



Tecnológico de Monterrey

Simulación Computacional de un Vehículo de Fórmula 1

Modelación computacional aplicando leyes de conservación

Grupo 302

Equipo 5:

Andrea Alexandra Barrón Córdova (A01783126)

Alina Rosas Macedo (A01252720)

Almudena Morán Sierra (A01782147)

Fernanda Cantú Ortega (A01782232)

Joaquín Badillo Granillo (A01026364)

Nahomi Daniela Plata Ulate (A01027008)

Cesar Antonio Merlin Gonzalez

Marco Benjamín Enríquez Flores

1 de Diciembre de 2021

Resumen

En esta investigación se diseño de manera segura una zona de curvas de Fórmula 1, la cual contenga gradas en las zonas críticas y que sean seguras de utilizarse. Se consideraron diferentes escenarios en los cuales un vehículo pudiera derrapar o completar el circuito exitosamente; ya que esta simulación permite verificar que el diseño es seguro. Se utilizaron herramientas computacionales para diseñar la curva con un polinomio, calcular su longitud de arco (7521.53 m) y graficar su radio de curvatura en distintos puntos. También se utilizó el principio de conservación de la energía y el principio de conservación de la cantidad de movimiento para analizar situaciones de derrape o colisiones. Además se diseño un spoiler para poder considerar la fuerza descendiente que este genera y determinar la rapidez máxima con la cual se puede tomar la curva sin causar un derrape, siendo esta de 31.321 m/s.

Índice

1. Introducción	6
1.1. Contenidos del reporte	6
2. Antecedentes	6
3. Teoría	8
3.1. Interpolación de Lagrange	8
3.1.1. Implementación Programática	9
3.1.2. Herramientas adicionales	9
3.2. Geometría Diferencial	10
3.2.1. Longitud de arco	10
3.2.2. Radio de curvatura	10
3.3. Trabajo invertido	11
3.4. Energía	11
3.4.1. Energía cinética	11
3.4.2. Energía potencial	12
3.4.3. Principio de conservación de la energía	12
3.5. Principio de conservación de la cantidad de movimiento	13
3.6. Principio de Bernoulli y ecuación de continuidad	13
3.7. Metodología	14
4. Experimentación y Desarrollo	15
4.1. Diseño de la pista de carreras	15
4.2. Longitud de arco	15
4.3. Máximos y mínimos	17
4.4. Zona crítica	18
4.5. Gradadas y radio de seguridad	20
4.6. Análisis de fuerzas, energía y cantidad de movimiento	22

4.6.1. Diagramas de cuerpo libre	23
4.6.2. Diseño del spoiler del vehículo	24
4.6.3. Análisis de la fuerza descendente por el spoiler	25
4.6.4. Velocidad máxima en curvas sin derrape	28
4.6.5. Análisis de energía en un derrape	30
4.6.6. Análisis de conservación en una colisión entre dos vehículos	33
4.6.7. Análisis de conservación en una colisión entre un vehículo y una barrera	33
5. Resultados y Conclusiones	34
A. Script Primera Etapa	36
B. Script Segunda Etapa (Simulación)	40
C. Módulos	47
C.1. Interpolación de Lagrange	47
C.2. Integración polinomial	48
C.3. Diferenciación polinomial	48
C.4. Integración numérica	49
C.5. Argumentos Maximizantes y Minimizantes	50
C.6. Radio de curvatura	51
C.7. Recta Tangente	51
D. Memoria de Cálculo	52

Índice de figuras

1.	Aproximación de la longitud de arco	17
2.	Radio de Curvatura (en metros) en función de x	19
3.	Gráfica de curvatura contra x en los intervalos [860 m, 880 m] y [2410 m, 2440 m]	20
4.	Diagrama de gradas	21
5.	Plano de la pista visto desde arriba	22
6.	Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil acelera en línea recta	23
7.	Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil desacelera en línea recta	24
8.	Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil derrapa	24
9.	Diseño de spoiler	25
10.	Dimensiones del spoiler	25

Agradecimientos

Queremos agradecer especialmente a nuestros profesores, el Dr. César Antonio Merlín González y el Dr. Marco Benjamín Enríquez Flores por guiarnos y apoyarnos a lo largo de esta investigación, ya que siempre estuvieron atentos a nuestras dudas y sin su enseñanza, esta investigación no sería posible.

1. Introducción

El problema que se nos presenta es llevar a cabo la construcción de una pista de carreras de Fórmula 1. En base al diseño óptimo de la zona de curvas y el calor generado en estas zonas, se debe determinar la ubicación de las gradas y demostrar que esta ubicación es un lugar seguro para los espectadores.

De esta manera, se deben modelar dos situaciones, una donde la zona de curvas indique una salida del auto de la pista sin chocar contra la propuesta de ubicación de las gradas, y otra donde el coche continúe por la pista sin problema alguno.

1.1. Contenidos del reporte

Este reporte consta de diferentes secciones relevantes para su comprensión. En la sección de antecedentes se da un poco de contexto acerca de los temas relevantes para el documento como temas de fórmula 1, así como investigaciones y trabajos previos relacionados con este tema y la relevancia del mismo. En la sección de teoría se hace referencia a los teoremas, herramientas, y principios físicos que son necesarios para analizar la situación propuesta. En la sección de experimentación o desarrollo se describe el procedimiento de prueba paso a paso para la obtención de los resultados, mencionando los scripts, componentes de diseño y toda la información necesaria para que pueda ser replicado. En la sección de resultados se muestra de forma clara y ordenada los resultados obtenidos gracias a la simulación y aplicación de nuestro reto mientras que en la sección de conclusiones se resaltan los aspectos aprendidos más importantes del documento así como recomendaciones y los casos de éxito que se visualizaron en el.

2. Antecedentes

Es bien sabido que el deporte de la Fórmula 1 tiene varias áreas de oportunidad en términos de seguridad. Desde su creación en 1950, un total de 52 conductores han fallecido hasta el momento. La alta velocidad de los coches, el sistema mecánico del volante y la presencia de

obstáculos a lo largo de la pista son todas alarmantes razones para poner en duda la seguridad del deporte. La Fórmula 1 ha recorrido un largo camino y todas las fatalidades ocurridas a lo largo de los años ha sido el mayor factor para generar mejoras en términos de seguridad. Varios corredores, como el tres veces campeón Jackie Stewart han jugado un papel importante en impulsar la seguridad, defendiendo el uso de cinturones de seguridad obligatorios, cascos así como mejores barreras y equipos adecuados. Accidentes como la muerte de Ayrton Senna y Roland Ratzenberg en 1994 y la muerte de Jules Bianchi en 2014 han dado inicio a grandes oleadas de innovaciones en materia de seguridad ([Duxbury, 2021](#)).

Estos avances en el ámbito de la seguridad conforman reglas impuestas por la Federación Internacional de Automóviles a lo largo de los años. Un ejemplo es la implementación de trajes resistentes al fuego, obligatorios desde 1975. El pit lane, por ejemplo, es el carril que transcurre entre la pista y los boxes el cual ha sido foco de múltiples accidentes. Por ende, múltiples de las modificaciones que se han hecho en cuanto a la protección de los pilotos se basa en el pit lane. Por esto, en 1994 se diseñó la elaboración de barreras y áreas de escurrimiento, introduciendo barreras de neumático estándar para una máxima absorción de energía en el momento de un choque. De igual manera, desde 2014 los conductores tienen acelerómetros en sus auriculares para recopilar datos precisos sobre las fuerzas que actúan en el conductor, lo cual es información valiosa a lo largo del recorrido ([Alonso, 2019](#)). Para proteger a todas las personas involucradas hay otras 6 medidas principales: Barreras de protección, banderas de señalización de seguridad y un pit lane, al igual que personas encargadas de seguridad como comisarios de pista y coches de seguridad y medicalizados ([Viaplana, 2020](#)).

El avance de implementaciones de seguridad en las carreras de Fórmula 1 son recordatorios de que el automovilismo no es tan seguro como podría ser. Por esta razón el análisis ingenieril y mecánico sobre los factores de riesgo es algo que se sigue trabajando hasta la fecha. La revista Internacional de Investigación de Ingeniería y Tecnología ha analizado los factores de seguridad a lo largo de una carrera de Fórmula 1, e insiste en que uno de los más grandes retos es el uso de software para calcular la probabilidad de impacto en numerosos lugares de la pista y las velocidades que estos carros pueden alcanzar en dichas zonas, reto que aún hay mucho que hacer antes de cumplir ([Shubham, 2015](#)). Si se consigue hacer un análisis completo de las

zonas de riesgo de la pista y las fuerzas que el automóvil es capaz de crear, se podrían hacer avances significativos en términos de la seguridad del deporte, determinando así limitaciones para velocidades y recorridos.

3. Teoría

En esta sección se describen las bases teóricas necesarias para el análisis. Estos antecedentes incluyen el método de interpolación de Lagrange, la longitud de arco de una curva y su radio de curvatura, así como el trabajo realizado, la energía y la cantidad de movimiento.

3.1. Interpolación de Lagrange

De forma general, dado el conjunto de N puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$, la interpolación de Lagrange consiste en utilizar N polinomios $q_k(x)$, que tengan como raíces el conjunto de números $\{x_j | j \neq k\}$ y satisfacen la ecuación $q_k(x_k) = 1$. En otras palabras, estos polinomios tienen como raíces todos los valores de la variable independiente dados menos uno, en el que su imagen es exactamente igual a 1. Para deducir los polinomios $q_k(x)$ consideramos el polinomio dado por el producto de las raíces

$$\prod_{j=0, j \neq k}^N (x - x_j), \quad (1)$$

el cual dividimos entre este producto evaluado en $x = x_k$; esto asegura que $q_k(x_k) = 1$. Es decir que

$$q_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^N \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}. \quad (2)$$

Finalmente, el polinomio interpolador $p(x)$ se deduce como la suma de todos los polinomios $q_k(x)$ multiplicados por el valor de y correspondiente y_k , puesto que

$$y_k q_k(x_k) = y_k(1) = y_k, \quad (3)$$

$$y_k q_k(x_j) = y_k(0) = 0, \quad (4)$$

y debido a la cerradura de los polinomios bajo la suma, esto nos asegura que

$$p(x) = \sum_{i=1}^N y_k q_k(x) \quad (5)$$

es un polinomio que pasa por los puntos deseados. Además como los polinomios $q_k(x)$ tienen $N - 1$ raíces, el mayor grado que puede tener $p(x)$ es $N - 1$.

3.1.1. Implementación Programática

Este método fue implementado computacionalmente como una función que recibe 2 vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} , que contienen las coordenadas de los puntos conocidos, tal que $y(i) = f(x(i))$ para una función f desconocida que se desea interpolar. El valor de salida es un vector con los coeficientes del polinomio interpolador $p(x)$.

Para ello se utiliza el vector \mathbf{x} para llenar una matriz L con los coeficientes de los polinomios $q_k(x)$; tal que cada fila de la matriz corresponde a un polinomio particular. Finalmente, el vector de los coeficientes del polinomio $p(x)$ se obtiene realizando la multiplicación $\mathbf{y}L$, puesto que $(\mathbf{y}L)_{1i} = \sum_{j=1}^N y_{1j} L_{ji}$. Lo cual implica que es una matriz de dimensión $1 \times N$, es decir un vector fila, tal que la entrada de cada columna i es la suma de los coeficientes del término en x de orden $i - 1$ de los polinomios q_k multiplicados por el valor y_k , por lo que se devuelve como valor de salida. Para ver la implementación explícita, puede consultar el **apéndice C.1**.

3.1.2. Herramientas adicionales

Puesto que se desea diseñar una pista que tenga un radio de curvatura menor a 100 m en al menos un punto, usar puntos arbitrarios en *MATLAB* para diseñar la curva era altamente ineficiente. Por lo tanto para poder hallar el polinomio también se utilizó una gráfica interactiva en [Desmos](#), en la que se implementó el método de interpolación de Lagrange. Pues, además de graficar el polinomio se graficó el radio de curvatura en función de x y una vez hallada una curva que cumpliera los requisitos de curvatura, se utilizaron los puntos en *MATLAB* para continuar con el análisis.

3.2. Geometría Diferencial

La Geometría Diferencial es una rama de las matemáticas que estudia las curvas y superficies en el espacio, a las que se les refiere de forma generalizada como variedades. En esta investigación es necesario considerar la longitud de arco y el radio de curvatura de una curva en el espacio tridimensional euclídeo \mathbb{R}^3 . Por este motivo empezamos retomando la definición de una curva en el espacio, en concreto una curva diferenciable (para poder calcular su longitud). “Una curva parametrizada diferenciable es un mapeo diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la recta de los reales \mathbb{R} a \mathbb{R}^3 ”. (Carmo, 1976, p.2)

3.2.1. Longitud de arco

Intuitivamente, la longitud de arco de una curva diferenciable es la longitud de dicha curva, si esta fuese extendida como una recta. Matemáticamente “dado $t \in I$, la longitud de arco de una curva regular parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, desde el punto t_0 es por definición

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt, \quad (6)$$

donde $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ ” (Carmo, 1976, p.6).

3.2.2. Radio de curvatura

El radio de curvatura en un punto corresponde al radio de la circunferencia osculatriz a la curva en dicho punto. Para una curva continua y al menos dos veces diferenciable $\{(x, f(x)) | x \in I\}$, descrita en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, se puede calcular el radio de curvatura R en un punto arbitrario $(\alpha, f(\alpha))$ tal que $\alpha \in I$, utilizando la ecuación

$$R = \frac{\left(1 + [f'(\alpha)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(\alpha)|} \quad (7)$$

(Weisstein, s.f.).

3.3. Trabajo invertido

El trabajo es una cantidad escalar que depende de la fuerza que se le aplicó a un sistema y la dirección en la que este se desplaza. “El trabajo invertido por una fuerza es la integral de la fuerza con respecto del desplazamiento a lo largo del camino del desplazamiento:

$$W_{AB} = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.” \quad (8)$$

(Ling, Sanny, y Moebis, 2018, p.328). Esta es la definición más general del trabajo ya que aplica para fuerzas varían a lo largo del desplazamiento. En caso de tener una fuerza constante, el trabajo realizado es simplemente el producto escalar de la fuerza \mathbf{F} y el desplazamiento \mathbf{r} .

3.4. Energía

Un principio de gran utilidad en el estudio de la física es el de la conservación de la energía; aunque como menciona Richard Feynman “ese es un principio matemático, establece que hay una cantidad numérica que no cambia cuando algo ocurre” (Feynman, Leighton, y Sands, 1977, sec.4, p.1). Para enunciarlo será importante considerar primero las definiciones de energía cinética y potencial.

3.4.1. Energía cinética

La energía cinética es una cantidad que depende de la rapidez instantánea con la que se mueve una masa en un tiempo determinado y que es denotada como K . Explícitamente “la energía cinética de una partícula es una mitad del producto de la masa de la partícula m y el cuadrado de su rapidez v :

$$K = \frac{1}{2}mv^2” \quad (9)$$

(Ling y cols., 2018, p.338).

Un teorema importante en el estudio de la mecánica, concido como el teorema de trabajo-energía, establece que “el trabajo neto realizado en una partícula equivale al cambio en la energía cinética de la partícula: $W_{\text{neto}} = K_B - K_A$ ” (Ling y cols., 2018, p.342).

3.4.2. Energía potencial

De forma similar a la energía cinética, en el caso de la energía potencial U “se puede definir la diferencia de energías potenciales desde un punto A hasta un punto B como el inverso aditivo del trabajo invertido: $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -W_{AB}$ ” (Ling y cols., 2018, p.360). Sin embargo, esta definición es insuficiente para calcular las energías potenciales U_B o U_A per se. La razón por la que se evita tal definición es que no será necesario calcular energías potenciales, ya que para un vehículo que se mueve a una altura constante la diferencia de energías potenciales es nula; esto se debe a que la energía potencial se presenta con el trabajo que invierte la fuerza de gravedad o con el trabajo que invierte un sólido deformable. Entonces como el vehículo no tiene desplazamiento vertical y no esta sujeto a las fuerzas de un sólido deformable, dicho trabajo es nulo.

3.4.3. Principio de conservación de la energía

Se le llama energía mecánica a la suma de la energía cinética y potencial, si se denota la energía mecánica por E esto quiere decir que $E = K + U$. El principio de conservación de la energía establece que E “permanece constante a menos que fuerzas fuera del sistema o fuerzas no conservativas realicen trabajo sobre este, en dado caso, el cambio en la energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas” (Ling y cols., 2018, p.372). Es decir que si W_F es el trabajo realizado por una fuerza no conservativa F , entonces

$$W_F = \Delta E, \quad (10)$$

o escrito en términos de la energía cinética K y la energía potencial U

$$W_F = \Delta (K + U) = K_f - K_i + U_f - U_i \quad (11)$$

$$\implies K_i + U_i + W_F = K_f + U_f, \quad (12)$$

y por lo antes mencionado, como en el sistema de estudio las energías potenciales inicial y final son iguales

$$\implies K_i + W_F = K_f. \quad (13)$$

Además, como se menciona que la energía permanece constante si no hay fuerzas no conservativas, la ecuación anterior implica que la energía perdida en el sistema sea el trabajo invertido por la fuerza no conservativa.

3.5. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Un vector de interés en el estudio de las colisiones y del movimiento es la *cantidad de movimiento*, denotado por \mathbf{p} , al que suele referirse también como *momentum*. “El *momentum* \mathbf{p} de un objeto es el producto de su masa y su velocidad $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ” (Ling y cols., 2018, p.396). Además, los autores Ling, S., Sanny, J. y Moebs, W. mencionan posteriormente que si dos masas puntuales m_1 y m_2 interactúan de acuerdo a la tercera ley de Newton, se deduce que $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$, lo cual implica que la suma de las cantidades de movimiento sea constante en el tiempo, o en otras palabras que la cantidad de movimiento del sistema sea siempre la misma (Ling y cols., 2018, pp. 412-413). El hecho de que la cantidad de movimiento sea constante en el tiempo nos permite considerar un tiempo inicial y un tiempo final para escribir:

$$\mathbf{p}_{1_i} + \mathbf{p}_{2_i} = \mathbf{p}_{1_f} + \mathbf{p}_{2_f}, \quad (14)$$

que es la forma en la que se considerará este principio en el reporte.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento es especialmente útil al analizar colisiones, ya que en una colisión dos masas ejercen fuerzas iguales en magnitud y opuestas en sentido; entonces, por aquello descrito anteriormente, en una colisión la cantidad de movimiento se debe conservar. Sin embargo, esto solo permite el análisis inmediato de la colisión, es decir que el principio de conservación de energía solo nos permite determinar las velocidades inmediatamente después de la colisión, ya que como los vehículos se mueven con fricción las velocidades disminuyen con el tiempo y por lo tanto la cantidad de movimiento no sería igual en un tiempo muy alejado al instante de la colisión.

3.6. Principio de Bernoulli y ecuación de continuidad

En el análisis del movimiento de los fluidos, conocido como dinámica de fluidos, se suele considerar un fluido ideal que es incompresible, laminar, sin viscosidad e irrotacional. Bajo

estas suposiciones del fluido, los autores Ling, S., Sanny, J. y Moebs, W. derivan la ecuación de Bernoulli, la cual establece que al analizar dos tubos de flujo ① y ②, la suma de su presión y las densidades de energía cinética ($\frac{1}{2}\rho v^2$) y potencial (ρgy) debe ser la misma:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 \quad (15)$$

(Ling y cols., 2018, pp.716-717). Bajo la misma suposición de un fluido ideal y considerando que la masa de un fluido es constante en el tiempo, Ling, S., Sanny, J. y Moebs, W. también demuestran que el producto de la densidad, el área transversal de un tubo de flujo y la velocidad del fluido: ρAv ; se debe conservar (Ling y cols., 2018, p.715), es decir que para los tubos de flujo ① y ②

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (16)$$

es decir que si el fluido es únicamente el aire, las densidades en ① y ② serán las mismas, por lo que la ecuación anterior implica (para la dinámica del aire) que

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \quad (17)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de continuidad.

3.7. Metodología

Para cumplir con el objetivo de la investigación y debido a que los puntos inicial y final de este tramo de la pista eran conocidos, se modeló la pista de carreras usando un polinomio que interpole los puntos dados y dos adicionales los cuales se escogieron de tal forma que el radio de curvatura fuese menor a 100 m. Posteriormente se calculó la longitud de la curva desde el punto final hasta el inicial usando la definición de la longitud de arco (**ecuación 6**), además se generó una gráfica del radio de curvatura en función de la coordenada horizontal, esto con el propósito de identificar las zonas críticas. Se graficaron las tangentes a los puntos iniciales de las zonas críticas y usando una recta paralela a esta, desplazada 20 m hacia arriba se modelaron las gradas. Finalmente se realizaron diagramas de cuerpo libre para el vehículo, se modeló el spoiler usando dimensiones de la FIA y con ello se analizó la velocidad máxima con la que los coches pueden dar la vuelta sin derrapar. Finalmente se realizó un análisis de los principios de

conservación de energía y el momento lineal, para considerar las pérdidas de energía que sufre el vehículo por la fricción y los resultados de posibles colisiones.

4. Experimentación y Desarrollo

Una vez establecida la metodología para el análisis y los contenidos teóricos necesarios para su entendimiento, es posible diseñar la zona de curvas, las gradas y realizar los análisis pertinentes.

4.1. Diseño de la pista de carreras

Utilizando un script de *MATLAB* (**apéndice A**), se empleó el módulo de interpolación de Lagrange para deducir los coeficientes del polinomio $p(x)$ que pasa por el conjunto de puntos $\{(300 \text{ m}, 2300 \text{ m}), (1730 \text{ m}, 2050 \text{ m}), (2610 \text{ m}, 560 \text{ m}), (2800 \text{ m}, 1200 \text{ m})\}$. Los coeficientes se obtuvieron usando las líneas 16 a 27 del script (**apéndice A**) y permitieron la deducción del polinomio

$$p(x) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

cuya imagen bajo x está en metros si el argumento está en metros.

El uso del método de Lagrange asegura que el polinomio pasa por los puntos; sin embargo, si se desea verificar que este es el caso, se puede consultar el **apéndice D**.

4.2. Longitud de arco

Una vez obtenida la curva que describe la pista de carreras es fundamental considerar su longitud; ya sea para determinar los costos del asfalto necesario para su construcción o simplemente para tener un registro de la longitud que los pilotos recorren. Esta longitud se conoce en la Geometría diferencial de curvas como longitud de arco. Si se remite a la **ecuación**

6 ubicada en la **sección 3**, la longitud de arco de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ desde un parámetro inicial t_0 hasta t es

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Entonces, como la curva descrita por $p(x)$ para un valor de x en metros es la aplicación $C : [300, 2800] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$C(x) = \begin{bmatrix} x \text{ m} \\ p(x) \text{ m} \\ h \text{ m} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ya que dado un valor de x en metros, podemos encontrar un punto de coordenadas $(x, p(x), h)\text{m}$ en la curva, donde h es la altura vertical **constante** que tenga la pista respecto a un marco de referencia.

Es decir que la curva está parametrizada por su coordenada x y por lo tanto su longitud de arco desde un parámetro inicial x_0 a un parámetro final x_f es

$$s(x_f) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{\left(\frac{d}{dx}[x]\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}[p(x)]\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}[h]\right)^2} dx \quad (20)$$

$$\Rightarrow s(x_f) = \int_{x_0}^{x_f} \sqrt{1 + (p'(x))^2} dx. \quad (21)$$

Como conocemos las coordenadas de los puntos inicial y final para este tramo de la pista, la longitud de arco que corresponde al diseño propuesto es

$$s = \int_{300\text{m}}^{2800\text{m}} \sqrt{1 + (p'(x))^2} dx, \quad (22)$$

y como las unidades de $p(x)$ y x son las mismas, la tasa de cambio $p'(x)$ es adimensional. Esto implica que la unidad de la longitud de arco s sea la de los límites de integración.

Para calcular esta cantidad se emplearon herramientas computacionales y se recurrió a la integración numérica, utilizando el módulo ubicado en el **apéndice C.4**. Entonces, la longitud de arco se aproximó como la suma de las integrales de 10 interpolaciones de grado 4 del integrando y para verificar que se ha aproximado con suficiente precisión, se graficó el integrando junto con el área delimitada por los polinomios interpoladores (**figura 1**).

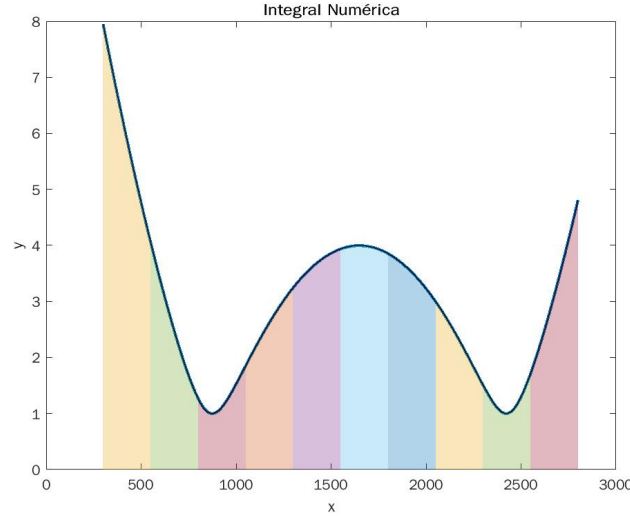


Figura 1: Aproximación de la longitud de arco

Como se puede observar en la **figura 1**, las áreas delimitadas por los polinomios y el eje horizontal aproximan la integral de $\sqrt{1 + (p'(x))^2}$ en el intervalo $[300, 2800]$, puesto que la curva en azul es el integrando y las áreas parecen quedar delimitadas por esta, sin excesos ni defectos perceptibles. Entonces, como se muestra en la ventana de comandos del script (**apéndice A**) al ejecutar el programa

$$s \approx 7521.5 \text{ m.} \quad (23)$$

4.3. Máximos y mínimos

Determinar los extremos de la pista también es importante para tener un diseño efectivo y seguro ya que cerca de estos puntos la curva tiene su mayor curvatura. Por lo tanto, conocer los máximos y mínimos nos permite identificar las zonas de mayor riesgo de la pista.

Para poder identificar estos puntos, computacionalmente se creó una función cuya entrada sea un vector con los coeficientes del polinomio, esta se ubica en el **apéndice C.5** y a continuación se describe su implementación.

Primero, se obtienen los coeficientes de la derivada del polinomio y se almacenan en una variable. Posteriormente se utiliza el módulo de diferenciación nuevamente usando la derivada del polinomio, obteniendo así los coeficientes de la segunda derivada, los cuales se almacenan

en otra variable. Posteriormente se encuentran los valores que hacen que la derivada sea cero, es decir las raíces y se almacenan en un arreglo. Finalmente se itera por cada número en el arreglo (es decir por cada raíz de la derivada) y se evalúa con el criterio de la segunda derivada. En caso de tener un máximo, la segunda derivada es negativa, en caso de tener un mínimo la segunda derivada es positiva. La función regresa dos arreglos `argmax` y `argmin` que contienen los argumentos maximizantes y minimizantes respectivamente.

Esta función se utilizó en los scripts para encontrar los puntos máximos $\{(\text{argmax}, p(\text{argmax}))\}$ y los puntos mínimos $\{(\text{argmin}, p(\text{argmin}))\}$. Como se modeló una función polinomial de grado tres y un polinomio tiene una cantidad de puntos de retorno menor o igual al grado menos 1, únicamente se tuvo un punto máximo con coordenadas (874.6665 m, 4360.86 m) y un punto mínimo con coordenadas (2421.9969 m, 368.8831 m) en el marco de referencia con el que se describe la pista.

4.4. Zona crítica

Por lo antes mencionado, para verificar que el diseño de la pista es seguro para los espectadores es indispensable considerar la curvatura de esta. Por este motivo, se consideró que el radio de curvatura crítico es de 100 m, tal que la zona crítica en la que los vehículos tienen mayor riesgo de derrape queda definida como el conjunto de todos los puntos en los que el radio de curvatura es menor al radio crítico; puesto que la curvatura, κ , es el inverso multiplicativo del radio de curvatura.

Como fue mencionado en la **sección 3**, el radio de curvatura varía en los distintos puntos de una curva; para calcular su valor en una curva descrita por $f(x)$ se usa la ecuación

$$R = \frac{\left(1 + [f'(\alpha)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(\alpha)|}.$$

Por lo tanto, como el diseño de la pista utiliza una función polinomial, se implementó un módulo que obtenga los coeficientes de la derivada de un polinomio dado y otro módulo que calcule el radio de curvatura en un punto (o un conjunto de puntos).

El módulo de diferenciación polinomial simplemente consiste en reducir el orden del poli-

nomio y multiplicar los coeficientes por el orden al que correspondían (que es equivalente a aplicar la “regla del poder”). Para consultar la implementación completa de este módulo, el lector puede consultar el **apéndice C.3**. Por otra parte, el módulo para calcular el radio de curvatura utiliza el módulo de diferenciación para obtener la primera y segunda derivada del polinomio, que después se utilizan para calcular el radio como se muestra en la **ecuación 7**; la implementación completa de este módulo se puede ver en el **apéndice C.6**.

El módulo de radio de curvatura se utilizó en el script principal (líneas 72 a 79) para generar una gráfica del radio de curvatura contra la coordenada x , esta se muestra en la **figura 2**. Con esta gráfica se pueden determinar numéricamente las zonas críticas, previamente establecidas como aquellas en las que $R < 100$ m.

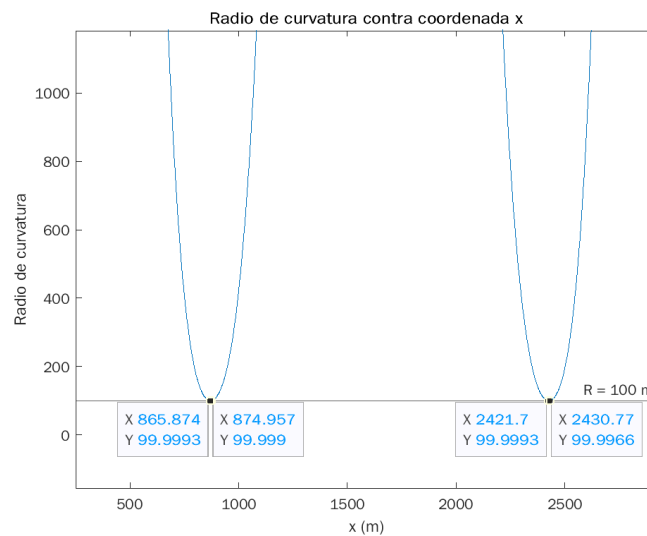
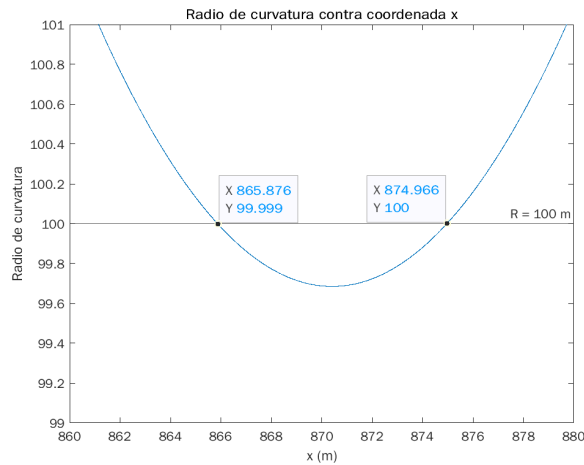
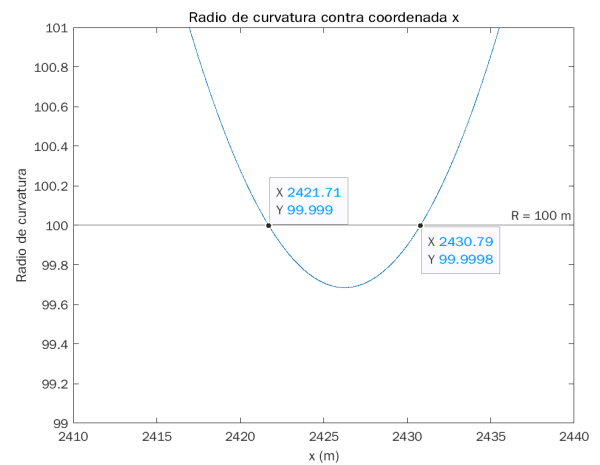


Figura 2: Radio de Curvatura (en metros) en función de x

Para ver con mayor claridad los puntos marcados en la **figura 2** se manipularon los límites en los que se grafica, considerando un intervalo más pequeño cercano a estos. Estas gráficas se muestran a continuación en las **figuras 3a** y **3b**. En estas gráficas se puede apreciar que el radio de curvatura es menor a 100 m si $x \in [865.876 \text{ m}, 874.966 \text{ m}]$ o $x \in [2421.71 \text{ m}, 2430.79 \text{ m}]$.



(a) Curvatura en el intervalo [860 m, 880 m]



(b) Curvatura en el intervalo [2410 m, 2440 m]

Figura 3: Gráfica de curvatura contra x en los intervalos [860 m, 880 m] y [2410 m, 2440 m]

Por lo tanto; se graficó un conjunto de puntos finitos pertenecientes a la curva $\{(x, p(x))\}$, para los que $x \in [865.876 \text{ m}, 874.966 \text{ m}]$ o $x \in [2421.71 \text{ m}, 2430.79 \text{ m}]$; lo cual permite que se visualicen las zonas críticas en la pista, que son los posibles puntos de derrape. La implementación de este proceso se puede ver en las líneas 95 a 107 del script, ubicado en el **apéndice A**. También se graficaron las rectas tangentes al primer punto crítico en cada zona, pues en caso de derrape se espera que un automóvil siga esta dirección.

4.5. Gradass y radio de seguridad

Por lo antes mencionado, es importante que exista un radio de seguridad a lo largo de la pista; especialmente en zonas de riesgo ya que en caso de que exista un derrape fallido o que el vehículo pierda el control, es necesario evitar colisiones contra el público. Pues además, al ser las curvas las zonas más interesantes para los espectadores, las gradass se ubicarán en el primer punto para el que $R < 100 \text{ m}$ cerca del máximo y cerca del mínimo.

Para ello utilizamos el script de *MATLAB* ubicado en el **apéndice A** y utilizando la recta tangente a un posible punto de derrape se le agregó el radio de seguridad. Esto asegura que al colocar los vértices de las gradass sobre esta recta, estas se ubiquen a una distancia segura. En la **figura 4** se puede ver como se planea colocar las gradass, dependiendo si están cerca de un

máximo (**figura 4a**) o un mínimo (**figura 4b**) de la pista

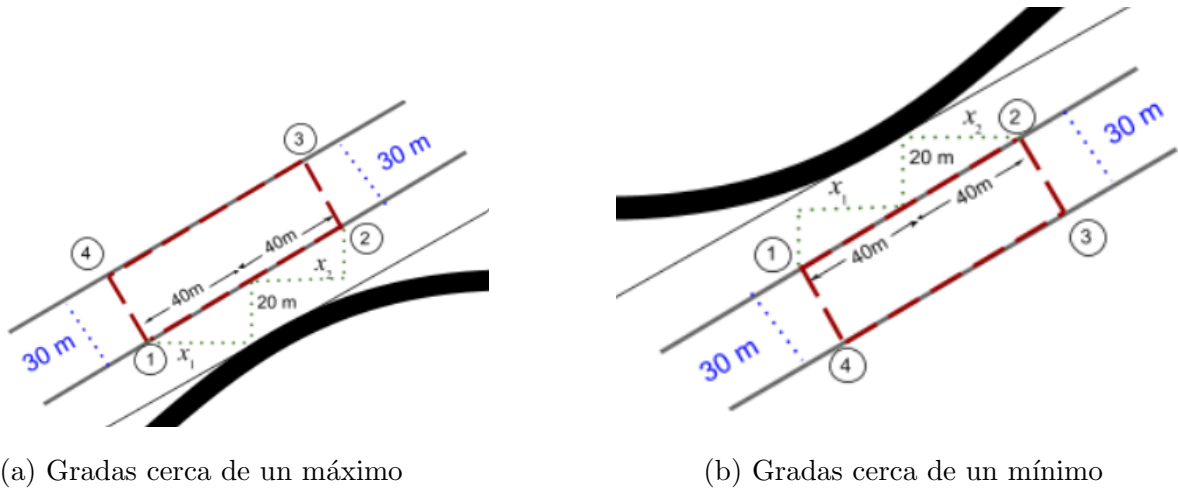


Figura 4: Diagrama de gradass

Como la longitud de las gradass debe ser de 80 m, consideramos colocar el punto medio de la base de las gradass en el primer punto donde $R < 100$ m y considerar los vértices ① y ② como los puntos que están ubicados a 40 m de este punto. Al ser la recta obtenida, generalmente inclinada, la forma más general de deducir la distancia de las coordenadas horizontales x_1 y x_2 es con el teorema de Pitágoras. Pues, como se puede ver en las **figuras 4a** y **4b** se forman dos triángulos rectángulos congruentes. Por lo tanto es posible deducir la distancia que se debe desplazar respecto del punto medio como $d = \sqrt{40^2 - 20^2}$ m. Además, como los puntos se ubican en la recta paralela a la tangente a la curva, podemos deducir las coordenadas verticales como la imagen de dicha recta bajo las coordenadas en x deducidas.

Finalmente, los puntos ③ y ④ se deducen como aquellos que tienen las mismas coordenadas horizontales a ② y ① respectivamente, pero sus coordenadas verticales se obtienen usando una recta desplazada 30 m hacia arriba si se colocan las gradass cerca de un máximo o 30 m hacia abajo si se colocan cerca de un mínimo. Computacionalmente se obtuvieron las coordenadas de los vértices y se generaron las figuras de las gradass, en las líneas 115 a 164 del script (**apéndice A**). Si se suprime el punto y coma de estas líneas, al correr el programa se puede ver en la ventana de comandos las coordenadas de dichos vértices. Para la primera zona de gradass estos fueron los vértices: ①(831.22 m, 4377.4 m), ②(900.51 m, 4383.5 m),

③(900.51 m, 4413.5 m) y ④(831.22 m, 4407.4 m); es decir que las gradas son la región delimitada por estos como se muestra en la **figura 4a**. Para la segunda zona de gradas se encontró el conjunto de vértices: ①(2387.0 m, 348.99 m), ②(2456.3 m, 348.78 m), ③(2456.3 m, 318.78 m) y ④(2387.0 m, 318.99 m); lo cual nuevamente implica que la segunda zona de gradas sea la región que estos puntos delimita, como se muestra en la **figura 4b**.

Posteriormente se desarrolló un segundo script para simular un vehículo moviéndose sobre la pista, dicho script se ubica en el **apéndice B** y al correrlo se genera un plano de la pista propuesta, la ubicación de las gradas, las zonas críticas ($R < 100$ m), las rectas tangentes a un punto en cada zona crítica y un triángulo móvil (que representa el vehículo). Una fotograma de la animación, con el plano de la pista se muestra en la **figura 5**

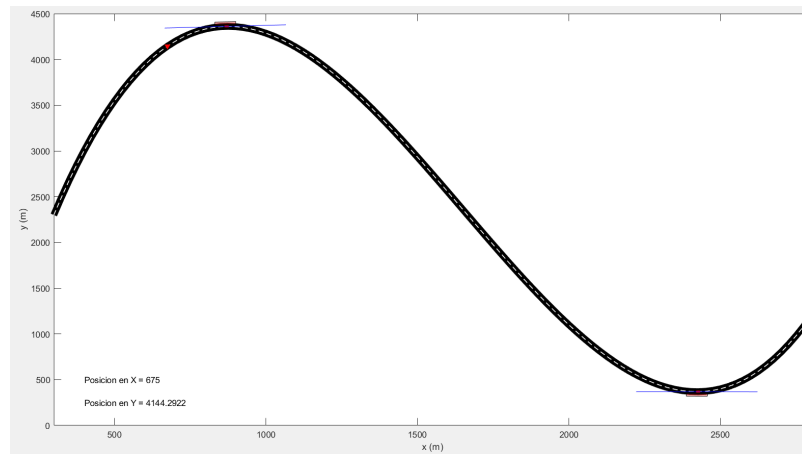


Figura 5: Plano de la pista visto desde arriba

4.6. Análisis de fuerzas, energía y cantidad de movimiento

En esta sección se realizará un análisis de las fuerzas a las que está sometido el vehículo en distintas etapas de una carrera: acelerando en línea recta, desacelerando en línea recta y derrapando. También se analizará la fuerza hacia abajo que genera el spoiler del vehículo; ya que este análisis permite determinar la velocidad máxima con la que un coche puede tomar una curva de radio $R = 100$ m, que fue considerado el radio de curvatura crítico. Finalmente esta sección concluye con un análisis de la energía pérdida durante un derrape y de la conservación de la cantidad de movimiento en el caso de que una colisión ocurra.

4.6.1. Diagramas de cuerpo libre

Cuando el automóvil está acelerando en línea recta, es la fuerza del motor la que empuja el carro y causa que siga moviéndose hacia adelante, la fuerza que se opone a este movimiento es la fuerza de arrastre actuando en contra de la velocidad del automóvil. Las llantas del vehículo están en contacto con el asfalto y experimentan una fuerza de fricción estática en cada instante, ya que la llanta en sí no desliza. Respecto a las fuerzas verticales, se tiene la fuerza que la gravedad ejerce sobre el automóvil, la fuerza que genera el spoiler y la fuerza normal que ejerce la superficie de contacto. El diagrama de cuerpo libre para el vehículo acelerando en línea recta se ubica en la **figura 6** y permite ver con facilidad todas estas fuerzas.

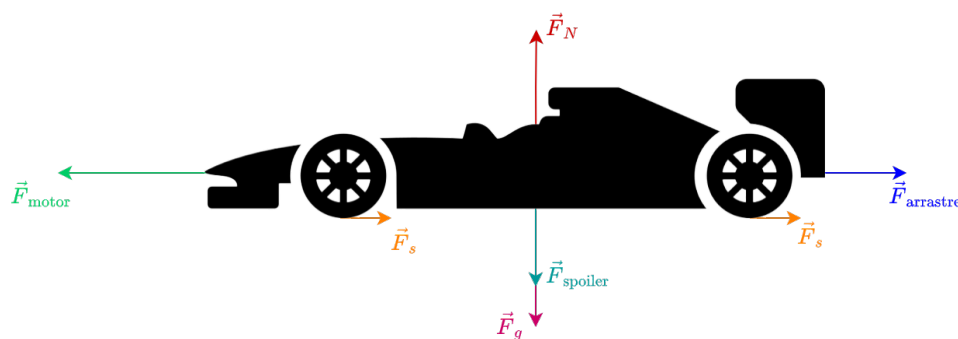


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil acelera en línea recta

Cuando el automóvil está desacelerando en línea recta, las mismas fuerzas están presentes sobre el automóvil, sin embargo, la fuerza del motor que antes empujaba al carro, moviéndose hacia adelante ya no está presente; pues era esa fuerza la que lo aceleraba, por lo que la fuerza de arrastre desacelera el vehículo en función de su velocidad instantánea. Además si se utilizan los frenos del vehículo, esto evita que las llantas rueden y por lo tanto, al eliminar la velocidad angular, la velocidad lineal del vehículo reduce significativamente. En la **figura 7** se muestra el diagrama de cuerpo libre cuando el vehículo desacelera en una recta.

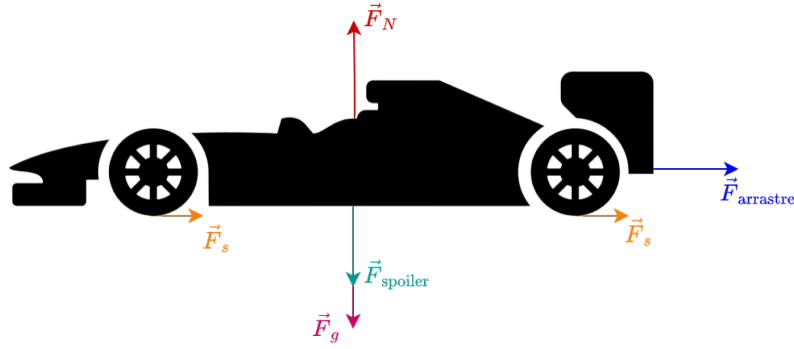


Figura 7: Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil desacelera en línea recta

Finalmente se consideró una situación de derrape en la que el automóvil sale de la pista en cierto punto, siguiendo un desplazamiento tangencial a la curva en ese punto. En este planteamiento, al derrapar, el contacto con la superficie ejerce una fuerza de fricción cinética sobre las llantas del automóvil, ya que durante el derrape están en movimiento. En la **figura 8** se muestra el diagrama de cuerpo libre para esta situación.

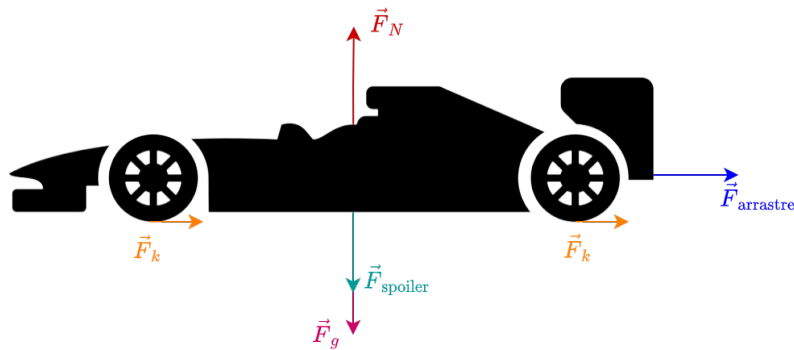
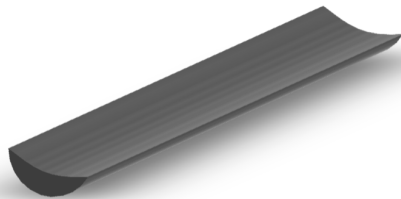


Figura 8: Diagrama de cuerpo libre cuando el automóvil derrapa

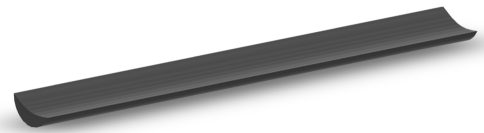
4.6.2. Diseño del spoiler del vehículo

Como se puede ver en los diagramas de cuerpo libre **figuras 6, 7 y 8** la fuerza hacia abajo que se genera por el spoiler siempre está presente y por lo tanto, la superficie debe ejercer una fuerza normal mayor al peso del vehículo para mantener las fuerzas verticales en equilibrio. Esta fuerza se puede determinar con el principio de Bernoulli pero el área del spoiler y de los

tubos de flujo implica conocer las dimensiones del spoiler. Es por esta razón que apegándose al reglamento de dimensiones de los automóviles impuestos por la Federación Internacional de Automovilismo (FIA) en 2020, se ha construido el siguiente modelo de spoiler (**figura 9**) con el software *Autodesk Fusion 360* para realizar el análisis físico.



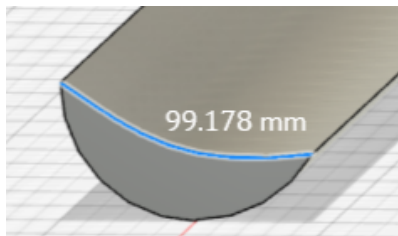
(a) Spoiler visto desde arriba



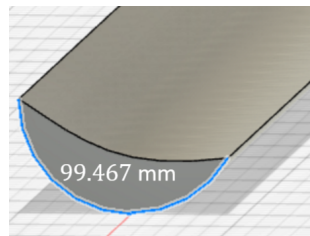
(b) Spoiler visto lateralmente

Figura 9: Diseño de spoiler

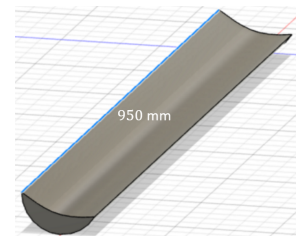
El software con el que se diseñó el spoiler, también permite calcular las dimensiones del modelo, estas se muestran en la **figura 10**



(a) Perfil superior



(b) Perfil inferior



(c) Longitud lateral

Figura 10: Dimensiones del spoiler

4.6.3. Análisis de la fuerza descendente por el spoiler

Ya que el spoiler genera una fuerza descendente que le da mayor estabilidad al vehículo, específicamente por el aire que este spoiler separa, es necesario analizar la diferencia de presión entre la parte superior e inferior del spoiler, esto se debe a que la fuerza descendente es el producto del área superior del spoiler y esta diferencia de presiones.

Para calcular la diferencia de presión y debido a que la velocidad del aire es distinta en la parte inferior y superior del spoiler es necesario utilizar el principio de Bernoulli. En la parte

superior del spoiler, el aire tiene una mayor presión que la presión del fluido en la parte inferior, esto ya que el fluido en la parte inferior debe recorrer más distancia en la misma cantidad de tiempo, por lo que debe comprimir para aumentar su velocidad; resultando en una menor presión. Entonces si se considera la parte superior del spoiler como la sección (1) y la parte inferior como la sección (2), por el principio de Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (24)$$

Como es de nuestro interés la diferencia de presión, despejamos la cantidad $P_1 - P_2$ de la ecuación anterior

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2, \quad (25)$$

que podemos factorizar para obtener

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1). \quad (26)$$

Como la parte (1) es la parte superior del spoiler y (2) es la parte inferior, la diferencia de posiciones verticales $y_2 - y_1$ es el inverso aditivo de la altura $-h$, entonces realizando esta sustitución y factorizando la densidad

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) - \rho g h \quad (27)$$

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - g h \right) \quad (28)$$

Como se tiene una sola ecuación con dos cantidades desconocidas ($P_1 - P_2$ y v_2^2) es necesario considerar la ecuación de continuidad, la cual nos permite escribir el miembro derecho de la igualdad únicamente en términos de v_1^2 . La ecuación de continuidad establece

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (29)$$

por lo tanto, despejando v_2

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}, \quad (30)$$

que ahora podemos sustituir en la **ecuación 28** para deducir

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{\left(\frac{A_1 v_1}{A_2} \right)^2 - v_1^2}{2} - g h \right) \quad (31)$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{A_1^2 v_1^2 - A_2^2 v_1^2}{2A_2^2} - gh \right). \quad (32)$$

Como las secciones transversales de los tubos de flujo son desconocidas, la cantidad

$$\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \quad (33)$$

se calculará usando la longitud superior l_1 e inferior l_2 del spoiler, ya que estas cantidades son proporcionales. Esto quiere decir que se puede escribir el área de los tubos de flujo al multiplicar las longitudes por una constante de proporcionalidad k .

$$\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} = \frac{(kl_1)^2 - (kl_2)^2}{(kl_2)^2} \quad (34)$$

$$\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} = \frac{k^2 (l_1^2 - l_2^2)}{k^2 l_2^2} \quad (35)$$

$$\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_2^2} \quad (36)$$

Entonces sustituyendo con las longitudes del diseño del spoiler

$$\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} = \frac{(99.178 \text{ mm})^2 - (99.467 \text{ mm})^2}{(99.467 \text{ mm})^2} \quad (37)$$

$$\Rightarrow \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} = -0.0029055. \quad (38)$$

Esta cantidad ahora se puede reemplazar en la **ecuación 32** para deducir

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{-0.0029055 v_1^2}{2} - gh \right), \quad (39)$$

y como la altura

$$h$$

es despreciable ya que el spoiler es delgado, la ecuación se reduce a

$$P_1 - P_2 = \rho \left(\frac{-0.0029055 v_1^2}{2} \right). \quad (40)$$

Como el fluido es aire y su densidad es 1.29 kg/m^3 , al sustituir este valor deducimos

$$P_1 - P_2 = (1.29 \text{ kg/m}^3) \left(\frac{-0.0029055 v_1^2}{2} \right) \quad (41)$$

$$\implies P_1 - P_2 = (-0.0018740 \text{ kg/m}^3) v_1^2. \quad (42)$$

Si ahora multiplicamos por el vector de área superior del spoiler, que es un vector ortogonal a la superficie superior del spoiler y cuya magnitud es el área, deducimos la fuerza

$$(P_1 - P_2) \mathbf{A} = \mathbf{F}_{\text{spoiler}} = (-0.0018740 \text{ kg/m}^3) v_1^2 \mathbf{A}. \quad (43)$$

Pero además, como el vector de área está dirigido directamente hacia arriba (la dirección $\hat{\mathbf{k}}$) y su magnitud es $A = 0.094218 \text{ m}^2$ por el diseño del spoiler, se deduce

$$\mathbf{F}_{\text{spoiler}} = (-0.0018740 \text{ kg/m}^3) v_1^2 (0.094218 \text{ m}^2) \hat{\mathbf{k}} \quad (44)$$

$$\implies \mathbf{F}_{\text{spoiler}} = (-0.00017656 \text{ kg/m}) v_1^2 \hat{\mathbf{k}}, \quad (45)$$

lo cual demuestra que es una fuerza descendiente. Si ahora se considera únicamente su magnitud

$$F_{\text{spoiler}} = (0.00017656 \text{ kg/m}) v_1^2. \quad (46)$$

Si el aire estaba inicialmente estático, la velocidad \mathbf{v}_1 con la que se mueve el fluido en la parte superior del spoiler sufre una compresión despreciable y por lo tanto se puede considerar opuesta a la del vehículo e igual en magnitud.

4.6.4. Velocidad máxima en curvas sin derrape

El resultado anterior para la fuerza descendiente es fundamental para determinar la velocidad máxima con la que un vehículo puede realizar un movimiento circular sin derrapar. Para que se pueda realizar dicho movimiento, los neumáticos deben experimentar la fuerza de fricción estática (de lo contrario, de ser fricción cinética se tiene un derrape) y esta fricción es la fuerza centrípeta. Esto nos permite establecer la ecuación

$$\frac{mv^2}{R} = F_s \leq F_N \mu_s, \quad (47)$$

ya que $\frac{mv^2}{R}$ es la magnitud de la fuerza centrípeta y la magnitud de la fuerza de fricción F_s debe ser menor o igual a $F_N \mu_s$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática.

Como el vehículo no experimenta movimiento vertical, se sabe de forma inmediata que todas las fuerzas que ocurren en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$ deben sumar 0. Estas fuerzas son la fuerza

normal, la fuerza descendiente y la fuerza gravitatoria y como las últimas dos son opuestas en dirección a la fuerza normal deducimos

$$F_N - F_g - F_{\text{spoiler}} = 0 \quad (48)$$

$$\implies F_N = F_g + F_{\text{spoiler}}. \quad (49)$$

Por lo que si ahora se sustituye F_N por el valor equivalente $F_g + F_{\text{spoiler}}$ en la desigualdad 47 se deduce

$$\frac{mv^2}{R} \leq (F_g + F_{\text{spoiler}}) \mu_s. \quad (50)$$

Si ahora se remplazan la fuerza F_g por la cantidad equivalente mg y si se reemplaza F_{spoiler} por la expresión obtenida en la **ecuación 46**

$$\frac{mv^2}{R} \leq (mg + (0.00017656 \text{ kg/m}) v_1^2) \mu_s. \quad (51)$$

Como fue mencionado anteriormente, la velocidad con la que se mueve el fluido \mathbf{v}_1 es igual en magnitud a la velocidad con la que se mueve el vehículo \mathbf{v} , es decir que $v_1 = v$ y por lo tanto

$$\frac{mv^2}{R} \leq (mg + (0.00017656 \text{ kg/m}) v^2) \mu_s. \quad (52)$$

Si ahora se despeja para la cantidad de interés v

$$\frac{mv^2}{R} - (0.00017656 \text{ kg/m}) v^2 \mu_s \leq mg \mu_s \quad (53)$$

$$v^2 \left(\frac{m}{R} - (0.00017656 \text{ kg/m}) \right) \leq mg \mu_s \quad (54)$$

$$v^2 \leq \frac{mg \mu_s}{\frac{m}{R} - (0.00017656 \text{ kg/m}) \mu_s} \quad (55)$$

$$v \leq \sqrt{\frac{Rmg \mu_s}{m - R(0.00017656 \text{ kg/m}) \mu_s}}, \quad (56)$$

podemos calcular la cota superior de la desigualdad si se considera el radio de curvatura crítico $R = 100 \text{ m}$, que la masa del vehículo y el piloto es de al menos 752 kg ([Mather, 2021](#)) y usando el coeficiente de fricción estática del hule sobre concreto $\mu_s = 1.0$ ([Serway, Jewett, Olguín, y Rosas, 2008](#), p. 121)

$$v \leq \sqrt{\frac{(100 \text{ m}) (752 \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2)}{(752 \text{ kg}) - (100 \text{ m}) (0.00017656 \text{ kg/m})}} \quad (57)$$

$$\Rightarrow v \leq 31.321 \text{ m/s} \quad (58)$$

$$\therefore v_{max} = 31.321 \text{ m/s} \quad (59)$$

4.6.5. Análisis de energía en un derrape

Si el vehículo derrapa y se sale de la pista siguiendo la recta tangente al punto en el que empieza su derrape, la energía perdida corresponde al trabajo invertido por la fricción cinética. Si se considera que al momento de derrapar el piloto pierde el control del coche y se sigue en esta recta hasta ser detenido, entonces por el principio de conservación de la energía e ignorando la fuerza de arrastre

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \int_{r_0}^{r_f} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (60)$$

donde la cantidad $\int_{r_0}^{r_f} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}$ corresponde al trabajo invertido por la fricción cinética \mathbf{F}_k . Despejando para esta cantidad

$$\int_{r_0}^{r_f} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{2}mv_i^2. \quad (61)$$

El signo negativo corresponde a que el trabajo que invierte la fricción es negativo, pues esta fricción se opone al sentido del movimiento \mathbf{r} y por lo tanto la energía que se pierde en el sistema compuesto por el vehículo y el piloto es simplemente el valor positivo

$$\left| \int_{r_0}^{r_f} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} \right| = E_{\text{perdida}} = \frac{1}{2}mv_i^2. \quad (62)$$

Como se puede observar, esta cantidad es exactamente igual a la energía cinética que tenía el vehículo en el instante inicial (justo antes del derrape) y esto era esperado ya que el piloto es detenido únicamente por los efectos de la fricción. Por esta razón, la forma más efectiva de calcular la energía pérdida cuando el vehículo es detenido, es con la energía cinética inicial. Entonces, como la velocidad máxima que puede tener el vehículo al tomar la curva sin derrapar es de 31.321 m/s, se espera que en una situación de derrape

$$\frac{1}{2}mv_i^2 > \frac{1}{2}m(31.321 \text{ m/s})^2, \quad (63)$$

como la masa del vehículo y el piloto es de 752 kg, la energía cinética inicial y consecuentemente la energía disipada con el derrape debe satisfacer la desigualdad

$$E_{\text{perdida}} = \frac{1}{2}mv_i^2 > \frac{1}{2}(752 \text{ kg})(31.321 \text{ m/s})^2 \quad (64)$$

$$\implies E_{\text{perdida}} > 368857.89 \text{ J.} \quad (65)$$

Pero por lo antes mencionado la cantidad exacta de energía perdida depende de la velocidad inicial con la que se intentó tomar la curva.

Además, una cantidad que puede ser de interés es la energía que se ha perdido después de t segundos. Sin embargo, como la magnitud de la fuerza de fricción es directamente proporcional a la de la fuerza normal y esta depende de la fuerza descendiente generada por el spoiler, que es una fuerza que varía con la velocidad del vehículo, es necesario deducir las ecuaciones del movimiento del vehículo cuando derrapa. En esta situación de derrape el vehículo tiene equilibrio en la dirección vertical, es decir la dirección \hat{k} , pero en la dirección tangente a la curva (cuyo sentido positivo es el de la dirección del movimiento) que denotaremos por $\hat{\tau}$ experimenta la fuerza de fricción. Entonces, por la segunda ley de Newton, la suma de fuerzas en la dirección $\hat{\tau}$ es la masa por la aceleración en esa dirección

$$\sum_i \mathbf{F}_{\hat{\tau}i} = m\mathbf{a}_{\hat{\tau}} \quad (66)$$

$$\implies \mathbf{F}_k = m\mathbf{a}_{\hat{\tau}}. \quad (67)$$

Como la fuerza de fricción cinética es opuesta a la dirección del movimiento y la dirección del movimiento es el sentido positivo de $\hat{\tau}$, podemos escribir lo anterior como

$$-F_k \hat{\tau} = m(a_{\hat{\tau}} \hat{\tau}) \quad (68)$$

$$\implies -F_k = ma_{\hat{\tau}}. \quad (69)$$

Pero como $F_k = \mu_k F_N$ y previamente se demostró que $F_N = mg + F_{\text{spoiler}}$, escribimos la **ecuación 69** como

$$-(mg + F_{\text{spoiler}}) \mu_k = ma_{\hat{\tau}} \quad (70)$$

$$\implies -mg\mu_k - F_{\text{spoiler}}\mu_k = ma_{\hat{\tau}}. \quad (71)$$

Anteriormente también se dedujo que la magnitud de la fuerza generada por el spoiler es una constante multiplicada por la rapidez del vehículo al cuadrado. Para no utilizar el valor

numérico de la constante, la denotaremos por c y como la velocidad si ocurre en la dirección $\hat{\tau}$ escribimos la ecuación 71 como

$$\implies -mg\mu_k - c\dot{\tau}^2\mu_k = ma_{\hat{\tau}}, \quad (72)$$

que podemos describir en términos de la posición del vehículo \mathbf{r} , expresada en la dirección tangencial, como

$$-mg\mu_k - c\dot{r}^2\mu_k = m\ddot{r} \quad (73)$$

$$\implies \ddot{r} = -g\mu_k + \frac{c}{m}\dot{r}^2\mu_k. \quad (74)$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden, escrita en su forma normal, la cual se resolver de forma numérica con el método de Euler, si se determina la posición inicial del vehículo en la dirección tangencial, si se conoce rapidez inicial y si se usa un paso en el tiempo determinado Δt . Al resolverla de esta manera se encontrarían un conjunto de puntos $r = \{r_{t_0}, r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_n}\}$ y $\dot{r} = \{\dot{r}_{t_0}, \dot{r}_{t_1}, \dot{r}_{t_2}, \dots, \dot{r}_{t_n}\}$ que son aproximadamente iguales a la posición en la dirección tangencial y la velocidad en la dirección tangencial en un cada instante de tiempo t_i respectivamente.

Una vez obtenidos estos puntos se puede considerar el trabajo invertido por la fricción

$$W_{F_k} = \int_{r_0}^{r_f} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}, \quad (75)$$

y si se consideran los vectores de fuerza de fricción y de posición en la dirección tangencial $\hat{\tau}$ se puede escribir lo anterior como

$$W_{F_k} = \int_{r_0\hat{\tau}}^{r_f\hat{\tau}} -F_k\hat{\tau} \cdot dr\hat{\tau} \quad (76)$$

$$\implies W_{F_k} = \int_{r_0}^{r_f} -F_k dr. \quad (77)$$

De igual forma, sustituyendo F_k por la cantidad equivalente $mg\mu_k + c\dot{r}^2\mu_k$, utilizada anteriormente, escribimos la ecuación anterior como

$$W_{F_k} = \int_{r_0}^{r_f} -mg\mu_k - c\dot{r}^2\mu_k dr \quad (78)$$

$$\implies W_{F_k} = \int_{r_0}^{r_f} -mg\mu_k dr + \int_{r_0}^{r_f} -c\dot{r}^2\mu_k dr \quad (79)$$

$$\implies W_{F_k} = -mg\mu_k (r_f - r_0) - c\mu_k \int_{r_0}^{r_f} \dot{r}^2 dr. \quad (80)$$

Entonces, como el valor absoluto del trabajo invertido por la fricción es la energía perdida, se puede calcular la energía perdida después de t_f segundos del inicio del derrape como

$$E_{\text{perdida}}(t_f) = |W_{F_k}(t_f)| = mg\mu_k (r_{t_f} - r_{t_0}) - c\mu_k \int_{r_{t_0}}^{r_{t_f}} \dot{r}^2 dr, \quad (81)$$

lo cual se puede lograr únicamente con los valores obtenidos del método de Euler si se cambia la variable de integración a t .

4.6.6. Análisis de conservación en una colisión entre dos vehículos

En caso de que dos vehículos colisionen, se tendría una colisión inelástica. Esto se debe a que la cantidad de movimiento permanece constante, pero como al momento de chocar los coches sufren deformaciones y se libera energía en forma de calor, la energía no se conserva en el sistema estudiado. Es decir que si un vehículo de masa m_1 tiene una velocidad inicial (antes del choque) \mathbf{v}_{1_i} y el otro vehículo de masa m_2 tiene una velocidad \mathbf{v}_{2_i} en ese mismo instante; las velocidades que tendrán después de la colisión \mathbf{v}_{1_f} y \mathbf{v}_{2_f} deben satisfacer la ecuación

$$m_1\mathbf{v}_{1_i} + m_2\mathbf{v}_{2_i} = m_1\mathbf{v}_{1_f} + m_2\mathbf{v}_{2_f}. \quad (82)$$

Si la colisión es perfectamente inelástica, entonces los dos vehículos permanecen unidos y sus velocidades finales deben ser la misma \mathbf{v}_f , en esta situación se satisface la ecuación

$$m_1\mathbf{v}_{1_i} + m_2\mathbf{v}_{2_i} = m_1\mathbf{v}_f + m_2\mathbf{v}_f = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f. \quad (83)$$

4.6.7. Análisis de conservación en una colisión entre un vehículo y una barrera

Otra posible colisión que puede ocurrir es la de un vehículo contra una barrera. En esta situación es necesario considerar el impulso; pues al momento de chocar con la barrera, la barrera ejerce fuerzas sobre el vehículo (y el vehículo ejerce esas mismas fuerzas contra la barrera) durante un tiempo determinado. Dichas fuerzas realizan trabajo que se traduce en pérdidas de energía en el sistema de estudio.

Matemáticamente el impulso \mathbf{I} tiene dos definiciones, la primera es como la integral de la fuerza resultante respecto del tiempo desde el tiempo inicial al tiempo final de la colisión

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \mathbf{F}_i dt, \quad (84)$$

la segunda es como el cambio en la cantidad de movimiento

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = m_f \mathbf{v}_f - m_i \mathbf{v}_i. \quad (85)$$

Por lo tanto, al igualar estas dos expresiones para \mathbf{I} es posible relacionar las fuerzas que experimenta el piloto si se conoce como cambia su cantidad de movimiento

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_i \mathbf{F}_i dt = m_f \mathbf{v}_f - m_i \mathbf{v}_i. \quad (86)$$

5. Resultados y Conclusiones

En conclusión, la investigación realizada implicó la obtención múltiples resultados los cuales se obtuvieron principalmente con herraminetas computacionales como *MATLAB*. La parte inicial y la más importante, fue la modelación y diseño de la pista de Fórmula 1 (pues es el diseño de la pista el que da pauta al resto del análisis). El diseño efectivo de esta pista requirió encontrar un polinomio que interpole un conjunto de puntos, cuya longitud de arco es de 7521.53 m y cuyo radio de curvatura es menor a 100 m en al menos un punto. La imagen $p(x)$ del polinomio obtenido bajo un argumento x es

$$p(x) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix},$$

que está dado en metros para un argumento en metros. Su radio de curvatura, como se muestra en la **figura 2**, es menor a 100 m cuando el argumento está en el intervalo [865.876 m, 874.966 m] o en el intervalo [2421.71 m, 2430.79 m].

Además, se determinaron los extremos de $p(x)$ usando los puntos críticos y el criterio de la segunda derivada. El máximo tiene coordenadas (874.6665 m, 4360.86 m) y el mínimo (2421.9969 m, 368.8831 m).

En cuanto al diseño de las gradas se encontraron los vértices de la primera zona de gradas: (831.22 m, 4377.4 m), (900.51 m, 4383.5 m), (900.51 m, 4413.5 m) y (831.22 m, 4407.4 m); de tal forma que la región delimitada por estos 4 puntos estuviera a una distancia de 20 m de la pista. Para la segunda zona de gradas igual se encontró un conjunto de 4 puntos que son sus vértices: (2387.0 m, 348.99 m), (2456.3 m, 348.78 m), (2456.3 m, 318.78 m) y (2387.0 m, 318.99 m); tal que la región descrita por dichos puntos mantiene la misma distancia de seguridad (20 m).

Posteriormente se determinó la rapidez máxima v_{max} con la que el automóvil puede tomar una curva con el radio de curvatura crítico $R = 100$ m sin derrapar. Esta cantidad se calculó como $v_{max} = 31.321$ m/s. Finalmente se consideró la energía pérdida en el sistema si un vehículo derrapa y pierde el control hasta ser detenido por la fricción, como dicha cantidad depende de la velocidad que tenía el vehículo inicialmente, se consideró una cota inferior usando la velocidad máxima con la que se evita el derrape, dicha cota inferior se calculó como 368857.89 J.

Sin embargo, esta investigación tuvo algunas limitaciones; en primera instancia, la velocidad con la que la simulación grafica los puntos no coincide con la del vehículo. La razón por la que no se intentó graficar de esta manera es que la velocidad del vehículo depende en gran medida del piloto, ya que este individuo tiene control sobre la fuerza que ejerce el motor del coche. Además, como la velocidad no puede ser determinada ya que depende del conductor y tanto las fuerza de fricción como la fuerza de arrastre dependen de la velocidad, no se puede establecer un sistema de fuerzas o un lagrangiano que permita la deducción del movimiento del vehículo. De cualquier manera, la simulación si tiene ventajas ya que nos permite ver que en el caso de un derrape en un punto crítico, la ubicación de las gradas es segura; pero en futuras investigaciones se espera modelar con mayor fidelidad el movimiento del vehículo.

A. Script Primera Etapa

```
1 % Script para modelar un tramo de una pista de Fórmula 1 y las gradas
2 % usando un polinomio de grado 3. Considerando la longitud de arco, el
3 % radio de curvatura, los extremos y las rectas tangentes en una zona
4 % crítica.
5
6 % Autoría:
7 % Andrea Alexandra Barrón Córdova (A01783126)
8 % Alina Rosas Macedo (A01252720)
9 % Almudena Morán Sierra (A01782147)
10 % Fernanda Cantú Ortega (A01782232)
11 % Joaquín Badillo Granillo (A01026364)
12 % Nahomi Daniela Plata Ulate (A01027008)
13
14 clc; clear all; close all;
15
16 %% INTERPOLACIÓN
17
18 % Vectores de coordenadas (x_i, y_i)
19 x = [300, 1730, 2610, 2800];
20 y = [2300, 2050, 560, 1200];
21
22 % Utilizar módulo de interpolación para determinar el polinomio
23 P = InterpolacionLagrange(x, y);
24 disp('Polinomio de Lagrange')
25 format long
26 disp(P)
27 disp('')
28
29 %% LONGITUD DE ARCO
30
31 % Integrando de la longitud de arco
32 integrando = @(t) sqrt(1 + polyval(DifP(P),t).^2);
33
34 % Booleano para "activar" o "desactivar" gráfica de integral numérica
35 grafica = 0;
36
37 % Longitud de arco usando integración numérica con 10 polinomios de grado 4
38 s = IntegralNumerica(integrando, 300, 2800, 10, 4, grafica);
39
```

```

40 % Mostrar por pantalla la longitud de arco
41 disp('Longitud de arco')
42 disp(strcat("s = ",string(s), " m"))
43 disp('')
44
45 %% MÁXIMOS Y MÍNIMOS
46
47 % Módulo de extremos para encontrar argumentos maximizantes y minimizantes
48 [argmax, argmin] = Extremos(P);
49
50 % Determinar número de máximos y mínimos
51 n = length(argmax);
52 m = length(argmin);
53
54 % Mostrar puntos máximos con notación (x,p(x))
55 disp('Máximos')
56 for i=1:n
57 disp(strcat('(', string(argmax(i)), ", ", string(polyval(P, argmax(i))), ')'))
58 end
59 disp('')
60
61 %Mostrar puntos mínimos con notación (x,p(x))
62 disp('Mínimos')
63 for i=1:m
64 disp(strcat('(', string(argmin(i)), ", ", string(polyval(P, argmin(i))), ')'))
65 end
66
67 %% GRÁFICAS
68
69 % Vector de variable independiente para graficar
70 t = 300: 0.001: 2800;
71
72 % Graficar radio de curvatura en distintos puntos de la curva
73 figure
74 plot(t, RadioCurvatura(P, t))
75 title('Radio de curvatura contra coordenada x')
76 xlabel('x (m)')
77 ylabel('Radio de curvatura')
78 ylim([0, 600])
79 yline(100, '-', 'R = 100 m')
80
81 % Graficar pista (polinomio P)

```

```

82 figure
83 plot(t, polyval(P,t))
84 title('Pista')
85 xlabel('x (m)')
86 ylabel('y (m)')
87 xlim([300, 2800])
88 hold on
89
90 % Marcar los extremos con * en la gráfica
91 plot(argmax, polyval(P, argmax), 'g*');
92 hold on
93 plot(argmin, polyval(P, argmin), 'g*');
94
95 % Graficar puntos con R < 100 m cerca del máximo local
96 tc1 = 865.87:0.1:874.96;
97 plot(tc1, polyval(P, tc1), 'r.')
98 hold on
99 % Tangente al primer punto
100 p1 = 865.87;
101 R1 = RectaTangente(P,p1, [p1-100, p1+100]);
102 hold on
103
104 % Graficar puntos con R < 100 m cerca del mínimo local
105 tc2 = 2421.7:0.1:2430.79;
106 plot(tc2, polyval(P, tc2), 'r.')
107 hold on
108 % Tangente al primer punto
109 p2 = 2421.7;
110 R2 = RectaTangente(P,p2, [p2-100, p2+100]);
111 hold on
112
113 %% GRADAS
114
115 % Gradadas cerca del máximo
116
117 % Recta base de las gradadas (agregar distancia de seguridad)
118 yg1 = @(t) R1(t) + 20;
119
120 % Esquina inferior izquierda
121 x1 = p1 - sqrt(40^2-20^2);
122 y1 = yg1(x1);
123

```

```

124 % Esquina inferior derecha
125 x2 = p1 + sqrt(40^2-20^2);
126 y2 = yg1(x2);
127
128 % Esquina superior derecha
129 x3 = x2;
130 y3 = yg1(x3)+30;
131
132 % Esquina superior izquierda
133 x4 = x1;
134 y4 = yg1(x4)+30;
135
136 % Graficar
137 vert = [x1, y1; x2, y2; x3, y3; x4, y4];
138 patch('Faces', [1 2 3 4], 'Vertices', vert, 'FaceColor','red','FaceAlpha',.3)
139 hold on
140
141 % Gradadas cerca del mínimo
142
143 % Recta base de las gradadas (agregar distancia de seguridad)
144 yg2 = @(t) R2(t) - 20;
145
146 % Esquina inferior izquierda
147 x1 = p2 - sqrt(40^2-20^2);
148 y1 = yg2(x1);
149
150 % Esquina inferior derecha
151 x2 = p2 + sqrt(40^2-20^2);
152 y2 = yg2(x2);
153
154 % Esquina superior derecha
155 x3 = x2;
156 y3 = yg2(x3)-30;
157
158 % Esquina superior izquierda
159 x4 = x1;
160 y4 = yg2(x4)-30;
161
162 % Graficar
163 vert = [x1, y1; x2, y2; x3, y3; x4, y4];
164 patch('Faces', [1 2 3 4], 'Vertices', vert, 'FaceColor','red','FaceAlpha',.3)

```


B. Script Segunda Etapa (Simulación)

```
1 % Script para simular un vehículo en un tramo de una pista de Fórmula 1 y las gradas
2 % usando un polinomio de grado 3. Considerando la longitud de arco, el
3 % radio de curvatura, los extremos y las rectas tangentes en una zona
4 % crítica.
5
6 % Autoría:
7 % Andrea Alexandra Barrón Córdova (A01783126)
8 % Alina Rosas Macedo (A01252720)
9 % Almudena Morán Sierra (A01782147)
10 % Fernanda Cantú Ortega (A01782232)
11 % Joaquín Badillo Granillo (A01026364)
12 % Nahomi Daniela Plata Ulate (A01027008)
13
14 clc; clear all; close all;
15
16 %% INTERPOLACIÓN
17
18 % Vectores de coordenadas (x-i, y-i)
19 x = [300, 1730, 2610, 2800];
20 y = [2300, 2050, 560, 1200];
21
22 % Utilizar módulo de interpolación para determinar el polinomio
23 P = InterpolacionLagrange(x, y);
24 disp('Polinomio de Lagrange')
25 format long
26 disp(P)
27 disp('')
28
29 %% LONGITUD DE ARCO
30
31 % Integrando de la longitud de arco
32 integrando = @(t) sqrt(1 + polyval(DifP(P),t).^2);
33
34 % Booleano para "activar" o "desactivar" gráfica de integral numérica
35 grafica = 0;
36
37 % Longitud de arco usando integración numérica con 10 polinomios de grado 4
38 s = IntegralNumerica(integrando, 300, 2800, 10, 4, grafica);
39
```

```

40 % Mostrar por pantalla la longitud de arco
41 disp('Longitud de arco')
42 disp(strcat("s = ",string(s), " m"))
43 disp('')
44
45 %% MÁXIMOS Y MÍNIMOS
46
47 % Módulo de extremos para encontrar argumentos maxizimantes y minimizantes
48 [argmax, argmin] = Extremos(P);
49
50 % Determinar número de máximos y mínimos
51 n = length(argmax);
52 m = length(argmin);
53
54 % Mostrar puntos máximos con notación (x,p(x))
55 disp('Máximos')
56 for i=1:n
57 disp(strcat('(', string(argmax(i)), ", ", string(polyval(P, argmax(i))), ')'))
58 end
59 disp('')
60
61 %Mostrar puntos mínimos con notación (x,p(x))
62 disp('Mínimos')
63 for i=1:m
64 disp(strcat('(', string(argmin(i)), ", ", string(polyval(P, argmin(i))), ')'))
65 end
66
67 %% GRÁFICAS
68
69 % Vector de variable independiente para animar
70 t = 300:25:2800;
71
72 % Graficar radio de curvatura en distintos puntos de la curva
73 figure
74 set(gcf, 'Position', get(0, 'Screensize'));
75 for i=1:length(t)
76     plot(t(1:i),polyval(P,t(1:i)), "Color",[0 0 0], "LineWidth", 8)
77     axis([300 2800 0 4500])
78     xlabel("x (m)")
79     ylabel("y (m)")
80     drawnow
81     hold on

```

```

82
83     plot(t(1:i),polyval(P,t(1:i)), "Color",[1 1 1], "LineWidth", 1, "LineStyle", "--")
84     drawnow
85 end
86 hold on
87
88 % Marcar los extremos (máximo y mínimo) con * en la gráfica
89 plot(argmax, polyval(P, argmax), 'g*');
90 hold on
91 plot(argmin, polyval(P, argmin), 'g*');
92 hold on
93
94 % Graficar puntos con R < 100 m cerca del máximo local
95 tc1 = 865.87:0.1:874.96;
96 plot(tc1, polyval(P, tc1), 'r.')
97 hold on
98
99 % Tangente al primer punto
100 p1 = 865.87;
101 R1 = RectaTangente(P,p1, [p1-200, p1+200]);
102 hold on
103
104 % Graficar puntos con R < 100 m cerca del mínimo local
105 tc2 = 2421.7:0.1:2430.79;
106 plot(tc2, polyval(P, tc2), 'r.')
107 hold on
108
109 % Tangente al segundo punto
110 p2 = 2421.7;
111 R2 = RectaTangente(P,p2, [p2-200, p2+200]);
112 hold on
113
114 %% GRADAS
115
116 % Gradas cerca del máximo
117
118 % Recta base de las gradas (agregar distancia de seguridad)
119 yg1 = @(t) R1(t) + 20;
120
121 % Esquina inferior izquierda
122 x1 = p1 - sqrt(40^2-20^2);
123 y1 = yg1(x1);

```

```

124
125 % Esquina inferior derecha
126 x2 = p1 + sqrt(40^2-20^2);
127 y2 = yg1(x2);
128
129 % Esquina superior derecha
130 x3 = x2;
131 y3 = yg1(x3)+30;
132
133 % Esquina superior izquierda
134 x4 = x1;
135 y4 = yg1(x4)+30;
136
137 % Graficar
138 vert = [x1, y1; x2, y2; x3, y3; x4, y4];
139 patch('Faces', [1 2 3 4], 'Vertices', vert, 'FaceColor','red','FaceAlpha',.3)
140 hold on
141
142 % Gradadas cerca del mínimo
143
144 % Recta base de las gradadas (agregar distancia de seguridad)
145 yg2 = @ (t) R2(t) - 20;
146
147 % Esquina superior izquierda
148 x1 = p2 - sqrt(40^2-20^2);
149 y1 = yg2(x1);
150
151 % Esquina superior derecha
152 x2 = p2 + sqrt(40^2-20^2);
153 y2 = yg2(x2);
154
155 % Esquina inferior derecha
156 x3 = x2;
157 y3 = yg2(x3)-30;
158
159 % Esquina inferior izquierda
160 x4 = x1;
161 y4 = yg2(x4)-30;
162
163 % Graficar
164 vert = [x1, y1; x2, y2; x3, y3; x4, y4];
165 patch('Faces', [1 2 3 4], 'Vertices', vert, 'FaceColor','red','FaceAlpha',.3)

```

```

166 hold on
167
168 %% COCHE
169
170 car=plot(t(1),polyval(P,t(1)),'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); %Definimos el ...
    gráfico como una variable
171
172 tx = text(300,350,['Posicion en X = ' num2str(t(1))]);
173 ty = text(300,340,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(1)))]);
174
175 % Se obtiene un número aleatorio:
176 opcion = randi(3);
177
178 % 1 significa que el coche no se descarrila
179 if opcion == 1
180     for i=1:length(t)
181         delete(car); delete(tx); delete(ty); % Borrar coche anterior
182         car=plot(t(i),polyval(P,t(i)),'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); % ...
            Graficar coche ahora
183
184         % Coordenadas
185         tx = text(400,500,['Posicion en X = ', num2str(t(i))]);
186         ty = text(400,250,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(i)))]);
187
188         drawnow; % Animar
189     end
190
191 % 2 significa que el coche se descarrila en la primera zona crítica
192 elseif opcion == 2
193     t = 300:25:865.87;
194     % Animar normal hasta el punto de descarrilamiento
195     for i=1:length(t)
196         delete(car); delete(tx); delete(ty); % Borrar coche anterior
197         car=plot(t(i),polyval(P,t(i)),'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); % ...
            Graficar coche ahora
198
199         % Coordenadas
200         tx = text(400,500,['Posicion en X = ', num2str(t(i))]);
201         ty = text(400,250,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(i)))]);
202
203         drawnow; % Animar
204     end

```

```

205     hold on
206
207     % Animar coche siguiendo recta tangente
208     t = 865.87:25:1065.87;
209     for i=1:length(t)
210         delete(car); delete(tx); delete(ty); % Borrar coche anterior
211         car=plot(t(i),R1(t(i)), 'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); % Graficar ...
                coche ahora
212
213         % Coordenadas
214         tx = text(400,500,['Posicion en X = ', num2str(t(i))]);
215         ty = text(400,250,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(i)))]);
216
217         drawnow; % Animar
218     end
219     % 3 significa que el coche se descarrila en la segunda zona crítica
220 else
221     t = 300:25:2421.7;
222     % Animar normal hasta el punto de descarrilamiento
223     for i=1:length(t)
224         delete(car); delete(tx); delete(ty); % Borrar coche anterior
225         car=plot(t(i),polyval(P,t(i)), 'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); % ...
                Graficar coche ahora
226
227         % Coordenadas
228         tx = text(400,500,['Posicion en X = ', num2str(t(i))]);
229         ty = text(400,250,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(i)))]);
230
231         drawnow; % Animar
232     end
233     hold on
234
235     % Animar coche siguiendo recta tangente
236     t = 2421.7:25:2621.7;
237     for i=1:length(t)
238         delete(car); delete(tx); delete(ty); % Borrar coche anterior
239         car=plot(t(i),R2(t(i)), 'rv', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor','r'); % Graficar ...
                coche ahora
240
241         % Coordenadas
242         tx = text(400,500,['Posicion en X = ', num2str(t(i))]);
243         ty = text(400,250,['Posicion en Y = ' num2str(polyval(P,t(i)))]);

```

```
244
245     drawnow; % Animar
246     end
247 end
```

C. Módulos

C.1. Interpolación de Lagrange

```
1 function [P] = InterpolacionLagrange(x, y)
2 % Esta es una función que regresa un arreglo P con los coeficientes del
3 % polinomio de Lagrange que pasa por todos los puntos (x,y) dados. Además
4 % regresa una matriz L con los coeficientes de los polinomios que se
5 % utilizan para crear el polinomio de Lagrange.
6 % 'x' y 'y' deben ser vectores fila.
7 % 'x' contiene los valores de x para los que f(x) es conocido
8 % 'y' contiene los valores f(x) correspondientes.
9
10 n = length(x); % número de nodos
11
12 if ~(n==length(y)) % Verificar que los vectores tengan la misma dimensión
13     P = 'Error: Los arreglos deben tener la misma dimensión';
14     return
15 end
16 % La matriz L contendrá los coeficientes de los polinomios con los que
17 % vamos a intrapolar. Cada fila corresponderá a un polinomio:
18 L=zeros(n);
19
20 for i=1:n
21     % Creamos una variable para hacerle cambios a x sin perder info
22     xaux = x;
23     % Como cada polinomio tiene todos los nodos menos el que le corresponde
24     % como raíces, eliminamos esa raíz de nuestro arreglo xaux:
25     xaux(i)=[];
26     % Ahora guardamos en una fila de la matriz los coeficientes del
27     % polinomio que tiene como raíces los valores xaux:
28     L(i,:) = poly(xaux);
29     % Finalmente normalizamos su valor para que sea 1 en x(i):
30     L(i,:) = L(i,:)./polyval(L(i,:), x(i));
31 end
32
33 P = y*L;
34 return
35 end
```


C.2. Integración polinomial

```
1 function [integral] = IntP(p, a, b)
2 %Calcula la integral definida del polinomio p desde a hasta b
3 %   p es el arreglo con los coeficientes del polinomio
4 %   a y b son los límites de integración inferior y superior
5 %   respectivamente.
6 n = length(p); % Orden de la integral
7 g = 1./(n:-1:1); % Coeficientes de la integral
8 g = [g, 0]; % Incrementamos el orden
9 p = [p, 0]; % Incrementamos el orden del polinomio
10 intp = g.*p; % Antiderivada (con C = 0)
11 integral = polyval(intp, b) - polyval(intp, a);
12 return
13 end
```

C.3. Diferenciación polinomial

```
1 function [derivada] = DifP(p)
2 % Calcula los coeficientes de la derivada de un polinomio
3 %   p son los coeficientes del polinomio
4
5 n = length(p)-1; % orden de p
6 p = p(1:n); % reducir orden
7 k = n:-1:1; % regla del poder
8
9 derivada = p.*k; % coeficientes de la derivada
10 return
11 end
```

C.4. Integración numérica

```
1 function [integral] = IntegralNumerica(f, a, b, n, g, bool)
2 % Aproxima el valor de una integral definida con polinomios de Lagrange
3 % f es el integrando
4 % a es el límite inferior de integración
5 % b es el límite superior de integración
6 % n es la cantidad de polinomios a utilizar
7 % g es el grado de tales polinomios
8 % bool es un booleano que determina si queremos graficar
9
10 h = (b-a)/n; % distancia subintervalos
11 h2 = h/g; % distancia subsubintervalos
12 integral = 0; % integral acumulada
13 j=0:1:g; % vector loop
14 if (bool)
15     figure
16     x=a:0.01:b;
17     plot(x, f(x), 'LineWidth', 2);
18     title("Integral Numérica")
19     xlabel("x")
20     ylabel("y")
21     hold on;
22     % iteramos por cada subintervalo:
23     for i=1:n
24         xi = a+(i-1)*h; % Valor inicial del subintervalo
25         xf = a+h*i; % Valor final del subintervalo
26         x = xi + j*h2; % valores de x para la interpolación en el subintervalo
27         y = f(x); % valores de y correspondientes
28         p = InterpolacionLagrange(x,y); % Interpolacion
29         integral = integral + IntP(p, xi, xf); % Integral acumulada
30         % gráfica
31         t=xi:0.01:xf;
32         plot(t, polyval(p, t))
33         area(t, polyval(p, t))
34         hold on
35     end
36     hold off
37     alpha(0.3)
38     return
39 else
```

```

40     % bool = false, lo mismo sin graficar
41     for i=1:n
42         xi = a+(i-1)*h; % Valor inicial del subintervalo
43         xf = a+h*i; % Valor final del subintervalo
44         x = xi + j*h2; % valores de x por cada subintervalo
45         y = f(x); % valores de y correspondientes
46         p = InterpolacionLagrange(x,y); % Interpolación
47         integral = integral + IntP(p, xi, xf); % Integral acumulada
48     end
49     return
50 end
51 end

```

C.5. Argumentos Maximizantes y Minimizantes

```

1  function [argmax, argmin] = Extremos(p)
2  % Regresa los argumentos en los que un polinomio tiene un extremo (máximo o
3  % mínimo) y los clasifica dependiendo el caso.
4  %   p es el vector de coeficientes del polinomio
5
6  dp = DifP(p); % (Coeficientes) primera derivada de p
7  d2p = DifP(dp); % (Coeficientes) segunda derivada de p
8
9  ceros = sort(roots(dp)); % Puntos críticos:  $p'(x) = 0$ 
10
11  n = length(ceros); % Número de puntos críticos
12  argmax = []; % Vector de argumentos maximizantes
13  argmin = []; % Vector de argumentos minimizantes
14
15  for i=1:n % Para cada punto crítico de p:
16      if polyval(d2p,ceros(i)) < 0
17          % Si  $p''(x) < 0$ , x es un máximo local
18          argmax = [argmax, ceros(i)];
19      elseif polyval(d2p, ceros(i)) > 0
20          % Si  $p''(x) > 0$ , x es un mínimo local
21          argmin = [argmin, ceros(i)];
22      end
23  end
24
25  return

```

```
26 end
```

C.6. Radio de curvatura

```
1 function [r] = RadioCurvatura(p,a)
2 %Función que calcula el radio de curvatura de un polinomio p en un punto
3 %dado o en un conjunto de puntos dados.
4 %   p es el polinomio
5 %   a es el conjunto de puntos
6 dp = DifP(p);
7 d2p = DifP(dp);
8
9 r = power(1+polyval(dp,a).^2, 3/2)./abs(polyval(d2p, a));
10 return
11 end
```

C.7. Recta Tangente

```
1 function [y] = RectaTangente(p,x,t)
2 %Regresa y grafica la recta tangente a un polinomio p en el punto x en un intervalo
3 %   p es un arreglo con los coeficientes del polinomio
4 %   x es un punto
5 %   t es un arreglo que contiene el punto inicial y final del intervalo
6 px = polyval(p, x);
7
8 dp = DifP(p);
9 m = polyval(dp, x);
10
11 y = @(t) m*(t-x) + px;
12
13 plot(t, y(t), "Color",[0 0 0])
14 return
15 end
```

D. Memoria de Cálculo

Para verificar que el polinomio $p(x)$ pasa por los puntos inicial y final dados: (300 m, 2300 m) y (2800 m, 1200 m). Debemos verificar que $p(300 \text{ m}) = 2300 \text{ m}$ y $p(2800 \text{ m}) = 1200 \text{ m}$. Entonces, considerando que $p(x)$ está en metros si x es dado en metros, confirmamos que

$$p(300 \text{ m}) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300^3 \\ 300^2 \\ 300 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{m} = 2300 \text{ m}, \quad (87)$$

$$p(2800 \text{ m}) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2800^3 \\ 2800^2 \\ 2800 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{m} = 1200 \text{ m}. \quad (88)$$

Por lo tanto, el polinomio encontrado pasa por los puntos inicial y final.

Para verificar que pasa por los otros dos puntos escogidos: (1730 m, 2050 m) y (2610 m, 560 m) nuevamente observamos la imagen de p bajo las coordenadas horizontales de los puntos:

$$p(1730 \text{ m}) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1730^3 \\ 1730^2 \\ 1730 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{m} = 2050 \text{ m}, \quad (89)$$

$$p(2610 \text{ m}) = \begin{bmatrix} 0.0000021551069 \\ -0.0106569932103 \\ 13.6963915407581 \\ -907.9759592908985 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2610^3 \\ 2610^2 \\ 2610 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{m} = 560 \text{ m}. \quad (90)$$

Es decir que el polinomio pasa por todos los puntos seleccionados.

Referencias

- Alonso, T. (2019). *Prevención de riesgos: F1-mejorando el gran circo*. Descargado de <https://workwear.prolaboral.es/prevencion-riesgos-laborales-automovilismo/>
- Carmo, M. P. d. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall. Descargado de <http://www2.ing.unipi.it/griff/files/dC.pdf>
- Duxbury, A. (2021). *History of safety devices in formula 1: The hale, barriers & more*. Descargado de <https://www.autosport.com/f1/news/history-of-safety-devices-in-formula-1-the-halo-barriers-more-4982360/4982360/>
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., y Sands, M. (1977). *Lectures on physics: the new millennium edition* (Vol. 1). Addison-Wesley.
- Ling, S. J., Sanny, J., y Moebs, W. (2018). *University physics* (Vol. 1). OpenStax, Rice University.
- Mather, R. (2021, Oct). ¿a qué velocidad va un coche de f1? *Red Bull*. Descargado de <https://www.redbull.com/es-es/todo-lo-que-debes-saber-sobre-un-monoplaza-de-f1>
- Serway, R. A., Jewett, J. W., Olguín, V. C., y Rosas, M. F. (2008). *Física: Para ciencias e ingeniería* (7.^a ed., Vol. 1). Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Shubham, U. (2015). Así ha sido la evolución de la seguridad en la f1. *International Research Journal of Engineering and Technology*. Descargado de <https://www.irjet.net/archives/V2/i7/IRJET-V2I766.pdf>
- Viaplana, J. (2020). Así ha sido la evolución de la seguridad en la f1. *Sport*. Descargado de <https://www.sport.es/es/noticias/motor/formula1/evolucion-seguridad-ultimos-70-anos-f1-accidente-grosjean-bahrein-8227732/>
- Weisstein, E. W. (s.f.). *Radius of curvature*. Descargado de <https://mathworld.wolfram.com/RadiusofCurvature.html>