Los métodos iterativos generan una sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ que converge a la solución del sistema lineal $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Estos métodos son eficientes para resolver sistemas lineales de grandes dimensiones, en especial, sistemas lineales dispersos como los que se presentan en los análisis de circuitos y en la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Para n grande, la eliminación de Gauss requiere aproximadamente $\frac{2}{3}n^3$ operaciones aritméticas, mientras que los métodos iterativos requieren del orden de n^2 operaciones para obtener una solución suficientemente precisa.

Comenzaremos describiendo los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel, métodos clásicos que datan de fines del siglo XVIII.

1. Método de Jacobi

El método de Jacobi es un método de reemplazos simultáneos. Empezemos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 *Sea el sistema lineal*

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Despejando x_j de la ecuación j:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{9}(b_1 - x_2 - x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{10}(b_2 - 2x_1 - 3x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{11}(b_3 - 3x_1 - 4x_2) \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)}]^\mathsf{T}$ una estimación inicial de $\mathbf{x}$. El método de Jacobi define la iteración

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{9}\left(b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left(b_2 - 2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)}\right) \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{11}\left(b_3 - 3x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

En forma general, el sistema a resolver es $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Luego, la ecuación i-ésima es

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

de donde podemos despejar

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

El método de Jacobi propone como iteración

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad k \geq 0, \tag{1}$$

siendo estas las ecuaciones que se emplean para programar el método.

A continuación procederemos a reescribir el sistema de ecuaciones (1) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Sea $\mathsf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz diagonal de A. Luego

$$\mathsf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el sistema de ecuaciones (2) nos queda:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathsf{D}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)}. \qquad (3)$$

2. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es un método de reemplazos sucesivos.

Ejemplo 2 *Consideremos nuevamente el sistema lineal del Ejemplo 1. Esta vez utilizamos en forma inmediata la información de cada nuevo componente* x_i *calculado:*

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{9}\left(b_1 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left(b_2 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}\right) \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \dots \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{11}\left(b_3 - 3x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

En forma general, el método de Gauss-Seidel propone como iteración:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 2, \dots, n-1 \qquad (4) \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}\right), \end{aligned}$$

siendo estas las ecuaciones que se emplean para programar el método.

Procederemos ahora a escribir el sistema de ecuaciones (4) en forma matricial. Primero, reescribimos (4) como

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

donde la primera sumatoria se anula para $i = 1$, y la segunda sumatoria se anula para $i = n$. A su vez, esta última ecuación se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Por conveniencia, introducimos la descomposición $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$, donde L es la matriz triangular inferior de A que no incluye la diagonal, D es la diagonal de A, y U es la matriz triangular superior de A que no incluye la diagonal

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el sistema de ecuaciones (5) se puede escribir como

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - \mathsf{U}\mathbf{x}^{(k)}. \tag{6}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathbf{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}\mathbf{x}^{(k)} \\ &= (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathbf{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}(\mathsf{A} - (\mathsf{L} + \mathsf{D}))\mathbf{x}^{(k)}, \end{aligned} \tag{7}$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)}. \tag{8}$$

3. Esquema General de los Métodos Iterativos

Sea $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y el sistema a resolver $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sea $\mathsf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular. Luego

$$\mathsf{N}\mathbf{x} = \mathsf{N}\mathbf{x} - \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

El proceso iterativo es de la forma

$$\mathsf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathsf{N} - \mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

o bien

$$\mathsf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathsf{P}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad \mathsf{P} = \mathsf{N} - \mathsf{A}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo general, N se elige tal que el sistema $\mathsf{N}\mathbf{z} = \mathbf{f}$ sea fácil de resolver. Para una matriz general $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el método de Jacobi se define con

$$\mathsf{N} = \mathsf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el método de Gauss-Seidel se define con

$$\mathsf{N} = \mathsf{L} + \mathsf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para aplicar el método iterativo, la matriz N debe ser no singular. Siendo A no singular, se puede lograr que N sea no singular intercambiando las filas y/o columnas de A de ser necesario.

4. Condiciones de Convergencia

Vimos que los métodos iterativos se pueden escribir en forma vectorial como

$$\mathsf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathsf{N} - \mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathsf{N}^{-1}\big((\mathsf{N} - \mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}\big) \\ &= \big(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big)\mathbf{x}^{(k)} + \mathsf{N}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{9}$$

Por otra parte, la solución del sistema cumple

$$\mathbf{x} = \big(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big)\mathbf{x} + \mathsf{N}^{-1}\mathbf{b} \tag{10}$$

Introduciendo el error $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$, y restando (9) de (10), obtenemos

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \big(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big)\mathbf{e}^{(k)} \tag{11}$$

Teorema 1 *Si* $\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\| < 1$, *entonces la sucesión* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, *definida por el proceso iterativo* (9), *converge a la solución del sistema* $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *para cualquier estimación inicial* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Tomando la norma del error (11) tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| = \Big\|\big(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big)\mathbf{e}^{(k)}\Big\| &\le \big\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big\|\|\mathbf{e}^{(k)}\| \\ &= \big\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big\|\Big\|\big(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big)\mathbf{e}^{(k-1)}\Big\| \\ &\le \big\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big\|^2\|\mathbf{e}^{(k-1)}\| \le \dots \\ &\le \big\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\big\|^{k+1}\|\mathbf{e}^{(0)}\| \end{aligned}$$

Siendo $\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\| < 1$, se cumple que $\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\|^{k+1} \to 0$ cuando $k \to \infty$, y se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| = 0$$

es decir, $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ cuando $k \to \infty$. □

La condición $\|\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}\| < 1$ representa una condición suficiente de convergencia que es válida para cualquier norma matricial inducida.

Teorema 2 (Estabilidad asintótica de un proceso iterativo lineal) *Sea* $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *El proceso iterativo* $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathsf{B}\mathbf{x}^{(k)}$ *converge a* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *para todo vector inicial* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *si y solo si* $\rho(\mathsf{B}) < 1$.

Corolario 1 *La fórmula de iteración*

$$\mathsf{N}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathsf{N} - \mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

dará lugar a una sucesión que converge a la solución de $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *para cualquier vector inicial* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *si y solo si* $\rho(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}) < 1$.

Demostración. La demostración surge de aplicar el Teorema 2 al proceso iterativo dado por la ecuación (11). □

La condición de que el radio espectral de la matriz del método iterativo, $\rho(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A})$, sea menor que 1, representa una condición necesaria y suficiente de convergencia.

Consideraremos ahora el caso especial de matrices diagonalmente dominantes.

Definición 1 *La matriz* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es diagonalmente dominante si*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

Teorema 3 *Si la matriz* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es a diagonal dominante, luego la sucesión* $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *generada por el método de Jacobi converge a la solución del sistema* $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *para cualquier* $\mathbf{x}^{(0)}$ *inicial.*

Demostración. El método de Jacobi usa $\mathsf{N} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, que suponemos invertible. Luego

$$\begin{aligned} \mathsf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathsf{D} - \mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathsf{D}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Veamos la forma que tiene la matriz $(\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A})$.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\
 & \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\
\hline
\dfrac{1}{a_{11}} & \ldots & 0 & 1 & \ldots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & \dfrac{1}{a_{nn}} & \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \ldots & 1
\end{array}$$

Luego

$$\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} = \begin{pmatrix}
0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \ldots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & -\dfrac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\
-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \ldots & \ldots & -\dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0
\end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$\|\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \tag{13}$$

Por otra parte, siendo A diagonal dominante,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1,\dots,n$$

Luego,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \qquad i = 1,\dots,n \tag{14}$$

Combinando (13) y (14), tenemos

$$\|\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A}\|_\infty < 1$$

Luego, por el Teorema 1, el método de Jacobi converge a la solución del sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 4 *Si la matriz $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal dominante, luego la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ generada por el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier $\mathbf{x}^{(0)}$ inicial.*

Demostración. Utilizaremos la descomposición $\mathsf{A} = \mathsf{L}+\mathsf{D}+\mathsf{U}$, definida anteriormente. Demostraremos que si A es diagonal dominante se cumple que $\rho(\mathbf{I}-\mathsf{N}^{-1}\mathsf{A}) < 1$, con $\mathsf{N} = \mathsf{L}+\mathsf{D}$, es decir, se cumple la condición necesaria y suficiente de convergencia para el método de Gauss-Seidel.

Sea λ un autovalor de $(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A})$ y $\mathbf{v}$ el autovector asociado tal que $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$. Nos preguntamos si $|\lambda| < 1$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A})\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}\\
\mathsf{N}(\mathbf{I} - \mathsf{N}^{-1}\mathsf{A})\mathbf{v} &= \lambda\mathsf{N}\mathbf{v}\\
\mathsf{N}\mathbf{v} - \mathsf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathsf{N}\mathbf{v}\\
-\mathsf{U}\mathbf{v} &= \lambda(\mathsf{L}+\mathsf{D})\mathbf{v} \qquad (15)
\end{aligned}$$

Veamos la forma que tiene el vector $\mathsf{U}\mathbf{v}$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
\multicolumn{7}{c|}{\mathsf{U}\mathbf{v}} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\
\hline
0 & a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & \sum_{j=2}^{n} a_{1j}v_j \\
0 & 0 & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & a_{i,i+1} & \dots & a_{in} & \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & a_{n-1,n} & a_{n-1,n}v_n \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0
\end{array}
$$

Veamos ahora la forma que tiene el vector $(\mathsf{L}+\mathsf{D})\mathbf{v}$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
\multicolumn{7}{c|}{(\mathsf{L}+\mathsf{D})\mathbf{v}} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\
\hline
a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{11}v_1 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & 0 & & \vdots & \sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & 0 & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j
\end{array}
$$

Luego, el sistema de ecuaciones (15) se puede escribir como

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j, \qquad i = 1, \dots, n$$

de donde

$$\lambda a_{ii}v_i = -\lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j, \qquad i = 1, \dots, n$$

Como $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i| = 1$, luego existe un índice m tal que $|v_m| = 1 \geq |v_j|$, $\forall\ j \neq m$.

$$\lambda a_{mm}v_m = -\lambda \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}v_j - \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj}v_j$$

Tomando el valor absoluto,

$$
\begin{aligned}
|\lambda||a_{mm}| &\leq |\lambda| \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}||v_j| + \sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}||v_j| \\
&\leq |\lambda| \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| + \sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}|
\end{aligned}
$$

Luego

$$
|\lambda|\left(|a_{mm}| - \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}|\right) \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}| \tag{16}
$$

Por otra parte, siendo A diagonal dominante,

$$
|a_{mm}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} |a_{mj}| = \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| + \sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}| \tag{17}
$$

Combinando (16) y (17) obtenemos

$$
|\lambda| \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}|}{|a_{mm}| - \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}|} < 1
$$

Con lo cual queda demostrado que el radio espectral de $(\mathbf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{A})$ es menor que uno, y por el Corolario 1, el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. $\square$

En algunos casos se puede lograr que la matriz de coeficientes del sistema (matriz A) quede con diagonal dominante intercambiando las filas y/o columnas de A.

5. Métodos de Relajación

El procedimiento de Gauss-Seidel se suele modificar como sigue:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) \\
x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 2,\ldots,n-1 \\
x_n^{(k+1)} &= (1-\omega)x_n^{(k)} + \frac{\omega}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}\right)
\end{aligned} \tag{18}
$$

donde ω es el *factor de escala*. Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $\omega = 1$, tenemos el método de Gauss-Seidel.
- Si $0 < \omega < 1$, se trata de un **método de subrelajación**. Estos métodos se pueden usar para otener la convergencia de algunos sistemas que no son convergentes con el método de Gauss-Seidel.

- Si $\omega > 1$, se trata de un **método de sobrerelajación**. Estos métodos se designan con la abreviatura **SOR** y se emplean para acelerar la convergencia en sistemas para los que el método de Gauss-Seidel converge.

Podemos reformular la ecuación (18) como

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i \tag{19}$$

Utilizando la descomposición de A como $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$, utilizada en el Teorema 4, reescribimos (19) en forma matricial:

$$(\mathsf{D} + \omega\mathsf{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = \big[(1-\omega)\mathsf{D} - \omega\mathsf{U}\big]\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{b}$$

Si $(\mathsf{D} + \omega\mathsf{L})^{-1}$ existe, entonces podemos expresar el método SOR de la forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathsf{T}_\omega\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_\omega$$

donde

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_\omega &= (\mathsf{D} + \omega\mathsf{L})^{-1}\big[(1-\omega)\mathsf{D} - \omega\mathsf{U}\big] \\ \mathbf{c}_\omega &= \omega(\mathsf{D} + \omega\mathsf{L})^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Luego, el error del método SOR está determinado por

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathsf{T}_\omega\mathbf{e}^{(k)}$$

Por el Teorema 2, el método SOR converge a la solución de $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para todo vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ si y solo si $\rho(\mathsf{T}_\omega) < 1$.

Para algunas matrices sencillas se puede determinar el valor de ω que minimiza $\rho(\mathsf{T}_\omega)$, es decir, se puede elegir ω de manera óptima. En el siguiente teorema consideraremos el caso particular de las matrices definidas positivas y tridiagonales.

Teorema 5 *Si* A *es definida positiva y tridiagonal, entonces la elección óptima de* ω *para el método SOR es*

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(\mathsf{T}_J)]^2}}$$

donde $\mathsf{T}_J = (\mathbf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A})$ *es la matriz del método de Jacobi.*