Un balón de futbol americano

En este ejercicio se trata de calcular aproximadamente el volumen V de un balón de football americano profesional suponiendo que su superficie se genera rotando, alrededor del eje horizontal, una curva y = y (x) que satisface que la longitud del eje entre las dos puntas del balón es de 28 cm y la circunferencia de la máxima sección circular transversal al eje mide 53 cm (véase la siguiente figura).

a) Rebane la mitad derecha del balón en 10 cilindros de grosor $\Delta x = 1{,}4$ cm, de manera que las rebanadas intersecten el eje x en los valores de la siguiente particiónn del intervalo $[0, 14]$ 1) Muestre que la parábola es, aproximadamente, la gráfica de la función

$$y(x) = -0{,}043x^2 + 8{,}4352$$

definida para $-14 \leq x \leq 14$

- Sabemos que la Circunferencia $= 2\pi r \therefore r = \frac{53}{2\pi}$
- la fórmula de las cónicas para la parábola es $y(x) = ax^2 + bx + c$
- sabemos que el radio de la circunferencia del balón es la longitud del radio cuando $x = 0$, queremos saber el valor de y para $x = 0$

$$\therefore y(0) = \frac{53}{2\pi} = a(0)^2 + b(0) + c = c$$
$$\Rightarrow c = \frac{53}{2\pi}$$

wTambién conocemos dos puntos que pasan por la ecuación del balón y son los puntos extremos, para encontrar los valores de a, b sustituimos estos valores y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$y(14) = a(14)^2 + b(14) + c$$
$$y(-14) = a(-14)^2 + b(-14) + c$$

$$196a + c = 0$$
$$+196a + c = 0$$

$$392a + 2c \Rightarrow a = -\frac{2c}{392} = -\frac{c}{196}$$
$$\therefore y(x) = -\frac{c}{196}x^2 + c$$
$$\Rightarrow y(x) = -\frac{\frac{53}{2\pi}}{196}x^2 + \frac{53}{2\pi}$$

Simplificando tenemos que

$$y(x) \approx -0{,}0430x^2 + 8{,}4352$$

Podemos expresar la función en términos de r_0, de esta manera podemos deducir el dominio de la función.

$$y(x) = -\frac{c}{196}x^2 + c$$
$$y(x) = -\frac{r_o}{196}x^2 + r_o, \text{donde } r_o = c$$
$$\text{Igualamos a cero para determinar las raices}$$
$$-\frac{r_o}{196}x^2 + r_o = 0$$
$$-\frac{r_o}{196}x^2 = -r_o$$
$$-r_0x^2 = -r_0(196)$$
$$x^2 = \frac{-r_0(196)}{-r_0}$$
$$x = \pm\sqrt{196}$$
$$x = \pm 14$$
$$\therefore -14 \leq x \leq 14$$

estos puntos, como habíamos definido antes, son los puntos de corte del centro del balón, solo estamos definiendo, en este caso la mitad de arriba del balón para aproximar su volumen. Esto de ve reflejado con el coeficiente a negativo $(-a)$.

2) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor $\Delta x = 1{,}4cm$ y radios $y(x_k)$ cm para $k = 0, 1, 2, ..., 9$ es:

$$V \approx 2 \; x \; 1825{,}5143 = 3651{,}0286cm^3$$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^{9} V_k$$
$$\text{donde: } V_k = \pi * {r_k}^2 * \Delta h$$
$$\Delta h = 1{,}4, \text{la altura de cada cilindro}$$

el valor de correspondencia para cada $x_k = \Delta h * k$, la hayamos sustituyendo en la fórmula $r_k = y(x_k) = y(x) \approx -0{,}0430{x_k}^2 + 8{,}4352$. Decimos que

$$\sum_{k=0}^{9} V_k = \sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 \Delta h$$

Podemos decir que π y Δh son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} r_k$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (-0{,}0430 {x_k}^2 + 8{,}4352)^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
0	0	8.4352	71.15259904	312.9462072
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
suma $= 1825{,}5143\ cm^3$				
$V \approx 2x1825{,}5143 = 3651{,}0286cm3$				

Cuadro 1: Tabla de suma de los factores x_k

Ya que solo calculamos los radios de la parte derecha del balón y considerando que es simétrico, el volumen de el lado derecho es el mismo que el del lado izquierdo, por lo tanto se multiplica por 2. Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor $\Delta x = 1{,}4$ cm y radios $y(x_k)$ cm para $k = 0, 1, ..., 9$ es:

$$V \approx 2\ x\ 1825{,}5143 = 3651{,}0286cm^3$$

La aproximación del volumen para el balón de futbol es:

$$\sum_{k=0}^{9} V_k$$

$$\text{donde: } V_k = \pi * {r_k}^2 * \Delta h$$

$$\Delta h = 1{,}4, \text{la altura de cada cilindro}$$

el valor de correspondencia para cada $x_k = \Delta h * k$, la hayamos sustituyendo en la fórmula $r_k = y(x_k) = y(x) \approx -0{,}0430{x_k}^2 + 8{,}4352$. Decimos que

$$\sum_{k=0}^{9} V_k = \sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 \Delta h$$

Podemos decir que π y Δh son siempre constantes en la suma, por lo tanto podemos factorizar:

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} r_k$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (-0{,}0430{x_k}^2 + 8{,}4352)^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k^2)$
1	1.4	8.35092	69.73786485	306.7238667
2	2.8	8.09808	65.57889969	288.4317398
3	4.2	7.67668	58.93141582	259.1945103
4	5.6	7.08672	50.22160036	220.8866516
5	7	6.3282	40.04611524	176.1324259
6	8.4	5.40112	29.17209725	128.305885
7	9.8	4.30548	18.53715803	81.53086994
8	11.2	3.04128	9.249384038	40.68101085
9	12.6	1.60852	2.58733659	11.37972729
10	14	0.0072	5.184E-05	0.000228005
				suma = $1825{,}5143\ cm^3$
				$V \approx 2x1825{,}5143 = 3651{,}0286cm3$

Cuadro 2: Tabla de suma de los factores x_k

b) Suponga ahora que la curva $y = y(x)$ es la mitad superior de una elipse con centro en el origen, semieje horizontal $a = 14$ cm (sobre el eje x) y semieje vertical

$$b = 532\pi \approx 8{,}4352cm(sobreelejey).$$

Partimos de la ecuación simétrica de la parábola.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definimos los vértices en $v(0, 14)$ y $v'(0, -14)$, por definición sabemos que la mitad de la longitud del semieje mayor es a, entonces a=14, b es la mitad del semieje menor, el cual es el radio de nuestro balón, $\Rightarrow b = r_0 = \frac{53}{2\pi}$

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{{r_0}^2} = 1$$

Reducimos hasta despejar a y.

$$14^2{r_0}^2\left(\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{{r_0}^2}\right)=1*14^2{r_0}^2$$
$$\frac{14^2{r_0}^2x^2}{14^2}+\frac{{r_0}^2 14^2y^2}{{r_0}^2}=14^2{r_0}^2$$
$$r_0x^2+14^2y^2=14^2{r_0}^2$$
$$14^2y^2=14^2{r_0}^2-r_0x^2$$
$$y^2=\frac{14^2{r_0}^2-r_0x^2}{14^2}$$
$$y^2=\frac{{r_0}^2}{14^2}(14^2-x^2)$$
$$y=\pm\sqrt{\frac{{r_0}^2}{14^2}(14^2-x^2)}$$
$$y=\frac{r_0}{14}*\pm\sqrt{(14^2-x^2)}$$
$$y=\frac{r_0}{14}*\pm\sqrt{196-x^2}$$

Sustituyendo $r_0=\frac{53}{2\pi}$ tenemos que

$$\frac{r_0}{14}=\frac{\frac{53}{2\pi}}{14}\approx 0{,}6025 \therefore y(x)=0{,}6025\pm\sqrt{196-x^2}$$

Podemos observar que x^2 solo puede valor, máximo 196 ya que la función no está definida para la raíz cuadrada de un número negativo. $\therefore -14\leq x\leq 14$

d) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros circunscritos de grosor $\Delta x=1{,}4cm$ y radios $y(x_k)$ cm para$k=0,1,2,...,9$ es:

$$V\approx 2\times 2237{,}4593=4474{,}9186cm3$$

Partimos de que

$$V_{total}=\sum_{k=0}^{9}V_k$$

donde V_k = a cada volumen de disco con índice k y el volumen se traduce como

$$V_k=\pi*\Delta h*{r_k}^2$$

y el la medida del radio r_k para cada cilindro circunscrito es el valor de $y(x_k)$, para $x_k=\Delta h*k$ y Δh es la altura correspondiente que es constante en cada cilindro.

Así denotamos que

$$\sum_{k=0}^{9}V_k=\sum_{k=0}^{9}\pi*{r_k}^2*\Delta h$$

donde π y Δh son siempre constantes, factorizamos

$$\sum_{k=0}^{9} \pi * {r_k}^2 * \Delta h = \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} {r_k}^2$$

sustituyendo r_k por $y(x_k)$

$$V_{tottal} = \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} y(x_k)^2$$

$$= \pi \Delta h \sum_{k=0}^{9} (0{,}6025\sqrt{196 - {x_k}^2})^2$$

así conseguimos la suma de los triangulo circunscritos para calcular el Balón de futbol.

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
0	0	8.435	71.149225	312.930636
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
				suma 2237,45404 cm^3

Cuadro 3: Tabla de suma de los factores x_k

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2

$$\therefore V \approx 2 \times 2237{,}4540 = 4474{,}90809\ cm3$$

a) Muestre que la aproximación del volumen (7) con los 10 cilindros inscritos de grosor $\Delta x = 1{,}4cm$ y radios $y(xk)$ cm para$k = 1, 2, ..., 10$ es:

$$V \approx 2\Delta 1924{,}5279 = 3849{,}0558cm^3$$

Tenemos la misma primicia del anterior.

$$V \approx \pi \Delta h \sum_{k=1}^{10} (0{,}6025\sqrt{196 - {x_k}^2})^2$$

K	$\Delta h \cdot j$	$y(x_k)$	$y(x_k)^2$	$\Delta h * \pi * y(x_k)^2$
1	1.4	8.39271903	70.4377328	309.801329
2	2.8	8.26457839	68.303256	300.41341
3	4.2	8.04647716	64.7457948	284.766878
4	5.6	7.7308052	59.765349	262.861734
5	7	7.30492428	53.3619188	234.697977
6	8.4	6.748	45.535504	200.275607
7	9.8	6.02379488	36.2861048	159.594624
8	11.2	5.061	25.613721	112.655029
9	12.6	3.67673126	13.5183528	59.4568208
10	14	0	0	0
				suma 1924,52341 cm^3

Cuadro 4: Tabla de suma de los factores x_k

Como calculamos la mitad del balón, la suma de la parte derecha la multiplicamos por 2.

$$\therefore V \approx 2 \times 1924{,}5279 = 3849{,}04682 cm3$$