1. Normas Vectoriales

A continuación introducimos el concepto general de la norma de un vector.

Definición 1 (Norma vectorial) *Dado un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, una función* $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *es una norma vectorial si satisface las siguientes propiedades:*

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in \mathbb{V}$

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$

Definimos la distancia entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. A continuación presentamos las normas vectoriales más habituales.

- **Norma euclídea:** Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define la norma euclídea como

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}$$

- **Norma infinito:** Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define la norma infinito como

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- **Norma-p:** Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define la norma-p como

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- **Norma-1:** Para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la norma-1 está dada por

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Ejemplo 1 *Sea* $\mathbf{x} = [1\ 2\ 3]^\mathsf{T}$*. Luego*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \\
&\|\mathbf{x}\|_\infty = 3 \\
&\|\mathbf{x}\|_1 = 6
\end{aligned}$$

La norma euclídea (o euclidiana) representa la noción común de distancia respecto del origen en caso de que $\mathbf{x}$ pertenezca a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o bien $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, la norma euclídea del vector $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^\mathsf{T}$ denota la longitud del segmento de recta que une los puntos $(0,0,0)$ y (x_1, x_2, x_3).

En la Figura 1 se representa la región $R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ para la norma euclídea, la norma infinito, y la norma-1.

Teorema 1 (Equivalencia de normas) *Sean* N *y* M *normas vectoriales en* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$*. Luego, existen constantes* $c_1, c_2 > 0$ *tales que*

$$c_1 M(\mathbf{x}) \leq N(\mathbf{x}) \leq c_2 M(\mathbf{x}), \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{V}$$

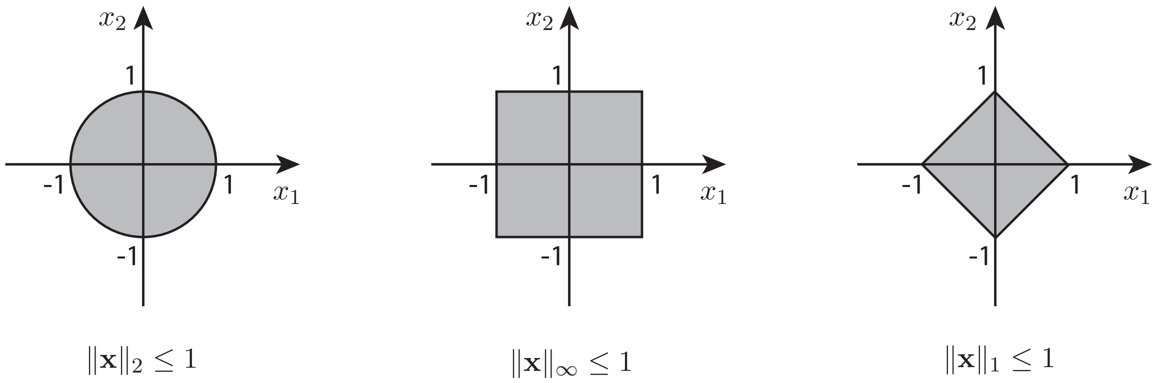

Figura 1: Normas vectoriales habituales.

Demostración. La demostración se puede hallar en el Teorema 7.7 de K. E. Atkinson (1989). □

Definición 2 *Se dice que una sucesión de vectores* $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}, \ldots\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *converge a un vector* $\mathbf{x}$ *si y solo si*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}\| \to 0 \qquad \textit{cuando} \;\; m \to \infty$$

Notar que no se especifica la elección de la norma. Para espacios vectoriales de dimensión finita no importa qué norma se usa. Sean M y N dos normas en $\mathbb{R}^n$. Luego, por el Teorema 1,

$$c_1 M(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}) \leq N(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}) \leq c_2 M(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}) \qquad m \geq 0$$

y $M(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)})$ converge a cero si y solo si $N(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)})$ converge a cero.

2. Normas Matriciales

El conjunto de todas las matrices de $m \times n$ con entradas reales[1] puede considerarse equivalente al espacio vectorial $\mathbb{R}^{m\times n}$. Por lo tanto, las normas matriciales satisfacen las mismas propiedades que las normas vectoriales.

Definición 3 (Norma matricial) *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Dado un espacio vectorial* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{m\times n}$, *una función* $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *es una norma matricial si satisface las siguientes propiedades:*

a) $\|\mathsf{A}\| \geq 0, \quad \forall\; \mathsf{A} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathsf{A}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathsf{A} = \mathbf{0}$

b) $\|\lambda \mathsf{A}\| = |\lambda| \|\mathsf{A}\|, \quad \forall\; \lambda \in \mathbb{R},\; \mathsf{A} \in \mathbb{V}$

c) $\|\mathsf{A} + \mathsf{B}\| \leq \|\mathsf{A}\| + \|\mathsf{B}\|, \quad \forall\; \mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{V}$

Definición 4 *Se dice que la norma matricial* $\|\cdot\|$ *es consistente con las normas vectoriales* $\|\cdot\|_a$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\|\cdot\|_b$ *en* $\mathbb{R}^m$ *si*

$$\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_b \leq \|\mathsf{A}\| \|\mathbf{x}\|_a, \quad \forall\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\; \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

[1] Las normas también se definen sobre números complejos.

Definición 5 *Para una matriz cuadrada* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, se dice que la norma matricial* $\|\cdot\|$ *es* *submultiplicativa* *si*

$$\|\mathsf{AB}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{B}\|, \quad \forall\ \mathsf{A},\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Norma Matricial Inducida por una Norma Vectorial

Aunque las normas matriciales se pueden obtener de varias formas, en el curso consideraremos únicamente las que son consecuencia natural de las normas vectoriales más usuales.

Definición 6 *Dada una norma vectorial, se define la norma matricial inducida para* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *como*

$$\begin{aligned}\|\mathsf{A}\| &= \max\left\{\|\mathsf{A}\mathbf{x}\| :\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{x}\| = 1\right\}\\ &= \max\left\{\frac{\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} :\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}\right\}\end{aligned}$$

Se pueden estudiar las normas matriciales inducidas por las normas vectoriales $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, y $\|\cdot\|_\infty$.

- Si la norma vectorial es $\|\cdot\|_1$, luego la norma matricial inducida está dada por:

$$\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1}\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|, \qquad \mathsf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n} \tag{1}$$

  Es decir, la norma-1 es el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada columna. La demostración de (1) se verá en el Teorema xx.

- La expresión de la norma infinito de una matriz es la siguiente:

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1}\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad \mathsf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n} \tag{2}$$

  Es decir, la norma-∞ es el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada fila. La demostración de (2) se verá en el Teorema xx.

- La expresión de la norma-2 o *norma espectral* de una matriz es:

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})}, \qquad \mathsf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n} \tag{3}$$

  donde $\rho(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$ denota el *radio espectral* de la matriz cuadrada $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$.

Definición 7 (Espectro de una matriz) *Sea* $\mathsf{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$*. Luego, el espectro de* B*, denotado por* $\sigma(\mathsf{B})$*, es igual al conjunto de autovalores de* B*:*

$$\sigma(\mathsf{B}) = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$$

Definición 8 (Radio espectral una matriz) *El radio espectral de una matriz* $\mathsf{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *es el máximo de entre los valores absolutos de los elementos de su espectro, indicándose como* $\rho(\mathsf{B})$*.*

$$\rho(\mathsf{B}) = \max_{\lambda\in\sigma(\mathsf{B})}|\lambda|$$

Matriz identidad. La norma matricial inducida de la matriz identidad es igual a uno.

$$\|\mathbf{I}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{I}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$$

Teorema 2 *La norma matricial inducida es submultiplicativa.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\|\mathsf{AB}\| &= \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathsf{AB}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathsf{A}(\mathsf{B}\mathbf{x})\|}{\|\mathsf{B}\mathbf{x}\|}\frac{\|\mathsf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\ &\leq \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathsf{A}\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathsf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{B}\|\end{aligned}$$

Luego, $\|\mathsf{AB}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{B}\|$. □

Teorema 3 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y sea* $\|\cdot\|$ *una norma vectorial, luego*

$$\|\mathsf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathbf{x}\|, \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Demostración. Para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se verifica trivialmente. Supongamos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, luego $\|\mathbf{v}\| = 1$ y se tiene

$$\|\mathsf{A}\mathbf{x}\| = \left\|\mathsf{A}\mathbf{x}\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathsf{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathsf{A}\|$$

valiendo la última desigualdad por la definición de la norma matricial inducida. □

Teorema 4 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Luego,*

$$\rho(\mathsf{A}) \leq \|\mathsf{A}\|$$

para cualquier norma matricial submultiplicativa.

Demostración. Sea $(\lambda, \mathbf{v})$ un par autovalor-autovector de A. Sea la matriz

$$\mathsf{X} = [\mathbf{v}|\mathbf{0}|\ldots|\mathbf{0}]_{n\times n} \neq \mathbf{0}_{n\times n}$$

Luego

$$\begin{aligned}&\lambda\mathsf{X} = \mathsf{AX} \\ &|\lambda|\|\mathsf{X}\| = \|\lambda\mathsf{X}\| = \|\mathsf{AX}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{X}\|\end{aligned}$$

Es decir,

$$|\lambda| \leq \|\mathsf{A}\|, \quad \forall\ \lambda \in \sigma(\mathsf{A})$$

y por ende $\rho(\mathsf{A}) \leq \|\mathsf{A}\|$. □

A continuación demostraremos las fórmulas (1) y (2).

Teorema 5 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Entonces*

$$\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Demostración. Por definición, $\|\mathsf{A}\|_1 = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_1$.

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_i |\mathsf{A}_{i:}\mathbf{x}| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \\
&\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}||x_j| = \sum_j \Big(|x_j| \sum_i |a_{ij}|\Big) \\
&\leq \Big(\sum_j |x_j|\Big)\Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big)
\end{aligned}$$

Luego, tenemos

$$\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_1 \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|, \tag{4}$$

sujeto a $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. La igualdad en (4) se logra ya que si $\mathsf{A}_{:k}$ es la columna con mayor suma absoluta, y tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ (notar que $\|\mathbf{e}_k\| = 1$), obtenemos

$$\|\mathsf{A}\mathbf{e}_k\|_1 = \|\mathsf{A}_{:k}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Es decir, hallamos un valor de $\mathbf{x}$, con $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, tal que la desigualdad (4) se cumple con igualdad. □

Teorema 6 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Entonces*

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Demostración. Por definición, $\|\mathsf{A}\|_\infty = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_\infty$.

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq m} |(\mathsf{A}\mathbf{x})_i| = \max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1\leq j\leq n} |x_j|
\end{aligned}$$

Dado que $\max_{1\leq j\leq n} |x_j| = \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, tenemos

$$\|\mathsf{A}\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{5}$$

Ahora necesitamos demostrar la desigualdad opuesta, $\|\mathsf{A}\|_\infty \geq \max\limits_{1\leq i\leq m} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Sea p un entero tal que

$$\sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \tag{6}$$

y sea $\mathbf{x}$ el vector con las componentes

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{pj} \geq 0, \\ -1, & \text{si } a_{pj} < 0. \end{cases}$$

Entonces $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ y $a_{pj}x_j = |a_{pj}|$, para toda $j = 1, 2, \ldots, n$, así que

$$\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|\right| = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Este resultado implica que

$$\|\mathsf{A}\|_\infty \ge \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

lo cual, junto con la desigualdad (5), nos da

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

□

3. Estabilidad de la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es importante examinar la estabilidad de la solución $\mathbf{x}$ con respecto a perturbaciones en el sistema. Consideraremos primero el sistema perturbado $\mathsf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ que presenta perturbaciones pequeñas en el vector $\mathbf{b}$.

Ejemplo 2 *El sistema lineal*

$$\begin{aligned} 5x_1 + \ \ 7x_2 &= 0{,}7 \\ 7x_1 + 10x_2 &= 1 \end{aligned}$$

tiene solución

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0{,}1$$

El sistema perturbado

$$\begin{aligned} 5\tilde{x}_1 + \ \ 7\tilde{x}_2 &= 0{,}69 \\ 7\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 &= 1{,}01 \end{aligned}$$

tiene solución

$$\tilde{x}_1 = -0{,}17, \qquad \tilde{x}_2 = 0{,}22$$

Vemos que un cambio relativamente pequeño en $\mathbf{b}$ *produce un cambio relativamente grande en la solución.*

Teorema 7 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *no singular. Luego, las soluciones de* $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *y del sistema perturbado* $\mathsf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ *satisfacen*

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \tag{7}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\mathbf{x} - \mathsf{A}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}} \\
\mathsf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) &= \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}} \\
\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} &= \mathsf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}) \\
\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| &= \|\mathsf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}})\| \leq \|\mathsf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathsf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathsf{A}\|\|\mathbf{x}\|},
$$

pero

$$
\|\mathbf{b}\| = \|\mathsf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathbf{x}\|
$$

Luego

$$
\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|},
$$

lo cual completa la demostración. □

Definición 9 (Número de condición de una matriz) *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *no singular. El número de condición de* A*, denotado* $\kappa(\mathsf{A})$*, está dado por:*

$$
\kappa(\mathsf{A}) = \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^{-1}\|
$$

donde $\|\cdot\|$ *es una norma matricial submultiplicativa.*

Lema 1 *Sea* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *no singular. El número de condición de* A *satisface* $\kappa(\mathsf{A}) \geq 1$*.*

Demostración.

$$
1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{A}^{-1}\|
$$

Luego, $\kappa(\mathsf{A}) \geq 1$. □

La desigualdad (7) indica que el error relativo de la solución está acotado por el error relativo del vector $\mathbf{b}$, multiplicado por el número de condición de la matriz.

Por otra parte, si se perturba la matriz A, tenemos el sistema perturbado $\tilde{\mathsf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Tomando $\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{A} + \Delta\mathsf{A}$ y $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{A} + \Delta\mathsf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\
&\mathsf{A}\mathbf{x} + \mathsf{A}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathsf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \mathsf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{x} &= -\mathsf{A}^{-1}\Delta\mathsf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \\
\|\Delta\mathbf{x}\| &\leq \|\mathsf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathsf{A}\|\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|
\end{aligned}
$$

Luego

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|} \leq \|\mathsf{A}^{-1}\|\|\mathsf{A}\|\frac{\|\Delta\mathsf{A}\|}{\|\mathsf{A}\|} = \kappa(\mathsf{A})\frac{\|\Delta\mathsf{A}\|}{\|\mathsf{A}\|}$$

Notar que $\|\Delta\mathsf{A}\|/\|\mathsf{A}\|$ es el error relativo en la matriz, mientras que $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\|$ es similar al error relativo en la solución.

Si $\kappa(\mathsf{A})$ es pequeño (cercano a 1), el sistema lineal es estable, pues pequeñas perturbaciones de la matriz A o del vector $\mathbf{b}$ producirán pequeñas variaciones en la solución $\mathbf{x}$. En tal caso, se dice que el sistema lineal $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está *bien condicionado*. Si $\kappa(\mathsf{A})$ es grande (significativamente mayor que 1), se dice que el sistema está *mal condicionado*, lo que nos indicaría que pequeñas variaciones en los datos pueden producir grandes variaciones en los resultados y por lo tanto que la solución del sistema es propensa a grandes errores debido al redondeo.