



Tecnológico
de Monterrey

**Reto: Modelado de un brazo mecánico
impulsor con aplicaciones en microgravedad**

Modelación computacional del movimiento

Grupo 202

Equipo 5:

Joaquín B. (A01026364)

Pablo B. (A01782031)

Oswaldo I. (A01781988)

Andrés M. (A01782178)

Almudena M. (A01782147)

Cesar Antonio Merlin Gonzalez
Marco Benjamín Enríquez Flores

Octubre 21, 2021

Índice

Resumen ejecutivo y abstract	4
Resumen ejecutivo	4
Abstract	4
 Introducción	 5
 1. Biela-manivela y variables cinemáticas.	 6
1.1. Variables cinemáticas que describen el movimiento rotacional	6
1.2. ¿Qué es una fuerza mecánica?	8
1.2.1. La fuerza de gravedad	9
1.2.2. Momento de inercia	10
1.2.3. Momento de torsión	10
1.3. Condiciones de equilibrio	11
1.3.1. Equilibrio rotacional	11
1.3.2. Equilibrio traslacional	11
1.4. El mecanismo biela-manivela	12
1.4.1. Tipos de mecanismos biela-manivela	12
1.4.2. Ejemplos de sistemas biela-manivela	13
1.4.3. Los efectos de la microgravedad	13
1.5. El brazo mecánico	13
1.5.1. Aplicaciones actuales del brazo mecánico	14
 2. Resultados	 15
2.1. Diseño de un brazo mecánico	15
2.1.1. Modelo matemático del mecanismo biela-manivela	15
2.1.2. Longitud de la manivela	16
2.1.3. Tipo de biela a utilizar	16
2.1.4. La carrera del pie de biela y su influencia en el cambio angular	16

2.2. Deducción de la ecuación diferencial	17
2.3. Parámetros de la ecuación diferencial	21
2.3.1. Intensidad de campo gravitatorio	21
2.3.2. Radio de la llanta	22
2.3.3. Fuerza del pistón	22
2.3.4. Masa de la llanta	22
2.3.5. Masa del vehículo	22
2.3.6. Radio de la manivela	22
2.3.7. Momento de inercia	23
2.3.8. Fuerza gravitacional de la llanta	23
2.3.9. Fuerza gravitacional del vehículo	23
3. Análisis gráfico de resultados	23
3.1. Análisis angular	24
3.1.1. Aceleración	25
3.1.2. Velocidad	26
3.1.3. Desplazamiento	27
3.2. Análisis lineal	28
3.2.1. Velocidad	28
3.2.2. Desplazamiento	29
4. Conclusiones	30
Apéndices	31
A. Glosario inglés-español (por temas)	31
Vectores y términos generales	31
Cinemática (lineal y circular)	31
Cálculo	32
Leyes de Newton	33
B. Memorias de cálculo	34

1. Masa de la llanta	34
2. Fuerza gravitacional de la llanta	36
3. Fuerza gravitacional del vehículo	36
C. Script de Matlab	37
Bibliografía	40

Resumen ejecutivo y abstract

Resumen

En esta investigación se desarrolló un modelo matemático para describir el movimiento de un Rover bajo los efectos de la microgravedad en Marte. Para cumplir con este objetivo se dedujo una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que describe el movimiento cinemático del mecanismo biela-manivela con el que se impulsa el Rover. Esta ecuación diferencial se resolvió tras investigar los parámetros que corresponden al diseño propuesto del Rover y las condiciones en Marte. Posteriormente se establecieron las condiciones iniciales correspondientes a la situación física y, empleando el método de Euler (implementado en *MATLAB®*), se obtuvieron gráficas para su análisis. Finalmente se encontró que el mecanismo es adecuado para desplazar al Rover una distancia de 10 m en 1.765 segundos.

Abstract

The present research paper presents a mathematical simulation that describes the movement of a Rover subject to the effects of microgravity on Mars. To accomplish the objective, a second-order differential equation was deduced to represent the cinematic movement of the connecting rod-crank mechanism which propels the Rover. The differential equation was then solved by researching viable parameters for the proposed Rover design and the conditions in Mars. Afterward, the corresponding initial conditions were established and the equation was solved using Euler's method (implemented in *MATLAB®*), thus obtaining the graphs needed for the analysis. After the motion analysis, it was found that the mechanism is adequate for mobilizing the Rover for a distance of 10 m in 1.765 seconds.

Durante los últimos años, la robótica ha tenido una gran presencia en las industrias, desde la industria manufacturera de automóviles y de componentes electrónicos hasta la aeronáutica.

Teniendo en cuenta lo antes mencionado, los ingenieros espaciales tienen que modelar y simular dispositivos robóticos, sin embargo, se deben anticipar a la microgravedad (esto aplica cuando el sistema solo está sujeto a la gravedad, fenómeno conocido como caída libre), así podrán controlar de manera precisa los movimientos realizados.

En este reto, se tomarán en cuenta los brazos mecánicos, los cuales realizan reparaciones y se emplean en sistemas de impulsión para vehículos no tripulados. Es así como se efectuará un diseño de un brazo impulsor basado en el mecanismo de biela-manivela, que tendrá que operar bajo las condiciones de la microgravedad de Marte. Para esto, se emplearán los conceptos básicos de dinámica, cinemática, así como la transformación de un movimiento de rotación a un movimiento lineal.

1. Biela-manivela y variables cinemáticas.

En esta sección se analizan los conceptos básicos de dinámica cinemática y la transferencia del movimiento rotacional a movimiento lineal mediante el sistema Biela-manivela.

1.1. Variables cinemáticas que describen el movimiento rotacional

A continuación se presentan las variables básicas que se emplean para describir el movimiento rotacional. Estas variables son análogas a las variables del movimiento rectilíneo y se puede entender su relación a partir de ecuaciones.

Empecemos por definir la posición angular. Es sabido de la geometría que todos los puntos en el plano euclídeo se pueden caracterizar por dos magnitudes que parametrizan una circunferencia: el ángulo y el radio. La posición angular es una cantidad que se denota con la letra griega θ y representa un arco de una circunferencia; si esta cantidad se mide en radianes, entonces la longitud del arco que describe s satisface la ecuación:

$$r\theta = s. \quad (1)$$

Donde r es el radio de la circunferencia descrita por el movimiento circular.

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497).

La velocidad angular, de forma análoga a la velocidad lineal, es la cantidad que resulta de derivar la posición angular en un tiempo determinado. Esto quiere decir que es la tasa de cambio de la posición angular y si se denota por la letra griega ω satisface la ecuación:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497)

Una partícula en movimiento circular también se puede caracterizar por una velocidad lineal en cada instante, esta velocidad se conoce como la velocidad tangencial, debido a que es tangente a la circunferencia que describe el movimiento en cada instante. Esta se denota por la letra v y satisface la ecuación:

$$\omega = v \quad (3)$$

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497)

Además, una cantidad que suele ser relevante en el caso rectilíneo es la aceleración. De forma análoga, en el movimiento circular, definimos la aceleración angular denotada por la letra α que es la tasa de cambio de la velocidad angular, por lo tanto satisface la ecuación:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (4)$$

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497)

1.2. ¿Qué es una fuerza mecánica?

La mecánica es una disciplina la cual analiza las posiciones y variaciones en el tiempo de un objeto en función a sus interacciones. Las acciones mecánicas son las que intervienen en las variables de un cuerpo, cuando por medio de aplicación de fuerzas el objeto modifica a otro. Las fuerzas mecánicas no vienen de un objeto, sino que es un resultado de la interacción entre dos objetos. Sin incluir el peso o la acción de la gravedad, en todas las demás fuerzas debe necesariamente existir contacto entre dos cuerpos. Dentro de estas fuerzas se incluyen (Iparraguirre, 2009, p.54-73):

- **Fuerza resultante:** es el resultado de la suma vectorial de todas las fuerzas existentes de un sistema. Se efectúa componente a componente.

$$\text{Sean: } \mathbf{F}_1 = F_{1x}\hat{\mathbf{i}} + F_{1y}\hat{\mathbf{j}} + F_{1z}\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{F}_2 = F_{2x}\hat{\mathbf{i}} + F_{2y}\hat{\mathbf{j}} + F_{2z}\hat{\mathbf{k}} \quad (5)$$

Entonces la fuerza resultante, que es la suma vectorial $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ se deduce como el vector:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x})\hat{\mathbf{i}} + (F_{1y} + F_{2y})\hat{\mathbf{j}} + (F_{1z} + F_{2z})\hat{\mathbf{k}} \quad (6)$$

- **Fuerza equilibrante:** Cuando un sistema no está equilibrado, podemos agregar una fuerza sobre el cuerpo opuesta a la fuerza resultante para poder equilibrar el sistema.
- **Fuerza de contacto:** Es la fuerza en que un cuerpo que aplica una fuerza está en contacto con otro cuerpo al que le está aplicando la fuerza.
- **Tensión:** Es la fuerza que se ejerce por una superficie dada.
- **Fuerza de gravedad:** Es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un cuerpo.

1.2.1. La fuerza de gravedad

De acuerdo con el modelo de Newton, la gravedad es una fuerza de atracción entre dos cuerpos cuya magnitud es:

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (7)$$

Además, se definió el vector \mathbf{g} , denominado campo gravitatorio, como un vector dirigido hacia el centro de masa de un cuerpo masivo (cuya masa sea m_1) con módulo:

$$g = \frac{Gm_1}{r^2} \quad (8)$$

Tal que al colocar una masa m_2 a una distancia constante r de m_1 , la fuerza de atracción que ejerce m_1 sobre m_2 sea:

$$\mathbf{F}_G = m_2\mathbf{g} \quad (9)$$

La aceleración de la gravedad es dependiente de la masa de un cuerpo y, por ende, tiene diferentes valores en los distintos cuerpos celestes (Koyre, 1965) A continuación (en la tabla 1) se exponen algunos valores de esta aceleración para cuerpos celestes distintos a la Tierra:

Tabla 1: Diferentes valores de aceleración para cuerpos celestes distintos a la tierra.

Cuerpo celeste	Aceleración de la gravedad (ms^{-2})
Luna terrestre	1.62
Mercurio	2.7
Júpiter	24.79
Sol	274
Saturno	10.44
Marte	3.71

(Williams, 2019)

1.2.2. Momento de inercia

El momento de inercia es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira alrededor de uno de los ejes de inercia, la inercia rotacional es representada como una magnitud vectorial que se llama momento de inercia. La inercia rotacional es un valor escalar que indica que tan complicado es que la velocidad de rotación cambie. Esta depende de la masa (siendo m) que gira en un radio (siendo r) desde el eje de rotación:

$$I = mr^2 \quad (10)$$

(Khan Academy, s.f.)

Si se tiene un sistema de partículas en el que las masas varían en función de r el momento de inercia del sistema se define sumando los momentos de inercia para cada partícula. De forma discreta esto quiere decir que:

$$I = \sum_k m_k r_k^2 \quad (11)$$

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497).

1.2.3. Momento de torsión

Según Cajal, (s.f) el momento de torsión es la capacidad que tiene una fuerza para girar. El momento de torsión (también llamado torque o torca) es una magnitud física que es el resultado de llevar a cabo el producto cruz entre los vectores de posición en el punto en el cual se aplica la fuerza y en la fuerza ejercida:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (12)$$

Al ser el vector resultante de un producto vectorial, τ depende de la magnitud de la fuerza que se aplica, de la distancia entre los dos puntos y el ángulo de aplicación de la fuerza.

La relevancia de este vector se debe a que la suma de todos los momentos de torsión equivale

a la multiplicación del momento de inercia por el vector de velocidad angular:

$$\sum_k \tau_k = I\alpha \quad (13)$$

(Moebs, Ling & Sanny, 2016, pp.463-497)

1.3. Condiciones de equilibrio

A continuación se presenta una breve descripción de las condiciones que se deben cumplir para que un cuerpo se encuentre en equilibrio, considerando tanto el equilibrio rotacional como el equilibrio translacional.

1.3.1. Equilibrio rotacional

Según la UNAM, (s.f.) Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio rotacional, la suma de las torcas debe necesariamente ser igual a cero:

$$\sum \tau = 0 \quad (14)$$

1.3.2. Equilibrio translacional

En el caso del equilibrio translacional, la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre el sistema deberá ser igual a cero (UNAM, s.f.):

$$\sum F = 0 \quad (15)$$

1.4. El mecanismo biela-manivela

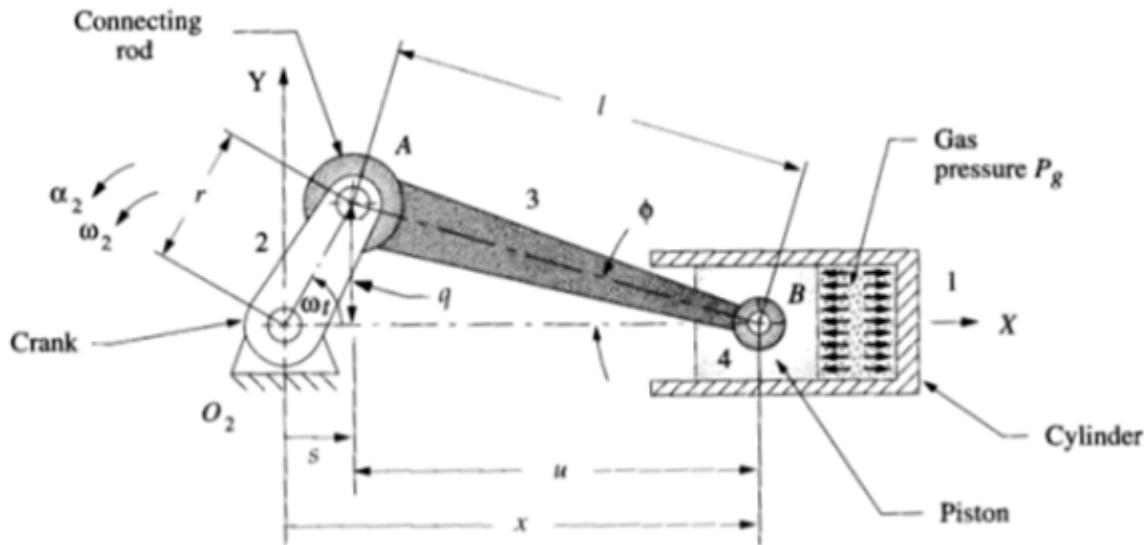


Figura 1: Mecanismo biela-manivela (Bota, Brusconi, Pokolenko & Vera de la Cruz, 2011).

Se trata de un mecanismo que transforma un movimiento rotacional en uno de traslación (y viceversa, pues se trata de un mecanismo reversible). Consta de tres barras articuladas: la manivela, la biela y la varilla.

Según González, (2003) la velocidad de traslación y de rotación de la manivela están dadas por:

$$v = wd \quad (16)$$

1.4.1. Tipos de mecanismos biela-manivela

Según la configuración del mecanismo, se le puede clasificar en las siguientes categorías:

- **Bielo-manivela corredera:** Cuando la manivela gira manualmente genera un conjunto de tornillo, sinfín y corona. La corona genera su movimiento por medio del mecanismo biela-manivela a una corredora que se mueve con un movimiento horizontal contrario a través de una guía. Un ejemplo de este mecanismo sería una bomba de émbolo, el movimiento de entrada es el de rotación de un eje y el de salida sería el movimiento de

traslación del pistón el cual ejerce presión sobre el fluido a la hora de bombear. (UNIZAR, s.f.)

1.4.2. Ejemplos de sistemas biela-manivela

Los mecanismos biela-manivela se utilizan en una gran cantidad de sistemas. Algunos ejemplos son: la locomotora de vapor, la máquina de coser (para accionar la aguja) y los muy comunes motores de combustión interna (utilizados en los automóviles).

1.4.3. Los efectos de la microgravedad

Primero que nada, debemos definir lo que es la microgravedad: La microgravedad se consigue cuando la única fuerza existente es la de la gravedad, es decir, cuando el cuerpo se encuentra en el fenómeno denominado “caída libre” (Scielo,2015). Dicho esto, los efectos de la microgravedad radican en la manera en la que afecta la fricción que hay que vencer, ya que, al disminuir la fuerza gravitacional, la fuerza normal también disminuirá, causando que la fricción también disminuya. Por ende, en el brazo mecánico, su principal efecto sería una reducción en la fuerza necesaria para romper la fricción.

1.5. El brazo mecánico

Un brazo robótico es un brazo mecánico articulado que, a través de un conjunto de lenguajes de programación, es capaz de ejecutar múltiples funciones simulando un brazo humano. Los componentes básicos del brazo robótico incluyen pero no están limitados a (Ripipsa S.A. de C.V., 2019):

- **Controlador:** Este objeto debe calcular los procesos, movimientos y comandos a ejecutar, esto con la ayuda de un microordenador.
- **Actuadores:** Los actuadores son los motores que deberán generar la fuerza para producir los movimientos.

- **Manipulador:** Los manipuladores son la parte mecánica que deberán realizar el movimiento de los brazos mecánicos.
- **Articulaciones:** Las articulaciones funcionan de la misma manera que en los humanos, son las sub-partes de los manipuladores y a su vez, permiten generar los movimientos lineales y angulares.
- **Muñeca:** La muñeca será la encargada de realizar los movimientos de elevación, desviación y giro, según el tipo de funciones.
- **Mano robótica / Gripper:** Ahora pasamos a la extensión final de la muñeca, esta deberá cumplir la tarea del movimiento mecánico final, según sea el componente que corresponda a una pinza o alguna herramienta que pueda cumplir las condiciones del trabajo.

1.5.1. Aplicaciones actuales del brazo mecánico

Hoy en día, las grandes industrias de ensamblaje y las fábricas de coches emplean brazos mecánicos. En la industria automovilística, los brazos son empleados para realizar los ensamblajes de las piezas. Sin embargo, también pueden servir para el *pick and place*, es decir, para transportar materiales pesados de un lugar a otro o colocarlos dentro de la estructura del automóvil. Por otro lado, los brazos con rotaciones más perfeccionadas son capaces de realizar los trabajos de pintura de los automóviles.

No obstante, esta industria no es la única que emplea brazos mecánicos. Estos también han llegado hasta el espacio. Por ejemplo, en el Transbordador Espacial se encuentra un Sistema de Manipulación Remota, el cual es un conjunto de brazos mecánicos. Estos permiten controlar el sistema por los humanos desde otro punto, y sus funciones van desde la inspección de satélites hasta la carga y descarga de material (ESNECA, 2019).

Otra industria que emplea los brazos mecánicos, por ende el sistema de Manivela Biela corredera, es en el balanceo de máquinas de combustión interna (José María R.M, 2019).

2. Resultados

Considerando el diseño final del Rover (mostrado en la **figura 2**), se procedió a modelar el movimiento:

2.1. Diseño de un brazo mecánico

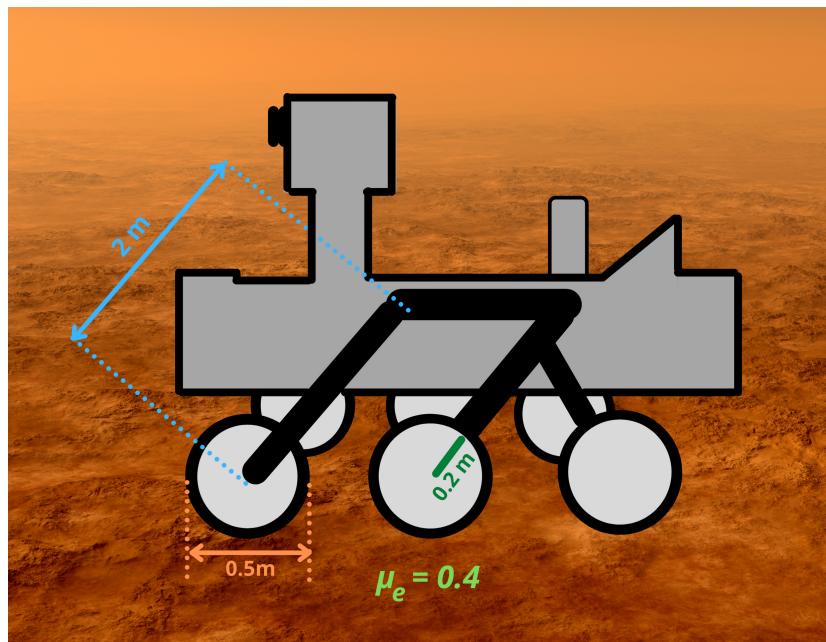


Figura 2: Diseño del brazo mecánico del rover propuesto (con medidas)

2.1.1. Modelo matemático del mecanismo biela-manivela

Partiendo de la suma de torques, se puede describir el comportamiento rotacional del mecanismo biela-manivela mediante la siguiente relación entre sus variables:

$$\sum \tau = r_i F_p \sin(\theta + \varphi) + r_e \left(F_{gb} + \frac{F_{gb}}{n} \right) \mu_e = I \alpha \quad (17)$$

La deducción de esta ecuación diferencial se puede encontrar posteriormente y se le dedicó una sección completa.

2.1.2. Longitud de la manivela

Para la elección de la longitud de la manivela, se debe tomar en cuenta que dependiendo de este parámetro, la fuerza ejercida por el pistón estará a cierto ángulo y que, mientras mayor sea la longitud de la manivela, menor será este ángulo. En este sentido resulta viable hacer que la manivela tenga 10 veces la longitud de la biela, para que el ángulo de la fuerza del pistón sea mínimo comparado con el ángulo de la biela y por ende, se pueda despreciar al momento de hacerla modelación de su movimiento.

2.1.3. Tipo de biela a utilizar

Según Hello Insurance Group, (2021) existen 5 principales tipos de biela (además de la tradicional, cuyo cabezal se cierra con dos pernos en los extremos):

- **Enteriza:** su cabezal es de una sola pieza, en lugar de unirse por pernos.
- **Goteo de aceite:** en el cabezal hay una incisión por la cual gotea aceite.
- **Aligerada:** el cabezal no forma un ángulo de 45° con el plano
- **De tenedor y cuchillo:** se componen por dos cabezales.
- **Articulada:** pueden tener más de un agujero en sus cabezales (haciendo posible que se muevan utilizando dos o más bielas)

Dados los tipos de biela existentes, el más factible para el diseño del Rover es la biela enteriza, puesto que dicho diseño reduce la cantidad de puntos de estrés al momento de inducir torsión. Cabe agregar que la superficie interna de este tipo de biela presenta menos imperfecciones que la de una biela tradicional, lo cual resultará benéfico pues habrá menor fricción y por ende, mejor transferencia de movimiento rotacional en lineal.

2.1.4. La carrera del pie de biela y su influencia en el cambio angular

Al unirse a biela al pistón mediante el cabezal (también conocido como el pie de biela), el pistón recorre una cierta distancia denominada carrera. La biela se encuentra a un ángulo que

será mayor a medida que se acorte la longitud de la biela. Cabe mencionar que lo mismo sucede con la carrera del pistón. (Taller Actual, 2020)

2.2. Deducción de la ecuación diferencial

Para poder deducir la ecuación diferencial, primero se analizaron una serie de diagramas que muestran el mecanismo biela-manviela de manera matemática.

En primera instancia, se analizó la **figura 3** la cual muestra todos los componentes del mecanismo impulsor: la biela, la manivela, el pistón y la llanta.

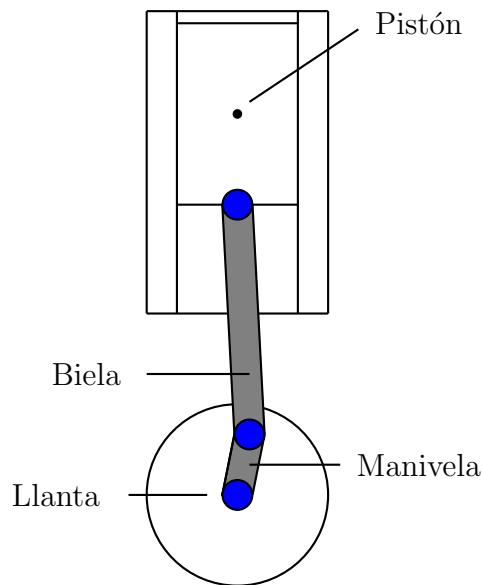


Figura 3: Partes del mecanismo impulsor.(Merlin, C.A., comunicación personal, 20 de octubre de 2021)

Así pasamos a la **figura 4**, la cual está basada en la **figura 3**, y esta lleva por nombre “Abstracción geométrica del mecanismo”. Podemos constatar que ya está hecha de una manera más explícita, donde el radio de la llanta tiene la notación r_e , y es la distancia del centro del pistón al centro de la llanta, r_i es la medida de la manivela, h es la altura formada por el triángulo, θ es el ángulo formado entre la distancia y y r_i .

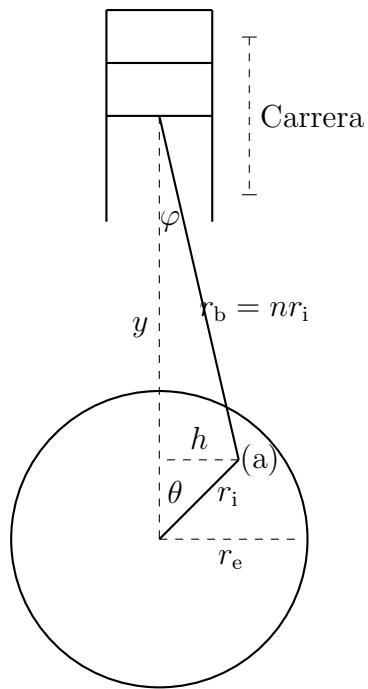


Figura 4: Abstracción geométrica del mecanismo (Merlin, C.A., comunicación personal, 20 de octubre de 2021)

Posteriormente, para establecer la situación física en una ecuación diferencial se observó que la rotación de las llantas se debe al momento de torsión total en cada una de estas. Únicamente hay dos torques, el que se genera con la fuerza del pistón. τ_p y el que se debe a la fuerza de fricción τ_f . Las fuerzas que generan estos torques y su distancia al centro de rotación se puede observar en la **figura 5** la cual se muestra a continuación.

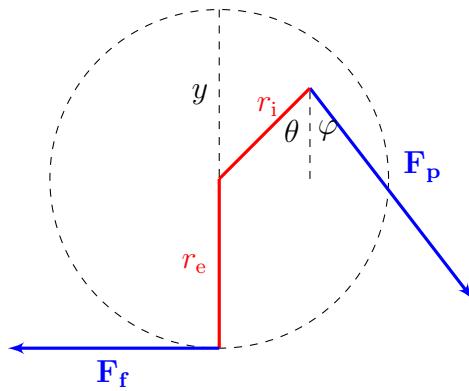


Figura 5: Diagrama de los momentos de torsión. Las fuerzas se resaltan en azul, mientras que los brazos de palanca se muestran en rojo. (Merlin, C.A., comunicación personal, 20 de octubre de 2021)

Como los torques son vectores determinados por un producto vectorial, las magnitudes τ_p y τ_f de estos se pueden calcular como se muestra a continuación:

$$\tau_p = r_i F_p \sin(\theta + \varphi), \quad (18)$$

$$\tau_f = r_e F_f \sin 90^\circ. \quad (19)$$

Y el momento de torsión total, que es la suma de los torques, se puede calcular observando que ambos torques tienen el mismo sentido, es decir:

$$\sum \tau = r_i F_p \sin(\theta + \varphi) + r_e F_f = I\alpha \quad (20)$$

Usando la ecuación para la fuerza de fricción estática máxima resulta factible reescribir la magnitud del torque generado por la fricción como:

$$\tau_f = r_e F_N \mu_e \quad (21)$$

Donde F_N es la fuerza normal, ejercida por la superficie. Pero, como no hay aceleración vertical, es necesario emplear otra expresión para F_N , en particular tenemos que F_N equilibra el peso soportado en cada una de las ruedas:

$$F_N = F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \quad (22)$$

Donde n es la cantidad de ruedas (y brazos) del vehículo.

$$\implies \tau_f = r_e \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \mu_e \quad (23)$$

Al reemplazar esta expresión de τ_f en la suma de torques, se obtiene:

$$\sum \tau = r_i F_p \sin(\theta + \varphi) + r_e \left(F_{gb} + \frac{F_{gb}}{n} \right) \mu_e = I \alpha \quad (24)$$

Considerando que α es la aceleración angular, puede esta ser reemplazada en su notación de razón de cambio:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (25)$$

$$\implies \sum \tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (26)$$

$$(27)$$

Si se divide todo entre el momento de inercia I se obtiene:

$$\frac{\sum \tau}{I} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (28)$$

Finalmente, como $r_p = kr_i$, para una constante de proporcionalidad k de suficiente magnitud, se puede establecer que $\sin(\theta + \varphi) \approx \sin \theta$; es decir, que φ es despreciable en este contexto. Así que si se sustituye el momento de torsión neto (despreciando el ángulo φ), se obtiene la ecuación diferencial de interés:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{r_i F_p}{I} \sin(\theta) + \frac{r_e \mu_e}{I} \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \quad (29)$$

Para la cual, se establecen como condiciones iniciales:

$$\frac{d\theta}{dt} \Big|_{t=0} = \omega(0) = 0, \quad (30)$$

$$\theta(0) = 20^\circ. \quad (31)$$

Esto se debe a la asunción de que el móvil parte del reposo y que, en el marco de referencia empleado, el ángulo de 20° es suficiente para poder generar cierto momento de torsión.

Como se está analizando cada una de las llantas del vehículo y estas llantas son cilindros sólidos con su eje de rotación en el centro, podemos calcular el momento de inercia I con la ecuación: $I = MR^2$, donde M es la masa total y R es el radio de la sección transversal circular. Entonces se puede escribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{r_i F_p}{\frac{1}{2} M r_e^2} \sin(\theta) + \frac{r_e \mu_e}{\frac{1}{2} M r_e^2} \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \quad (32)$$

Simplificando:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2r_i F_p}{M r_e^2} \sin(\theta) + \frac{2\mu_e}{M r_e} \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \quad (33)$$

Finalmente, se determinó la distancia lineal (horizontal) recorrida, x , como la longitud de arco descrita por el movimiento circular; es decir que:

$$x(t) = r_e \theta(t) \quad (34)$$

2.3. Parámetros de la ecuación diferencial

Ya conociendo la ecuación diferencial que permitirá generar la simulación, se tuvieron que definir valores para cada uno de sus parámetros. A continuación se analizan dichos parámetros y se justifican los valores numéricos adjudicados a estos.

2.3.1. Intensidad de campo gravitatorio

Para determinar algunos parámetros de la ecuación diferencial, una cantidad relevante es la magnitud de la intensidad de campo gravitatorio g en Marte. Para calcularla se utilizaron dos bases de datos: la primera establece la intensidad de campo gravitatorio relativa a la Tierra en cada planeta, y la segunda otorga el valor terrestre en ms^{-2} .

$$g_{\text{Tierra}} = 9.80665 \text{ ms}^{-2} \quad (\text{Texas Instruments Incorporated, 2019}) \quad (35)$$

$$g_{\text{Marte}} = (9.80665 \text{ ms}^{-2}) (0.377) = 3.697 \text{ ms}^{-2} \quad (\text{Williams, 2019}) \quad (36)$$

Redondeado a 3 figuras significativas:

$$g_{\text{Marte}} = 3.70 \text{ ms}^{-2} \quad (37)$$

2.3.2. Radio de la llanta

Se consideró el mismo diámetro que se utilizó en el Curiosity Rover de la NASA, es decir, 0.5 metros. (Mars Exploration Program, 2002). En otras palabras:

$$r_e = \frac{0.5\text{m}}{2} = 0.25\text{m} \quad (38)$$

2.3.3. Fuerza del pistón

La fuerza del pistón debe superar la fricción estática, por lo que se definió tal que:

$$F_p > F_{fr} = \mu_e F_N \quad (39)$$

Si se reescribe la fuerza normal que debe ejercer la superficie en términos del peso que debe soportar (como se hizo en la ecuación diferencial) se puede deducir que:

$$F_p > \mu_e \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \quad (40)$$

2.3.4. Masa de la llanta

Para encontrar la masa de la llanta se asumió que esta está compuesta por 2 partes: un cilindro de aluminio de radio de 0.2 m, es decir un 80 % del radio de la llanta y ocupa la mayor parte del peso, y un recubrimiento de goma alrededor del cilindro de aluminio que ocupa el restante del radio total de la llanta (un 20 % del radio total). Teniendo los materiales en cuenta, se calculó la masa de la llanta usando las densidades de los materiales y el volumen de estos.

Ver apéndice B - Memoria de cálculo.

2.3.5. Masa del vehículo

Para definir la masa del vehículo se tomó como referencia la masa del Mars Rover que está publicada en la página del programa de exploración de la NASA: 899 kg (NASA, 2017).

2.3.6. Radio de la manivela

Para decidir el largo de la manivela, se determinó que este debía ser muy cercano al radio de la llanta para que haya un mayor momento de torsión causado por la fuerza del pistón. Por

esta razón se determinó que el largo de la manivela $ri = 0.2$ m.

2.3.7. Momento de inercia

Para calcular el momento de inercia causado por el movimiento rotacional se usó la fórmula para cilindros sólidos:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (41)$$

(Universidad de Sevilla, 2014)

Reemplazando los valores de esta fórmula para ajustarlos a los que hemos encontrado, se puede calcular el momento de inercia.

2.3.8. Fuerza gravitacional de la llanta

Para calcular la fuerza gravitacional de la llanta, simplemente se debe usar la segunda ley de Newton (Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2017). **Ver apéndice B - Memoria de cálculo**

2.3.9. Fuerza gravitacional del vehículo

Para calcular la fuerza gravitacional del vehículo, nuevamente aplicamos la segunda ley de Newton (Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2017). **Ver apéndice B - Memoria de cálculo**

3. Análisis gráfico de resultados

Se utilizó el software *Matlab* para resolver la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con el método de Euler (el script utilizado se encuentra en la sección de apéndices). Para lograrlo se separó esta ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [\omega(t)] = \frac{2r_i F_p}{Mr_e^2} \sin(\theta) + \frac{2\mu_e}{Mr_e} \left(F_{gb} + \frac{F_{gv}}{n} \right) \\ \frac{d}{dt} [\theta(t)] = \omega(t) \end{cases} \quad (42)$$

Una vez obtenidas las aproximaciones numéricas, se realizaron gráficas para las siguientes funciones del tiempo:

- Aceleración angular $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$
- Velocidad angular $\left(\frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$
- Desplazamiento angular (θ)
- Velocidad lineal $(v = r_e\omega)$
- Desplazamiento lineal $(x = r_e\theta)$

3.1. Análisis angular

Para la situación física, se consideró relevante que durante los primeros 0.9873s el Rover acelere siguiendo la ecuación diferencial y que después su aceleración angular permanezca nula hasta el final del recorrido. Esto se debe a que en ese tiempo la aceleración angular era 0 y ya se había generado una velocidad angular suficiente para su operación. Esto implica que las funciones se deben definir por partes. Para que sea más visible para el lector, la primera parte que sigue la ecuación diferencial se graficó en color azul y la segunda parte en rojo. A continuación se muestran las gráficas y un análisis de la situación física por cada una:

3.1.1. Aceleración

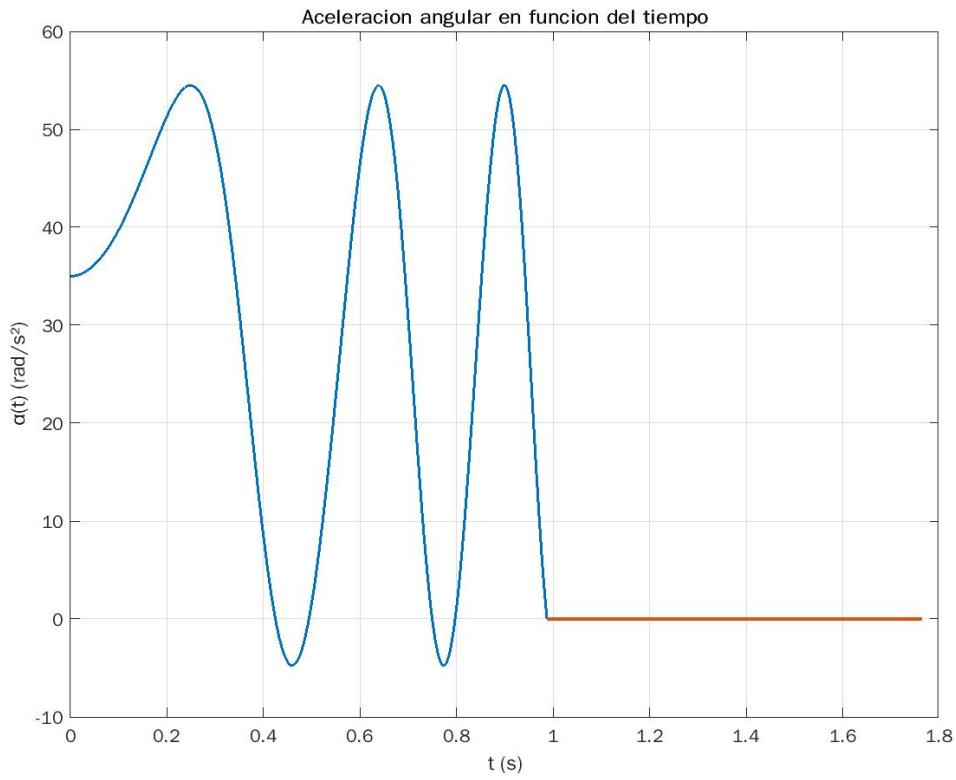


Figura 6: Gráfica de aceleración angular contra tiempo.

Como se puede observar en la **figura 6**, la aceleración angular empieza alrededor de los 35 rad s^{-2} . En el intervalo en el que corresponde a la ecuación diferencial (la parte de la función en color azul) su comportamiento es oscilatorio y alcanza máximos por encima de los 50 rad s^{-2} . Posteriormente, al llegar uno de sus ceros en $t = 0.9873$, esta permanece nula hasta el final del recorrido como era deseado.

3.1.2. Velocidad

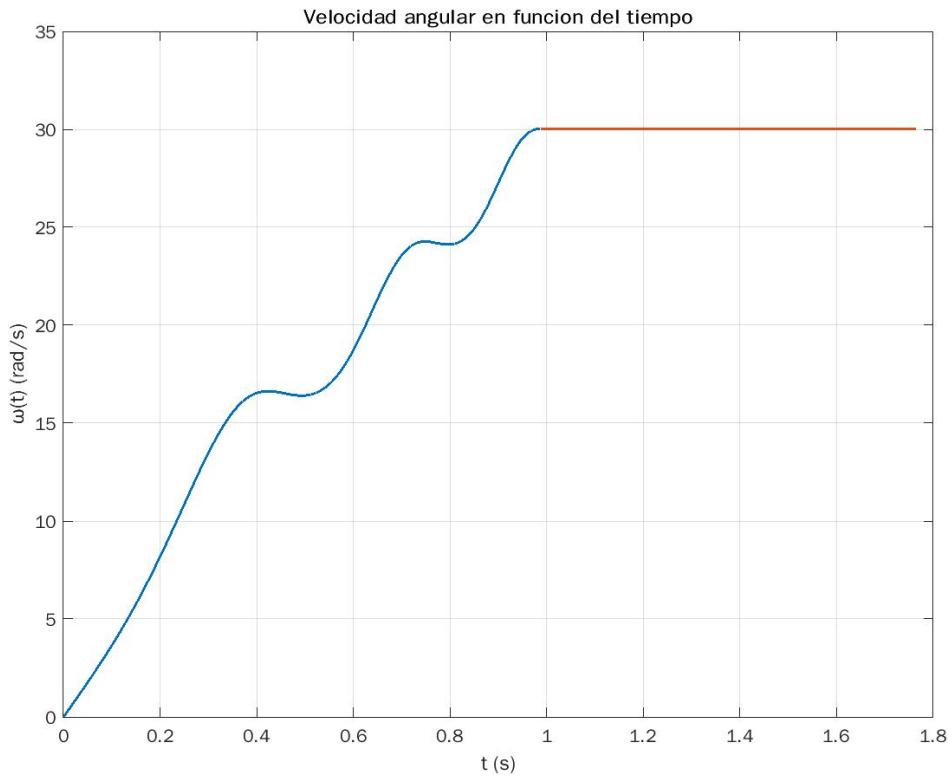


Figura 7: Gráfica de velocidad angular contra tiempo.

En la **figura 7**, se puede notar que los neumáticos parten del reposo, puesto que ω comienza en el origen. Además, se puede observar un comportamiento ondulatorio con una tendencia positiva. La tendencia positiva nos indica que en intervalos de tiempo suficientemente grandes notaremos que la velocidad angular creció, pero el comportamiento oscilatorio nos indica que hay pequeños decrementos en la velocidad angular en algunos intervalos de tiempo. Este comportamiento ya no es visible después de 0.9873 s. Pues, como en ese instante de tiempo la aceleración angular se volvió nula, la velocidad angular permanece constante alrededor de los 30rad s^{-1} .

3.1.3. Desplazamiento

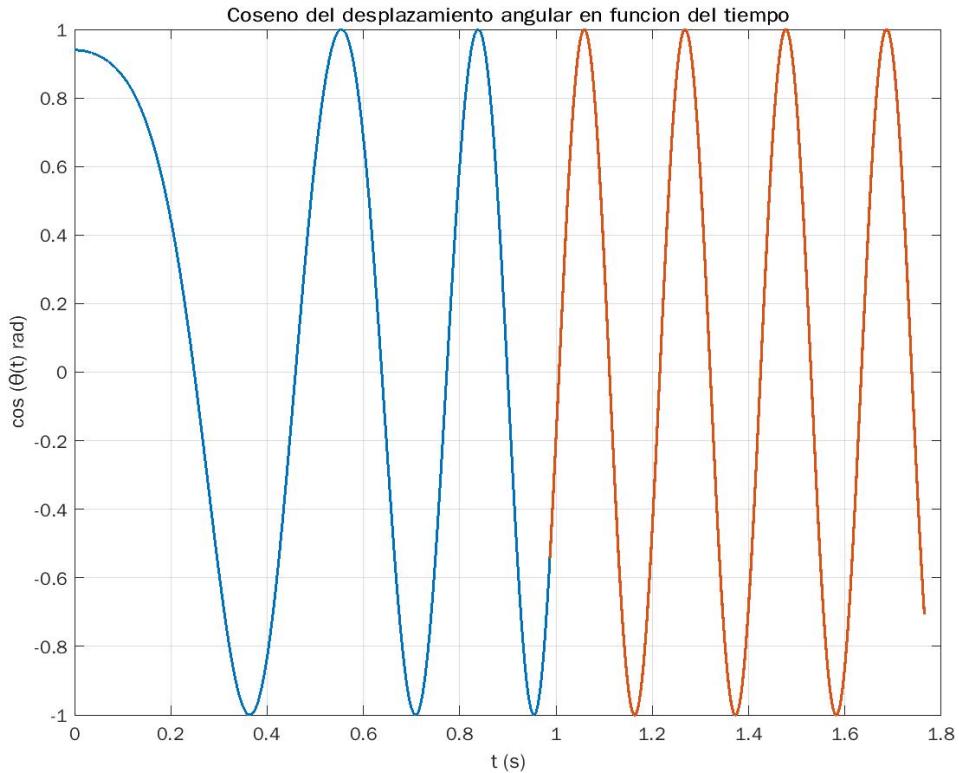


Figura 8: Gráfica de desplazamiento angular contra tiempo.

Matemáticamente, el modelado de $\theta(t)$ era estrictamente creciente. Esto se debe a que su derivada siempre fue positiva en el intervalo de tiempo considerado. Sin embargo, para presentar la información de una forma más entendible; como un ángulo es una magnitud que se entiende en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ es relevante hallar una forma de normalizar la función obtenida. Por este motivo, la **figura 8** presentada es la composición $\cos(\theta)$, ya que de esta forma se puede entender que los máximos (globales) corresponden a revoluciones completadas y los mínimos corresponden a medias revoluciones. Entonces, un análisis pertinente de esta gráfica implica observar la distancia entre máximos (o entre mínimos), puesto que esta distancia corresponde al periodo de oscilación. Como se puede observar en la parte azul de la gráfica, esta cantidad disminuye con el tiempo, lo cual quiere decir que completa revoluciones en menos tiempo, algo que se espera con la tendencia positiva de ω . Finalmente, en la parte naranja de la función (que corresponde al intervalo de tiempo en el que $\alpha = 0$) notamos que se mantiene un periodo

constante, esto es un resultado de la velocidad angular constante que se tiene.

3.2. Análisis lineal

Ya que se analizó el movimiento angular, a continuación se presentará el análisis lineal del movimiento del Rover:

3.2.1. Velocidad

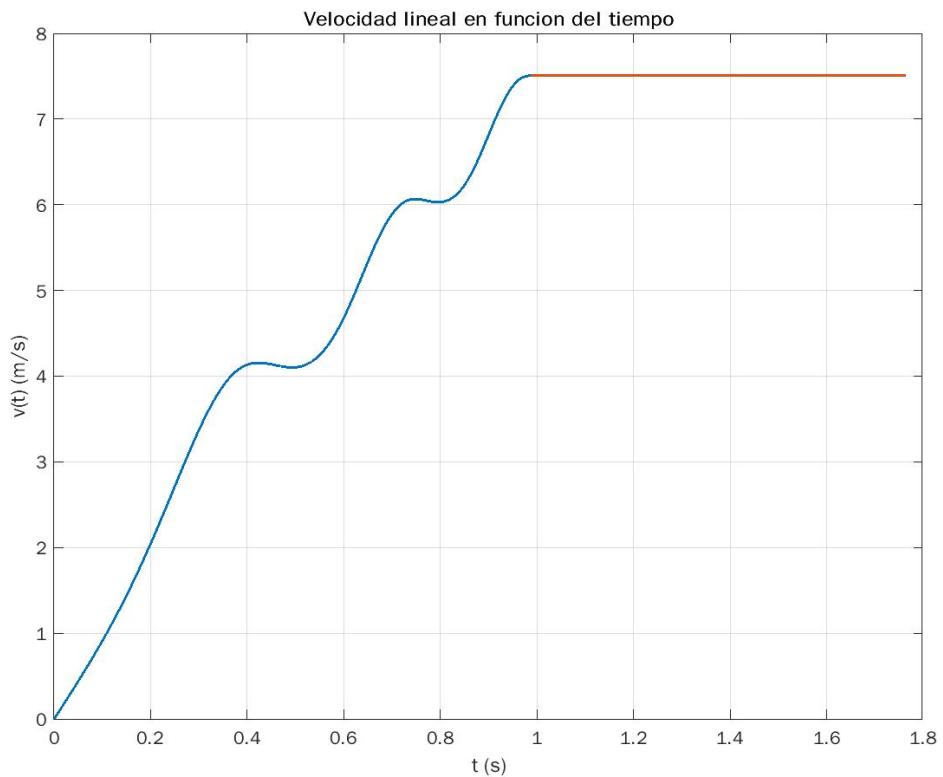


Figura 9: Gráfica de velocidad lineal contra tiempo.

Puesto que la velocidad lineal no es nada más que $r\omega$, su comportamiento es idéntico al de la velocidad angular (vista previamente en la **figura 7**), con la única diferencia de que v queda estirada verticalmente por el radio del movimiento circular (r_e), como se puede notar en la **figura 9**.

3.2.2. Desplazamiento

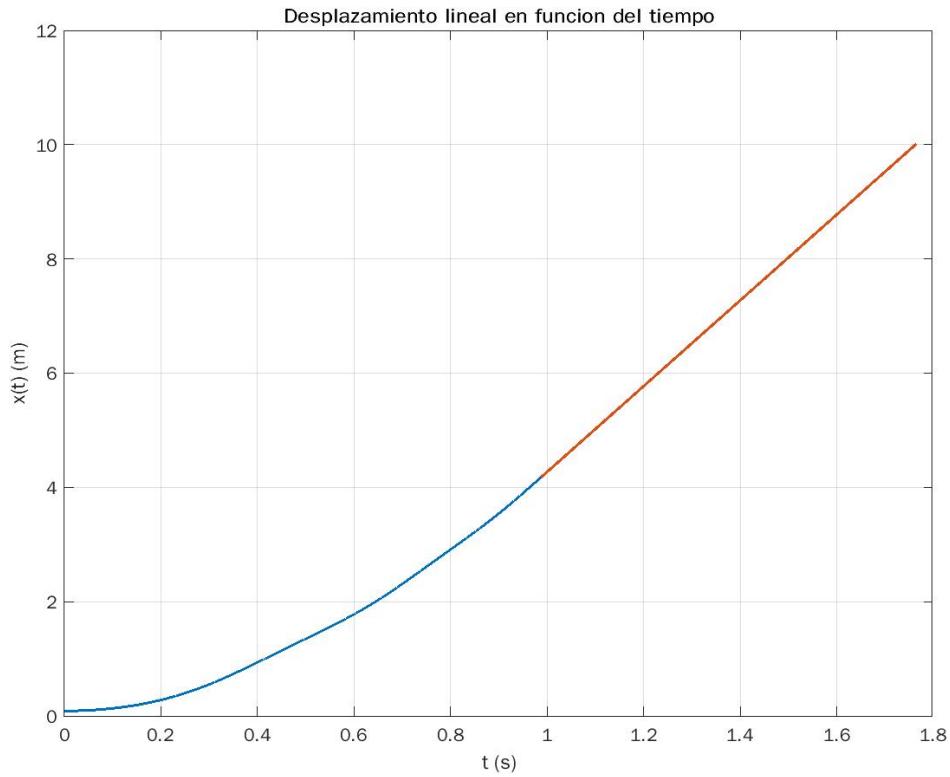


Figura 10: Gráfica de desplazamiento lineal contra tiempo.

Finalmente, el desplazamiento lineal es estrictamente creciente. Esto debía de ocurrir ya que la velocidad lineal era mayor o igual a 0 para todo t en el intervalo de operación considerado. En la parte roja de la **figura 10** observamos que su comportamiento se vuelve lineal debido a que la velocidad lineal era constante; esto a su vez fue un resultado de la aceleración angular nula. Nótese, que el desplazamiento máximo alcanzado en el intervalo de operación $[0, 1.765]$ es de 10m; este desplazamiento corresponde a la distancia en la que se deseaba modelar el movimiento del Rover.

4. Conclusiones

Se puede concluir que la simulación fue exitosa y que los parámetros definidos para la ecuación diferencial resultan viables en términos físicos. Además, con la ayuda de las gráficas generadas en *MATLAB* se pudo determinar que en 1.765s el Rover se desplazaría una distancia de 10m.

Cabe agregar que, incluso al haber cumplido con el objetivo de la investigación, hay algunas limitaciones que existen con el método empleado. En primera instancia, la ecuación diferencial se simplificó para utilizar un solo ángulo (θ); esta simplificación se realizó notando que si θ era significativamente mayor a ϕ este segundo ángulo se podía despreciar en la función $\sin(\theta + \phi)$. Sin embargo, si se desea modelar el mecanismo biela-manivela con mayor precisión esto implicaría considerar ambos. Hay que tener en cuenta también que para facilitar el modelaje del movimiento, comprometimos el diseño de las llantas, ya que asumimos que estas eran completamente solidas al calcular las masas. Otra limitación en la obtención del modelo fue emplear el método de Euler para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. Pues hay métodos numéricos conocidos de mayor precisión que se pudieron emplear (como el método de Runge-Kutta de cuarto orden).

Apéndices

A. Glosario inglés-español (por temas)

Vectores y términos generales

Español	Inglés
Vector.....	Vector
Vector unitario.....	Unit vector
Magnitud.....	Magnitude
Escalar.....	Scalar
Producto interno.....	Inner product
Producto cruz.....	Cross product
Base (vectorial).....	(Vector) basis
Sistema coordenado.....	Coordinate system
Normal.....	Normal
Ortogonal.....	Orthogonal
Eje.....	Axis

Cinemática (lineal y circular)

Español	Inglés
Posición.....	Position
Desplazamiento.....	Displacement
Velocidad.....	Velocity
Rapidez.....	Speed
Velocidad angular.....	Angular velocity
Aceleración.....	Acceleration
Aceleración angular.....	Angular acceleration
Tiro parabólico.....	Parabolic shot
Proyectil.....	Projectile
Resistencia.....	Resistance

Cálculo

Español	Inglés
Función.....	Function
Límite.....	Limit
Derivada.....	Derivative
Tasa de cambio.....	Rate of change
Derivar.....	Differentiate
Diferencial.....	Differential
Ecuación diferencial.....	Differential equation
Tangente.....	Tangent
Velocidad promedio.....	Average velocity
Velocidad instantánea.....	Instantaneous velocity
Aceleración promedio.....	Average acceleration
Aceleración instantánea.....	Instantaneous acceleration
Integral.....	Integral
Integral definida.....	Definite integral
Tiempo.....	Time
Rapidez.....	Speed
Trayectoria.....	Trajectory
Posición inicial.....	Initial position
Posición final.....	Final position

Leyes de Newton

Español	Inglés
Fuerza.....	Force
Diagrama de cuerpo libre.....	Free body diagram
Peso.....	Weight
Tensión.....	Tension
Fricción.....	Friction
Coeficiente de fricción.....	Coefficient of friction
Reposo.....	Rest
Fuerza gravitacional.....	Gravitational force
Masa.....	Mass
Gravedad.....	Gravity

B. Memoria de cálculo

1. Memoria de cálculo de la masa de la llanta

Para poder conseguir la masa del aluminio en la llanta, primero se calculó el volumen de nuestro cilindro usando la siguiente fórmula:

$$V = \pi r^2 h \quad (43)$$

(Cidead, 2009)

Por ende, si la altura del cilindro que compone la llanta es de 0.327 m, se puede decir que el volumen es:

$$V = \pi(0.2m)^2(0.327m) \quad (44)$$

$$V = 0.04109...m^3 \quad (45)$$

Una vez que se tiene el volumen del cilindro, se puede calcular su masa usando la densidad, ya que por definición, la densidad es la masa sobre el volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (46)$$

Donde la densidad del aluminio es:

$$\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3} \quad (47)$$

(Sears, s.f.)

Y al despejar la ecuación de la densidad se llega a que:

$$m = V\rho \quad (48)$$

$$m = (0.04109m^3)(2700 \text{ kg m}^{-3}) \quad (49)$$

$$m = 110.9\text{kg} \quad (50)$$

Ya que se tiene la masa del cilindro de aluminio, es necesario encontrar la masa del caucho que lo recubre siguiendo el mismo proceso:

$$V = \pi r^2 h \quad (51)$$

$$V = \pi(r_e^2 - r_i^2)h \quad (52)$$

$$V = \pi[(0.25\text{m})^2 - (0.2\text{m})^2](0.327\text{m}) \quad (53)$$

$$V = 0.023\text{m}^3 \quad (54)$$

Se debe tener en cuenta que como es un cilindro hueco, para encontrar el volumen, se resta el volumen que toma la parte de aluminio. Después calculamos la masa usando la densidad del caucho y su volumen (Material Properties, 2021).

$$\rho = 1100 \text{ kg m}^{-3} \quad (55)$$

$$m = V\rho \quad (56)$$

$$m = (0.023\text{m}^3)(1100 \text{ kg m}^{-3}) \quad (57)$$

$$m = 25.3\text{kg} \quad (58)$$

Ya que se tiene la masa de los componentes de la llanta, el último paso es sumarlos para encontrar su masa total:

$$m_{tot} = m_1 + m_2 \quad (59)$$

$$m_{tot} = 110.9\text{kg} + 25.3\text{kg} \quad (60)$$

$$m_{tot} = 136.2\text{kg} \quad (61)$$

2. Memoria de cálculo de la fuerza gravitacional de la llanta

Sustituyendo en la ecuación la masa de una llanta y el valor de la aceleración de la gravedad en Marte se obtiene que:

$$F = ma \quad (62)$$

$$F = (M_b) (g) \quad (63)$$

$$F = (136.2 \text{ kg}) (3.7 \text{ ms}^{-2}) \quad (64)$$

$$F = 503.95 \text{ N} \quad (65)$$

3. Memoria de cálculo de la fuerza gravitacional del vehículo

Sustituyendo en la ecuación la masa del vehículo y el valor de la aceleración de la gravedad en Marte se obtiene que:

$$F = ma \quad (66)$$

$$F = (M_v) (g) \quad (67)$$

$$F = (899 \text{ kg}) (3.7 \text{ ms}^{-2}) \quad (68)$$

$$F = 3326.3 \text{ N} \quad (69)$$

C. Script de Matlab

```
1 clc; clear all; close all;
2
3 %condiciones iniciales w(0) = 0, theta(0) = 20
4 % definimos los parametros de nuestra ecuacion diferencial ordinaria de segundo orden
5 g = 3.7; %% (NASA) aceleracion de la gravedad en Marte
6 Mb = 136.2; %% masa de la llanta en kg
7 Mv = 899; %% (NASA) masa del vehiculo y el sistema de bielas en kg
8 re = 0.5/2; %% (NASA)radio de la llanta en m
9 ri = 0.2; %% radio de la manivela en metros, el cual establecimos gracias al radio de la llanta.
10 Fp = 630; % fuerza del piston en N
11 I = 0.5*Mb*re^2; %% (Reto) formula del momento de inercia
12 Ue = 0.4; % coeficiente de friccion estatico
13 Fgb = Mb*g; %% fuerza gravitacional del brazo en N
14 Fgv = Mv*g; %% fuerza gravitacional del vehiculo en N
15 n = 6; %% (Reto) numero de ruedas del vehiculo
16
17 %theta'=w
18 %theta'' = (2*ri*Fp/Mb*re^2)*sin(theta)+(2*Ue/Mb*re)*(Fgb+(Fgv/Nb))
19 F = @(t,s) [s(2),(2*ri*Fp/(Mb*re^2))*sin(s(1))+(2*Ue/(Mb*re))*(Fgb+(Fgv/n))];
20 % Equivalencias para el vector:
21 % s(1) --> "theta"
22 % s(2) --> "w"
23 ti = 0; % Tiempo inicial en segundos
24 tf = 0.9873; % Tiempo final para la EDO en segundos
25 [xSol, vSol] = eulerEDO2(F,ti,[deg2rad(20),0],tf ,0.0001);
26 alpha=(2*ri*Fp/(Mb*re^2))*sin(vSol(:,1))+(2*Ue/(Mb*re))*(Fgb+(Fgv/n));
27 % Definimos funciones simbolicas para poder considerar funciones por partes, de tal forma ...
    que despues de llegar a una velocidad angular operacional mantengamos una aceleracion ...
    angular igual a 0.
28 length = size(vSol, 1); % Numero de filas en la matriz solucion
29
30 syms s(t) v(t) theta1(t) alpha1(t) omegal(t)
31 s(t) = vSol(length,2)*re*(t-tf)+vSol(length,1)*re;
32 v(t) = vSol(length,2)*re;
33 theta1(t) = cos(s(t)/re);
34 alpha1(t) = 0;
35 omegal(t) = vSol(length,2);
36
37 figure
```

```

38 plot(xSol,cos(vSol(:,1))) % pasamos a una funcion coseno
39 title("Coseno del desplazamiento angular en funcion del tiempo")
40 xlabel("t (s)")
41 ylabel("cos (theta)")
42 grid on
43 hold on
44 fplot(theta1,[tf,1.765])
45
46 figure
47 plot(xSol,vSol(:,2))
48 title("Velocidad angular en funcion del tiempo")
49 xlabel("t (s)")
50 ylabel("omega(t) (rad/s)")
51 grid on
52 hold on
53 fplot(omegal,[tf,1.765])
54
55 figure
56 plot(xSol,re*vSol(:,1)) % multiplicamos por el radio de la llanta para obtener la velocidad ...
      lineal
57 title("Desplazamiento lineal en funcion del tiempo")
58 xlabel("t (s)")
59 ylabel("x(t) (m)")
60 grid on
61 hold on
62 fplot(s,[tf,1.765])
63
64 figure
65 plot(xSol,re*vSol(:,2))
66 title("Velocidad lineal en funcion del tiempo")
67 xlabel("t (s)")
68 ylabel("v(t) (m/s)")
69 grid on
70 hold on
71 fplot(v,[tf,1.765])
72
73 figure
74 plot(xSol, alpha)
75 title("Aceleracion angular en funcion del tiempo")
76 xlabel("t (s)")
77 ylabel("alpha(t) (rad/s^2)")
78 grid on

```

```
79 hold on
80 fplot(alpha1,[tf,1.765])
```

Bibliografía

- Bota, D., Brusconi, M., Pokolenko, S., & Vera de la Cruz, A. (2011). *Efecto de la relación biela-manivela en el comportamiento del motor de ciclo Otto*. La Plata: Universidad Nacional de la Plata.
- Cajal. A. (s.f.). *Momento de torsión*. <https://www.lifeder.com/momento-torsion>
- Carrillo Esper, R., Díaz Ponce Medrano, J. A., Peña Pérez, C. A., Flores Rivera, O. I., Ortiz Trujillo, A., Cortés Antonio, O., Cruz de Jesús, J., & Méndez Saucedo, L. M. (2015). *Efectos fisiológicos en un ambiente de microgravedad*. Revista de la Facultad de Medicina, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 58(3), 13–24. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0026-17422015000300013
- Escuela de Ingeniería y Arquitectura Universidad Zaragoza. (s.f.). *Espacio de la tecnología*. https://eina.unizar.es/sites/eina.unizar.es/files/archivos/General/torre_s-leza/tablet_1_v2.0.pdf
- Hello Insurance Group. (2021). *¿Qué es la Biela? - Glosario de mécanica — Hello Auto. Biela*. <https://helloauto.com/glosario/biela>
- Iparraguirre, L. (2009). *Mecánica Básica. Las ciencias naturales y la matemática*. <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001845.pdf>
- Khan academy. (s.f.). *Inercia Rotacional*. <https://es.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/a/rotational-inertia>
- Koyre, A. (1965). *Newtonian Studies*. University of Chicago Press. http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/50/html/sec_3.htm
- Lajas Gonzales, F. (2003). *Aplicación mecánica mecanismo Biela-manivela*. Descartes 2D. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Nociones_geometria_analitica/Geome_7.htm
- Mars Exploration Program. (2002). *Wheels. Mars Curiosity Rover*. <https://mars.nasa.gov/msl/spacecraft/rover/wheels/>
- Martinez, J. M. R. (s.f.). *Análisis de un Mecanismo de Manivela Biela Corredora para Propósitos de Balanceo de Máquinas de Combustión Interna*. Ugt0.Mx.<http://www.di>

cis.ugto.mx/profesores/chema/documentos/Din%C3%A1mica%20de%20Maquinaria/AnalisisMecanismoBMCCCombustionInterna.pdf

Material Properties. (2021). *Caucho — Densidad, resistencia, punto de fusión, conductividad térmica.* <https://material-properties.org/es/caucho-densidad-resistencia-punto-de-fusion-conductividad-termica/>

Meri. (2019). *Qué es el brazo robótico y en qué industrias se emplea.* Esneca Business School.<https://www.esneca.com/blog/brazo-robotico-industrias/>

Moebs, W., Ling, S. & Sanny, J. (2016). *University Physics.* (Vol 1). <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/10-1-rotational-variables>

NASA. (2002). *Summary — Rover — NASA's Mars Exploration Program.* <https://mars.nasa.gov/msl/spacecraft/rover/summary/>

Rendón, H. (2017). Boletín Científico :: UAEH. <https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/prepa4/n11/r5.html>

Ripipsa S.A. de C.V. (2019). *Brazos Robóticos Industriales.* Ripipsa Cobots. <https://ripipsacobots.com/brazos-roboticos-industriales/>

Robótica San Gabriel. (2014). *Máquinas Simples Biela - Manivela.* Robótica. <https:////rockbotic.com/blog/maquinas-simples-biela-manivela/>

Sears, Z. *Densidad.* <https://didactica.fisica.uson.mx/tablas/densidad.htm>

Sotelo Fajardo, J. (2012). *El concepto de gravedad desde las concepciones de Newton y Einstein: una propuesta didáctica dirigida a estudiantes de ciclo V.*

Taller Actual. (2020, 20 marzo). *La biela, mecanismo vital.* <https://talleractual.com/tecnica/partes-de-motor/2070-la-biela-mecanismo-vital>

Texas Instruments Incorporated. (2019). Constants and Values [Conjunto de datos]. *Texas Instruments Incorporated.* https://education.ti.com/html/webhelp/EG_TINspireCode/EN/Subsystems/RG_NspireCAS_EN/Content/M_RefGuide/RG_ConstantsValues.htm

Universidad Nacional Autónoma de México.(s.f.). *Práctica 1:Equilibrio rotacional.* http://www.paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/3340/P2._Equilibrio_rotacional

Williams, D. R. (2019). Planetary Fact Sheet - Ratio to Earth [Conjunto de datos]. NASA.

https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/planet_table_ratio.html