

1. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0.375 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 1.1x_3 = 0 \end{cases}$$

- a) Si se aplicara el método iterativo de Jacobi para resolver cada uno de los sistemas anteriores, podría asegurarse la convergencia?  
 b) Ídem a) para el método de Gauss-Seidel.  
 c) Resolver los sistemas anteriores con una tolerancia de  $10^{-2}$  a partir de  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ .

2. Considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Partiendo de  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ , aproximar su solución mediante los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, utilizando como criterio de terminación  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq 10^{-6}$ . Indicar el número de iteraciones que requiere cada método. Notar que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva, pero no de diagonal estrictamente dominante.

3. Encontrar la forma explícita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  cuya matriz es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Crear en Scilab la siguiente matrix  $\mathbf{A}$  de  $N \times N$  y el vector  $\mathbf{b}$ :

```
A = 8*eye(N,N) + 2*diag(ones(N-1,1),1) + 2*diag(ones(N-1,1),-1)
    + diag(ones(N-3,1),3) + diag(ones(N-3,1),-3)
b = ones(N,1)
```

Resolver el sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  con  $N = 500$  y con  $N = 1000$ , empleando los métodos de Eliminación de Gauss con pivoteo parcial y de Gauss-Seidel. Para el método de Gauss-Seidel partir de  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  utilizando como tolerancia  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq \epsilon$  con  $\epsilon = 10^{-6}$  y con  $\epsilon = 10^{-12}$ . En cada caso, determinar el tiempo que le lleva a Scilab resolver el sistema, para lo cual se puede usar la secuencia de comandos `tic(); algoritmo; t=toc()`.

5. Método de sobrerelajación (SOR). Sea  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  un sistema  $n \times n$  de ecuaciones lineales y sea  $w \in \mathbb{R}^+$ . Considerar la siguiente modificación del esquema de Gauss-Seidel, conocida como el método de sobrerelajación:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-w)x_i^{(k)}$$

Si  $A$  es una matriz definida positiva y tridiagonal se demuestra que la elección óptima para el parámetro  $w$  del método SOR viene dada por

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}$$

siendo  $T_j$  la matriz del método de Jacobi correspondiente al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Resolver el siguiente sistema lineal usando el algoritmo SOR con una tolerancia de  $10^{-2}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 & = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = 30 \\ -x_2 + 4x_3 & = -24 \end{cases}$$

cuya solución es  $\mathbf{x} = (3, 4, -5)^t$ . Partiendo de un mismo vector inicial calcular cuántas iteraciones se necesitan para aproximar la solución con una precisión de siete lugares decimales empleando:

a) el método de Gauss-Seidel

b) el método de SOR con el parámetro de relajación óptimo.

6. Encontrar la forma explícita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema  $Ax = b$  cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$