



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS APLICADAS 1

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

## 2DA LISTA DE PROBLEMAS

*Segundo Parcial*

Autores:

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo

Villalobos Juárez Gontran Eliut

Treviño Puebla Héctor Jerome

Septiembre 2024

## 2da lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo  
Villalobos Juárez Gontran Eliut  
Treviño Puebla Héctor Jerome

22 de septiembre de 2024

# CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

1) Suponga que se le solicita diseñar el primer ascenso y descenso de un nuevo modelo de cohete. Después de estudiar fotografías de sus momentos rusos y precedentes, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos y es  $L(x)$  en pies para el tramo que parte del suelo y es  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $f'(x)$ , su derivada, es  $2ax + b$ . Mediante el trabajo ya mencionado, puede calcular ambos coeficientes de dirección por lo que dispone que los segmentos para  $L$  y  $S$ , sean tangentes al parabola en los puntos P y Q. Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

- Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en  $a$ ,  $b$  y  $c$  que aseguren que le trayecto sea suave en los puntos de transición.
- Resuelva las ecuaciones del Inciso a) para  $a$ ,  $b$  y  $c$  para hallar una fórmula para  $f(x)$ .
- Dibuje  $L_1$  y  $L_2$  para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.
- Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

**Inciso a)** Sea la coordenada **P** en el origen ya que es un punto conocido

$\therefore$  para la ecuación de la curva  $f(x)$  pasa por el origen en el punto **P**, entonces  $f(0) = 0 = a(0)^2 + b(0) + c \therefore c = 0$

La derivada retorna la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva y sabemos que el valor de la pendiente en el punto  $P = 0.8$ , por tanto:

$$f'(x)|_{P(0,y)} = 2ax + b|_{P(0,0)} = 2a(0) + b = 0.8$$

$$\therefore b = 0.8$$

Aplicando la misma lógica para el punto  $Q(100, y(100))$  donde la pendiente  $m_2 = -1.6$ :

$$f'(x)|_{Q(100,y)} = 2ax + b|_{Q(100,y)} = 2a(100) + b = -1.6$$

$$\implies 2(100)a + b = -1.6$$

$$\therefore 200a + b = -1.6$$

**Inciso b)** Hallar la fórmula  $f(x)$  resolviendo para  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Por el inciso anterior sabemos que  $b = 0.8$  y  $c = 0$ , entonces

$$200a + 0.8 = -1.6$$

$$200a = -1.6 - 0.8$$

$$a = \frac{-2.4}{200}$$

$$a = -0.012$$

$$\therefore f(x) = -0.012x^2 + 0.8x$$

$$f'(x) = -0.024x + 0.8$$

**Inciso c)** Dibujar  $L_1$  y  $L_2$

Para dibujar las rectas necesitamos la derivada de la función  $f(x)$ , además sabemos que las ecuaciones de las rectas tangentes a cada punto de definen de la forma  $y = (y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0))$  para  $L_1$  y  $L_2$ .

$$L_1 = (y(P_x) + y'(P_x)(x - P_x)), P(0, 0)$$

$$L_1 = 0 + 0.8(x - 0)$$

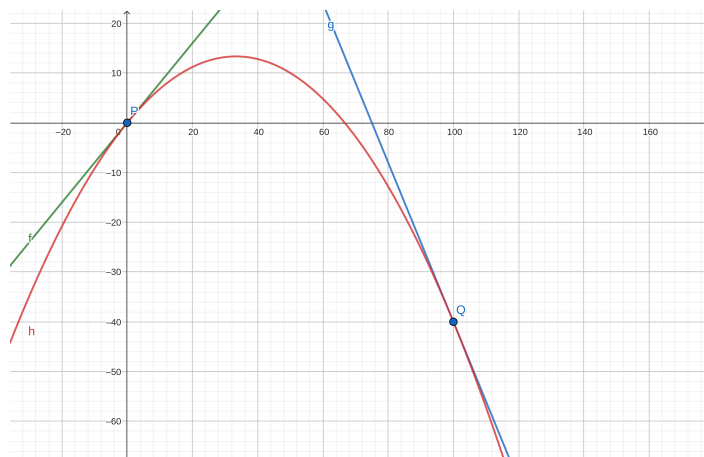
$$L_1 = 0.8x$$

$$L_2 = (y(Q_x) + y'(Q_x)(x - Q_x)), Q(100, y(100))$$

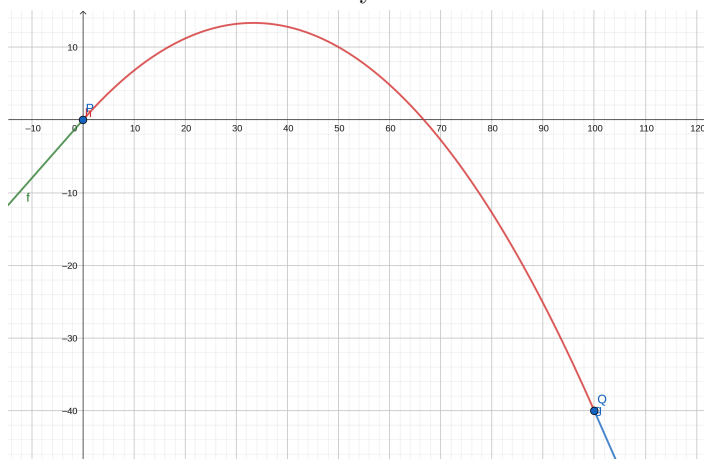
$$L_2 = -40 - 1.6(x - 100)$$

$$L_2 = -40 - 1.6x + 160$$

$$L_2 = 120 - 1.6x$$



Gráfica de las derivadas y la ecuación de la curva



Gráfica donde se visualizan las tangentes en los puntos de contacto P y Q

**Inciso d)** La diferencia de elevación de cada punto está dado por el valor absoluto de la diferencia con respecto a el eje coordenado  $y$  de los dos puntos

Para el punto P

$$f(0) = 0$$

Para el punto Q en  $x = 100$

$$\begin{aligned} f(100) &= -0.012(100)^2 + 0.8(100) \\ f(100) &= -120 + 80 \\ f(100) &= -40 \\ \therefore Q(100, -40) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{diferencia} = |0 - 40| = 40 \text{ ft}$$

2) La solución del problema 1 puede parecer suave, pero es posible que no sienta lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en  $L_1(x)$  para  $x < 0$ ,  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 100$ ; y  $L_2(x)$  para  $x > 100$ ] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática  $q(x) = ax^2 + bx + c$  únicamente en el intervalo  $10 \leq x \leq 90$  y conectarlo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$\begin{aligned} g(x) &= kx^3 + lx^2 + mx + n \quad 0 \leq x < 10 \\ h(x) &= px^3 + qx^2 + rx + s \quad 90 < x \leq 100 \end{aligned}$$

- Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus derivadas sean continuas en los puntos de transición.
- Resuelva las derivadas implicadas en un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para  $g(x)$ ,  $q(x)$ , y  $h(x)$ .
- Dibuje  $L_1$ ,  $g$ ,  $q$ ,  $h$  y  $L_2$  y compárelas con las gráficas del problema 1 anexo.

**Inciso a)** Tenemos las funciones definidas en los siguientes intervalos

Función	Primera Derivada	Segunda derivada	Intervalo
$L_1(x) = 0.8x$	$L_1'(x) = 0.8$	$L_1''(x) = 0$	$(-\infty, 0)$
$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$	$g'(x) = 3kx^2 + 2lx + m$	$g''(x) = 6kx + 2l$	$[0, 10]$
$q(x) = ax^2 + bx + c$	$q'(x) = 2ax + b$	$q''(x) = 2a$	$[10, 90]$
$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$	$h'(x) = 3px^2 + 2qx + r$	$h''(x) = 6px + 2q$	$(90, 100]$
$L_2(x) = 120 - 1.6x$	$L_2'(x) = -1.6$	$L_2''(x) = 0$	$[100, \infty)$

Tabla 1: Tabla de funciones

De acuerdo con lo establecido, las diferentes funciones deben ser iguales en los puntos de transición para garantizar que la entrada a la curva sea suave.

Para $x = 0$	Para $x = 10$	Para $x = 90$	Para $x = 100$
$g(0) = L_1(0)$	$g(10) = q(10)$	$q(90) = h(90)$	$h(100) = L_2(100)$
$g'(0) = L_1'(0)$	$g'(10) = q'(10)$	$q'(90) = h'(90)$	$h'(100) = L_2'(100)$
$g''(0) = L_1''(0)$	$g''(10) = q''(10)$	$q''(90) = h''(90)$	$h''(100) = L_2''(100)$

Por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 11 incógnitas.

$$\begin{aligned} &\text{Para } x = 0 \\ g(0) &= k(0)^3 + l(0)^2 + m(0) + n = L_1(0) = 0.8(0) \\ g(0) &= n = L_1(0) = 0 \\ n &= 0 \\ g'(0) &= 3k(0)^2 + 2l(0) + m = L_1'(0) = 0.8 \\ g'(0) &= m = L_1'(0) = 0.8 \\ m &= 0.8 \\ g''(0) &= 6k(0) + 2l = L_1''(0) = 0 \\ g''(0) &= 2l = L_1''(0) = 0 \\ 2l &= 0 \\ l &= 0 \\ \therefore n &= 0; m = 0.8; l = 0 \end{aligned}$$

Para  $x = 10$

$$\begin{aligned}
g(10) &= k(10)^3 + l(10)^2 + m(10) + n = q(10) = a(10)^2 + b(10) + c \\
g(10) &= 1000k + 100l + 10m + n = q(10) = 100a + 10b + c \\
\implies 1000k + 100l + 10m + n &= 100a + 10b + c \\
g'(10) &= 3k(10)^2 + 2l(10) + m = q'(10) = 2a(10) + b \\
g'(10) &= 3(100)k + 2(10)l + m = q'(10) = 2(10)a + b \\
g'(10) &= 300k + 20l + m = q'(10) = 20a + b \\
\implies 300k + 20l + m &= 20a + b \\
g''(10) &= 6k(10) + 2l = q''(10) = 2a \\
g''(10) &= 6(10)k + 2l = q''(10) = 2a \\
g''(10) &= 60k + 2l = q''(10) = 2a \\
\implies 60k + 2l &= 2a
\end{aligned}$$

Para  $x = 90$

$$\begin{aligned}
h(90) &= p(90)^3 + q(90)^2 + r(90) + s = q(90) = a(90)^2 + b(90) + c \\
h(90) &= 729000p + 8100q + 90r + s = q(90) = 8100a + 90b + c \\
\implies 729000p + 8100q + 90r + s &= 8100a + 90b + c \\
h'(90) &= 3p(90)^2 + 2q(90) + r = q'(90) = 2a(90) + b \\
h'(90) &= 3(8100)p + 2(90)q + r = q'(90) = 2(90)a + b \\
h'(90) &= 24300p + 180q + r = q'(90) = 180a + b \\
\implies 24300p + 180q + r &= 180a + b \\
h''(90) &= 6p(90) + 2q = q''(90) = 2a \\
h''(90) &= 6(90)p + 2q = q''(90) = 2a \\
h''(90) &= 540p + 2q = q''(90) = 2a \\
\implies 540p + 2q &= 2a
\end{aligned}$$

Para  $x = 100$

$$\begin{aligned}
h(100) &= p(100)^3 + q(100)^2 + r(100) + s = L_2(100) = 120 - 16(100) \\
h(100) &= 1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s = L_2(100) = 120 - 160 \\
\implies 1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s &= -40 \\
h'(100) &= 3p(100)^2 + 2q(100) + r = L'_2(100) = -1.6 \\
h'(100) &= 3(1x10^4)p + 200q + r = L'_2(100) = -1.6 \\
\implies (3x10^4)p + 200q + r &= -1.6 \\
h''(100) &= 6p(100) + 2q = L''_2(100) = 0 \\
h''(100) &= 600p + 2q = L''_2(100) = 0 \\
\implies 600p + 2q &= 0
\end{aligned}$$

En resumen queremos resolver las ecuaciones para:

$$\begin{aligned}
 n &= 0 \\
 m &= 0.8 \\
 2l &= 0 \\
 -100a - 10b - c + 1000k + 100l + 10m + n &= 0 \\
 -20a - b + 300k + 20l + m &= 0 \\
 -2a + 60k + 2l &= 0 \\
 -8100a - 90b - c + 729000p + 8100q + 90r + s &= 0 \\
 -180a - b + 24300p + 180q + r &= 0 \\
 1x10^6p + 1x10^4q + 100r + s &= -40 \\
 (3x10^4)p + 200q + r &= -1.6 \\
 600p + 2q &= 0
 \end{aligned}$$

**Inciso b)** Según el software **Matlab** el valor de cada incógnita es:

```

1 syms a b c k l m n p q r s
2 eq1 = n==0
3 eq2 = m==0.8
4 eq3 = l==0
5 eq4 = -100*a - 10*b - c + 1000*k + 100*l + 10*m + n == 0
6 eq5 = -20*a - b + 300*k + 20*l + m == 0
7 eq6 = -2*a + 60*k + 2*l == 0
8 eq7 = -180*a - b + 24300*p + 180*q + r == 0
9 eq8 = (1*10)^6*p + (1*10^4)*q + 100*r + s == -40
10 eq9 = (3*10^4)*p + 200*q + r == -1.6
11 eq10 = 600*p + 2*q == 0
12 eq11 = -8100*a - 90*b - c + 729000*p + 8100*q + 90*r + s == 0
13 R=solve([eq1 eq2 eq3 eq4 eq5 eq6 eq7 eq8 eq9 eq10 eq11],[a b c k l m n p q r s])
14

```

```

eq6 = 60*k - 2*a + 2*l == 0
eq7 = 24300*p - b - 180*a + 180*q + r == 0
eq8 = 1000000*p + 10000*q + 100*r + s == -40
eq9 =
30000*p + 200*q + r == -8/5
eq10 = 600*p + 2*q == 0
eq11 = 729000*p - 90*b - c - 8100*a + 8100*q + 90*r + s == 0
R = struct with fields:
a: -1/75
b: 14/15
c: -4/9
k: -1/2250
l: 0
m: 4/5
n: 0
p: 1/2250
q: -2/15
r: 176/15
s: -2920/9

```

⇒ Las formulas según los resultados son:

$$q(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

$$q(x) = -\frac{1}{75}x^2 + \frac{14}{15}x - \frac{4}{9} \quad (2)$$

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$$

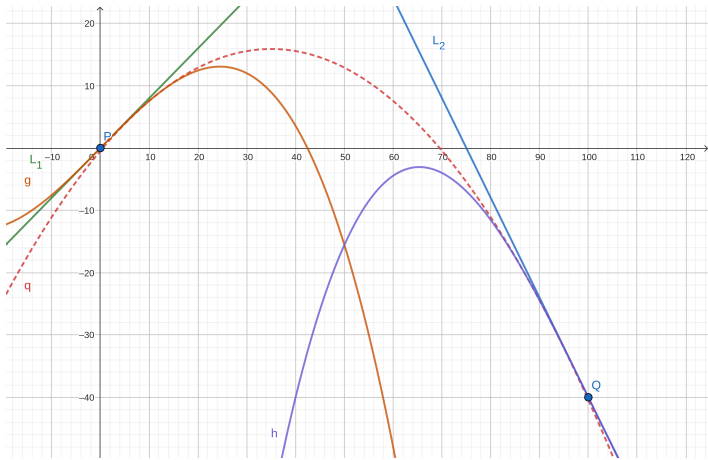
$$g(x) = -\frac{1}{2250}x^3 + 0x^2 + \frac{4}{5}x + 0$$

$$g(x) = -\frac{1}{2250}x^3 + \frac{4}{5}x$$

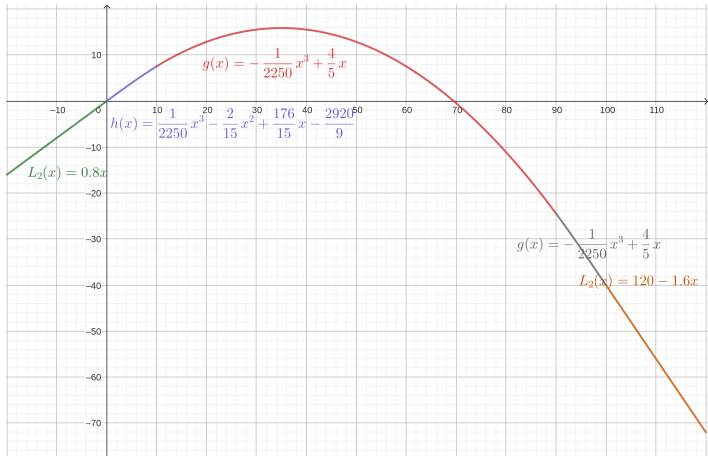
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

$$h(x) = \frac{1}{2250}x^3 - \frac{2}{15}x^2 + \frac{176}{15}x - \frac{2920}{9}$$

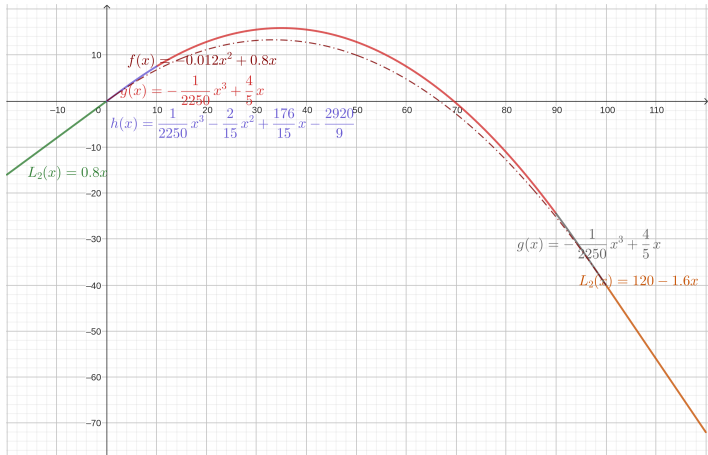
**Inciso c)** Las gráficas  $L_1$ ,  $g$ ,  $q$ ,  $h$  y  $L_2$  y compárelas con las gráficas del problema 1 anexo.



Las 5 ecuaciones completas que pasan por los mismos puntos de transición P y Q



Las 5 ecuaciones de la parte dos del ejercicio con sus intervalos definidos para la construcción de la montaña Rusa.



Comparación con la función generada en la primera parte del ejercicio mostrando, la segunda forma una continuidad más suave en cada transición