Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas 1

Licenciatura en Ciencias de la Computación

4ta lista de problemas

Cuarto Parcial

Autores:
Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Villalobos Juárez Gontrán Eliut
Treviño Puebla Héctor Jerome

Noviembre 2024

4ta lista de problemas

Ramírez Mendoza Joaquín Rodrigo
Treviño Puebla Héctor Jerome
Villalobos Juárez Gontrán Eliut

24 de noviembre de 2024

23. Utiliza una herramienta de calculo para encontrar las aproximaciones las aproximaciones del área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo indicado usando $n = 10$ subintervalos, utilizando los puntos extremos izquierdo, derecho y el punto medio.

Sea $y = f(x) = ln\ x, [1, 2]$

23.1 Aproximación por el extremo izquierdo

Sabemos que el area definida en los puntos extremos está dada por la suma de sus particiones descritas como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

donde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y $x_i^* = x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x$

$$A \approx \sum_{i=1}^{10} ln(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(a + (i-1)\Delta x)$$
$$= \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(1 + (i-1)0.1)$$

$n = 10,\ \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$			
i	$i \cdot \Delta x$	$x_i = 1 + i \cdot \Delta x$	$f(x_i)$
1	0.1	1.1	0
2	0.2	1.2	0.09531018
3	0.3	1.3	0.182321557
4	0.4	1.4	0.262364264
5	0.5	1.5	0.336472237
6	0.6	1.6	0.405465108
7	0.7	1.7	0.470003629
8	0.8	1.8	0.530628251
9	0.9	1.9	0.587786665
10	1	2	0.641853886
			suma = 3.512205777
			$A \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} = 0.351220578$

Tabla 1: Metodo de Aproximación por el extremo izquierdo x_i

$\therefore$ El área resultante con este método es 0.351220578 unidades de area.

23.2 Aproximación por el extremo derecho

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

donde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y $x_i^* = a + i\Delta x$

$$A \approx \sum_{i=1}^{10} ln(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(a + i * \Delta x)$$
$$= \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(1 + i * 0.1)$$

$n = 10,\ \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$			
i	$(i-1)\cdot\Delta x$	$x_i = 1 + (i-1)\cdot\Delta x$	$f(x_i)$
1	0	1	0.09531018
2	0.1	1.1	0.182321557
3	0.2	1.2	0.262364264
4	0.3	1.3	0.336472237
5	0.4	1.4	0.405465108
6	0.5	1.5	0.470003629
7	0.6	1.6	0.530628251
8	0.7	1.7	0.587786665
9	0.8	1.8	0.641853886
10	0.9	1.9	0.693147181
suma = 4.205352958			
$A \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} = 0.420535296$			

Tabla 2: Metodo de Aproximación por el extremo derecho x_i

$\therefore$ El área resultante con este método es 0.420535296 unidades de area.

23.3 Aproximación por punto medio

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

donde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y $x_i^* = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$

$$A \approx \sum_{i=1}^{10} ln(x_i^*)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(a + (i - \frac{1}{2})\Delta x)$$

$$= \Delta x \sum_{i=1}^{10} ln(1 + (i - \frac{1}{2}) * 0.1)$$

$n = 10,\ \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0.1$			
i	$(i - \frac{1}{2}) \cdot \Delta x$	$x_i = 1 + (i - \frac{1}{2}) \cdot \Delta x$	$f(x_i)$
1	0.05	1.05	0.048790164
2	0.15	1.15	0.139761942
3	0.25	1.25	0.223143551
4	0.35	1.35	0.300104592
5	0.45	1.45	0.371563556
6	0.55	1.55	0.438254931
7	0.65	1.65	0.500775288
8	0.75	1.75	0.559615788
9	0.85	1.85	0.615185639
10	0.95	1.95	0.667829373
			suma = 3.865024825
			$A \approx \Delta x \sum_{i=1}^{n} = 0.386502483$

Tabla 3: Metodo de Aproximación por el punto medio x_i

$\therefore$ El área resultante con este método es 0.386502483 unidades de area.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2-3}{t^4+7}\,dt$

(a) **Encuentra los intervalos en los cuales F está aumentando y aquellos en los cuales F está disminuyendo.**

(b) **Encuentra los intervalos abiertos en los cuales F es cóncava hacia arriba y aquellos en los cuales F es cóncava hacia abajo.**

(c) **Encuentra los valores de x, si los hay, en los cuales la función F tiene extremos absolutos.**

(d) **Usa un CAS para graficar F, y confirma que los resultados en las partes (a), (b) y (c) son consistentes con la gráfica.**

a) Regiones de crecimiento y decrecimiento Encontremos los puntos críticos por la prueba de la primer derivada Sabemos que, Por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} = \frac{x^2-3}{x^4+7} = 0 \iff x^2 - 3 &= 0\\ x^2 &= 3\\ x &= \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

El análisis de signos de los intervalos

Análisis de los intervalos				
intervalo	Punto de prueba	$f'(x)$	signo	conclución
$(-\infty, -\sqrt{3}]$	-2	$\frac{+}{+}$	+	f es creciente
$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$	0	$\frac{-}{+}$	-	f es decreciente
$[\sqrt{3}, \infty)$	2	$\frac{+}{+}$	+	f es creciente

Tabla 4: tabla de análsis de signos de las regiones de crecimiento y decrecimiento.

$\implies$ El análisis nos dice que f es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}]$, decreciente en el intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ y creciente nuevamente en el intervalo $[\sqrt{3}, \infty)$.

b) Análisis de concavidad.

Por la prueba de la segunda derivada podemos hacer el análisis.

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{dt^2} &= \frac{(t^4+7)(2t) - (t^2-3)(4t^3)}{(t^4+7)^2}\\ &= \frac{2t((t^4+7) - 2t^2(t^2-3))}{(t^4+7)^2}\\ &= \frac{-2t(-(t^4+7) + 2t^2(t^2-3))}{(t^4+7)^2}\\ &= \frac{-2t(2t^2(t^2-3) - (t^4+7))}{(t^4+7)^2}\\ &= \frac{-2t(2t^4 - 6t^2 - t^4 - 7)}{(t^4+7)^2} = 0\\ &= \frac{-2t(t^4 - 6t^2 - 7)}{(t^4+7)^2} = 0 \iff -2t = 0 \text{ ó } \quad t^4 - 6t^2 - 7 = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } u = x^2 &\implies u^2 - 6u - 7 = 0 \\
&\implies (u+1)(u-7) = 0 \\
&\implies u+1 = 0 \quad u-7 = 0 \\
&\implies u = -1 \quad u = +7 \\
&\implies x^2 = -1 \quad x^2 = +7 \\
&\implies x = \sqrt{-1} \quad x = \pm\sqrt{7} \\
&\implies x = \pm i \quad x = \pm\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Como el polinomio tiene 3 raices reales y dos imaginarias, consideraremos solo las raices en el dominio de los reales El análisis de signos de los intervalos

Análisis de los intervalos				
intervalo	Punto de prueba	$f'(x)$	signo	conclución
$(-\infty, -\sqrt{7}]$	-3	$\frac{+(+)}{+}$	$+$	f es concava hacia arriba
$(-\sqrt{7}, 0]$	-1	$\frac{+(-)}{+}$	-	f es concava hacia abajo
$(0, \sqrt{7}]$	1	$\frac{-(-)}{+}$	$+$	f es concava hacia arriba
$(\sqrt{7}, \infty)$	3	$\frac{-(+)}{+}$	-	f es concava hacia abajo

Tabla 5: tabla de análsis de signos de las regiones de concavidad.

Concluimos que el análisis de concavidad: f es concava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{7}]$ y $(0, \sqrt{7}]$ y f es concava hacia abajo en $(-\sqrt{7}, 0]$ y en $(\sqrt{7}, \infty)$

c) Sabemos que, por el teorema: Si f tiene un extremo absoluto en un intervalo abierto (a, b), entonces debe ocurrir en un punto crítico de f. Evaluemos los puntos críticos, tale que Para $x = -\sqrt{3}$

$$F(-\sqrt{3}) = \int_0^{-\sqrt{3}} \frac{t^2 - 3}{t^4 + 7} dt$$

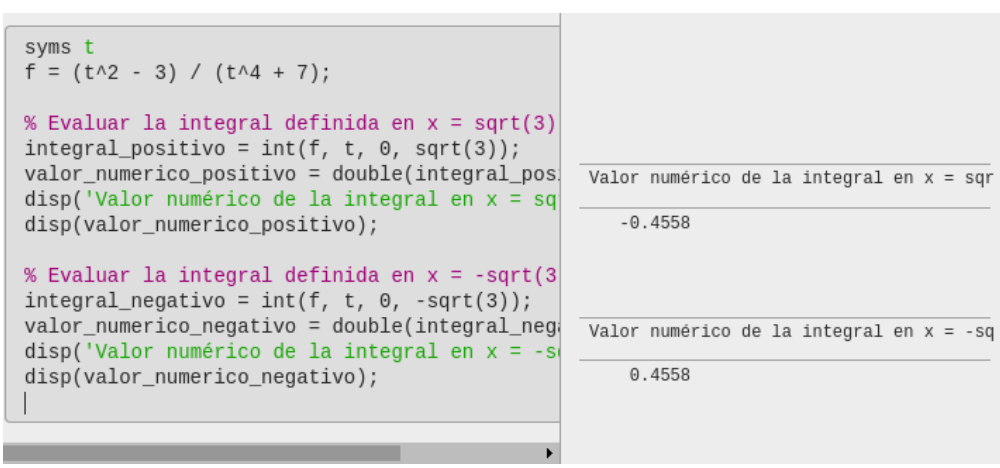
Con ayuda de un graficador podermos determinar que

$$= 0.4558$$

$$F(\sqrt{3}) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - 3}{t^4 + 7} dt$$

$$= -0.4558$$

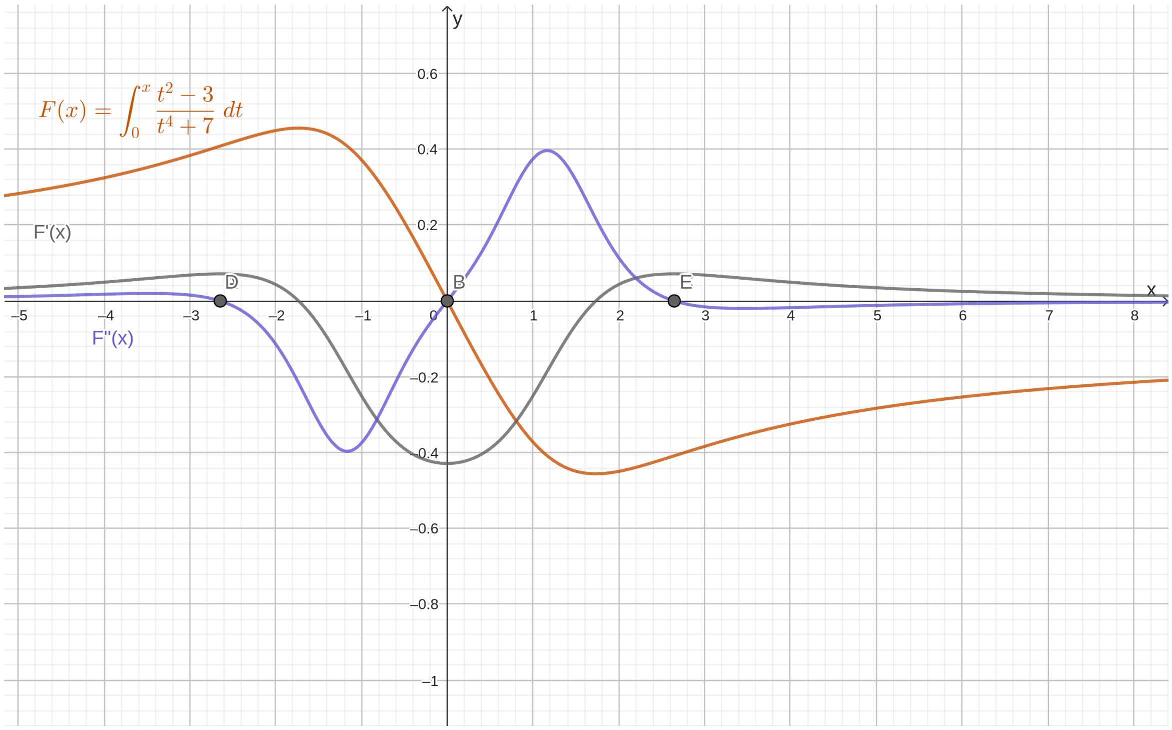
$\therefore$ Concluimos que $-\sqrt{3}$ es un máximo absoluto y $\sqrt{3}$ es un mínimo absoluto.



```
syms t
f = (t^2 - 3) / (t^4 + 7);

% Evaluar la integral definida en x = sqrt(3)
integral_positivo = int(f, t, 0, sqrt(3));
valor_numerico_positivo = double(integral_pos
disp('Valor numérico de la integral en x = sq
disp(valor_numerico_positivo);

% Evaluar la integral definida en x = -sqrt(3
integral_negativo = int(f, t, 0, -sqrt(3));
valor_numerico_negativo = double(integral_neg
disp('Valor numérico de la integral en x = -s
disp(valor_numerico_negativo);
```

```
Valor numérico de la integral en x = sqr
   -0.4558

Valor numérico de la integral en x = -sq
    0.4558
```

d)Graficamos y Concluimos que es correcto



73. Una partícula se mueve con una velocidad de $v(t)\frac{m}{s}$ a lo largo de un eje s. Halla el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de un tiempo dado.

Sabemos que la velocidad es la derivada de la posición. Calcularemos la diferecia de las posiciones para tener el desplazamiento total. Sea $v(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{t^2}, 1 \leq t \leq 3$

$$\begin{aligned}
x(3) - x(1) = \int_1^3 v(t)dt &= \int_1^3 (\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2})dt \\
&= \int_1^3 \frac{1}{2}dt - \int_1^3 \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}t\Big|_1^3 - \int_1^3 t^{-2}dt \\
&= \frac{1}{2}t\Big|_1^3 + t^{-1}\Big|_1^3 \\
&= \frac{1}{2}t\Big|_1^3 + \frac{1}{t}\Big|_1^3 \\
&= \frac{1}{2}t\Big|_1^3 + \frac{1}{t}\Big|_1^3 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 \\
&= \frac{1}{3}\text{m. de desplazamiento}
\end{aligned}$$

$\therefore$ el desplazamiento total es de $\frac{1}{3}$m. de desplazamiento
Ahora sabemos que la posición se describe como $x(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}$

Podemos notar que el desplazamiento no siempre es en linea recta por lo que debemos preguntarnos: ¿Cuándo pasa que $v(t) = 0$?

$$\begin{aligned}
v(t) = 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} = \iff \frac{1}{t^2} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2}{t^2} &= 1 \\
2 &= t^2 \\
t^2 &= 2 \\
t &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Debemos evaluar t en los límites

$$\begin{aligned}
v(1) &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\
v(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{9-2}{18} = \frac{7}{18}
\end{aligned}$$

Como la partícula fue cambiando de dirección después de que se detuviera, para hallar la distancia recorrida, debemos sumar las áreas por debajo y por encima del eje.

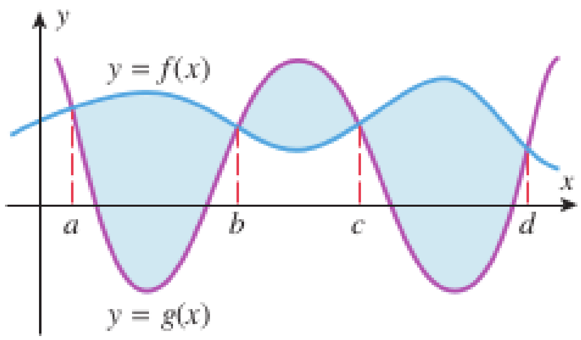
$$distancia = \left| x(3) - x(1) \right| = \int_1^3 \left|\big(v(t)\big)\right| dt$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_1^{\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right| dt + \int_{\sqrt{2}}^3 \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right| dt &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2} dt + \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} dt \\
&= \left[\int_1^{\sqrt{2}} t^{-2} dt - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} dt\right] + \left[\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{2} dt - \int_{\sqrt{2}}^3 t^{-2} dt\right] \\
&= \left[-\frac{1}{t} - \frac{t}{2}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}} + \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^3 \\
&= \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \left[-\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\right] + \left[\frac{11}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= -\sqrt{2} + \frac{3}{2} + \frac{11}{6} - \sqrt{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{11}{6} - 2\sqrt{2} \\
&= \frac{18 + 22}{12} - 2\sqrt{2} \\
&= \frac{40}{12} - 2\sqrt{2} \\
&= \frac{10}{3} - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Se concluye entonces que la distancia total recorrida por la praticula es $\dfrac{10}{3} - 2\sqrt{2} \simeq 0.50490\ m$

capitulo 7 ejercicio 7

a) Estblesca una suma de integrales definidade que represente el área sombreada total entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en la siguiente figura. b)Encuentra el área total encerrada entre $y = x^3$ e $y = x$ en el intervalo $[-1, 2]$.



Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, y si $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región delimitada por $y = f(x)$ arriba, $y = g(x)$ abajo, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Entonces se puede observar que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ $\therefore$ el área de la región dada $f(x)$ y $g(x)$ es

$$A_1 = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big] dx$$

Por otro lado se puede observar que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [b, c]$ $\therefore$ el área está dada como

$$A_2 = \int_b^c \Big[g(x) - f(x)\Big] dx$$

Del mismo modo, el análisis de la región acotada por el intervalo $[c, d]$, observamos que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [c, d]$ $\therefore$ el área se describe como

$$A_3 = \int_c^d \Big[f(x) - g(x)\Big] dx$$

Entonces el área total etá dada por la suma de estas tres áreas indiciduales tal que

$$A_T = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big] dx + \int_b^c \Big[g(x) - f(x)\Big] dx + \int_c^d \Big[f(x) - g(x)\Big] dx$$

De este modo tenemos en cuenta los casos cuando $f(x) \geq g(x)$ y $f(x) \leq g(x)$
b)Encuentra el área total encerrada entre $y = x^3$ e $y = x$ en el intervalo $[-1, 2]$. Sean $y = f(x) = x$ y $y = g(x) = x^3$ ¿Cuándo pasa que son iguales?

$$f(x) = g(x) \iff x_1 = x_2^3$$
$$f(x) = g(x) \iff 0 = x_2^3 - x$$
$$f(x) = g(x) \iff 0 = x(x-1)(x+1)$$

Son iguales en $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

Procedemos a hacee el análisis de desigualdedes

Análisis de los intervalos				
intervalo	Punto de prueba	$f(x)$	$g(x)$	desigualdad
$(-1, 0]$	-1/2	$-1/2$	$-1/8$	$f < g$
$(0, 1]$	1/2	1/2	1/8	$f > g$
$(1, 2]$	3/2	3/2	27/8	$f < g$

Tabla 6: tabla de análsis de signos de las regiones

Entonces aplicando la definición anterior, el area total está dada por

$$
\begin{aligned}
A_T &= \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0}^{1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{1}^{2} [g(x) - f(x)]dx \\
A_T &= \int_{-1}^{0} [x^3 - x)]dx + \int_{0}^{1} [x - x^3]dx + \int_{1}^{2} [x^3 - x]dx \\
A_T &= \int_{-1}^{0} x^3 dx - \int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{1} xdx - \int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{1}^{2} x^3 dx - \int_{1}^{2} xdx \\
A_T &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{1}^{2} \\
A_T &= -\left(\frac{-1^4}{4} - \frac{-1^2}{2} \right) + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) \\
A_T &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left(4 - 2 \right) + \frac{1}{4} \\
A_T &= \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} \\
A_T &= 0.5 + 2 + 0.25 \\
A_T &= 2.75
\end{aligned}
$$

el área total es 2.75 unidades de área

capitulo 7 ejercicio 7

Un resorte ejerce una fuerza de $0.5N$ cuando se estira $0.25m$ más allá de su lognitud natural. Suponiendo que e aplica la ley de Hooke. a) ¿Cuánto trabajo se realizó para estirar el resorte hasta esta longitud? b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural se puede estirar el resorte con $25J$ de trabajo?

Sabemos que $W = \int_a^b F(x)dx$ donde $F = F(x)$ es la fuerza. $\therefore$

$$\begin{aligned} F = F(x) &= k \cdot x \\ 0.5 &= k \cdot (0.25) \\ \implies k &= \frac{0.5}{0.25} = 2 \end{aligned}$$

Susutituimos en la integral.

$$\begin{aligned} W = \int_0^{0.25} 2xdx &= 2\int_0^{0.25} xdx \\ &= 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.25} = x^2\Big|_0^{0.25} \\ &= (0.25)^2 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}J \end{aligned}$$

Concluimos que $16J$ es el trabajo realizado.

b) ¿Cuándo pasa que $W = 25J$?

Sabemos que el trabajo está descrito como la ecuación $W = x^2$ para nuetro resorte.
$\implies x^2 = 25 \iff x = \sqrt{25} = 5\ m$
Por lo tanto 5 m es la longitud a la que se estira el resorte al aplicarle un trabajo de $25J$

capitulo 7 ejercicio 19

Evaluar la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

a) Usando integración por partes.

$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} = x^3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \therefore$ definimos las partes tales que $u = x^2,\ dv = x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx,\ du = 2xdx$

$$\begin{aligned}
v &= \int x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx \\
u &= x^2+1\ du = 2xdx \implies xdx = \frac{1}{2}du \\
v &= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = u^{1/2} \\
\therefore v =& (x^2+1)^{1/2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ Aplicando la formula de integración por partes tenemos que

$$x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 (x^2+1)^{1/2}xdx$$

$$\text{definimos } u = x^2+1\ du = 2xdx \implies xdx = \frac{1}{2}du, u(0) = 1\ u(1) = 2$$

$$\begin{aligned}
\implies x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_1^2 u^{1/2}du =& x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 \\
= x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2 =& \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right) \\
= \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{+}23 =& \frac{3\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}+2}{3} \\
=& \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2}{3} \\
=& \frac{-\sqrt{2}+2}{3}
\end{aligned}$$

b)Usando la sustitución $u = \sqrt{x^2+1}$

$\implies u^2 = x^2+1 \therefore x^2 = u^2-1, 2xdx = 2udu \implies xdx = udu,\ u(0) = 1,\ u(2) = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}xdx & &= \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u^2-1}{u}udu & &= \left(\frac{\sqrt{2}^3}{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} u^2 - 1du & &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} u^2du - \int_1^{\sqrt{2}} du & &= \frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2}{3} \\
&= \frac{-\sqrt{2}+2}{3}
\end{aligned}$$

capitulo 7 ejercicio 45

Aproxima la integral utilizando (a) la aproximación del punto medio M_{10}, (b) la aproximación trapezoidal T_{10} y (c) la aproximación de la regla de Simpson S_{20}. En cada caso, encuentra el valor exacto de la integral y aproxima el error absoluto. Expresa tus respuestas con al menos cuatro decimales.

Sea la integral $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$
Calculemos la integral

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^3 (x+1)^{-1/2}dx$$

$$u = x+1, du = dx \implies, u(1) = 2, u(3) = 4 \int_2^4 u^{-1/2}du = \left.\frac{u^{1/2}}{1/2}\right|_2^4$$

$$= 2u^{1/2}\Big|_2^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} \simeq 1.1715728$$

1) Aproximación con el punto medio (M_{10})

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)\Delta x = \Delta x \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*)$$

donde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ y $x_j^* = a + (j - \frac{1}{2})\Delta x$
Definimos $\Delta x = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}$ y $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \approx \Delta x \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*) = \Delta x \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1+(j-\frac{1}{2})\Delta x)+1}}$$

$n = 10,\ \Delta x = \frac{1}{5} = 0.2$			
i	$(j-\frac{1}{2})\cdot\Delta x$	$x_j = 1 + (j-\frac{1}{2})\cdot\Delta x$	$f(x_j)$
1	0.1	1.1	0.690065559
2	0.3	1.3	0.659380473
3	0.5	1.5	0.632455532
4	0.7	1.7	0.608580619
5	0.9	1.9	0.58722022
6	1.1	2.1	0.567961834
7	1.3	2.3	0.550481883
8	1.5	2.5	0.534522484
9	1.7	2.7	0.519875245
10	1.9	2.9	0.506369684
			suma = 5.856913533
			$A \approx \Delta x \sum_{j=1}^{10} = 1.171382707$

Tabla 7: Metodo de Aproximación por el método del punto medio

$\therefore$ el área con esta aproximación es $A \approx \Delta x \sum_{j=1}^{10} = 1.171382707$

$|EM| = |4 - 2\sqrt{2} - M10| = 1.171572875 - 1.171382707 = 0.000190169$

2) Aproximación con el método trapezoidal (T_{10})

$$\sum_{j=1}^{n} A(T_j)\Delta x = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{3-1}{10} = \frac{2}{10} = 0.2$ y $x_j = a + j\Delta x$
Definimos $f(0) = f(a), f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{x_j+1}}, f(n-1) = f(x_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+1}}, f(n) = f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_n+1}}$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{a+1}} + 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{x_j+1}} + \frac{1}{\sqrt{x_n+1}}\right]$$

$n = 10,\ \Delta x = \frac{1}{5} = 0.2$			
i	x_j	$x_j = 1 + (j - \frac{1}{2}) \cdot \Delta x$	$f(x_j)$
0	1	0.707106781	0.707106781
1	1.2	0.674199862	1.348399725
2	1.4	0.645497224	1.290994449
3	1.6	0.620173673	1.240347346
4	1.8	0.597614305	1.195228609
5	2	0.577350269	1.154700538
6	2.2	0.559016994	1.118033989
7	2.4	0.542326145	1.084652289
8	2.6	0.527046277	1.054092553
9	2.8	0.512989176	1.025978352
10	3	0.5	0.5
suma = 11.71953463			
$A \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{10} A(T_j) = 1.1719583463$			

Tabla 8: Metodo de Aproximación por el método del trapecio

$\therefore$ el área con esta aproximación es $A \approx \Delta x \sum_{j=1}^{10} = 1.1719583463$

$|EM| = |4 - 2\sqrt{2} - T10| = 1.171572875 - 1.1719583463 = 0.000380588$

3) Aproximación con la regla de Simpson(S_{10})

$$\int_a^b v(t)dt \simeq \frac{b-a}{3n}\left[v(t_0) + 4v(t_1) + 2v(t_2) + \ldots + 2v(t_{2n-2}) + 4v(t_{2n-1}) + v(t_{2n})\right]$$

Se sugiere que si combinamos dos veces la aproximación del punto medio con la aproximación trapezoidal, los errores se cancelan entre sí. Por lo tanto, la integral se puede aproximar como:

$$S_n = \frac{1}{3}(2M_k + T_k), n = 2k$$

Entonces, sustituyendo en la formula los resultados anteriormente dados

$$S_{20} = \frac{1}{3}(2(1.171382707) + 1.1719583463) = \frac{1}{3}(3.514718876) = 1.171572959$$

$|EM| = |4 - 2\sqrt{2} - S20| = 1.171572875 - 1.171572959 = -8.35151 * 10^{-08}$

Como se puede observar, el error es casi nulo siendo un número muy pequeño.