Métodos Numéricos - LCC 2018
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Nicolás Rodríguez Castro
Práctica 4: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos.
Factorización de matrices

1. Programar en Scilab el siguiente algoritmo de Eliminación de Gauss con pivoteo parcial:

Algoritmo: Eliminación de Gauss con Pivoteo Parcial

$U = A, \quad L = I, \quad P = I$
for $k = 1$ **to** $m - 1$
    `Seleccionar` $i \geq k$ `que maximiza` $|u_{ik}|$
    $u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ `(intercambio de filas)`
    $l_{k,1:k-1} \leftrightarrow l_{i,1:k-1}$
    $p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$
        for $j = k + 1$ **to** m
        $l_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$
        $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - l_{jk}u_{k,k:m}$

Aplicar el algoritmo a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obtener la matriz de permutación P y la factorización $PA = LU$.

2. Implementar el método de Gauss en los siguientes casos:

$a)$ $a^k_{kk} \neq 0$ $b)$ con pivoteo parcial.

Aplicarlo para resolver los siguientes sistemas $Ax = b$

$$i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. Factorizar las siguientes matrices usando el algoritmo diseñado en el Ejer. 1 y comparar los resultados con la implementación de Scilab de la factorización LU.

$$a) = \begin{pmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{pmatrix} \qquad b) = \begin{pmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & 5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & 4.1561 \end{pmatrix}$$

4. Construir un algoritmo para resolver por el método de Gauss el problema $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Contar la cantidad de operaciones que se realizan en este caso.

5. Considerar el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Resuelva el sistema mediante el método de eliminación de Gauss. En caso de realizar intercambios de ecuaciones, calcule la matriz de permutación P correspondiente.

(b) A partir de la información obtenida en la eliminación de Gauss, obtenga la factorización $PA = LU$, y utilize dicha factorización para resolver el sitema $Ax = \tilde{b}$, donde $\tilde{b} = [\ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ ]^T$.

6. Construir un algoritmo para resolver sistemas lineales mediante la factorización LU de Doolittle y utilizarlo para resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

7. Construir un algoritmo para obtener la factorización de Cholesky de una matriz definida positiva y factorizar las siguientes matrices usando el algorithm diseñado. Comparar los resultados con la implementación de Scilab de la factorización, $chol()$.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 & -16 \\ -12 & 18 & -6 & 9 \\ 8 & -6 & 5 & -10 \\ -16 & 9 & -10 & 46 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}.$$