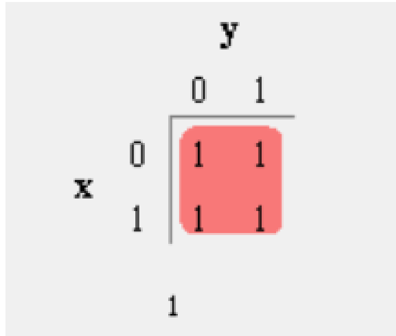
$$\overline{xy} + \overline{x}y + xy = \overline{x} + y$$

- Circuito reducido:



(f) $\overline{xy} + \overline{x}y + x + y$

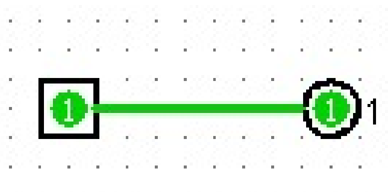
- Mapa de Karnaugh:



- Simplificación:

$$\overline{xy} + \overline{x}y + x + y = 1$$

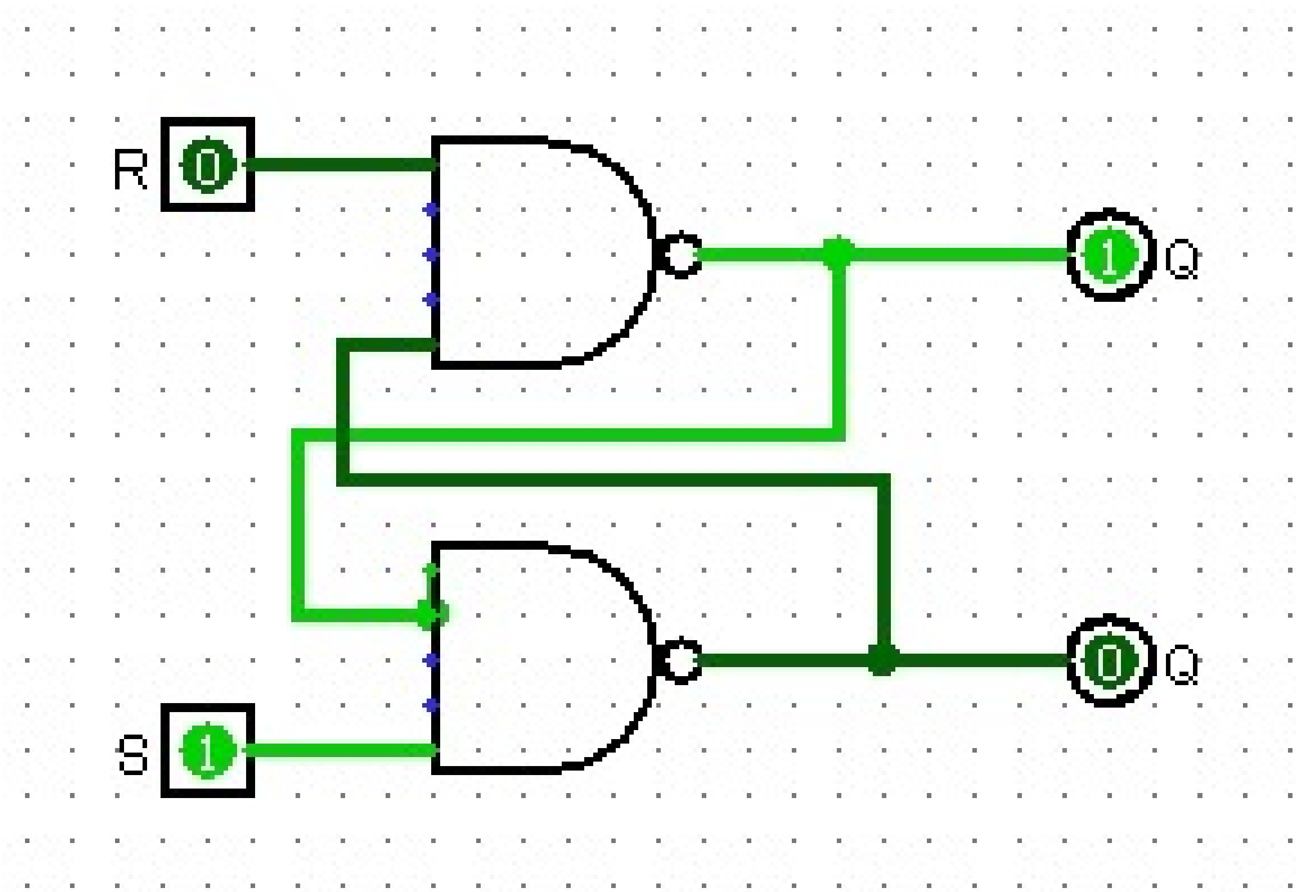
- Circuito reducido:



Ejercicio5

5. Disenar un circuito secuencial flip-flop SR, pero utilizando circuitos NAND y verificar que el resultado es el mismo que con puertas NOR.

1. Circuito Flip-Flop SR usando compuertas NAND:



Expresar las siguientes oraciones como fórmulas de la lógica de predicados; indicar las constantes, las variables, los cuantificadores y su alcance:

a) Hay algunos médicos que son odontologos.

b) Ninguna planta es mamífero o pez.

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.

f) Un estudiante reprobo el examen y abandono el curso

g) Los gatos son mamiferos.

h) Un perro mordio a María.

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamifero

a) Hay algunos médicos que son odontologos.
Variables: x es la variable
Constantes: $m =$ Médico, $o =$ Odontólogo
Funciones: $S(x, m) = x$ es Médico; $S(x, o) = x$ es Odontólogo
Cuantificadores: $\exists$ es el cuantificador
Expresión: $\exists x(S(x, m) \land S(x, o))$
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

b) Ninguna planta es mamífero o pez.
Variables: x es la variable
Constantes:
Funciones: $P(x) = x$ es planta; $M(x) = x$ es mamífero; $Pz(x) = x$ es pez.
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión $\forall x(P(x) \rightarrow \neg(M(x) \lor Pz(x)))$
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue

c) Cualquiera puede tomarle el pelo a la directora.
Variables: x, y
Constantes: $d = directora$
Funciones: $P(x, y) =$ x le toma el pelo a y
Cuantificadores: $\forall$ (para todo)
Alcance: incluye toda la expresión que le sigue
Expresión: $\forall x(P(x, d))$

d) Hay un abogado a quien cualquiera le toma el pelo
Variables: x, y
Constantes: NO hay
Funciones: $P(x, y) =$ x le toma el pelo a y; $A(y) =$ y es abogado
Cuantificadores: $\exists$ y $\forall$ son los cuantificadores
Expresión: $\exists y(A(y) \land \forall x P(x, y))$
Alcance: El alcance de $\exists$ es sobre todas la expresión y para $\forall$ es para la el predicado P

e) Cada uno de los estudiantes aprobo el examen con 10.
Variables: x, y
Constantes: $c = 10$
Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $A(x, c) = x$ aprobó el examen con c
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión: $\forall x(E(x) \land A(x, c))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión.

f) Un estudiante reprobo el examen y abandono el curso
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $E(x) = x$ es estudiante; $R(x) = x$ reprobo el examen; $A(x) = x$ abandono el curso
Cuantificadores: $\forall$ es el cuantificador
Expresión: $\forall x(E(x) \land R(x) \land A(x))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión

g) Los gatos son mamiferos.
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $M(x) = x$ son mamíferos, $G(x) = x$ es gato
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(G(x) \rightarrow M(x))$
Alcance: El alcance de $\forall$ es para toda la expresión

h) Un perro mordio a María
Variables: x, y
Constantes:$m =$ María
Funciones: $P(x) = x$ es perro; $M(x, m) = x$ mordió a María
Cuantificadores: $\exists$
Expresión: $\exists x(P(x) \land M(x, m))$
Alcance: El alcance de $\exists$ es para toda la expresión

i) Las novelas de Cervantes son buenas y divertidas
Variables: x
Constantes: $c =$ Cervantes
Funciones: $N(x, c) = x$ novela de Cervantes; $B(x) = x$ es buena; $D(x) = x$ es divertida
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(N(x, c) \to (B(x) \land D(x)))$
Alcance: El alcance de $\forall$ abarca toda la expresión.

j) Si todos los gatos son felinos, entonces todos los gatos son mamifero
Variables: x
Constantes: No hay
Funciones: $G(x) = x$ es gato; $F(x) = x$ es felino; $M(x) = x$ es mamífero
Cuantificadores: $\forall$
Expresión: $\forall x(G(x) \to F(x)) \to (\forall x(G(x) \to M(x)))$
Alcance: El alcance de $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \to F(x)$ y el alcance del segundo cuantificador $\forall x$ es la subexpresión $G(x) \to M(x)$