2) Sea G una gráfica.

a) Demuestra que, si G es simple, entonces cada ciclo de longitud mínima en G es una subgráfica inducida por vértices.

Recordemos que un ciclo es un circuito que no repite vértices salvo el primero que es igual al último y una gráfica inducida es una subgráfica que contiene todos los vértices de C y todas las aristas de G que conectan los vértices de C.

Por contrapuesta.

Sea G un agráfica simple y $C = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1\}$ un ciclo de longitud mínima n contenida en G, Si C no es una subgráfica inducida por vértices de G, entonces C no es de longitud mínima.

Como C no es inducida por vértices existe una arista $uv \in E_G$ tal que $uv \notin E_C$ donde $u = v_i, v = v_j$ para $i < j, j \neq i+1$. Como u, v no son cosecutivos se puede divir C en dos caminos, $C1$ el primer camino que va de $\{v_i, v_{i+1}, \cdots, v_j\}$ a lo largo de C y $C_2 = \{v_j, v_{j+1}, \cdots, v_n, v_1, \cdots, v_i\}$ entonces tenemos la concatenación $C = C_1C_2$. Notemos que $l(C_1) = j - i,\ l(C_2) = n - (j - i)$; si concatenamos la arista uv en C, esto es $C' = v_i, uv, v_jC_2v_i$ y la longitud es $l = C_2 + 1$ lo que generaría un ciclo más corto pues $l(C) = n - (j - i) + j - i$ pero $j - i \geq 2$ y como $1 < 2$ entonces $l(C') = n - (j - i) + 1 < n - (j - i) + j - i = C$, lo que contradice a la suposición de que C es el camino más corto pues C' es un ciclo más corto que C. Por lo tanto, cada ciclo de longitud mínima en G es una subgráfica inducida por vértices

b) Prueba que lo anterior no es necesariamente cierto si G no es simple. Daremos un contrajemplo.

Cosiderece la siguiente gráfica

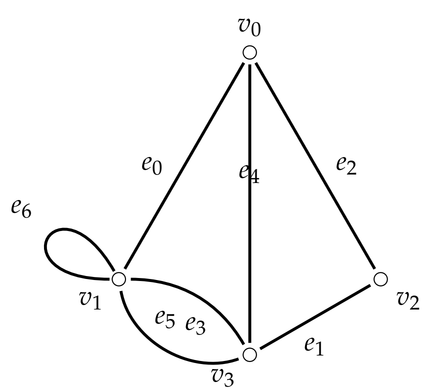

Figura 1: contrajemplo.

Notemos el ciclo $C = \{v_0, e_5, v_3, e_3, v_1\}$ de longitud minima 2 y como para que C sea una subgráfica inducida por G ($G[C]$) debe ocurrir que E_C contenga todas las aristas de G que une a los vertices en V_c pero vemos que esto no pasa porque el lazo $e_6 \notin E_C$ por lo que no es una subgráfica inducida por vértices.