Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas 1

Licenciatura en Ciencias de la Computación

3ra lista de problemas

Tercer Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Salinas Trinidad Betsi Ivana
Villalobos Juárez Gontrán Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Noviembre 2024

3ra lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Salinas Trinidad Betsi Ivana
Villalobos Juárez Gontrán Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

3 de noviembre de 2024

ANTON-BIVENS-DAVIS 3.4 EJERCICIO 23

1) Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia r (en millas) desde el centro de la Tierra está dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12 cos\theta}$$

donde θ es el ángulo medido desde el punto de la órbita más cercano a la superficie de la Tierra (ver la figura adjunta).

a) Halla la altitud del satélite en el perigeo (el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el apogeo (el punto más alejado de la superficie de la Tierra). Usa 3960 mi como el radio de la Tierra.

b) En el instante en que θ es 120°, el ángulo θ aumenta a una tasa de 2,7° /min. Halla la altitud del satélite y la tasa a la que cambia la altitud en ese instante. Expresa la tasa en unidades de mi/min.

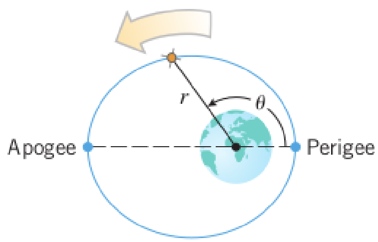


Figure Ex-23

a): 1.- Halla la altitud del satélite en el perigeo.
Tenenmos que evaluar la ecuación que nos da el radio del centro de la tierra al satélite, esto es cuado $\theta = 0°$ pues en la trayectoria elíptica del satélite donde intersecta al eje horizontal en el punto más cercano a la tierra es el ángulo que se forma.

$$\begin{aligned} r_p &= \left.\frac{4995}{1 + 0.12 cos\theta}\right|_{\theta=0} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12 cos(0)} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12(1)} \\ &\simeq 4459.8214\ mi \end{aligned}$$

Ahora para saber la altitud desde el punto más cercano a la superficie de la tierra al satélite debemos tomar en cuneta que $r_T = 3960\ mi$ para así calcular la diferencia de $r_p - r_T$, la cual nos dará la altitud deseada

$$Altitud_p = r_p - r_T = 4459.8214\ mi - 3960\ mi \simeq 499.8214\ mi$$

$\therefore$ la Altitud del satélite en el perigeo es de $\simeq 499.8214\ mi$ de distancia.
2.- Repetimos el procedimiento en el punto más alejado, el apogeo, este caso ocurre cuando $\theta = 180°$ pues considerando la trayectoria elíptica del satélite donde intersecta al eje horizontal en el punto más legano a la superficei de la tierra, el ángulo que se forma es de 180°.

$$\begin{aligned} r_a &= \left.\frac{4995}{1 + 0.12 cos\theta}\right|_{\theta=180} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12 cos(180)} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12(-1)} \\ &\simeq 5676.1363\ mi \end{aligned}$$

5676.1363 mi es la distancia desde el centro de la tierra al satélite, debemos calcular la diferencia entre el radio de la tierra r_T y la distancia en el punto r_a para saber la altitud desde la superficie hasta el punto r_a

$$Altitud_a = r_a - r_T = 5676.1363\ mi - 3960\ mi \simeq 1716.1363\ mi$$

$\therefore$ la Altitud del satélite en el Apogeo es de $\simeq 1716.1363\ mi$ de distancia.
b): Halla la altitud del satélite y la tasa a la que cambia la altitud en el instante que θ es 120°. Sabemos que el ángulo θ aumenta a una tasa de 2,7° /min. en ese instante.
1.- Para hallar la altitud del satélite debemos utilizamos el mismo argumento anterior cuando $\theta = 120°$

$$\begin{aligned} r_s &= \left.\frac{4995}{1+0.12cos\theta}\right|_{\theta=120} \\ &= \frac{4995}{1+0.12cos(120)} \\ &= \frac{4995}{1+0.12(-\frac{1}{2})} \\ &\simeq 5313.8297\ mi \\ Altitud_s &= r_s - r_T \\ &= 5313.8297\ mi - 3960\ mi \\ &\simeq 1353.8297\ mi \end{aligned}$$

$\therefore$ la Altitud del satélite cuando $\theta = 120°$ es de $\simeq 1353.8297\ mi$ de distancia.
la tasa a la que cambia la altitud en ese instante.

La altitud r depende del ángulo θ, y θ a su vez cambia con el tiempo t. La regla de la cadena nos permite relacionar estas tasas de cambio.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{4995}{1+0.12\cdot cos\theta}\right) \\ &= -\frac{4995\cdot(-0.12\,(sen\theta))}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2} \\ \therefore \frac{dr}{d\theta} &= \frac{599.4\cdot(sen\theta)}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2.7°}{min} \\ \text{Nota: en radianes } \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2.7\cdot\pi}{180} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{dr}{dt} =& \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \\ =& \frac{599.4\cdot(sen\theta)}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2}\cdot\left(\frac{2.7\cdot\pi}{180}\right) \\ =& \frac{599.4\cdot(sen\theta)}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2}\cdot(0.015\cdot\pi) \\ =& \frac{599.4\cdot(0.015\cdot\pi)\cdot(sen\theta)}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2} \\ =& \frac{8.991\pi\cdot(sen\theta)}{(1+0.12\cdot cos\theta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \left.\frac{dr}{dt}\right|_{\theta=120°} =& \frac{8.991\pi\cdot(sen(120°))}{(1+0.12\cdot cos(120°))^2} \\ =& \frac{8.991\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(1+0.12\cdot(-\frac{1}{2})\right)^2} \\ \simeq& \frac{24.4618}{0.8836} \\ \simeq& 27.6842\ mi/min \end{aligned}$$

$\therefore$ la tasa a la que cambia la altitud en ese instante es de 27.6842 mi/min

ANTON-BIVENS-DAVIS 9.7 EJERCICIO 29

29) Encuentra los primeros 4 polinomios distintos de Taylor sobre $x = x_0$, y usa una utilidad gráfica para graficar la función dada y el polinomio de Taylor en la misma pantalla.

$$f(x) = cosx \text{ en } x_0 = \pi$$

Para facilitar la búsqueda de estos polinomios, primero hallemos las derivadas (que presentará una forma cíclica):

Derivando:	Evaluando en: $x_0 = \pi$	Valor:
$f^0(x) = cos(x)$	$f^0(\pi) = cos(\pi)$	$cos(\pi) = -1$
$f^1(x) = -sen(x)$	$f^1(\pi) = -sen(\pi)$	$-sen(\pi) = 0$
$f^2(x) = -cos(x)$	$f^2(\pi) = -cos(\pi)$	$-cos(\pi) = 1$
$f^3(x) = sen(x)$	$f^3(\pi) = sen(\pi)$	$sen(\pi) = 0$

Para generar los diferentes polinomios ocuparemos el desarrollo de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Para $P_0(x)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{0} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k &= \frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0 \\
\frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0 &= \frac{cos(\pi)}{1}(x - \pi)^0 \\
\frac{cos(\pi)}{1}(x - \pi)^0 &= cos(\pi)(1) \\
cos(\pi)(1) &= -1
\end{aligned}$$

Así, esta es nuestra **primera** aproximación a la función. $P_0(x) = -1$
Para $P_1(x)$:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x - \pi)^1$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned}
\frac{f^1(\pi)}{1!}(x - \pi)^1 &= \frac{-sen(\pi)}{1}(x - \pi) \\
\frac{sen(\pi)}{1}(x - \pi) &= sen(\pi)(x - \pi) \\
sen(\pi)(x - \pi) &= 0
\end{aligned}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1+0$$
$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1$$

En este caso podemos ver que dada la multiplación por 0 (debido a $sen(\pi)$) el polinomio resultante es igual al anterior (NO es distinto).
Podremos ver que se repetirá este comportamiento siempre que el término de la sumatoria involucre $sen(\pi)$, con esto el término se çancelará".

Para $P_2(x)$:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 = \frac{-cos(\pi)}{2}(x-\pi)^2$$
$$\frac{-cos(\pi)}{2}(x-\pi)^2 = \frac{1}{2}(x-\pi)^2$$
$$\frac{1}{2}(x-\pi)^2 = \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Así, esta es nuestra **segunda** aproximación a la función. $P_2(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$

Para $P_3(x)$:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$

Para el nuevo Término:
Como se mecionó mas arriba sabemos que el nuevo termino involucrará a $sen(\pi)$ (Dado que la derivación de $cos(x)$ es cíclica), por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + 0$$
$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$$

Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para $P_4(x)$:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^4(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned}
\frac{f^4(\pi)}{4!}(x-\pi)^4 &= \frac{cos(\pi)}{24}(x-\pi)^4 \\
\frac{cos(\pi)}{24}(x-\pi)^4 &= \frac{-1}{24}(x-\pi)^4 \\
\frac{-1}{24}(x-\pi)^4 &= -\frac{(x-\pi)^4}{24}
\end{aligned}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$$

Así, esta es nuestra **tercera** aproximación a la función. $P_4(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$

Para $P_5(x)$:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + ... + \frac{f^5(\pi)}{5!}(x-\pi)^5$$

Para el nuevo Término:
Este termino también involucrará a $sen(\pi)$, por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k &= -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + 0 \\
\sum_{k=0}^{5} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k &= -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}
\end{aligned}$$

Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para $P_6(x)$:

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!}(x-\pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + ... + \frac{f^6(\pi)}{6!}(x-\pi)^6$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^6(\pi)}{6!}(x-\pi)^6 = \frac{-cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6$$
$$\frac{-cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6 = \frac{1}{720}(x-\pi)^6$$
$$\frac{1}{720}(x-\pi)^6 = \frac{(x-\pi)^6}{720}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$$

Así, esta es nuestra **cuarta** aproximación a la función. $P_6(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$

Podemos notar comportamientos similares en las aproximaciones con lo cual incluso Podríamos generar una fórmula para generar estos Polinomio.

A continuación están las gráficas, tanto de la función original como de los Polinomios Generados:

Gráfica de la función y los Polinomios

Ampliación de la Gráfica (Para notar mejor la aproximación realizada)

(verde)	$f(x) = \cos(x)$
(rojo)	$P_0(x) = -1$
(azul)	$P_2(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$
(naranja)	$P_4(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24}$
(violeta)	$P_6(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$

Simbología

ANTON-BIVENS-DAVIS 9.7 EJERCICIO 30

30) Encuentra los primeros 4 polinomios distintos de Taylor sobre $x = x_0$, y usa una utilidad gráfica para graficar la función dada y el polinomio de Taylor en la misma pantalla.

$$f(x) = ln(x+1) \text{ en } x_0 = 0$$

Para facilitar la búsqueda de estos polinomios, primero hallemos las derivadas:

Derivando:	Evaluando en: $x_0 = 0$	Valor:
$f^0(x) = ln(x+1)$	$f^0(0) = ln(1)$	$ln(1) = 0$
$f^1(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$f^1(0) = \dfrac{1}{1}$	$\dfrac{1}{1} = 1$
$f^2(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$	$f^2(0) = -\dfrac{1}{(1)^2}$	$-\dfrac{1}{(1)^2} = -1$
$f^3(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$	$f^3(0) = \dfrac{2}{(1)^3}$	$\dfrac{2}{(1)^3} = 2$

Para generar los diferentes polinomios y dado que $x_0 = 0$, utilizaremos el desarrollo de Mclaurin.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k$$

Para $P_0(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k &= \frac{f^0(0)}{0!}(x)^0 \\ \frac{f^0(0)}{0!}(x)^0 &= \frac{ln(0+1}{0!}(x)^0 \\ \frac{ln(0+1}{0!}(x)^0 &= \frac{8}{1}(1) \end{aligned}$$

Así, esta es nuestra **primera** aproximación a la función. $P_0(x) = 0$

Para $P_1(x)$:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = \frac{f^0(0)}{0!}(x)^0 + \frac{f^1(0)}{1!}(x)^1$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned} \frac{f^1(0)}{1!}(x)^1 &= \frac{\frac{1}{0+1}}{1}x^1 \\ \frac{\frac{1}{0+1}}{1}x^1 &= \frac{1}{1}x^1 \\ \frac{1}{1}x^1 &= x \end{aligned}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = 0 + x$$

Así, esta es nuestra **segunda** aproximación a la función. $P_1(x) = 0 + x$

Para $P_2(x)$:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = \frac{f^0(0)}{0!}(x)^0 + \frac{f^1(0)}{1!}(x)^1 + \frac{f^2(0)}{2!}(x)^2$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^2(0)}{2!}(x)^2 = \frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{2!}x^2$$
$$\frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{2!}x^2 = \frac{-\frac{1}{1}}{2}x^2$$
$$\frac{-1}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = 0 + x - \frac{x^2}{2}$$

Así, esta es nuestra **tercera** aproximación a la función. $P_2(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2}$ Para $P_3(x)$:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = \frac{f^0(0)}{0!}(x)^0 + \frac{f^1(0)}{1!}(x)^1 + \frac{f^2(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f^3(0)}{3!}(x)^3$$

Para el nuevo Término:

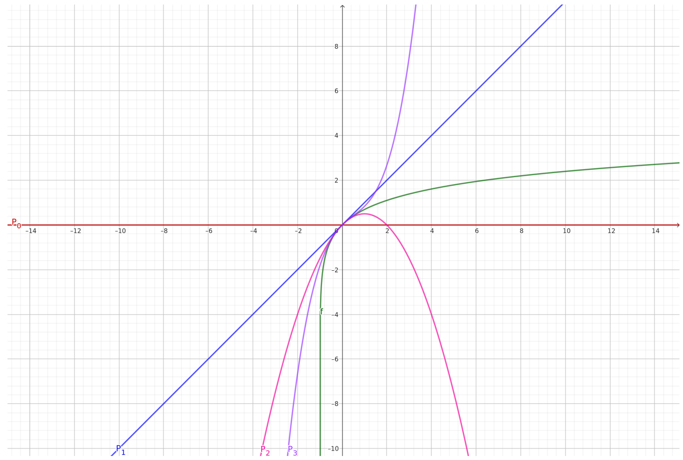
$$\frac{f^3(0)}{3!}(x)^3 = \frac{\frac{2}{(0+1)^3}}{3!}x^3$$
$$\frac{\frac{2}{(0+1)^3}}{3!}x^3 = \frac{\frac{2}{1}}{3!}x^3$$
$$\frac{2}{6}x^3 = \frac{x^3}{3}$$

Así la sumatoria resulta:

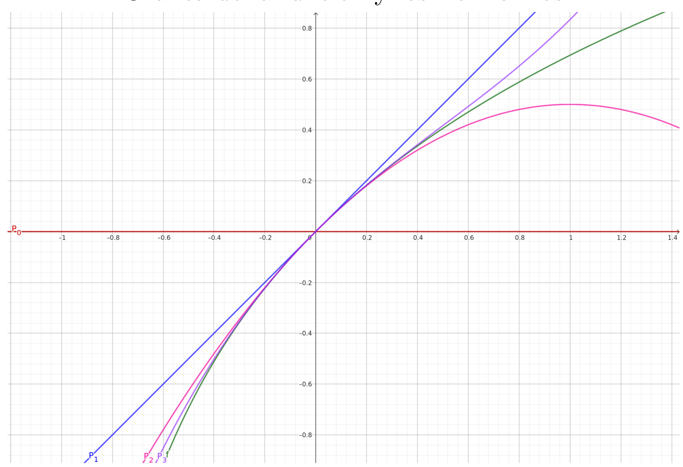
$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Así, esta es nuestra **cuarta** aproximación a la función. $P_3(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

A continuación están las gráficas:



Gráfica de la función y los Polinomios



Ampliación de la Gráfica (Para notar mejor la aproximación realizada)

	$f(x) = \ln(x+1)$
	$P_0(x) = 0$
	$P_1(x) = 0 + x$
	$P_2(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2}$
	$P_3(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Simbología

ANTON-BIVENS-DAVIS 3.6 EJERCICIO 58

Problema 58: Verificación de límites que son iguales a a

a) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{\ln(a)}{\ln(1+x)}} = a$

S

1. Primero, reconocemos que es una forma indeterminada 0^0 cuando $x \to 0$
2. Usamos propiedades de logaritmos:
$$\ln(\lim_{x\to 0} x^{\frac{\ln(a)}{\ln(1+x)}}) = \ln(a)$$
3. Usamos límites:
$$\lim_{x\to 0} \ln(x^{\frac{\ln(a)}{\ln(1+x)}}) = \ln(a)$$
4. Usando propiedades de logaritmos:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a)}{\ln(1+x)} \ln(x) = \ln(a)$$
5. Factorizamos $\ln(a)$:
$$\ln(a) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\ln(1+x)} = \ln(a)$$
6. Para el límite restante:
   - $\frac{\ln(x)}{\ln(1+x)} = 1$
7. Por lo tanto:
$$\ln(a) \cdot 1 = \ln(a)$$
8. Aplicando e en ambos lados:
$$e^{\ln(a)} = a$$

b) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}} = a$

1. Cuando $x \to 1$, esto se convierte en $1^{\frac{\ln(a)}{1}} = 1^{\ln(a)}$
2. Tomamos ln en ambos lados:
$$\ln(\lim_{x\to 1} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}) = \ln(a)$$
3. Usando propiedades de límites:
$$\lim_{x\to 1} \ln(x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}) = \ln(a)$$
4. Usando propiedades de logaritmos:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(a)}{1+\ln(x)} \ln(x) = \ln(a)$$
5. Cuando $x \to 1$:
   - $\ln(x) \to 0$
   - $1 + \ln(x) \to 1$
6. Aplicando e en ambos lados:
$$e^{\ln(a)} = a$$

c) $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{\ln(a)}{x}} = a$

1. Cuando $x \to 1$, esto se convierte en $1^{\frac{\ln(a)}{1}} = 1^{\ln(a)}$
2. Tomamos ln en ambos lados:
$$\ln\left(\lim_{x\to 1} x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}\right) = \ln(a)$$
3. Usando propiedades de límites:
$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{\ln(a)}{1+\ln(x)}}\right) = \ln(a)$$
4. Usando propiedades de logaritmos:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(a)}{1+\ln(x)} \ln(x) = \ln(a)$$
5. Cuando $x \to 1$:
   - $\ln(x) \to 0$
   - $1 + \ln(x) \to 1$
6. Aplicando e en ambos lados:
$$e^{\ln(a)} = a$$

ANTON-BIVENS-DAVIS 4.7 EJERCICIO 32

Ejercicio 32: Utilice el método de Newton para aproximar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir bajo la curva $y = \cos(x)$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución

Área del Rectángulo: Sea $A(x)$ el área del rectángulo en función de x:

$$A(x) = x \cdot \cos(x) \tag{1}$$

Derivada de $A(x)$: Derivamos $A(x)$ con respecto a x para encontrar los puntos críticos.

$$A'(x) = \cos(x) - x\sin(x) \tag{2}$$

Queremos encontrar el valor de x tal que $A'(x) = 0$.
Segunda Derivada de $A(x)$: Calculamos $A''(x)$ para usar el método de Newton.

$$A''(x) = -2\sin(x) - x\cos(x) \tag{3}$$

Método de Newton: La fórmula iterativa del método de Newton es:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{A'(x_n)}{A''(x_n)} \tag{4}$$

Cálculo Numérico: Empezamos con un valor inicial $x_0 = 0.5$ y aplicamos la fórmula iterativa hasta que la diferencia entre x_{n+1} y x_n.
aproximaciones:

$$x_1 = 0.5 - 1 - \frac{0.9955}{-0.5174} = 1.4240 \tag{5}$$

Iteramos esa fortmula con los valores resultantes anteriores hasta llegar a una amproximación valida.

$$x_2 = 1.0765 \tag{6}$$

$$x_3 = 0.9549 \tag{7}$$

$$x_3 = 0.9510 \tag{8}$$

Resultado Final: El valor de x que maximiza el área es aproximadamente:

$$x_3 = 0.9510 \tag{9}$$

ANTON-BIVENS-DAVIS 4.7 EJERCICIO 33

Ejercicio 33: Demuestre que en un círculo de radio r, el ángulo central θ que subtiende un arco cuya longitud es 1.5 veces la longitud L de su cuerda satisface la ecuación:

$$\theta = 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Solución

Sabemos que la longitud del arco s que subtiende un ángulo central θ en un círculo de radio r está dada por:

$$s = r\theta \tag{10}$$

Longitud de la Cuerda: La longitud L de la cuerda que subtiende el mismo ángulo θ en un círculo de radio r está dada por:

$$L = 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{11}$$

Esta fórmula proviene de la geometría de un triángulo isósceles formado por los dos radios y la cuerda.
En el problema, la longitud del arco es 1.5 veces la longitud de la cuerda, es decir:

$$s = 1.5 \cdot L \tag{12}$$

Sustituimos los valores de s y L en la ecuación anterior:

$$r\theta = 1.5 \cdot \left(2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{13}$$

$$r\theta = 3r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{14}$$

Podemos dividir ambos lados de la ecuación por r, siempre que $r \neq 0$:

$$\theta = 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{15}$$

Conclusión: por lo tantp queda demostrado que el ángulo central θ satisface la ecuación:

$$\theta = 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ANTON-BIVENS-DAVIS 4 EJERCICIO 48

2) Utilice la diferenciación implícita para demostrar que una función definida implícitamente por $senx + cosy = 2y$ tiene un punto crítico siempre que $cosx = 0$. Luego utilice la prueba de la primera o segunda derivada para clasificar estos puntos críticos como máximos o mínimos relativos.

Aplicación de la derivación implícita

$$\begin{aligned}
sen(x) + cos(y) &= 2y \\
\frac{d}{dx}(sen(x)) + \frac{d}{dx}(cos(y)) &= \frac{d}{dx}(2y) \\
cos(x) + (-sen(y))\frac{dy}{dx} &= 2\frac{dy}{dx} \\
(-sen(y))\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} &= -cos(x) \\
\frac{dy}{dx}(-sen(y) - 2) &= -cos(x) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-cos(x)}{(-sen(y) - 2)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-cos(x)}{-(sen(y) + 2)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{cos(x)}{(sen(y) + 2)}
\end{aligned}$$

Análisis de púntos críticos

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \iff cos(x) = 0$$

$\therefore$nuestros puntos críticos ocurren en los valores:

$$cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Clasificación de los puntos críticos. Para clasificar estos puntos críticos, aplicamos la prueba de la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{cos(x)}{sen(y) + 2}\right) &= \frac{(sen(y) + 2)(-sen(x)) - cos(x)\left(cos(y)\frac{dy}{dx}\right)}{(sen(y) + 2)^2} \\
&= \frac{(sen(y) + 2)(-sen(x)) - cos(x) \cdot cos(y) \cdot \frac{cos(x)}{sen(y)+2}}{(sen(y) + 2)^2} \\
&= \frac{(sen(y) + 2)^2(-sen(x)) - cos^2(x) \cdot cos(y)}{(sen(y) + 2)^3}
\end{aligned}$$

Dado que la ecuación *coseno* es periódica, toma el valor de cero en exactamente estos puntos dentro de su periodo. $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Para ver esto más claramente:

Evaluamos los puntos donde $cos(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{cos(x)=0} &= \frac{(sen(y) + 2)^2(-sen(x)) - cos^2(x) \cdot cos(y)}{(sen(y) + 2)^3} \\
&= \frac{(sen(y) + 2)^2(-sen(x)) - 0 \cdot cos(y)}{(sen(y) + 2)^3} \\
&= -\frac{sen(x)}{(sen(y) + 2)}
\end{aligned}$$

Sustutuyendo en $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin y + 2}$$

Sustutuyendo en $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $x = \frac{3\pi}{2}$:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin y + 2}$$

Por lo tanto, para $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ es negativo, lo que implica un **máximo relativo**.
Para $x = \frac{3\pi}{2} \pm k\pi$ es positivo, lo que implica un **mínimo relativo**.

ANTON-BIVENS-DAVIS Cap 4 EJERCICIO 60

Problema 60 (Ventana de Iglesia)

1. Sea r = radio del semicírculo
   Sea h = altura del rectángulo
   Sea P = perímetro total
   Base del rectángulo = $2r$

2. Relaciones de área:
   - Área del semicírculo = $\frac{\pi r^2}{2}$ (vidrio azul)
   - Área del rectángulo = $2r \times h$ (vidrio transparente)

3. Dado que el vidrio azul es el doble del transparente:

$$\frac{\pi r^2}{2} = 2(2rh)$$

$$\frac{\pi r^2}{2} = 4rh$$

$$h = \frac{\pi r}{8}$$

4. Cálculo del perímetro:

$$\begin{aligned}
&P = \text{arco del semicírculo} + \text{base del rectángulo} + \text{lados del rectángulo} \\
&P = \pi r + 2r + 2h \\
&P = \pi r + 2r + 2(\frac{\pi r}{8}) \\
&P = \pi r + 2r + \frac{\pi r}{4} \\
&P = (\frac{5\pi}{4} + 2)r
\end{aligned}$$

5. Despejamos r:

$$r = \frac{P}{\frac{5\pi}{4} + 2}$$

ANTON-BIVENS-DAVIS 4 (Review Exercises) EJERCICIO 72

72) De acuerdo con la Ley de Kepler, los planetas en nuestro Sistema Solar se mueven en orbitas elípticas alrededor del Sol.
Si el acercamiento más cercano al Sol de un planeta ocurre en el tiempo $t = 0$, entonces la distancia r del centro del planeta al centro del Sol en algún tiempo posterior t puede ser determinado por la ecuación:

$$r = a(1 - ecos\phi)$$

donde a es la distancia promedio entre centros, e es una constante postiva que mide la planitud de la orbita elíptica y ϕ es la solución a la ecuación de Kepler:

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - esen\phi$$

en donde T es el tiempo que tarda una orbita completa de el planeta. Calcula la distancia de la Tierra al Sol cuado $T = 90$ días (Primero encuetra ϕ de la Ecuación de Kepler, y luego usa este valor de ϕ para encontrar la distancia. Usa $a = 150 \times 10^6$ km)

Ya que queremos encontrar r cuando el tiempo es de 90 días, para esto usaremos la fórmula $r = a(1 - ecos\phi)$, nos hace falta el valor de ϕ, para esto utilizaremos la fórmula $\frac{2\pi t}{T} = \phi - esen\phi$. Aquí nos vemos en una complicación para hallar el valor de ϕ, debemos ocupar el método de Newton.

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - esen\phi$$
$$esen\phi + \frac{2\pi t}{T} = \phi$$
$$esen\phi - \phi + \frac{2\pi t}{T} = 0$$

Sabemos que el Valor de $\frac{2\pi t}{T}$ es una constante en esta ecuación, esta vale aproximadamente 1.54927.

Debemos recordar el Método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ahora derivaremos $esen\phi - \phi + \frac{2\pi t}{T} = 0$ para poder usar este método, derivaremos respecto a ϕ.

$$f(\phi) = esen\phi - \phi + \frac{2\pi t}{T}$$
$$\frac{d}{d\phi} f(\phi) = \frac{d}{d\phi} esen\phi - \phi + \frac{2\pi t}{T}$$
$$f'(\phi) = e\frac{d}{d\phi} sen\phi - \frac{d}{d\phi}\phi + \frac{d}{d\phi}\frac{2\pi t}{T}$$

e y $\frac{2\pi t}{T}$ son contantes

$$f'(\phi) = ecos\phi - 1$$

Ahora tomando como nuestra primer aproximación de x a $\phi_1 = 1$.
Aplicaremos ahora el Método de Newton para tener una mejor aproximación.

Tenemos a $e = 0.0167$ y a $\frac{2\pi t}{T} = 1.54927$, así:

$$f(\phi) = 0.0167sen(\phi) - \phi + 1.54927$$
$$f'(\phi) = 0.0167cos(\phi) - 1$$

Con $\phi_1 = 1$

$$\begin{aligned}\phi_{1+1} &= 1 - \frac{0.0167sen(1) - 1 + 1.54927}{0.0167cos(1) - 1}\\ \phi_2 &= 1.568451\end{aligned}$$

Con $\phi_2 = 1.568451$

$$\begin{aligned}\phi_{2+1} &= 1.568451 - \frac{0.0167sen(1.568451) - 1.568451 + 1.54927}{0.0167cos(1.568451) - 1}\\ \phi_3 &= 1.565969\end{aligned}$$

Con $\phi_3 = 1.565969$

$$\begin{aligned}\phi_{3+1} &= 1.565969 - \frac{0.0167sen(1.565969) - 1.565969 + 1.54927}{0.0167cos(1.565969) - 1}\\ \phi_4 &= 1.565969\end{aligned}$$

Esto quiere decir que llegamos a una buena aproximación del valor de ϕ.

Ahora con la información que tenemos podemos dar el valor de r en $t = 90$ días.
Tenemos así:

$$\begin{aligned}a &= 150 \times 10^6\\ e &= 0.0167\\ \phi &= 1.565969\end{aligned}$$

Sustituyendo en $r = a(1 - ecos\phi)$, tenemos:

$$\begin{aligned}r &= 150 \times 10^6(1 - 0.0167cos(1.565969))\\ r &= 150 \times 10^6(1 - 0.0167(0.0048273))\\ r &= 150 \times 10^6(1 - 0.0167(0.0048273))\\ r &= 150 \times 10^6(1 - 0.00008061)\\ r &= 150 \times 10^6(0.99991938)\\ r &= 149987907.6\\ r &= 149.9879076 \times 10^6\end{aligned}$$

Así sabemos que la distancia de la Tierra al Sol a los 90 días es aproximadamente de 149.9879076×10^6 metros.