# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS APLICADAS 1

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

# 3RA LISTA DE PROBLEMAS

*Tercer Parcial*

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Salinas Trinidad Betsi Ivana
Villalobos Juárez Gontrán Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Noviembre 2024

# 3ra lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Salinas Trinidad Betsi Ivana
Villalobos Juárez Gontrán Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

3 de noviembre de 2024

# CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

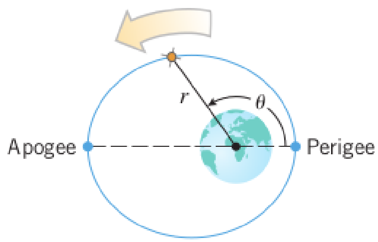
**1)** Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia r (en millas) desde el centro de la Tierra está dada por

$$r\frac{495}{1+0.12cos\theta}$$

donde $\theta$ es el ángulo medido desde el punto de la órbita más cercano a la superficie de la Tierra (ver la figura adjunta).

a) Halla la altitud del satélite en el perigeo (el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el apogeo (el punto más alejado de la superficie de la Tierra). Usa 3960 mi como el radio de la Tierra.

b) En el instante en que $\theta$ es 120°, el ángulo $\theta$ aumenta a una tasa de 2,7° /min. Halla la altitud del satélite y la tasa a la que cambia la altitud en ese instante. Expresa la tasa en unidades de mi/min.




◄ **Figure Ex-23**

# ANTON-BIVENS-DAVIS 9.7 EJERCICIO 29

**29)** Encuentra los primeros 4 polinomios distintos de Taylor sobre $x = x_0$, y usa una utilidad gráfica para graficar la función dada y el polinomio de Taylor en la misma pantalla.

$$f(x) = cosx \text{ en } x_0 = \pi$$

Para facilitar la búsqueda de estos polinomios, primero hallemos las derivadas (que presentará una forma cíclica):

| Derivando: | Evaluando en: $x_0 = \pi$ | Valor: |
|---|---|---|
| $f^0(x) = cos(x)$ | $f^0(\pi) = cos(\pi)$ | $cos(\pi) = -1$ |
| $f^1(x) = -sen(x)$ | $f^1(\pi) = -sen(\pi)$ | $-sen(\pi) = 0$ |
| $f^2(x) = -cos(x)$ | $f^2(\pi) = -cos(\pi)$ | $-cos(\pi) = 1$ |
| $f^3(x) = sen(x)$ | $f^3(\pi) = sen(\pi)$ | $sen(\pi) = 0$ |

Para generar los diferestes polinomios ocuparemos el desarrollo de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Para $P_0(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0$$
$$\frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0 = \frac{cos(\pi)}{1}(x - \pi)^0$$
$$\frac{cos(\pi)}{1}(x - \pi)^0 = cos(\pi)(1)$$
$$cos(\pi)(1) = -1$$

Así, esta es nuestra **primera** aproximación a la función. $P_0(x) = -1$
Para $P_1(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x - \pi)^1$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^1(\pi)}{1!}(x - \pi)^1 = \frac{-sen(\pi)}{1}(x - \pi)$$
$$\frac{sen(\pi)}{1}(x - \pi) = sen(\pi)(x - \pi)$$
$$sen(\pi)(x - \pi) = 0$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1+0$$
$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1$$

En este caso podemos ver que dada la multiplación por 0 (debido a $sen(\pi)$) el polinomio resultante es igual al anterior (NO es distinto).
Podremos ver que se repetirá este comportamiento siempre que el término de la sumatoria involucre $sen(\pi)$, con esto el término se çancelará".

Para $P_2(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 = \frac{-cos(\pi)}{2}(x-\pi)^2$$
$$\frac{-cos(\pi)}{2}(x-\pi)^2 = \frac{1}{2}(x-\pi)^2$$
$$\frac{1}{2}(x-\pi)^2 = \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Así, esta es nuestra **segunda** aproximación a la función. $P_2(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$

Para $P_3(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$

Para el nuevo Término:
Como se mecionó mas arriba sabemos que el nuevo termino involucrará a $sen(\pi)$ (Dado que la derivación de $cos(x)$ es cíclica), por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + 0$$
$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para $P_4(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^4(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^4(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 = \frac{cos(\pi)}{24}(x-\pi)^4$$
$$\frac{cos(\pi)}{24}(x-\pi)^4 = \frac{-1}{24}(x-\pi)^4$$
$$\frac{-1}{24}(x-\pi)^4 = -\frac{(x-\pi)^4}{24}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$$

Así, esta es nuestra **tercera** aproximación a la función. $P_4(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$

Para $P_5(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + .... + \frac{f^5(\pi)}{5!}(x-\pi)^5$$

Para el nuevo Término:
Este termino también involucrará a $sen(\pi)$, por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + 0$$
$$\sum_{k=0}^{5} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$$

Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para $P_6(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + ... + \frac{f^6(\pi)}{6!}(x-\pi)^6$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^6(\pi)}{6!}(x-\pi)^6 = \frac{-cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6$$
$$\frac{-cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6 = \frac{1}{720}(x-\pi)^6$$
$$\frac{1}{720}(x-\pi)^6 = \frac{(x-\pi)^6}{720}$$

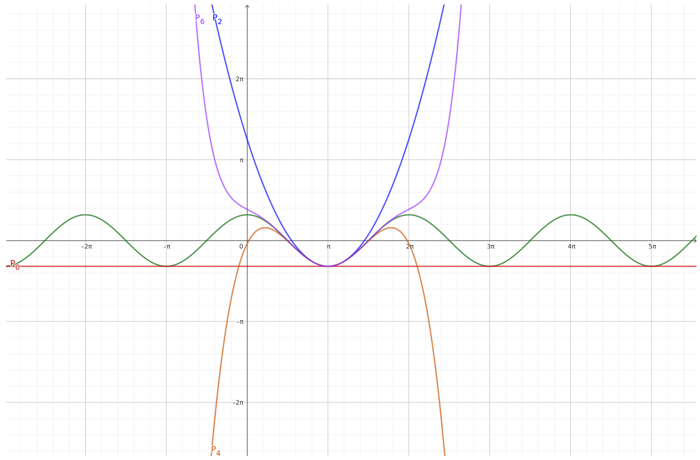
Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$$

Así, esta es nuestra **cuarta** aproximación a la función. $P_6(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$

Podemos notar comportamientos similares en las aproximaciones con lo cual incluso Podríamos generar una fórmula para generar estos Polinomio.

**A continuación están las gráficas, tanto de la función original como de los Polinomios Generados:**



Gráfica de la función y los Polinomios

Ampliación de la Gráfica (Para notar mejor la aproximación realizada)

| | |
|---|---|
| | $f(x) = \cos(x)$ |
| | $P_0(x) = -1$ |
| | $P_2(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$ |
| | $P_4(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$ |
| | $P_6(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$ |

Simbología