Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas 1

Licenciatura en Ciencias de la Computación

1ra lista de problemas

Primer Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

1ra lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

29 de agosto de 2024

Ejercicio 3

Convergencia de la Serie Geométrica

Problema: Demostrar que la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverge a $+\infty$ cuando $q \geq 1$.
Solución:
Serie geométrica general:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

Esta es una serie geométrica con razón q.

Condiciones de convergencia de una serie geométrica: Para que la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ converja, es necesario que $|q| < 1$. Si $|q| \geq 1$, la serie diverge. Esto se debe a que:

- Si $|q| < 1$, los términos q^k tienden a cero conforme k aumenta, y la suma total se aproxima a un valor finito.
- Si $|q| \geq 1$, los términos q^k no tienden a cero, lo que provoca que la serie no alcance un valor finito y, por lo tanto, diverge.

Caso $q \geq 1$:

- Si $q = 1$, la serie se convierte en:

  $$\sum_{k=1}^{\infty} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

  Claramente, esta serie suma infinitamente muchos unos, lo que implica que la serie diverge a $+\infty$.
- Si $q > 1$, los términos de la serie q^k crecen sin límite conforme k aumenta. Por lo tanto, la serie se comporta como:

  $$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \cdots$$

  Cada término es mayor que el anterior, lo que hace que la suma total también diverge a $+\infty$.

Conclusión: - Por lo tanto, si $q \geq 1$, la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ no converge, y en términos más precisos, diverge a $+\infty$.

b) Valores de q para los cuales la serie $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ converge

Análisis:
1. **Caso $q \leq 0$:**

- Para $q \leq 0$, el comportamiento de la serie depende del valor absoluto de q:
  - Si $-1 < q < 0$, la serie es geométrica y converge porque $|q| < 1$. Aquí, los términos q^k se alternan en signo y disminuyen en magnitud.
  - Si $q = -1$, la serie se convierte en:

    $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

    Esta es una serie alternante cuyos términos no tienden a cero, por lo tanto, no converge (es un caso de divergencia condicional).

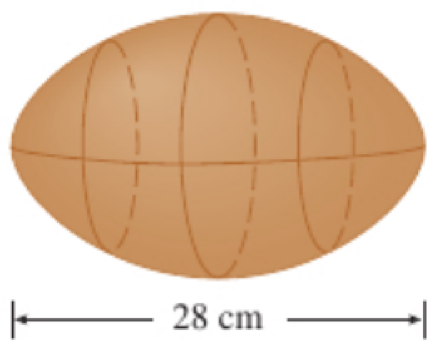
- Si $q \leq -1$, los términos q^k oscilan en magnitud (y posiblemente divergen si $q < -1$) o se repiten (en el caso de $q = -1$), lo que impide la convergencia.

Conclusión: - La serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ converge si y solo si $-1 < q < 1$.

Ejercicio 4

Un balón de futbol americano

En este ejercicio se trata de calcular aproximadamente el volumen V de un balón de football americano profesional suponiendo que su superficie se genera rotando, alrededor del eje horizontal, una curva y = y (x) que satisface que la longitud del eje entre las dos puntas del balón es de 28 cm y la circunferencia de la máxima sección circular transversal al eje mide 53 cm (véase la siguiente figura).



a) Rebane la mitad derecha del balón en 10 cilindros de grosor $\Delta x = 1.4$ cm, de manera que las rebanadas intersecten el eje x en los valores de la siguiente partición del intervalo $[0, 14]$

1) Muestre que la parábola es, aproximadamente, la gráfica de la función

$$y(x) = -0.043x^2 + 8.4352$$

definida para $-14 \leq x \leq 14$

- Sabemos que la Circunferencia $= 2\pi r \therefore r = \frac{53}{2\pi}$
- La fórmula de las cónicas para la parábola es $y(x) = ax^2 + bx + c$
- Sabemos que el radio de la circunferencia del balón es la longitud del radio cuando $x = 0$, queremos saber el valor de y para $x = 0$

$$\therefore y(0) = \frac{53}{2\pi} = a(0)^2 + b(0) + c = c$$
$$\Rightarrow c = \frac{53}{2\pi}$$

También conocemos dos puntos que pasan por la ecuación del balón y son los puntos extremos, para encontrar los valores de a, b sustituimos estos valores y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} y(14) = a(14)^2 + b(14) + c \\ y(-14) = a(-14)^2 + b(-14) + c \\ \hline \end{array} -$$

$$\begin{array}{c} 196a + c = 0 \\ +196a + c = 0 \\ \hline \end{array} -$$

$$392a + 2c \Rightarrow a = -\frac{2c}{392} = -\frac{c}{196}$$
$$\therefore y(x) = -\frac{c}{196}x^2 + c$$
$$\Rightarrow y(x) = -\frac{\frac{53}{2\pi}}{196}x^2 + \frac{53}{2\pi}$$

Simplificando tenemos que

$$y(x) \simeq -0.0430x^2 + 8.4352$$

Podemos expresar la función en términos de r_0, de esta manera podemos deducir el dominio de la función.

$$y(x) = -\frac{c}{196}x^2 + c$$
$$y(x) = -\frac{r_o}{196}x^2 + r_o, \text{donde } r_o = c$$

Igualamos a cero para determinar las raíces

$$-\frac{r_o}{196}x^2 + r_o = 0$$
$$-\frac{r_o}{196}x^2 = -r_o$$
$$-r_0x^2 = -r_0(196)$$
$$x^2 = \frac{-r_0(196)}{-r_0}$$
$$x = \pm\sqrt{196}$$
$$x = \pm 14$$
$$\therefore -14 \leq x \leq 14$$

estos puntos, como habíamos definido antes, son los puntos de corte del centro del balón, solo estamos definiendo, en este caso la mitad de arriba del balón para aproximar su volumen. Esto de ve reflejado con el coeficiente a negativo $(-a)$.

2) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor $\Delta x = 1.4cm$ y radios $y(x_k)$ cm para $k = 0, 1, 2, ..., 9$ es:

$$V \simeq 2 \ x \ 1825.5143 = 3651.0286cm^3$$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^{9} V_k$$
$$\text{donde: } V_k = \pi * {r_k}^2 * \Delta h$$
$$\Delta h = 1.4, \text{la altura de cada cilindro}$$

el valor de correspondencia para cada $x_k = \Delta h * k$, la hayamos sustituyendo en la fórmula $r_k = y(x_k) = y(x) \simeq -0.0430{x_k}^2 + 8.4352$. Decimos que

$$\sum_{k=0}^{9} V_k = \sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 \Delta h$$

Podemos decir que π y Δh son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} r_k$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (-0.0430 {x_k}^2 + 8.4352)^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
0	0	8.4352	71.15259904	312.9462072
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
				suma = 1825.5143 cm^3
				$V \simeq 2x1825.5143 = 3651.0286cm3$

Tabla 1: Tabla de suma de los factores x_k

Ya que solo calculamos los radios de la parte derecha del balón y considerando que es simétrico, el volumen de el lado derecho es el mismo que el del lado izquierdo, por lo tanto se multiplica por 2. Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor $\Delta x = 1.4$ cm y radios $y(x_k)$ cm para $k = 0, 1, ..., 9$ es:

$$V \simeq 2\ x\ 1825.5143 = 3651.0286cm^3$$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^{9} V_k$$

$$\text{donde: } V_k = \pi * {r_k}^2 * \Delta h$$

$$\Delta h = 1.4, \text{la altura de cada cilindro}$$

el valor de correspondencia para cada $x_k = \Delta h * k$, la hayamos sustituyendo en la fórmula $r_k = y(x_k) = y(x) \simeq -0.0430{x_k}^2 + 8.4352$. Decimos que

$$\sum_{k=0}^{9} V_k = \sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 \Delta h$$

Podemos decir que π y Δh son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} r_k$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (-0.0430 {x_k}^2 + 8.4352)^2$$

b) Suponga ahora que la curva $y = y(x)$ es la mitad superior de una elipse con centro en el origen, semieje horizontal $a = 14$ cm (sobre el eje x) y semieje vertical

$$b = 532\pi \simeq 8.4352cm(sobreelejey).$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
10	14	0.0072	5.184E-05	0.000228005
				suma = 1825.5143 cm^3
				$V \simeq 2x1825.5143 = 3651.0286cm3$

Tabla 2: Tabla de suma de los factores x_k

Partimos de la ecuación simétrica de la parábola.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definimos los vértices en $v(0,14)$ y $v'(0,-14)$, por definición sabemos que la mitad de la longitud del semieje mayor es a, entonces a=14, b es la mitad del semieje menor, el cual es el radio de nuestro balón, $\Rightarrow b = r_0 = \frac{53}{2\pi}$

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{{r_0}^2} = 1$$

Reducimos hasta despejar a y.

$$14^2{r_0}^2\left(\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{{r_0}^2}\right) = 1 * 14^2{r_0}^2$$
$$\frac{14^2{r_0}^2x^2}{14^2} + \frac{{r_0}^2 14^2 y^2}{{r_0}^2} = 14^2{r_0}^2$$
$$r_0x^2 + 14^2y^2 = 14^2{r_0}^2$$
$$14^2y^2 = 14^2{r_0}^2 - r_0x^2$$
$$y^2 = \frac{14^2{r_0}^2 - r_0x^2}{14^2}$$
$$y^2 = \frac{{r_0}^2}{14^2}(14^2 - x^2)$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{{r_0}^2}{14^2}(14^2 - x^2)}$$
$$y = \frac{r_0}{14} * \pm\sqrt{(14^2 - x^2)}$$
$$y = \frac{r_0}{14} * \pm\sqrt{196 - x^2}$$

Sustituyendo $r_0 = \frac{53}{2\pi}$ tenemos que

$$\frac{r_0}{14} = \frac{\frac{53}{2\pi}}{14} \simeq 0.6025 \therefore y(x) = 0.6025 \pm \sqrt{196 - x^2}$$

Podemos observar que x^2 solo puede valor, máximo 196 ya que la función no está definida para la raíz cuadrada de un número negativo. $\therefore -14 \leq x \leq 14$

d) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor $\Delta x = 1.4cm$ y radios $y(x_k)$ cm para$k = 0, 1, 2, ..., 9$ es:

$$V \simeq 2 \times 2237.4593 = 4474.9186cm3$$

Partimos de que

$$V_{total} = \sum_{k=0}^{9} V_k$$

donde V_k = a cada volumen de disco con índice k y el volumen se traduce como

$$V_k = \pi * \Delta h * {r_k}^2$$

y el la medida del radio r_k para cada cilindro circunscrito es el valor de $y(x_k)$, para $x_k = \Delta h * k$ y Δh es la altura correspondiente que es constante en cada cilindro.

Así denotamos que

$$\sum_{k=0}^{9} V_k = \sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 * \Delta h$$

donde π y Δh son siempre constantes, factorizamos

$$\sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 * \Delta h = \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} {r_k}^2$$

sustituyendo r_k por $y(x_k)$

$$V_{total} = \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} y(x_k)^2$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (0.6025\sqrt{196 - {x_k}^2})^2$$

así conseguimos la suma de los triangulo circunscritos para calcular el Balón de futbol.

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
0	0	8.435	71.149225	312.930636
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
				suma 2237.45404 cm^3

Tabla 3: Tabla de suma de los factores x_k

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2

$$\therefore V \simeq 2 \times 2237.4540 = 4474.90809\ cm3$$

a) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor $\Delta x = 1.4cm$ y radios $y(xk)$ cm para$k = 1, 2, ..., 10$ es:

$$V \simeq 2\Delta 1924.5279 = 3849.0558cm^3$$

Tenemos la misma primicia del anterior.

$$V \simeq \pi \Delta h \sum_{k=1}^{10} (0.6025\sqrt{196 - {x_k}^2})^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
10	14	0	0	0
				suma 1924.52341 cm^3

Tabla 4: Tabla de suma de los factores x_k

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2.

$$\therefore V \simeq 2 \times 1924.5279 = 3849.04682 cm3$$

Ejercicio 8

Un jugador de baseball

Un jugador de baseball batea la pelota a 3 ft de altura sobre el plato en dirección a la barda del jardín central que está a 400 ft de distancia de home y tiene 10 ft de altura. La pelota sale con rapidez de 115 $\frac{ft}{s}$ y un ángulo de elevación de 50° sobre la horizontal.

1) Sabemos que el vector de movimiento $\vec{v} = 115\frac{ft}{s}$ de la pelota se puede descomponer en dos direcciones de velocidad, movimiento rectilíneo y tiro vertical y caída libre ya que su comportamiento es en dos grados de libertad

$$r : [0, t] \to \mathbb{R}^2_{(x,y)}$$

$\therefore$ la componente horizontal del vector de la bola está representada por la formula del mov. rect. uniforme.$x(t) = v_x(t) = v_{0_x} \Rightarrow x(t) - x_0 = v_{0_x}(t) \therefore x(t) = v_{0_x}(t)$ Como el movimiento no es recto completamente, si no que tiene un ángulo de inclinación, requerimos del coseno para calcular la fracción de la velocidad que le corresponde.

$$\|\vec{vx}\| = \|\vec{v}\| cos\ \theta = 115 cos\ 50 = 73.91\frac{ft}{s}$$

2) La componente vertical del vector resultante está representada por la caída libre, la cual denotamos como $v(t) = gt$. El área bajo la recta de velocidad respecto al tiempo representa el desplazamiento del objeto

$$\therefore y(t) - y(0) = \frac{1}{2}gt^2$$

como el movimiento de caída crece un lapso de tiempo y luego decrece hasta tocar el suelo nuestra aceleración es negativa y, además, consideremos que el movimiento empieza a una distancia distinta de cero.

$$y(t) - y(0) = v_{0_y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

tomando en cuenta que la gravedad es de $32\frac{ft}{s^2}$

$$\Rightarrow y(t) = y(0) + v_{0_y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde v_{0_y} representa la velocidad respecto de la componente en y,

$$\therefore \|\vec{v_y}\| = 115 sen\theta 50 = 89.09\frac{ft}{s}$$

, sustituyendo tenemos

$$y(t) = 3 + 89.09\frac{ft}{s}t - 16t^2$$

donde 3 es la altura en pies donde el bat impacta con la pelota.

3) Sabemos que $x(t)$ es la fórmula de la distancia que tomará la bola respecto a cada segundo que dura el movimiento. Queremos averiguar cual sería el tiempo en el que la pelota está a 400 metros del bateador para poder determinar si la pelota sobrepasa la barrera

$$x(t) = 73.91\frac{ft}{s}t = 400ft \therefore t = \frac{400ft}{73.91\frac{ft}{s}} = 5.4119s$$

La pelota tarda $5.4119s$ en llegar a los $400ft$ de distancia. Ahora, para saber la posición de la pelota en ese tiempo tenemos que sustituir el valor del tiempo en la fórmula que nos dice a que altura llega la bola respecto a su desplazamiento.

$$y(5.4119) = 3 + 89.09\frac{ft}{s}(5.4119s) - 16(5.4119s)^2$$
$$y(5.4119) \simeq 11.1156ft$$

Concluimos que la pelota supera la barrera de $10ft$ de altura que está a $400ft$ de distancia ya que la pelota en ese mismo instante se encuentra a una altura superior que el de la barrera.

Consideremos que la bola choca con un obstáculo a $5ft$ de altura después de pasar la barrera, lo primero que queremos saber es cuando $y(t) = 5$

$$y(t) = 5 = y(t) = 3 + 89.09\frac{ft}{s}t - 16t^2$$
$$2 = 88.0951t - 16t^2$$
$$t = (88.0951 - 16t)t$$
$$t_1 = 2$$
$$t_2 : (88.0951 - 16t_2) = 2$$
$$-16t_2 = -86.0951$$
$$t_2 = \frac{-86.0951}{-16}$$
$$t_2 = 5.4839s$$

Tengamos en cuenta el movimiento parabólico que tiene la pelota, entonces pasa en 2 tiempos diferentes a los $5fts$, considerando el mayor de ellos (parte final del movimiento), tenemos que, para saber la posición a la que se encontraba la bola en ese tiempo usaremos la formula de posición $x(t)$.

$$x(t) = 73.9206t$$
$$x(5.4839) = 73.9206\frac{ft}{s}(5.4839s)$$
$$x(5.4839) \simeq 405.314ft$$

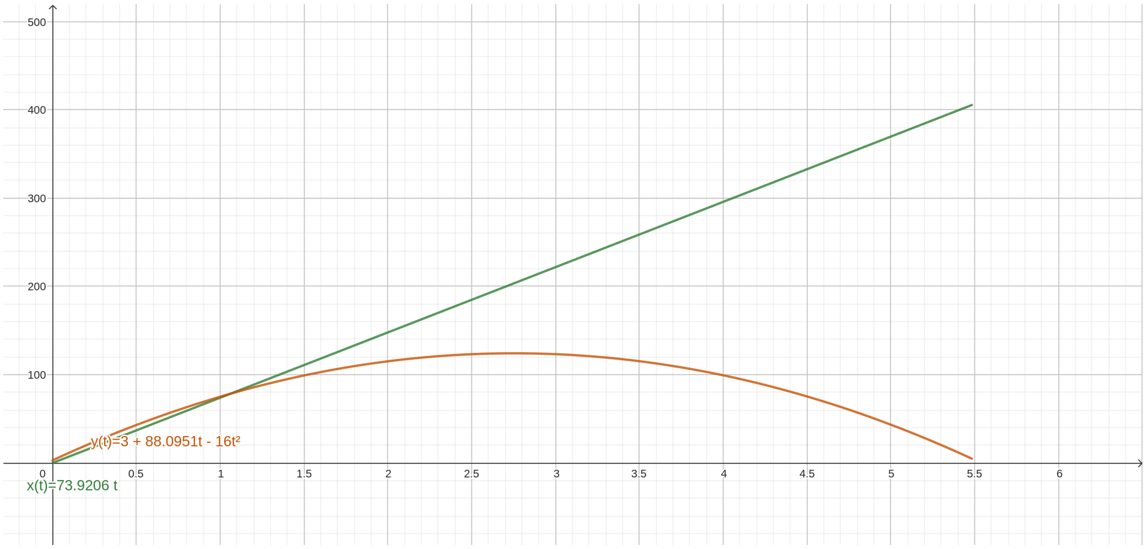
$\therefore$ Concluimos que el movimiento termina, o por lo menos no está definido después de $5.4839s$ en la distancia max. de $405.314ft$.

c) Para calcular el valor máximo de altura a la que se encuentra la bola en el movimiento tenemos que hacer uso de la primer derivada de la fórmula $y(t)$ que representa la posición de altura para cada valor del tiempo.

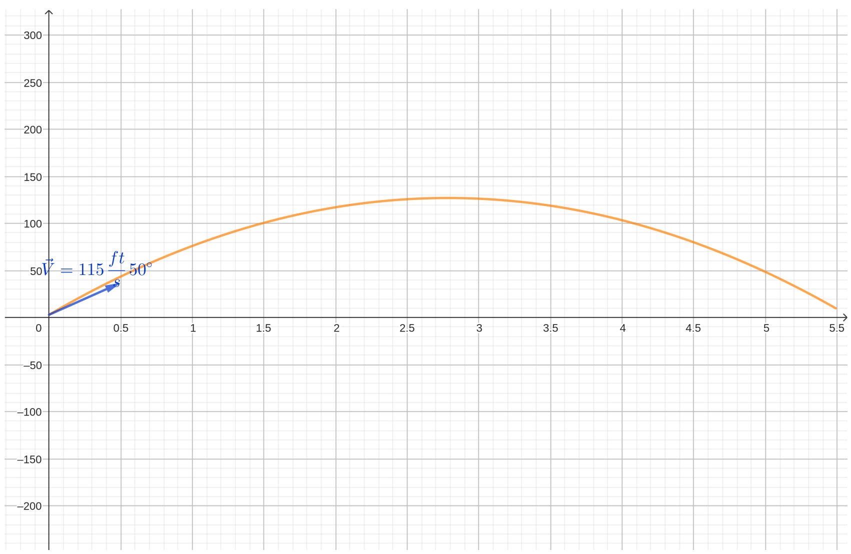
$$y'(t) = 88.0951t - 32t$$
$$y'(t) = 0 = 88.0951t - 32t$$
$$-32t = -88.0951$$
$$t = \frac{-88.0951}{-32}$$
$$t \simeq 2.7529s$$

$t \simeq 2.7529s$ es el valor aproximado del tiempo en el que se encuentra a la altura máxima, este valor lo sustituimos en la ecuación $y(t)$ para saber cual es la posición en ese tiempo.

$$y(2.7529s) = 3 + 89.09\frac{ft}{s}(2.7529s) - 16(2.7529s)^2 y(2.7529s) \simeq 124.2617ft$$



Trayectoria



Ejercicio 9

Pista de atletismo

a)Mostrar que es posible construir una pista de un cuarto de milla alrededor del campo de football. (Se sugiere calcular la longitud de la pista más corta que podría construirse alrededor del campo).

La pista se compone de dos secciones, la sección uno que serían las dos partes rectas y los dos semicírculos. La longitud mínima de las rectas de la pista deben medir lo mismo que el largo de la cancha que es $360ft$, por otra parte, ambos semicírculos, el diámetro mínimo lo consideramos como la anchura de la cancha que es de $160ft$ Sabemos que la circunferencia de un círculo se obtiene con la fórmula $C = \pi d$ donde d es el diámetro. Entonces, para poder construir la pista con la minima distancia es necesario sumar las dos longitudes a lo largo de la pista más la circunferencia de los dos semicírculos.

$$\Rightarrow L = \pi \cdot d + 2 \cdot 360$$

Podemos poner la formula completa ya que los dos semicírculos son iguales y forman un circulo completo de diámetro $160ft$. Sustituyendo:

$$L = \pi \cdot 160ft + \cdot 360ft$$
$$L \simeq 1222.6548ft$$

Podemos notar que el valor dado para construirla pista con la longitud minima constituida por dos semicírculos y dos lados rectos es menor al requerido $1222.6548ft < 1320ft$.

b) Sea L la longitud, en pies, de una de las partes rectas de la pista y sea x la distancia, en pies, entre la línea lateral del campo y una de las partes rectas de la pista. Muestre que L como función de x viene dada por:

$$L(x) = 660 - 80\pi - \pi x$$

y grafique esta regla de correspondencia para $0 \leq x \leq 20$.

Para expresar L en función de x $L(x)$ aumentamos en x el diámetro de los semicírculos de la función de tal manera que: diámetro

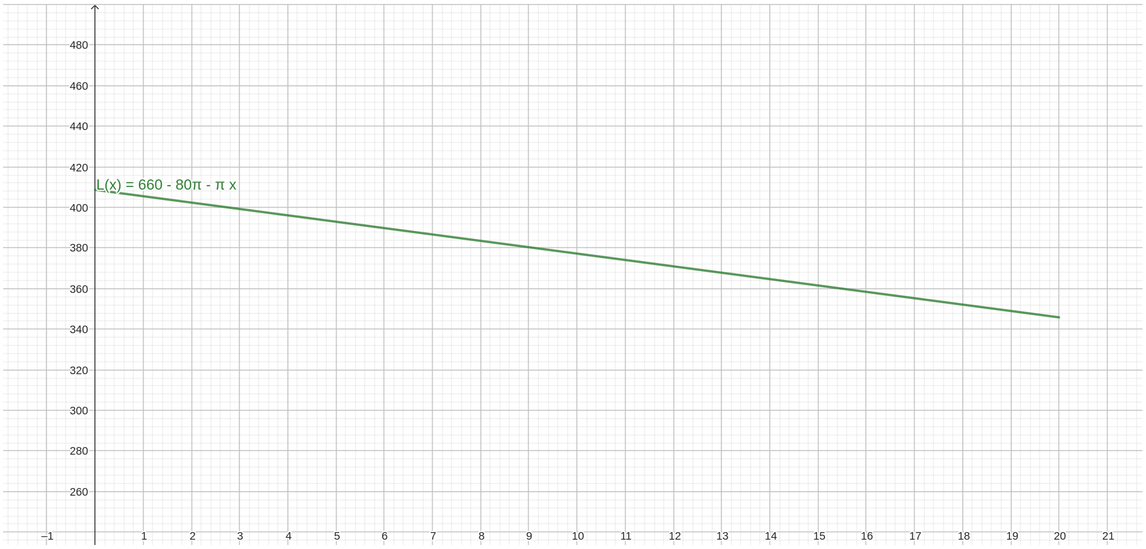
$$= 160 + x$$

Ahora calculamos la circunferencia $c = \pi * diametro \therefore c = \pi * (160 + x)$

Sea L la longitud de los lados rectos para las cuales queremos expresar la variabilidad de su comportamiento en función de x. Entonces queremos saber en que x el valor será de la pista será $1320fts$ en la suma de las longitudes.

$$(160ft + x)\pi + 2L = 1320ft$$
$$\pi \cdot 160ft + \pi \cdot x + 2L = 1320ft$$
$$2L = 1320ft - 160\pi ft - \pi x$$
$$L = \frac{1320ft - 160\pi ft - \pi x}{2}$$
$$L = 660 - 80\pi - \pi x$$

$$\therefore L(x) = 660 - 80\pi - \pi x$$



Con base en esta gráfica:

1) Estime la mínima longitud de la parte recta de la pista y, luego, muestre que el valor de x para el que ésta ocurre es aproximadamente 15.49 ft.

Tomando en cuenta que la longitud mínima que puede tomar la pista es de 360 debido a que es la misma longitud que mide el campo de football, queremos saber el valor de separación entre el campo y la pista para que la longitud total de la pista sea $\frac{1}{4}$ de milla $= 1320ft$

$$360 = 660 - 80\pi - \pi x$$
$$360 - 660 + 80\pi = -\pi x$$
$$\frac{360 - 660 + 80\pi}{-\pi} = x$$
$$\therefore x \simeq 15.49ft$$

$15.49ft$ debe ser la medida aproximada de la distancia entre la pista y el campo para que la pista tenga una Longitud total de $1320ft$.

2) Estime la máxima longitud de la parte recta de la pista y luego, muestre que el valor de L para el que ésta ocurre es aproximadamente 408.67 ft.

El máximo valor de de la longitud de la parte recta debe ser cuando no hay separación entre el campo de fútbol y la pista, por tanto, debemos sustituir para $L(0)$.

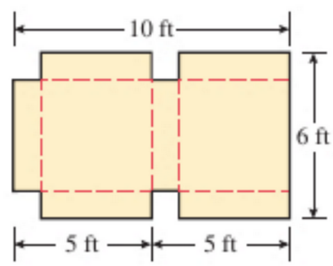
$$L(0) = 660 - 20\pi - \pi(0)$$
$$L(0) \simeq 408.67ft$$

$\therefore$ La longitud máxima de la parte recta de la pista debe medir $408.67ft$ para que la longitud total de la pista sea de $\frac{1}{4}$ de milla $= 1320fts$

Ejercicio 11

Caja con tapa superior

11. De un pedazo rectangular de cartón de 6 ft pot 10 ft se va a fabricar ***una caja con tapa superior*** doblando a lo largo de las líneas punteadas, cortando cuatro cuadrados del mismo tamaño (véase la figura 1) y plegando dentro de la caja las dos pestañas extras.



a) Hallar una fórmula que exprese el volumen V de la caja como función de la longitud x de los lados de los cuadrados que se cortan.

$$V = (largo)(ancho)(alto)$$

- $largo = 5 - x$
- $ancho = 6 - 2x$
- $alto = x$

$$V(x) = (5 - x)(6 - 2x)(x)$$
$$V(x) = (30 - 10x - 6x + 2x^2)(x)$$
$$V(x) = (30 - 16x + 2x^2)(x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 16x^2 + 30x$$

Fórmula para el volumen en función de x: $\underline{V(x) = 2x^3 - 16x^2 + 30x \text{ ft}^3}$

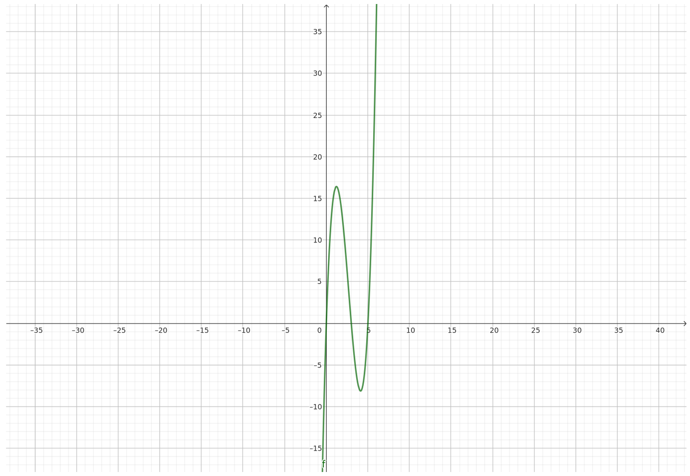
b) Describa, mediante una desigualdad que acote los posibles valores de x, el dominio de definición de a función V = V (x) del inciso anterior.

Dominio Natural de V(x): R
Dominio de Definición de V(x): $0 < x < 3$

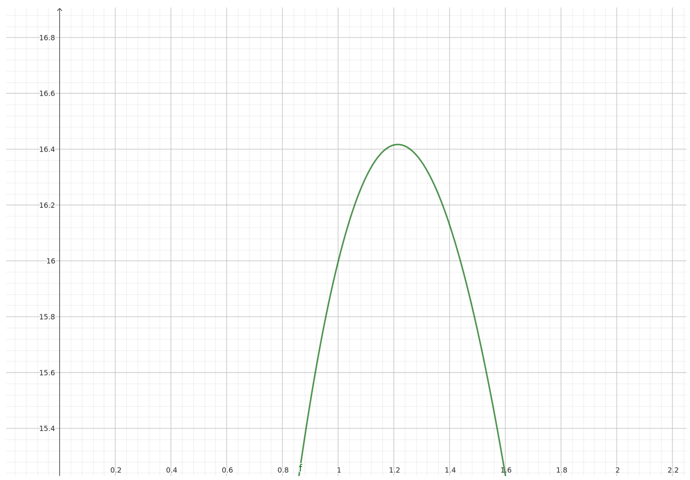
- x debe ser mayor de 0 para que pueda doblar y formar la caja. $x > 0$
- x debe ser menor de 3 o no podría haber 2x en el lado de 6 ft. $x < 3$

Dom. Definición: $\underline{0 < x < 3}$

c) Usar la gráfica de V = V(x) para dar valores aproximados de las dmonsiones de la caja de máximo volumen.



Gráfica de $V(x) = 2x^3 - 16x^2 + 30x$



Valores Máximos que toma el volumen:
Cuando x se aproxima a 1.2137
$Vol.Max. \approx 16.4176 ft^3$

Ejercicio 13

Modelo de Crecimiento Poblacional

Introducción

Se presenta un modelo matemático para describir el crecimiento de una población de borregas, dado por la siguiente función: * $N(t)$ representa el número de borregas en el tiempo t. * t es el tiempo en años.

Análisis Gráfico

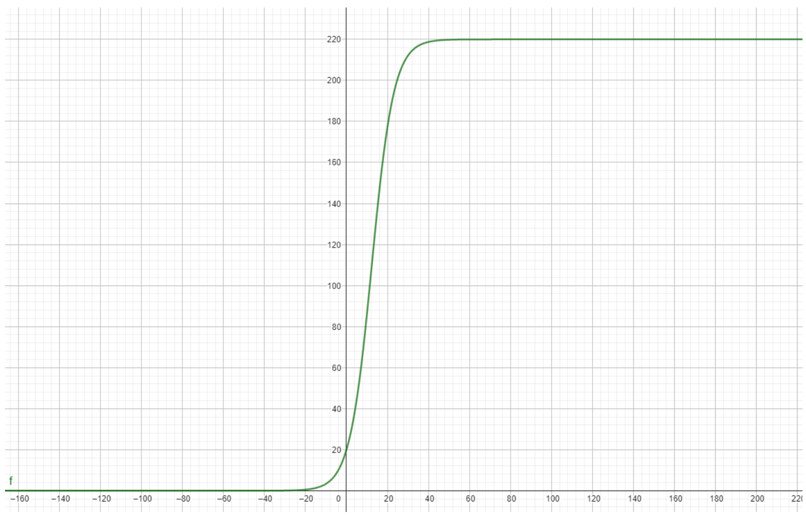


Figura 1: Gráfica de la población de borregas en función del tiempo.

La gráfica muestra una curva de crecimiento logístico, típica de poblaciones con recursos limitados.

Cálculos y Resultados

Partimos de la ecuación:

$$80 = \frac{220}{1 + 10 \cdot e^{-0.1863t}}$$

Despejamos t:

$$80 \cdot \left(1 + 10 \cdot e^{-0.1863t}\right) = 220$$

$$1 + 10 \cdot e^{-0.1863t} = \frac{220}{80}$$

$$10 \cdot e^{-0.1863t} = \frac{220}{80} - 1$$

$$e^{-0.1863t} = \frac{\frac{220}{80} - 1}{10}$$

$$-0.1863t = \ln\left(\frac{\frac{220}{80} - 1}{10}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\frac{220}{80}-1}{10}\right)}{-0.1863}$$

Calculando t, obtenemos que el tiempo mínimo necesario para que la población sea autosuficiente (es decir, alcance los 80 individuos) es aproximadamente 9.36 años. Esto confirma que el programa de repoblación debe durar al menos ese tiempo.

c) Determinar la capacidad máxima de borregos que puede albergar el área protegida

Para encontrar la capacidad máxima, calculamos el límite de $N(t)$ cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{220}{1 + 10 \cdot e^{-0.1863\cdot\infty}}$$

Dado que $e^{-0.1863\cdot\infty}$ tiende a cero, la expresión se simplifica a:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{220}{1+0} = 220$$

Esto significa que la capacidad máxima de borregos que puede albergar el área protegida es de 220 individuos.

Resumen

- **Tiempo mínimo para autosuficiencia**: Se necesitan al menos 9.36 años para que la población alcance los 80 individuos.
- **Capacidad máxima**: El área protegida puede albergar un máximo de 220 borregos cimarrones según el modelo.

Conclusiones La población de borregas sigue un patrón de crecimiento logístico, alcanzando una capacidad de carga de 220 individuos. El modelo matemático proporciona una herramienta útil para predecir el crecimiento de la población y tomar decisiones de manejo.