



## Práctica 7: Interpolación polinómica y aproximación de funciones

Métodos Numéricos 2021

Brian Luporini

02 de Noviembre de 2021



Supongamos que usamos una tabulación para aproximar  $J_0(x)$  por interpolación lineal con error menor a  $\frac{1}{2}10^{-6}$ . Sea  $p(x)$  el polinomio lineal que interpola a  $J_0(x)$  en los puntos  $x_j, x_{j+1}$  para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  fijo. El error de interpolación está dado por

$$J_0(x) - p(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2} J_0''(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}].$$

siempre que  $J_0 \in C^2[x_j, x_{j+1}]$ . Más aún,

$$\begin{aligned} |J_0(x) - p(x)| &= \frac{|x - x_j||x - x_{j+1}|}{2} |J_0''(x)| \\ &\leq \frac{|x_{j+1} - x_j||x_{j+1} - x_j|}{2} |J_0''(x)| \\ &= \frac{(1/n)^2}{2} |J_0''(x)| \\ &= \frac{1}{2n^2} |J_0''(x)|. \end{aligned} \quad (1)$$

Para utilizar esta cota tenemos que probar que  $J_0 \in C^2[x_j, x_{j+1}]$  y acotar  $|J_0''(x)|$  para  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ . Para esto vamos a utilizar el siguiente resultado:

### Ejercicio 3

Se desea tabular la función de Bessel de orden 0

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$$

en el intervalo  $[0, 1]$  en abscisas equidistantes. ¿Qué paso de tabulación ha de usarse para que todos los valores obtenidos por interpolación lineal tengan un error (debido a la interpolación) menor que  $\frac{1}{2}10^{-6}$ ? ¿Y si se realiza una interpolación cuadrática?

Una tabulación de  $J_0(x)$  en el intervalo  $[0, 1]$  en abscisas equidistantes  $x_i = i/n$  para  $i = 0, \dots, n$ , es

$x_i$	0	$1/n$	$2/n$	...	1
$y_i$	$J_0(0)$	$J_0(1/n)$	$J_0(2/n)$	...	$J_0(1)$

para  $n \in \mathbb{N}$ .



### Regla de Leibniz (forma clásica)

Sea  $F(t, x)$  una función diferenciable con derivadas parciales continuas. Entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^b F(t, x) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) dt.$$

En nuestro caso,

$$F(t, x) = \cos(x \sin(t))$$

tiene derivadas parciales continuas de todo orden. Luego, por la Regla de Leibniz se tiene que  $J_0(x)$  tiene derivadas de todo orden y se puede derivar bajo signo integral. Entonces,

$$J_0''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(x \sin(t)) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \sin^2(t) dt.$$

Acotando,

$$|J_0''(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(x \sin(t))| \sin^2(t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt = 1.$$



Por lo tanto, como  $J_0(x)$  tiene derivada de orden 2 continua vale (1) y se tiene

$$|J_0(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Buscamos un  $n$  tal que el error sea menor a  $\frac{1}{2}10^{-6}$ . Basta tomar  $n$  tal que

$$\frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2}10^{-6}.$$

Luego,

$$n > 10^3.$$

Por lo tanto,  $n = 10^3 + 1$  verifica lo pedido.

Supongamos ahora que queremos una tabulación para aproximar  $J_0(x)$  por interpolación cuadrática con error menor a  $\frac{1}{2}10^{-6}$ . Sea  $q(x)$  el polinomio cuadrático que interpola a  $J_0(x)$  en los puntos  $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}$  para  $j \in \{1, \dots, n-2\}$  fijo. En este caso el error está dado por

$$J_0(x) - q(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{3!} J_0'''(x), \quad x \in [x_j, x_{j+2}].$$

**Ejercicio:** Proceder de la misma manera que antes y encontrar el  $n$ . En este caso,  $n > 2 \cdot 100 / \sqrt[3]{3}$  (chequear).

Ejercicio 4

Se dispone de la siguiente tabla

$x$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484

para la función de Bessel de orden 0 definida en el ejercicio (3), usar el método de las diferencias divididas de Newton para hallar los valores de  $J_0(2,15)$  y  $J_0(2,35)$  con errores menores que  $\frac{1}{2}10^{-6}$ .

Vamos a resolverlo en Scilab.

Ejercicio 8

Dado el conjunto de datos:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	4	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$y_i$	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.5	326.72

- a) Construya una aproximación por mínimos cuadrados de grado 1, 2 y 3. Calcule el error.
- b) Utilizando Scilab grafique los datos de la tabla y las sucesivas funciones aproximantes obtenidas en el ítem anterior.

Supongamos que tenemos  $m$  datos  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ . La aproximación (polinomial) por mínimos cuadrados de orden  $n - 1$  es de la forma

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$$

donde  $\Phi_i(x) = x^{i-1}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Definimos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

por el Teorema 2 se tiene que el conjunto solución del problema de mínimos cuadrados es el conjunto de soluciones del sistema

$$A^T A x = A^T b.$$

Cuando  $A$  tiene rango  $n$ , el sistema tiene solución única.

Seguimos en Scilab.