



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS APLICADAS 1

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

# 1RA LISTA DE PROBLEMAS

*Primer Parcial*

Autores:

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo

Villalobos Juárez Gontran Eliut

Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024



## 1ra lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo  
Villalobos Juárez Gontran Eliut  
Treviño Puebla Héctor Jerome

28 de agosto de 2024



# Un balón de futbol americano

## Un balón de futbol americano

En este ejercicio se trata de calcular aproximadamente el volumen  $V$  de un balón de football americano profesional suponiendo que su superficie se genera rotando, alrededor del eje horizontal, una curva  $y = y(x)$  que satisface que la longitud del eje entre las dos puntas del balón es de 28 cm y la circunferencia de la máxima sección circular transversal al eje mide 53 cm (véase la siguiente figura).

a) Rebane la mitad derecha del balón en 10 cilindros de grosor  $\Delta x = 1.4$  cm, de manera que las rebanadas intersecten el eje  $x$  en los valores de la siguiente partición del intervalo  $[0, 14]$  1) Muestre que la parábola es, aproximadamente, la gráfica de la función

$$y(x) = -0.043x^2 + 8.4352$$

definida para  $-14 \leq x \leq 14$

- Sabemos que la Circunferencia  $= 2\pi r \therefore r = \frac{53}{2\pi}$
- la fórmula de las cónicas para la parábola es  $y(x) = ax^2 + bx + c$
- sabemos que el radio de la circunferencia del balón es la longitud del radio cuando  $x = 0$ , queremos saber el valor de  $y$  para  $x = 0$

$$\begin{aligned}\therefore y(0) &= \frac{53}{2\pi} = a(0)^2 + b(0) + c = c \\ \Rightarrow c &= \frac{53}{2\pi}\end{aligned}$$

También conocemos dos puntos que pasan por la ecuación del balón y son los puntos extremos, para encontrar los valores de  $a, b$  sustituimos estos valores y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}y(14) &= a(14)^2 + b(14) + c \\ y(-14) &= a(-14)^2 + b(-14) + c \\ \hline 196a + c &= 0 \\ +196a + c &= 0 \\ \hline 392a + 2c &\Rightarrow a = -\frac{2c}{392} = -\frac{c}{196} \\ \therefore y(x) &= -\frac{c}{196}x^2 + c \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{\frac{53}{2\pi}}{196}x^2 + \frac{53}{2\pi}\end{aligned}$$

Simplificando tenemos que

$$y(x) \simeq -0.0430x^2 + 8.4352$$

Podemos expresar la función en términos de  $r_0$ , de esta manera podemos deducir el dominio de la función.

$$y(x) = -\frac{c}{196}x^2 + c$$

$$y(x) = -\frac{r_o}{196}x^2 + r_o, \text{ donde } r_o = c$$

Iguualamos a cero para determinar las raices

$$-\frac{r_o}{196}x^2 + r_o = 0$$

$$-\frac{r_o}{196}x^2 = -r_o$$

$$-r_o x^2 = -r_o(196)$$

$$x^2 = \frac{-r_o(196)}{-r_o}$$

$$x = \pm\sqrt{196}$$

$$x = \pm 14$$

$$\therefore -14 \leq x \leq 14$$

estos puntos, como habíamos definido antes, son los puntos de corte del centro del balón, solo estamos definiendo, en este caso la mitad de arriba del balón para aproximar su volumen. Esto de ve reflejado con el coeficiente  $a$  negativo ( $-a$ ).

2) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor  $\Delta x = 1.4\text{cm}$  y radios  $y(x_k)$  cm para  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$  es:

$$V \simeq 2 \times 1825.5143 = 3651.0286\text{cm}^3$$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^9 V_k$$

donde:  $V_k = \pi * r_k^2 * \Delta h$   
 $\Delta h = 1.4$ , la altura de cada cilindro

el valor de correspondencia para cada  $x_k = \Delta h * k$ , la hayamos sustituyendo en la fórmula  $r_k = y(x_k) = y(x) \simeq -0.0430x_k^2 + 8.4352$ . Decimos que

$$\sum_{k=0}^9 V_k = \sum_{k=0}^9 \pi * r_k^2 \Delta h$$

Podemos decir que  $\pi$  y  $\Delta h$  son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 r_k$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 (-0.0430x_k^2 + 8.4352)^2$$

Ya que solo calculamos los radios de la parte derecha del balón y considerando que es simétrico, el volumen de el lado derecho es el mismo que el del lado izquierdo, por lo tanto se multiplica por 2. Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor  $\Delta x = 1.4$  cm y radios  $y(x_k)$  cm para  $k = 0, 1, \dots, 9$  es:

$$V \simeq 2 \times 1825.5143 = 3651.0286\text{cm}^3$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
0	0	8.4352	71.15259904	312.9462072
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
suma = 1825.5143 $cm^3$				
$V \simeq 2x1825.5143 = 3651.0286cm^3$				

Tabla 1: Tabla de suma de los factores  $x_k$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^9 V_k$$

$$\text{donde: } V_k = \pi * r_k^2 * \Delta h$$

$\Delta h = 1.4$ , la altura de cada cilindro

el valor de correspondencia para cada  $x_k = \Delta h * k$ , la hayamos sustituyendo en la fórmula  $r_k = y(x_k) = y(x) \simeq -0.0430x_k^2 + 8.4352$ . Decimos que

$$\sum_{k=0}^9 V_k = \sum_{k=0}^9 \pi * r_k^2 \Delta h$$

Podemos decir que  $\pi$  y  $\Delta h$  son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$\begin{aligned} &= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 r_k^2 \\ &= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 (-0.0430x_k^2 + 8.4352)^2 \end{aligned}$$

b) Suponga ahora que la curva  $y = y(x)$  es la mitad superior de una elipse con centro en el origen, semieje horizontal  $a = 14$  cm (sobre el eje x) y semieje vertical

$$b = 532\pi \simeq 8.4352cm(\text{sobre el eje } y).$$

Partimos de la ecuación simétrica de la parábola.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definimos los vértices en  $v(0, 14)$  y  $v'(0, -14)$ , por definición sabemos que la mitad de la longitud del semieje mayor es  $a$ , entonces  $a=14$ ,  $b$  es la mitad del semieje menor, el cual es el radio de nuestro balón,  $\Rightarrow b = r_0 = \frac{53}{2\pi}$

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{r_0^2} = 1$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
10	14	0.0072	5.184E-05	0.000228005
suma = 1825.5143 $cm^3$				
$V \simeq 2 \times 1825.5143 = 3651.0286 cm^3$				

Tabla 2: Tabla de suma de los factores  $x_k$ 

Reducimos hasta despejar a y.

$$\begin{aligned}
14^2 r_0^2 \left( \frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{r_0^2} \right) &= 1 * 14^2 r_0^2 \\
\frac{14^2 r_0^2 x^2}{14^2} + \frac{r_0^2 14^2 y^2}{r_0^2} &= 14^2 r_0^2 \\
r_0 x^2 + 14^2 y^2 &= 14^2 r_0^2 \\
14^2 y^2 &= 14^2 r_0^2 - r_0 x^2 \\
y^2 &= \frac{14^2 r_0^2 - r_0 x^2}{14^2} \\
y^2 &= \frac{r_0^2}{14^2} (14^2 - x^2) \\
y &= \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{14^2} (14^2 - x^2)} \\
y &= \frac{r_0}{14} * \pm \sqrt{(14^2 - x^2)} \\
y &= \frac{r_0}{14} * \pm \sqrt{196 - x^2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $r_0 = \frac{53}{2\pi}$  tenemos que

$$\frac{r_0}{14} = \frac{\frac{53}{2\pi}}{14} \simeq 0.6025 \therefore y(x) = 0.6025 \pm \sqrt{196 - x^2}$$

Podemos observar que  $x^2$  solo puede valor, máximo 196 ya que la función no está definida para la raíz cuadrada de un número negativo.  $\therefore -14 \leq x \leq 14$

d) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor  $\Delta x = 1.4cm$  y radios  $y(x_k)$  cm para  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$  es:

$$V \simeq 2 \times 2237.4593 = 4474.9186 cm^3$$

Partimos de que

$$V_{total} = \sum_{k=0}^9 V_k$$

donde  $V_k$  = a cada volumen de disco con índice k y el volumen se traduce como

$$V_k = \pi * \Delta h * r_k^2$$

y el la medida del radio  $r_k$  para cada cilindro circunscrito es el valor de  $y(x_k)$ , para  $x_k = \Delta h * k$  y  $\Delta h$  es la altura correspondiente que es constante en cada cilindro.



Así denotamos que

$$\sum_{k=0}^9 V_k = \sum_{k=0}^9 \pi * r_k^2 * \Delta h$$

donde  $\pi$  y  $\Delta h$  son siempre constantes, factorizamos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^9 \pi * r_k^2 * \Delta h &= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 r_k^2 \\ &\text{sustituyendo } r_k \text{ por } y(x_k) \\ V_{total} &= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 y(x_k)^2 \\ &= \pi \Delta h \sum_{k=0}^9 (0.6025 \sqrt{196 - x_k^2})^2 \end{aligned}$$

así conseguimos la suma de los triangulo circunscritos para calcular el Balón de futbol.

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
0	0	8.435	71.149225	312.930636
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
suma 2237.45404 $cm^3$				

Tabla 3: Tabla de suma de los factores  $x_k$

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2

$$\therefore V \simeq 2 \times 2237.4540 = 4474.90809 \text{ cm}^3$$

a) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor  $\Delta x = 1.4 \text{ cm}$  y radios  $y(x_k)$  cm para  $k = 1, 2, \dots, 10$  es:

$$V \simeq 2\Delta 1924.5279 = 3849.0558 \text{ cm}^3$$

Tenemos la misma primicia del anterior.

$$V \simeq \pi \Delta h \sum_{k=1}^{10} (0.6025 \sqrt{196 - x_k^2})^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
10	14	0	0	0
suma 1924.52341 $cm^3$				

Tabla 4: Tabla de suma de los factores  $x_k$

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2.

$$\therefore V \simeq 2 \times 1924.5279 = 3849.04682 cm^3$$

# Un jugador de baseball

## Un jugador de baseball

Un jugador de baseball batea la pelota a 3 ft de altura sobre el plato en dirección a la barda del jardín central que está a 400 ft de distancia de home y tiene 10 ft de altura. La pelota sale con rapidez de  $115 \frac{ft}{s}$  y un ángulo de elevación de  $50^\circ$  sobre la horizontal.

1) Sabemos que el vector de movimiento  $\vec{v} = 115 \frac{ft}{s}$  de la pelota se puede descomponer en dos direcciones de velocidad, movimiento rectilíneo y tiro vertical y caída libre ya que su comportamiento es en dos grados de libertad

$$r : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}_{(x,y)}^2$$

$\therefore$  la componente horizontal del vector de la bola está representada por la fórmula del mov. rect. uniforme.  $x(t) = v_x(t) = v_{0_x} \Rightarrow x(t) - x_0 = v_{0_x}(t) \therefore x(t) = v_{0_x}(t)$  Como el movimiento no es recto completamente, si no que tiene un ángulo de inclinación, requerimos del coseno para calcular la fracción de la velocidad que le corresponde.

$$\|\vec{v}_x\| = \|\vec{v}\| \cos \theta = 115 \cos 50 = 73.91 \frac{ft}{s}$$

2) La componente vertical del vector resultante está representada por la caída libre, la cual denotamos como  $v(t) = gt$ . El área bajo la recta de velocidad respecto al tiempo representa el desplazamiento del objeto

$$\therefore y(t) - y(0) = \frac{1}{2}gt^2$$

como el movimiento de caída crece un lapso de tiempo y luego decrece hasta tocar el suelo nuestra aceleración es negativa y, además, consideremos que el movimiento empieza a una distancia distinta de cero.

$$y(t) - y(0) = v_{0_y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

tomando en cuenta que la gravedad es de  $32 \frac{ft}{s^2}$

$$\Rightarrow y(t) = y(0) + v_{0_y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde  $v_{0_y}$  representa la velocidad respecto de la componente en y,

$$\therefore \|\vec{v}_y\| = 115 \sin 50 = 89.09 \frac{ft}{s}$$

, sustituyendo tenemos

$$y(t) = 3 + 89.09 \frac{ft}{s}t - 16t^2$$

donde 3 es la altura en pies donde el bat impacta con la pelota.

3) Sabemos que  $x(t)$  es la fórmula de la distancia que tomará la bola respecto a cada segundo que dura el movimiento. Queremos averiguar cuál sería el tiempo en el que la pelota está a 400 metros del bateador para poder determinar si la pelota sobrepasa la barrera

$$x(t) = 73.91 \frac{ft}{s}t = 400 ft \therefore t = \frac{400 ft}{73.91 \frac{ft}{s}} = 5.4119 s$$

La pelota tarda  $5.4119s$  en llegar a los  $400ft$  de distancia. Ahora, para saber la posición de la pelota en ese tiempo tenemos que sustituir el valor del tiempo en la fórmula que nos dice a que altura llega la bola respecto a su desplazamiento.

$$y(5.4119) = 3 + 89.09 \frac{ft}{s} (5.4119s) - 16(5.4119s)^2$$

$$y(5.4119) \simeq 11.1156ft$$

Concluimos que la pelota supera la barrera de  $10ft$  de altura que está a  $400ft$  de distancia ya que la pelota en ese mismo instante se encuentra a una altura superior que el de la barrera.

Consideremos que la bola choca con un obstaculo a  $5ft$  de altura despues de pasar la barrera, lo primero que queremos saber es cuando  $y(t) = 5$

$$y(t) = 5 = y(t) = 3 + 89.09 \frac{ft}{s} t - 16t^2$$

$$2 = 88.0951t - 16t^2$$

$$t = (88.0951 - 16t)t$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 : (88.0951 - 16t_2) = 2$$

$$-16t_2 = -86.0951$$

$$t_2 = \frac{-86.0951}{-16}$$

$$t_2 = 5.4839s$$

Tengamos en cuenta el movimeinto parabólico que tiene la pelota, entonces pasa en 2 tiempos diferentes a los  $5fts$ , considerando el mayor de ellos (parte final del movimiento), tenemos que, para saber la posición a la que se encntraba la bola en ese tiempo usaremos la formula de posición  $x(t)$ .

$$x(t) = 73.9206t$$

$$x(5.4839) = 73.9206 \frac{ft}{s} (5.4839s)$$

$$x(5.4839) \simeq 405.314ft$$

$\therefore$  Concluimos que el movimiento terminina, o por lo menos no está definido despues de  $5.4839s$  en la distancia max. de  $405.314ft$ .

c) Para calcular el valor máximo de altura a la que se encuentra la bola en el movimiento tenemos que hacer uso de la primer derivada de la fórmula  $y(t)$  que representa la posición de altura para cada valor del tiempo.

$$y'(t) = 88.0951t - 32t$$

$$y'(t) = 0 = 88.0951t - 32t$$

$$-32t = -88.0951$$

$$t = \frac{-88.0951}{-32}$$

$$t \simeq 2.7529s$$

$t \simeq 2.7529s$  es el valor aproximado del tiempo en el que se encuentra a la altura máxima, este valor lo sustituimos en la ecuación  $y(t)$  para saber cual es la posición en ese tiempo.

$$y(2.7529s) = 3 + 89.09 \frac{ft}{s} (2.7529s) - 16(2.7529s)^2 y(2.7529s) \simeq 124.2617ft$$

# Pista de carreras

## Pista de carreras

a)Mostrar que es posible construir una pista de un cuarto de milla alrededor del campo de football. (Se sugiere calcular la longitud de la pista más corta que podría construirse alrededor del campo).

La pista se compone de dos secciones, la sección uno que serían las dos partes rectas y los dos semicirculos. La longitud mínima de las rectas de la pista deben medir lo mismo que el largo de la cancha que es  $360ft$ , por otra parte, ambos semicirculos, el diametro minimo lo consideramos como la anchura de la cancha que es de  $160ft$ . Sabemos que la circunferencia de un círculo se obtiene con la fórmula  $C = \pi d$  donde  $d$  es el diámetro. Entonces, para poder construir la pista con la minima distancia es necesario sumar las dos longitudes a lo largo de la pista más la circunferencia de los dos semicirculos.

$$\Rightarrow L = \pi \cdot d + 2 \cdot 360$$

Podemos poner la formula completa ya que los dos semicirculos son iguales y forman un circulo completo de diametro  $160ft$ . Sustituyendo:

$$L = \pi \cdot 160ft + 2 \cdot 360ft$$

$$L \simeq 1222.6548ft$$

Podemos notar que el valor dado para construirla pista con la logntud minima constituida por dos semicirculos y dos lados rectos es menor al requerido  $1222.6548ft < 1320ft$ .

b) Sea  $L$  la longitud, en pies, de una de las partes rectas de la pista y sea  $x$  la distancia, en pies, entre la línea lateral del campo y una de las partes rectas de la pista. Muestre que  $L$  como función de  $x$  viene dada por:

$$L(x) = 660 - 80\pi - \pi x$$

y grafique esta regla de correspondencia para  $0 \leq x \leq 20$ .

Para expresar  $L$  en función de  $x$   $L(x)$  aumentamos en  $x$  el diametro de los semicirculos de la función de tal manera que:

$$diámetro = 160 + x$$

Ahora calculamos la circunferencia  $c = \pi * diámetro \therefore c = \pi * (160 + x)$

Sea  $L$  la longitud de los lados rectos para las cuales queremos expresar la variabilidad de su comportamiento en función de  $x$ . Entonces queremos saber en que  $x$  el valor será de la pista será  $1320fts$  en la suma de las longitudes.

$$(160ft + x)\pi + 2L = 1320ft$$

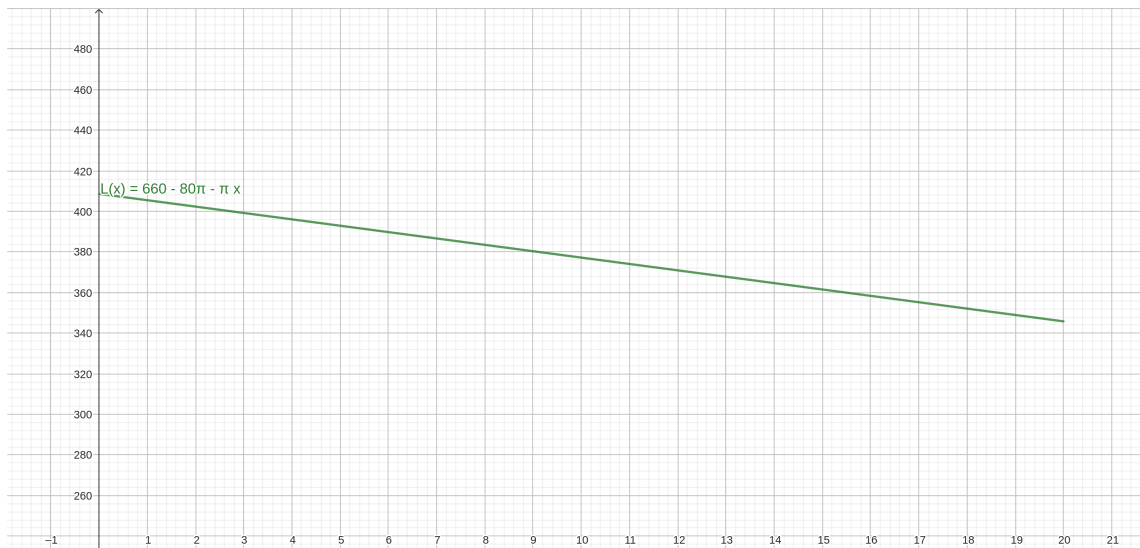
$$\pi \cdot 160ft + \pi \cdot x + 2L = 1320ft$$

$$2L = 1320ft - 160\pi ft - \pi x$$

$$L = \frac{1320ft - 160\pi ft - \pi x}{2}$$

$$L = 660 - 80\pi - \pi x$$

$$\therefore L(x) = 660 - 80\pi - \pi x$$



Con base en esta gráfica:

1) Estime la mínima longitud de la parte recta de la pista y, luego, muestre que el valor de  $x$  para el que ésta ocurre es aproximadamente 15.49 ft.

Tomando en cuenta que la longitud mínima que puede tomar la pista es de 360 debido a que es la misma longitud que mide el campo de football, queremos saber el valor de separación entre el campo y la pista para que la longitud total de la pista sea  $\frac{1}{4}$  de milla = 1320 ft

$$360 = 660 - 80\pi - \pi x$$

$$360 - 660 + 80\pi = -\pi x$$

$$\frac{360 - 660 + 80\pi}{-\pi} = x$$

$$\therefore x \simeq 15.49 \text{ ft}$$

15.49 ft debe ser la medida aproximada de la distancia entre la pista y el campo para que la pista tenga una Longitud total de 1320 ft.

2) Estime la máxima longitud de la parte recta de la pista y luego, muestre que el valor de  $L$  para el que ésta ocurre es aproximadamente 408.67 ft.

El máximo valor de la longitud de la parte recta debe ser cuando no hay separación entre el campo de fútbol y la pista, por tanto, debemos sustituir para  $L(0)$ .

$$L(0) = 660 - 20\pi - \pi(0)$$

$$L(0) \simeq 408.67 \text{ ft}$$

$\therefore$  La longitud máxima de la parte recta de la pista debe medir 408.67 ft para que la longitud total de la pista sea de  $\frac{1}{4}$  de milla = 1320 ft