Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas 1

Licenciatura en Ciencias de la Computación

2da lista de problemas

Segundo Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Agosto 2024

2da lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontran Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

22 de septiembre de 2024

CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

1) Suponga que se le solicita diseñar el primer ascenso y descenso de un nuevo modelo de cohete. Después de estudiar fotografías de sus momentos rusos y precedentes, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos y es $L(x)$ en pies para el tramo que parte del suelo y es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $f'(x)$, su derivada, es $2ax + b$. Mediante el trabajo ya mencionado, puede calcular ambos coeficientes de dirección por lo que dispone que los segmentos para L y S, sean tangentes al parabola en los puntos P y Q. Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que le trayecto sea suave en los puntos de transición.

b) Resuelva las ecuaciones del Inciso a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.

c) Dibuje L_1 y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.

d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

Inciso a) Sea la coordenada **P** en el origen ya que es un punto conocido
$\therefore$ para la ecuación de la curva $f(x)$ pasa por el origen en el punto **P**, entonces $f(0) = 0 = a(0)^2 + b(0) + c \therefore c = 0$
La derivada retorna la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva y sabemos que el valor de la pendiente en el punto $P = 0.8$, por tanto:

$$\begin{aligned} f'(x)|_{P(0,y)} = 2ax + b|_{P(0,0)} &= 2a(0) + b = 0.8 \\ &\therefore b = 0.8 \end{aligned}$$

Aplicando la misma lógica para el punto $Q(100, y(100))$ donde la pendiente $m_2 = -1.6$:

$$\begin{aligned} f'(x)|_{Q(100,y)} = 2ax + b|_{Q(100,y)} &= 2a(100) + b = -1.6 \\ &\implies 2(100)a + b = -1.6 \\ &\therefore 200a + b = -1.6 \end{aligned}$$

Inciso b) Hallar la fórmula f(x) resolviendo para a, b y c. Por el inciso anterior sabemos que $b = 0.8$ y $c = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 200a + 0.8 &= -1.6 \\ 200a &= -1.6 - 0.8 \\ a &= \frac{-2.4}{200} \\ a &= -0.012 \end{aligned}$$

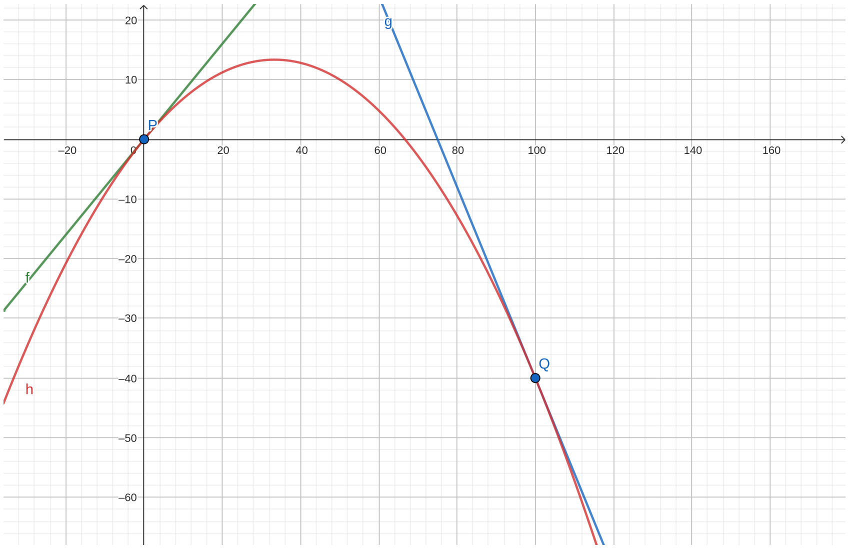
$\therefore f(x) = -0.012x^2 + 0.8x$
$f'(x) = -0.024x + 0.8$

Inciso c) Dibular L_1 y L_2

Para dibujar las rectas neceistamos la derivada de la función $f(x)$, además sabemos que las ecuaciones de las rectas tangentes a cada punto de definen de la forma $y = (y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0))$ para L_1 y L_2.

$$\begin{aligned} L_1 &= (y(P_x) + y'(P_x)(x - P_x)),\ P(0,0) \\ L_1 &= 0 + 0.8(x - 0) \\ L_1 &= 0.8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= (y(Q_x) + y'(Q_x)(x - Q_x)),\ Q(100, y(100)) \\ L_2 &= -40 - 1.6(x - 100) \\ L_2 &= -40 - 1.6x + 160 \\ L_2 &= 120 - 1.6x \end{aligned}$$



Inciso d) La diferencia de elevación de cada punto está dado por el valor absoluto de la diferencia con respecto a el eje cordenado y de los dos puntos

Para el punto P

$$f(0) = 0$$

Para el punto Q en$x = 100$

$$f(100) = -0.012(100)^2 + 0.8(100)$$
$$f(100) = -0.012(100)^2 + 0.8(100)$$
$$f(100) = -120 + 80$$
$$f(100) = -40$$
$$\therefore Q(100, -40)$$

$$\implies diferencia = |0 - 40| = 40ft$$

2) La solución del problema 1 puede parecer suave, pero es posible que no sienta lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$; y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leq x \leq 90$ y conectarlo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \quad 0 \leq x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \quad 90 < x \leq 100$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus derivadas sean continuas en los puntos de transición.

b) Resuelva las derivadas implicadas en un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para $g(x)$, $q(x)$, y $h(x)$.

c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelas con las gráficas del problema 1 anexo.

Inciso a) Tenemos las funciones defindas en los siguientes intervalos

Función	Primera Derivada	Segunda derivada	Intervalo
$L_1(x) = 0.8x$	$L_1'(x) = 0.8$	$L_1''(x) = 0$	$(-\infty, 0)$
$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$	$g'(x) = 3kx^2 + 2lx + m$	$g''(x) = 6kx + 2l$	$[0, 10)$
$q(x) = ax^2 + bx + c$	$q'(x) = 2ax + b$	$q''(x) = 2a$	$[10, 90]$
$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$	$h'(x) = 3px^2 + 2qx + r$	$h''(x) = 6px + 2q$	$(90, 100]$
$L_2(x) = 120 - 1.6x$	$L_2'(x) = -1.6$	$L_2''(x) = 0$	$[100, \infty)$

Tabla 1: Tabla de funciones

De acuerdo con lo establecido, las diferentes funciones deben ser iguales en los puntos de transición para garantizar que la entrada a la curva sea suave.

Para x =0	Para x =10	Para x =90	Para x =100
$g(0) = L_1(0)$	$g(10) = q(10)$	$q(90) = h(90)$	$h(100) = L_2(100)$
$g'(0) = L_1'(0)$	$g'(10) = q'(10)$	$q'(90) = h'(90)$	$h'(100) = L_2'(100)$
$g''(0) = L_1''(0)$	$g''(10) = q''(10)$	$q''(90) = h''(90)$	$h''(100) = L_2''(100)$

Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 11 incognitas.

$$\text{Para } x = 0$$
$$g(0) = k(0)^3 + l(0)^2 + m(0) + n = L_1(0) = 0.8(0)$$
$$g(0) = n = L_1(0) = 0$$
$$n = 0$$
$$g'(0) = 3k(0)^2 + 2l(0) + m = L_1'(0) = 0.8$$
$$g'(0) = m = L_1'(0) = 0.8$$
$$m = 0.8$$
$$g''(0) = 6k(0) + 2l = L_1''(0) = 0$$
$$g''(0) = 2l = L_1''(0) = 0$$
$$2l = 0$$
$$l = 0$$
$$\therefore n = 0; m = 0.8; l = 0$$

$$\text{Para } x = 10$$
$$g(10) = k(10)^3 + l(10)^2 + m(10) + n = q(10) = a(10)^2 + b(10) + c$$
$$g(10) = 1000k + 100l + 10m + n = q(10) = 100a + 10b + c$$
$$\implies 1000k + 100l + 10m + n = 100a + 10b + c$$
$$g'(10) = 3k(10)^2 + 2l(10) + m = q'(10) = 2a(10) + b$$
$$g'(10) = 3(100)k + 2(10)l + m = q'(10) = 2(10)a + b$$
$$g'(10) = 300k + 20l + m = q'(10) = 20a + b$$
$$\implies 300k + 20l + m = 20a + b$$
$$g''(10) = 6k(10) + 2l = q''(10) = 2a$$
$$g''(10) = 6(10)k + 2l = q''(10) = 2a$$
$$g''(10) = 60k + 2l = q''(10) = 2a$$
$$\implies 60k + 2l = 2a$$

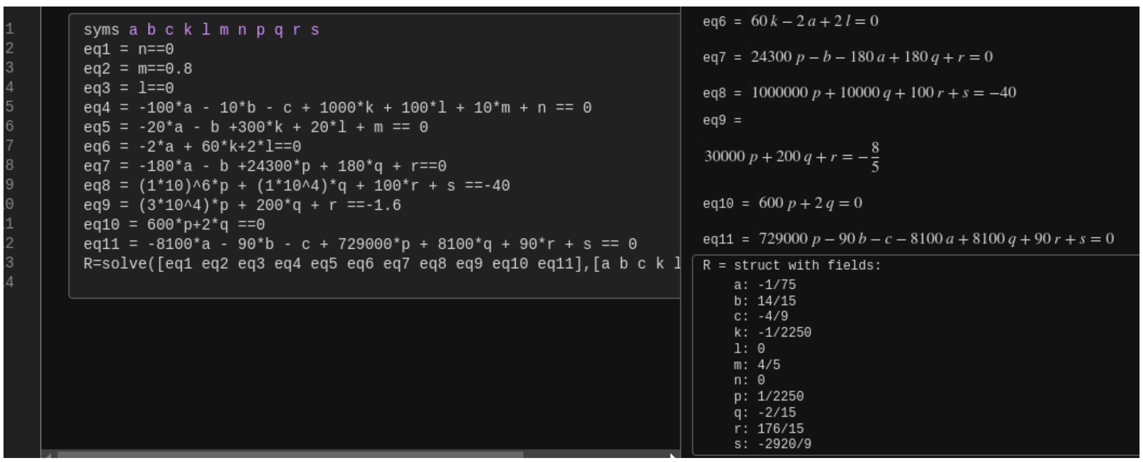
$$\text{Para } x = 90$$
$$h(90) = p(90)^3 + q(90)^2 + r(90) + s = q(90) = a(90)^2 + b(90) + c$$
$$h(90) = 729000p + 8100q + 90r + s = q(90) = 8100a + 90b + c$$
$$\implies 729000p + 8100q + 90r + s = 8100a + 90b + c$$
$$h'(90) = 3p(90)^2 + 2q(90) + r = q'(90) = 2a(90) + b$$
$$h'(90) = 3(8100)p + 2(90)q + r = q'(90) = 2(90)a + b$$
$$h'(90) = 24300p + 180q + r = q'(90) = 180a + b$$
$$\implies 24300p + 180q + r = 180a + b$$
$$h''(90) = 6p(90) + 2q = q''(90) = 2a$$
$$h''(90) = 6(90)p + 2q = q''(90) = 2a$$
$$h''(90) = 540p + 2q = q''(90) = 2a$$
$$\implies 540p + 2q = 2a$$

$$\text{Para } x = 100$$
$$h(100) = p(100)^3 + q(100)^2 + r(100) + s = L_2(100) = 120 - 16(100)$$
$$h(100) = 1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s = L_2(100) = 120 - 160$$
$$\implies 1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s = -40$$
$$h'(100) = 3p(100)^2 + 2q(100) + r = L_2'(100) = -1.6$$
$$h'(100) = 3(1x10^4)p + 200q + r = L_2'(100) = -1.6$$
$$\implies (3x10^4)p + 200q + r = -1.6$$
$$h''(100) = 6p(100) + 2q = L_2''(100) = 0$$
$$h''(100) = 600p + 2q = L_2''(100) = 0$$
$$\implies 600p + 2q = 0$$

En resumen queremos resolver las ecuaciones para:

$$
\begin{aligned}
n &= 0 \\
m &= 0.8 \\
2l &= 0 \\
-100a - 10b - c + 1000k + 100l + 10m + n &= 0 \\
-20a - b + 300k + 20l + m &= 0 \\
-2a + 60k + 2l &= 0 \\
-8100a - 90b - c + 729000p + 8100q + 90r + s &= 0 \\
-180a - b + 24300p + 180q + r &= 0 \\
1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s &= -40 \\
(3x10^4)p + 200q + r &= -1.6 \\
600p + 2q &= 0
\end{aligned}
$$

Inciso b) Según el software **Matlab** el valor de cada incógnita es:



$\Longrightarrow$ Las formulas según los resultados son:

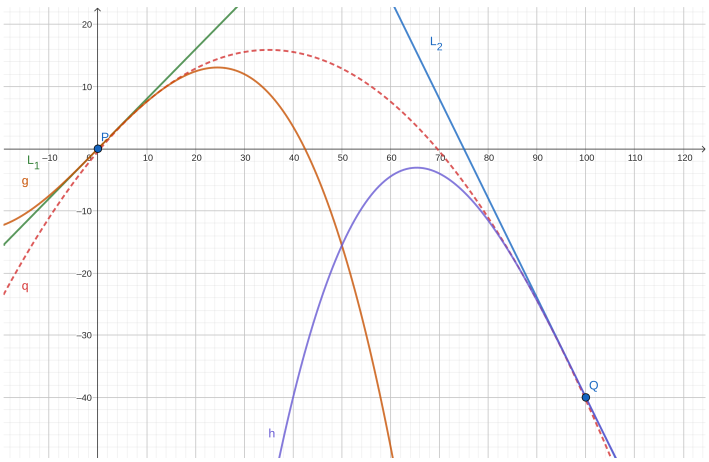
$$q(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

$$q(x) = -\frac{1}{75}x^2 + \frac{14}{15}x - \frac{4}{9} \tag{2}$$

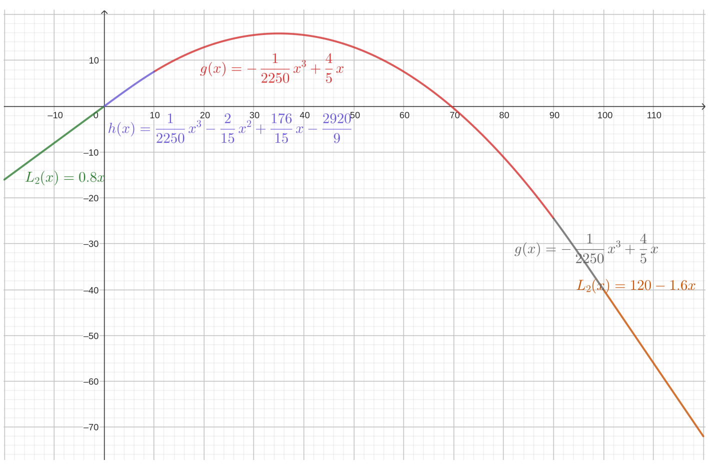
$$
\begin{aligned}
g(x) &= kx^3 + lx^2 + mx + n \\
g(x) &= -\frac{1}{2250}x^3 + 0x^2 + \frac{4}{5}x + 0 \\
g(x) &= -\frac{1}{2250}x^3 + \frac{4}{5}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= px^3 + qx^2 + rx + s \\
h(x) &= \frac{1}{2250}x^3 - \frac{2}{15}x^2 + \frac{176}{15}x - \frac{2920}{9}
\end{aligned}
$$

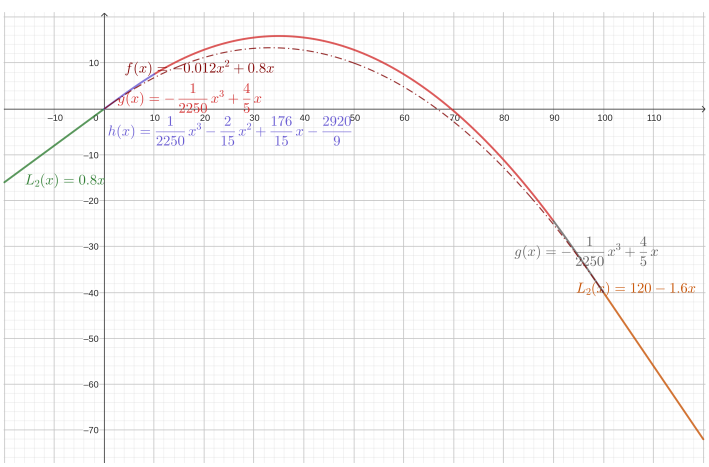
Inciso c) Las gráficas L_1, g, q, h y L_2 y compárelas con las gráficas del problema 1 anexo.



Las 5 ecuaciones completas que pasan por los mismos puntos de transición P y Q



Las 5 ecuaciones de la parte dos del ejercicio con sus intervalos definidos para la construcción de la montaña Rusa.



Comparación con la función generada en la primera parte del ejercicio mostrando, la segunda forma una continuidad más suave en cada transición