



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS APLICADAS 1

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

## 3RA LISTA DE PROBLEMAS

*Tercer Parcial*

Autores:

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo

Salinas Trinidad Betsi Ivana

Villalobos Juárez Gontrán Eliut

Treviño Puebla Héctor Jerome

Noviembre 2024

### 3ra lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo  
Salinas Trinidad Betsi Ivana  
Villalobos Juárez Gontrán Eliut  
Treviño Puebla Héctor Jerome

3 de noviembre de 2024

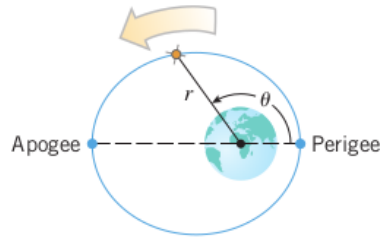
## ANTON-BIVENS-DAVIS 3.4 EJERCICIO 23

1) Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia  $r$  (en millas) desde el centro de la Tierra está dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12\cos\theta}$$

donde  $\theta$  es el ángulo medido desde el punto de la órbita más cercano a la superficie de la Tierra (ver la figura adjunta).

- Halla la altitud del satélite en el perigeo (el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el apogeo (el punto más alejado de la superficie de la Tierra). Usa 3960 mi como el radio de la Tierra.
- En el instante en que  $\theta$  es  $120^\circ$ , el ángulo  $\theta$  aumenta a una tasa de  $2.7^\circ/\text{min}$ . Halla la altitud del satélite y la tasa a la que cambia la altitud en ese instante. Expresa la tasa en unidades de mi/min.



◀ Figure Ex-23

a): 1.- Halla la altitud del satélite en el perigeo.

Tenemos que evaluar la ecuación que nos da el radio del centro de la tierra al satélite, esto es cuando  $\theta = 0^\circ$  pues en la trayectoria elíptica del satélite donde intersecta al eje horizontal en el punto más cercano a la tierra es el ángulo que se forma.

$$\begin{aligned} r_p &= \left. \frac{4995}{1 + 0.12\cos\theta} \right|_{\theta=0} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12\cos(0)} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12(1)} \\ &\simeq 4459.8214 \text{ mi} \end{aligned}$$

Ahora para saber la altitud desde el punto más cercano a la superficie de la tierra al satélite debemos tomar en cuenta que  $r_T = 3960 \text{ mi}$  para así calcular la diferencia de  $r_p - r_T$ , la cual nos dará la altitud deseada

$$\text{Altitud}_p = r_p - r_T = 4459.8214 \text{ mi} - 3960 \text{ mi} \simeq 499.8214 \text{ mi}$$

$\therefore$  la Altitud del satélite en el perigeo es de  $\simeq 499.8214 \text{ mi}$  de distancia.

2.- Repetimos el procedimiento en el punto más alejado, el apogeo, este caso ocurre cuando  $\theta = 180^\circ$  pues considerando la trayectoria elíptica del satélite donde intersecta al eje horizontal en el punto más lejano a la superficie de la tierra, el ángulo que se forma es de  $180^\circ$ .

$$\begin{aligned} r_a &= \left. \frac{4995}{1 + 0.12\cos\theta} \right|_{\theta=180} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12\cos(180)} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12(-1)} \\ &\simeq 5676.1363 \text{ mi} \end{aligned}$$

5676.1363 *mi* es la distancia desde el centro de la tierra al satélite, debemos calcular la diferencia entre el radio de la tierra  $r_T$  y la distancia en el punto  $r_a$  para saber la altitud desde la superficie hasta el punto  $r_a$

$$Altitud_a = r_a - r_T = 5676.1363 \text{ mi} - 3960 \text{ mi} \simeq 1716.1363 \text{ mi}$$

$\therefore$  la Altitud del satélite en el Apogeo es de  $\simeq 1716.1363 \text{ mi}$  de distancia.

**b):** Halla la altitud del satélite y la tasa a la que cambia la altitud en el instante que  $\theta$  es  $120^\circ$ . Sabemos que el ángulo  $\theta$  aumenta a una tasa de  $2,7^\circ / \text{min.}$  en ese instante.

1.- Para hallar la altitud del satélite debemos utilizamos el mismo argumento anterior cuando  $\theta = 120^\circ$

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \theta} \Big|_{\theta=120} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12 \cos(120)} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12(-\frac{1}{2})} \\ &\simeq 5313.8297 \text{ mi} \\ Altitud_s &= r_s - r_T \\ &= 5313.8297 \text{ mi} - 3960 \text{ mi} \\ &\simeq 1353.8297 \text{ mi} \end{aligned}$$

$\therefore$  la Altitud del satélite cuando  $\theta = 120^\circ$  es de  $\simeq 1353.8297 \text{ mi}$  de distancia.

la tasa a la que cambia la altitud en ese instante.

La altitud  $r$  depende del ángulo  $\theta$ , y  $\theta$  a su vez cambia con el tiempo  $t$ . La regla de la cadena nos permite relacionar estas tasas de cambio.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot \cos \theta} \right) & \implies \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{4995 \cdot (-0.12 (\sin \theta))}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} & &= \frac{599.4 \cdot (\sin \theta)}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} \cdot \left( \frac{2.7 \cdot \pi}{180} \right) \\ \therefore \frac{dr}{d\theta} &= \frac{599.4 \cdot (\sin \theta)}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} & &= \frac{599.4 \cdot (\sin \theta)}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} \cdot (0.015 \cdot \pi) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2.7^\circ}{\text{min}} & &= \frac{599.4 \cdot (0.015 \cdot \pi) \cdot (\sin \theta)}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} \\ \text{Nota: en radianes } \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2.7 \cdot \pi}{180} & &= \frac{8.991\pi \cdot (\sin \theta)}{(1 + 0.12 \cdot \cos \theta)^2} \\ & & & \implies \frac{dr}{dt} \Big|_{\theta=120^\circ} = \frac{8.991\pi \cdot (\sin(120^\circ))}{(1 + 0.12 \cdot \cos(120^\circ))^2} \\ & & &= \frac{8.991\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(1 + 0.12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} \\ & & &\simeq \frac{24.4618}{0.8836} \\ & & &\simeq 27.6842 \text{ mi/min} \end{aligned}$$

$\therefore$  la tasa a la que cambia la altitud en ese instante es de  $27.6842 \text{ mi/min}$

## ANTON-BIVENS-DAVIS 4 EJERCICIO 48

2) Utilice la diferenciación implícita para demostrar que una función definida implícitamente por  $\sin x + \cos y = 2y$  tiene un punto crítico siempre que  $\cos x = 0$ . Luego utilice la prueba de la primera o segunda derivada para clasificar estos puntos críticos como máximos o mínimos relativos.

Aplicación de la derivación implícita

$$\begin{aligned}
 \sin(x) + \cos(y) &= 2y \\
 \frac{d}{dx}(\sin(x)) + \frac{d}{dx}(\cos(y)) &= \frac{d}{dx}(2y) \\
 \cos(x) + (-\sin(y)) \frac{dy}{dx} &= 2 \frac{dy}{dx} \\
 (-\sin(y)) \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} &= -\cos(x) \\
 \frac{dy}{dx}(-\sin(y) - 2) &= -\cos(x) \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos(x)}{(-\sin(y) - 2)} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos(x)}{-(\sin(y) + 2)} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(x)}{(\sin(y) + 2)}
 \end{aligned}$$

Análisis de puntos críticos

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{dy}{dx} = 0 &\iff \cos(x) = 0 \\
 \therefore \text{nuestros puntos críticos ocurren en los valores:} \\
 \cos(x) = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Clasificación de los puntos críticos. Para clasificar estos puntos críticos, aplicamos la prueba de la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2y}{dx^2} \left( \frac{\cos(x)}{\sin(y) + 2} \right) &= \frac{(\sin(y) + 2)(-\sin(x)) - \cos(x) \left( \cos(y) \frac{dy}{dx} \right)}{(\sin(y) + 2)^2} \\
 &= \frac{(\sin(y) + 2)(-\sin(x)) - \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(y) + 2}}{(\sin(y) + 2)^2} \\
 &= \frac{(\sin(y) + 2)^2(-\sin(x)) - \cos^2(x) \cdot \cos(y)}{(\sin(y) + 2)^3}
 \end{aligned}$$

Dado que la ecuación *coseno* es periódica, toma el valor de cero en exactamente estos puntos dentro de su periodo.  
 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  y  $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Para ver esto más claramente:

Evaluamos los puntos donde  $\cos(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{\cos(x)=0} &= \frac{(\sin(y) + 2)^2(-\sin(x)) - \cos^2(x) \cdot \cos(y)}{(\sin(y) + 2)^3} \\
 &= \frac{(\sin(y) + 2)^2(-\sin(x)) - 0 \cdot \cos(y)}{(\sin(y) + 2)^3} \\
 &= -\frac{\sin(x)}{(\sin(y) + 2)}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $\frac{d^2y}{dx^2}$  para  $x = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin y + 2}$$

Sustituyendo en  $\frac{d^2y}{dx^2}$  para  $x = \frac{3\pi}{2}$ :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin y + 2}$$

Por lo tanto, para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  es negativo, lo que implica un **máximo relativo**.

Para  $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$  es positivo, lo que implica un **mínimo relativo**.

## ANTON-BIVENS-DAVIS 9.7 EJERCICIO 29

**29)** Encuentra los primeros 4 polinomios distintos de Taylor sobre  $x = x_0$ , y usa una utilidad gráfica para graficar la función dada y el polinomio de Taylor en la misma pantalla.

$$f(x) = \cos x \text{ en } x_0 = \pi$$

Para facilitar la búsqueda de estos polinomios, primero hallemos las derivadas (que presentará una forma cíclica):

| Derivando:          | Evaluando en: $x_0 = \pi$ | Valor:           |
|---------------------|---------------------------|------------------|
| $f^0(x) = \cos(x)$  | $f^0(\pi) = \cos(\pi)$    | $\cos(\pi) = -1$ |
| $f^1(x) = -\sin(x)$ | $f^1(\pi) = -\sin(\pi)$   | $-\sin(\pi) = 0$ |
| $f^2(x) = -\cos(x)$ | $f^2(\pi) = -\cos(\pi)$   | $-\cos(\pi) = 1$ |
| $f^3(x) = \sin(x)$  | $f^3(\pi) = \sin(\pi)$    | $\sin(\pi) = 0$  |

Para generar los diferentes polinomios ocuparemos el desarrollo de Taylor:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Para  $P_0(x)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k &= \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 \\ \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 &= \frac{\cos(\pi)}{1} (x - \pi)^0 \\ \frac{\cos(\pi)}{1} (x - \pi)^0 &= \cos(\pi)(1) \\ \cos(\pi)(1) &= -1 \end{aligned}$$

Así, esta es nuestra **primera** aproximación a la función.  $P_0(x) = -1$

Para  $P_1(x)$  :

$$\sum_{k=0}^1 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned} \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 &= \frac{-\sin(\pi)}{1} (x - \pi) \\ \frac{\sin(\pi)}{1} (x - \pi) &= \sin(\pi)(x - \pi) \\ \sin(\pi)(x - \pi) &= 0 \end{aligned}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^1 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1 + 0$$

$$\sum_{k=0}^1 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1$$

En este caso podemos ver que dada la multiplicación por 0 (debido a  $\sin(\pi)$ ) el polinomio resultante es igual al anterior (NO es distinto).

Podremos ver que se repetirá este comportamiento siempre que el término de la sumatoria involucre  $\sin(\pi)$ , con esto el término se cancelará”.

Para  $P_2(x)$  :

$$\sum_{k=0}^2 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!} (x - \pi)^2$$

Para el nuevo Término:

$$\frac{f^2(\pi)}{2!} (x - \pi)^2 = \frac{-\cos(\pi)}{2} (x - \pi)^2$$

$$\frac{-\cos(\pi)}{2} (x - \pi)^2 = \frac{1}{2} (x - \pi)^2$$

$$\frac{1}{2} (x - \pi)^2 = \frac{(x - \pi)^2}{2}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^2 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2}$$

Así, esta es nuestra **segunda** aproximación a la función.  $P_2(x) = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2}$

Para  $P_3(x)$  :

$$\sum_{k=0}^3 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!} (x - \pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!} (x - \pi)^3$$

Para el nuevo Término:

Como se mencionó mas arriba sabemos que el nuevo termino involucrará a  $\sin(\pi)$  (Dado que la derivación de  $\cos(x)$  es cíclica), por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^3 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} + 0$$

$$\sum_{k=0}^3 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2}$$



Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para  $P_4(x)$  :

$$\sum_{k=0}^4 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 + \frac{f^2(\pi)}{2!} (x - \pi)^2 + \frac{f^3(\pi)}{3!} (x - \pi)^3 + \frac{f^4(\pi)}{4!} (x - \pi)^4$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned} \frac{f^4(\pi)}{4!} (x - \pi)^4 &= \frac{\cos(\pi)}{24} (x - \pi)^4 \\ \frac{\cos(\pi)}{24} (x - \pi)^4 &= \frac{-1}{24} (x - \pi)^4 \\ \frac{-1}{24} (x - \pi)^4 &= -\frac{(x - \pi)^4}{24} \end{aligned}$$

Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^4 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24}$$

Así, esta es nuestra **tercera** aproximación a la función.  $P_4(x) = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24}$

Para  $P_5(x)$  :

$$\sum_{k=0}^3 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 + \dots + \frac{f^5(\pi)}{5!} (x - \pi)^5$$

Para el nuevo Término:

Este termino también involucrará a  $\sin(\pi)$ , por esto, este término también será 0.

Así la sumatoria resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k &= -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24} + 0 \\ \sum_{k=0}^5 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k &= -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24} \end{aligned}$$

Por lo tanto este no es un Polinomio Distinto.

Para  $P_6(x)$  :

$$\sum_{k=0}^6 \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^0(\pi)}{0!} (x - \pi)^0 + \frac{f^1(\pi)}{1!} (x - \pi)^1 + \dots + \frac{f^6(\pi)}{6!} (x - \pi)^6$$

Para el nuevo Término:

$$\begin{aligned}\frac{f^6(\pi)}{6!}(x-\pi)^6 &= \frac{-\cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6 \\ \frac{-\cos(\pi)}{720}(x-\pi)^6 &= \frac{1}{720}(x-\pi)^6 \\ \frac{1}{720}(x-\pi)^6 &= \frac{(x-\pi)^6}{720}\end{aligned}$$

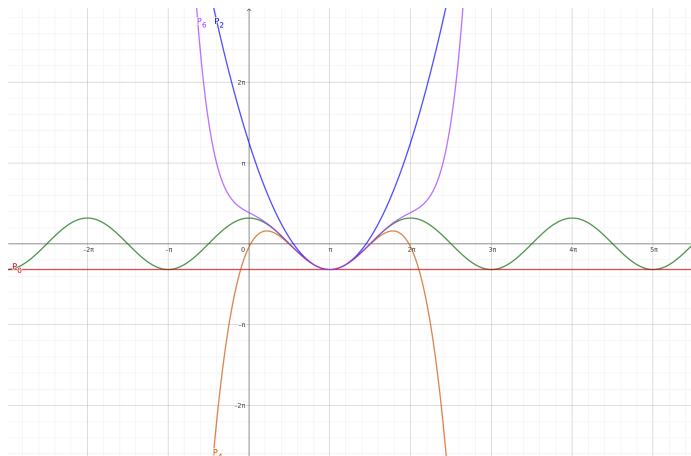
Así la sumatoria resulta:

$$\sum_{k=0}^4 \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$$

Así, esta es nuestra **cuarta** aproximación a la función.  $P_6(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{(x-\pi)^4}{24} + \frac{(x-\pi)^6}{720}$

Podemos notar comportamientos similares en las aproximaciones con lo cual incluso Podríamos generar una fórmula para generar estos Polinomios.

**A continuación están las gráficas, tanto de la función original como de los Polinomios Generados:**



Gráfica de la función y los Polinomios



Ampliación de la Gráfica (Para notar mejor la aproximación realizada)

|                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| <span style="color: green;">●</span>  | $f(x) = \cos(x)$   |
| <span style="color: red;">●</span>    | $P_0(x) = -1$  |
| <span style="color: blue;">●</span>   | $P_2(x) = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2}$  |
| <span style="color: orange;">●</span> | $P_4(x) = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24}$                           |
| <span style="color: purple;">●</span> | $P_6(x) = -1 + \frac{(x - \pi)^2}{2} - \frac{(x - \pi)^4}{24} + \frac{(x - \pi)^6}{720}$ |

Simbología