



1. Sea  $G$  una gráfica con  $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , y sea  $A$  su matriz de adyacencia asociada a dicho ordenamiento de  $V_G$ . Demuestra que, para cada entero no negativo  $k$ , el número de  $v_i v_j$  - caminos de longitud  $k$  es  $(A^k)_{ij}$

Sea  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz de adyacencia asociada al ordenamiento de la gráfica  $G$ . Lo demostraremos por inducción fuerte.

**Casos Base:**  $k = 1$ , que es la longitud del  $v_i v_j$  - camino, este existe si y solo si  $v_i v_j \in E_G$  pero esto está dado por la matriz de adyacencia asociada que es  $A$  y como sabemos que una potencia de matrices se define recursivamente como  $A^k = A \cdot A^{k-1}$ , sustituyendo  $A^1 = A \cdot A^{1-1} = A \cdot I_A = A$  porque la matriz de adyacencias es una matriz cuadrada. Entonces se tiene que la longitud del  $v_i v_j$  - camino de longitud  $k = 1$  es la matriz de adyacencias  $A$ .

**Hipótesis de inducción:** Nosostros afirmamos que para todo entero  $n < k$  no negativo es verdad que el número de  $v_i v_j$  - camino de longitud  $n$  es  $A^n = (a_{il}) =$ .

**Paso inductivo:** Por demostrar que se cumple para  $k$  Sabemos que la potencia de una matriz de define recursivamente como  $A^k = A_{i,l}^{k-1} \cdot A_{l,j}$ , pero por hipótesis de inducción el número de caminos de  $n$  desde  $v_i$  a  $v_l$  es  $A^{k-1} = A^n = (a_{il})$  donde  $A_{il}^n$  cuenta de los caminos de longitud  $n$  desde  $v_i$  hasta  $v_l$  y donde  $A_{l,j}$  existe si y solo si es igual a 1 por lo que indica la posibilidad de moverse de  $v_l$  a  $v_j$  en al menos un paso, i.e  $\{v_0, v_1, \dots, v_l, v_j\}$ . Por definción de la multiplicación, Número de caminos de longitud  $k$  desde  $v_i$  hasta  $v_j$  es  $(A_{il}^n \cdot A_{l,j}) = \sum_{l=1}^m (A^n)_{i,l} \cdot A_{l,j} = (A^k)_{ij}$