1. Problema de Interpolación Polinómica

Sea $f(x)$ una cierta función de la que posiblemente no se conoce una forma explícita, o bien es muy complicada para evaluarla, derivarla, integrarla, hallarle ceros, etc. Podemos aproximar $f(x)$ por funciones simples, y hacer los cálculos con estas aproximaciones.

Dados $n+1$ números distintos $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$ de un intervalo $[a, b]$, llamados *nodos de la interpolación*, y $n+1$ números reales $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, con $y_i = f(x_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, n+1$, llamados *valores de la interpolación*, el problema de interpolación trata de encontrar una función p, en una cierta clase prefijada de functions $\mathcal{F}$, tal que $p(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

El caso particular más conocido es el problema de interpolación polinómica, en el que $\mathcal{F}$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n. Hemos supuesto que los números $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n+1}$ están ordenados de menor a mayor, pero esto no es necesario. Lo importante es que sean números distintos.

Sea $x_{\min} = \text{mín}\{x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n+1}\}$ y $x_{\max} = \text{máx}\{x_1,\ x_2,\ \ldots x_{n+1}\}$. Luego, si evaluamos $p(x)$ en $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$, decimos que estamos *interpolando*, mientras que si evaluamos $p(x)$ en $x \notin [x_{\min}, x_{\max}]$, decimos que estamos *extrapolando*.

Interpolación Polinómica

Dados $n+1$ pares ordenados (x_i, y_i):

$$\big\{(x_i, y_i) :\ y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n\big\},$$

también llamados puntos de la función f, donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son numeros reales distintos, se trata de encontrar un polinomio $p(x)$ que interpole los datos, es decir, tal que:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

Surgen las siguientes preguntas: ¿Existe dicho polinomio $p(x)$, y si existe, de qué grado es? ¿Es único? ¿Cómo lo encontramos?

Consideremos el polinomio de grado m:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

Vemos que hay $m+1$ parámetros independientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Puesto que (1) impone $n+1$ condiciones sobre $p(x)$, es razonable considerar el caso en que $m = n$. Es decir, queremos encontrar $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{gathered}$$

Luego, tenemos un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas, que podemos escribir en forma matricial y vectorial como

$$\mathsf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$$

donde

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz X es la matriz de Vandermonde. Puede demostrarse que para la matriz de Vandermonde se tiene

$$\det(\mathsf{X}) = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j) \tag{2}$$

Teorema 1 (Existencia y unicidad del polinomio interpolante) *Dados $n+1$ puntos distintos (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con $x_0, x_1, \ldots, x_n$, números distintos, existe un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a n que interpola dichos puntos. Dicho polinomio es único en el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n.*

Veremos dos demostraciones distintas de este teorema.

Demostración. A. Considerando la expresión del determinante de la matrix de Vandermonde, dado en la ecuación (2), se tiene que $\det(\mathsf{X}) \neq 0$, porque si $i \neq j$, entonces $x_i \neq x_j$. Luego X es no singular y el sistema $\mathsf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$ tiene solución única. El grado del polinomio interpolante puede ser menor o igual a n para los $n+1$ puntos dados, ya que algunos de los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, pueden ser iguales a cero. □

Demostración. B. Por contradicción, suponga que rango$(\mathsf{X}) < n+1$. Luego X tiene un espacio nulo no trivial, es decir, $N(\mathsf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. En particular, existe $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, tal que $\mathsf{X}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Escribiendo el polinomio para este sistema, tenemos

$$p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_n x_i^n = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

Como a_n y otros coeficientes pueden ser iguales a cero, el grado m de $p(x)$ puede ser $m \le n$. Las ecuaciones (3) indican que $p(x)$ se anula en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sin embargo, por el Teorema Fundamental del Algebra, un polinomio de grado m tiene como máximo m raíces distintas. Esto es una contradicción ya que $m < n+1$. Esta contradicción surge de suponer que X no es invertible. Luego, rango$(\mathsf{X}) = n+1$. □

Limitaciones computacionales

La matriz de Vandermonde X es no singular pero está mal condicionada. Por lo general, a medida que el número de puntos de interpolación aumenta, $\det(\mathsf{X})$ tiende a cero.

Ejemplo 1 *Considerar el caso de 4 nodos equiespaciados en el intervalo $[0, 1]$. Tenemos*

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

Luego

$$\begin{aligned}\det(\mathsf{X}) &= (x_3 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)\\ &= 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3^5} = 0{,}016\end{aligned}$$

Es posible obtener el polinomio interpolante resolviendo el sistema $\mathsf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$. Sin embargo, este sistema puede estar mal condicionado lo cual puede conducir a errores numéricos. Por otra parte, es más sencillo calcular el polinomio interpolante a partir de la fórmula de interpolación de Lagrange.

2. Interpolación de Lagrange

Caso lineal

Encontrar un polinomio de primer grado que pase por los puntos distintos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), donde $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$. Definimos las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad \text{y} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Luego se define

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

Como

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1,$$

tenemos

$$p(x_0) = y_0, \quad \text{y} \quad p(x_1) = y_1$$

Luego, p es la única función lineal que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1) (ver la Figura 1).

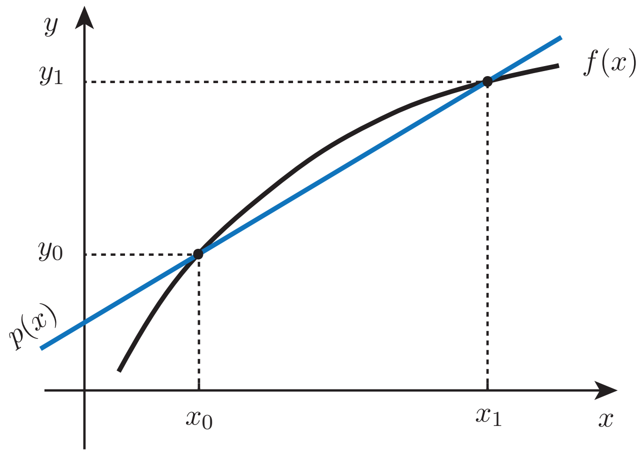


Figura 1: Interpolación lineal.

Caso general

Consideremos un polinomio de grado máximo n que pase por los $n + 1$ puntos

$$(x_0, y_0), \ (x_1, y_1), \ldots, \ (x_n, y_n)$$

Para $k = 0, 1, \ldots, n$, definimos

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$L_k(x)$ satisface

$$\begin{aligned} L_k(x_i) &= 0, \quad i \neq k \\ L_k(x_k) &= 1 \end{aligned}$$

El polinomio interpolador de Lagrange está dado por:

$$p(x) = L_0(x)y_0 + \cdots + L_n(x)y_n = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)y_k \tag{4}$$

Notar que $p(x)$ interpola los datos:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Además, el grado de $p(x)$ es menor o igual a n ya que el grado de $L_k(x)$ para $k = 0, \ldots, n$ es igual a n. Luego, $p(x)$ es único en el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, de acuerdo al Teorema 1.

Ejemplo 2 *Obtener $p_2(x)$ para los puntos $(0, -1)$, $(1, -1)$, y $(2, 7)$. Aplicando la fórmula de Lagrange obtenemos*

$$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}(-1) + \frac{x(x-2)}{-1}(-1) + \frac{x(x-1)}{2}7$$

Ver la Figura 2.

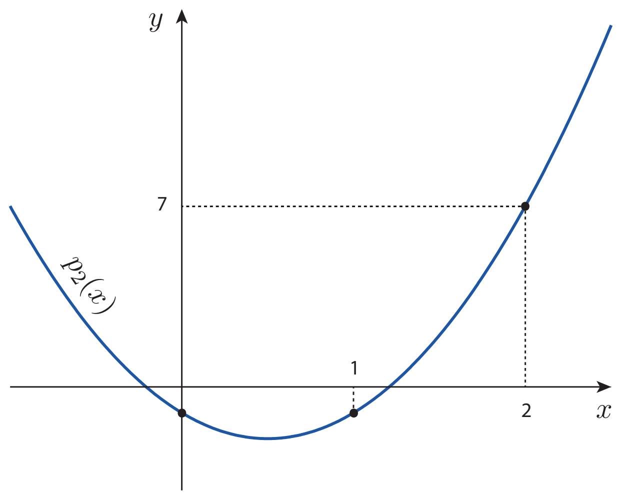


Figura 2: Interpolación cuadrática.

Desventajas de la interpolación de Lagrange

- Requiere gran cantidad de cálculos.
- Para cada valor de x hay que reevaluar todas las funciones $L_k(x)$.
- Si se agrega un punto, el polinomio $p_n(x)$ es de poca utilidad para obtener el polinomio de grado superior.

3. Método de las Diferencias Divididas de Newton

Dados $n+1$ puntos (x_0, y_0), $(y_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, se busca expresar el polinomio interpolador en la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \tag{5}$$

Dicho polinomio se puede obtener mediante un esquema recursivo:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Para determinar el polinomio (5) se necesita conocer cómo calcular los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Imponiendo las condiciones de interpolación, $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 = y_0 \\
p_n(x_1) &= y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1
\end{aligned}$$

de donde

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_n(x_2) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

de donde

$$a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Vemos como a medida que i aumenta, el cálculo de los coefficientes a_i siguiendo esta estrategia comienza rápidamente a dificultarse. Para calcular los coeficientes a_i introduciremos el concepto de *diferencias divididas*.

Diferencias divididas

- Diferencia dividida de primer orden.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Diferencia dividida de segundo orden.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- Diferencia dividida de orden k.

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Proposición 1 *Sea* $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ *una permutación (o reubicación) de los enteros* $(0, 1, \dots, n)$*. Luego*

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Demostración. La demostración es trivial para $n = 1$ y para $n = 2$, pero no es trivial para el caso general. Veremos una demostración más adelante. □

Fórmula de interpolación por diferencias divididas de Newton

Teorema 2 *Suponga que $f(x)$ está definida en $[a,b]$ y que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son valores distintos en $[a,b]$. El polinomio de grado $\leq k$ que interpola $f(x)$ en $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\} \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ está dado por*

$$p_{i,k}(x) = f(x_i) + (x - x_i)f[x_i, x_{i+1}] + \cdots + (x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{i+k-1})f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$$

Demostración. La demostración es por inducción. Para $k = 1$ sabemos que el teorema es cierto para cualquier valor de i. Supondremos que es cierto para k y cualquier valor de i. Luego

$$p_{i,k+1} = p_{i,k}(x) + (x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{i+k})a_{k+1}$$

es el polinomio de grado $\leq k+1$ que interpola $f(x)$ en los puntos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}\}$.

Debemos elegir a_{k+1} tal que

$$p_{i,k+1}(x_{i+k+1}) = f(x_{i+k+1})$$

y demostrar que

$$a_{k+1} = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}]$$

Notar que

1) El coeficiente de x^k en $p_{i,k}(x)$ es $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$.

2) El coeficiente de x^{k+1} en $p_{i,k+1}(x)$ es a_{k+1}.

Sea el polinomio $q(x)$ de grado $k+1$:

$$q(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k}(x) - (x - x_{i+k+1})p_{i,k}(x)}{x_{i+k+1} - x_i}$$

Este polinomio satisface:

1) $q(x_i) = p_{i,k}(x_i) = f(x_i)$

2) $q(x_{i+k+1}) = p_{i+1,k}(x_{i+k+1}) = f(x_{i+k+1})$

3) $q(x_j) = \dfrac{(x_j - x_i)f(x_j) - (x_j - x_{i+k+1})f(x_j)}{x_{i+k+1} - x_i}, \quad \forall\ i < j < i+k+1$

Luego, $q(x)$ es un polinomio de grado $\leq k+1$ que interpola $f(x)$ en los puntos $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}\}$. Por lo tanto, $q(x) = p_{i,k+1}(x)$. Además, el coeficiente de x^{k+1} en $q(x)$ es

$$a_{k+1} = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} = f[x_i, \ldots, x_{i+k+1}]$$

con lo que el teorema queda demostrado. $\square$

El Teorema 2 nos dice que los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ en la ecuación (5) son iguales a las diferencias divididas, con lo cual la fórmula de interpolación por diferencias divididas de Newton nos queda

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \quad (6)$$

Tabla 1: Tabla de diferencias divididas.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$\dots$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		$\dots$
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$	
		$f[x_3, x_4]$		
x_4	$f(x_4)$		$\vdots$	
		$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Tabla de diferencias divididas

Para obtener las diferencias dividadas que se necesitan en la equación (6) construimos una tabla de diferencias divididas (ver Tabla 1).

Fórmula de multiplicaciones encajadas

Para evaluar el polinomio de interpolación por diferencias divididas de Newton (6) de manera eficiente, podemos usar multiplicaciones encajadas. Primero, escribimos (6) como:

$$p_n(x) = D_0 + (x - x_0)D_1 + (x - x_0)(x - x_1)D_2 + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})D_n$$

donde

$$D_0 = f(x_0), \qquad D_i = f[x_0, \dots, x_i], \quad i = 1, \dots, n$$

Lo cual se puede escribir en forma encajada como:

$$p_n(x) = D_0 + (x - x_0)\big[D_1 + (x - x_1)\big[D_2 + \cdots + (x - x_{n-2})\big[D_{n-1} + (x - x_{n-1})D_n\big]\dots\big]\big]$$

La forma encajada solo requiere n multiplicaciones para evaluar $p_n(x)$.

Demostración de la Proposición 1

En el método de las diferencias divididas de Newton tenemos que

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c(x)$$

donde $c(x)$ es un polinomio de grado n. Además,

$$c(x_i) = p_n(x_i) - p_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad \text{para} \;\; i = 0, \dots, n-1$$

Luego

$$c(x) = a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Como $p_n(x_n) = f(x_n)$ tenemos que

$$a_n = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})} = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

De acuerdo a la fórmula de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)f(x_k)$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) &:= (x-x_0)\dots(x-x_n)\\ \Phi'_n(x_k) &:= (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)\end{aligned}$$

podemos escribir

$$L_k(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(x-x_k)\Phi'_n(x_k)}$$

Luego

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Phi_n(x)}{(x-x_k)\Phi'_n(x_k)} f(x_k) \tag{7}$$

El coeficiente de x^n en $p_n(x)$ es a_n (expandir la fórmula (5)). Obteniendo el coeficiente de x^n a partir de la ecuación (7) tenemos

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\Phi'_n(x_k)}$$

Sea $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ una permutación de $(0, 1, \dots, n)$. Luego

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\Phi'_n(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_{i_k})}{\Phi'_n(x_{i_k})}$$

de donde se deduce que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$$

4. Error de la Interpolación Polinómica

Teorema 3 (Error de la Interpolación Polinómica) *Sean $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$, $n+1$ números distintos en $[a,b]$, y sea $f(x) \in \mathrm{C}^{n+1}$ en $[a,b]$. Luego, para todo $x \in [a,b]$ existe $\xi(x) \in (a,b)$ tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)) \tag{8}$$

donde $p(x)$ es el polinomio interpolante de grado menor o igual a n.

Demostración. Se observa primero que si $x = x_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$, entonces $f(x_k) = p(x_k)$ para cualquier $\xi(x)$ en (a,b).

Si $x \neq x_k$ para cualquier $k = 0, 1, \dots, n$, defina la función $g(t)$ para $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - p(t) - \big(f(x) - p(x)\big)\frac{(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} \qquad (9)\\ &= f(t) - p(t) - \big(f(x) - p(x)\big)\prod_{i=0}^{n}\frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}\end{aligned}$$

Puesto que $f \in \mathrm{C}^{n+1}$ en $[a,b]$ y $p \in \mathrm{C}^{\infty}$ en $[a,b]$, se deduce que $g \in \mathrm{C}^{n+1}$ en $[a,b]$.

Cuando $t = x_k$ tendremos

$$g(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - \big(f(x) - p(x)\big)\prod_{i=0}^{n}\frac{(x_k-x_i)}{(x-x_i)} = 0$$

Además,

$$g(x) = f(x) - p(x) - \big(f(x) - p(x)\big) \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)} = 0 \tag{10}$$

Por lo tanto, $g \in \mathrm{C}^{n+1}$ en $[a, b]$, y g se anula en los $n + 2$ números distintos $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Luego, por el Teorema Generalizado de Rolle, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Diferenciando $n + 1$ veces la ecuación (9), igualando a cero y evaluando en $t = \xi$ obtenemos

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - \big(f(x) - p(x)\big) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right)_{t=\xi} \tag{11}$$

Notar que $p(x)$ es de grado $\leq n$, luego $p^{(n+1)}(x) = 0$.

Por otra parte, $\prod_{i=0}^{n} \frac{(t-x_i)}{(x-x_i)}$ es un polinomio de grado $n + 1$. Luego

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} t^{n+1} + \text{términos de grado } \leq n \tag{12}$$

Diferenciando la ecuación (12) $n + 1$ veces obtenemos

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right) = \frac{(n + 1)!}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

Luego, la ecuación (11) se reduce a

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \big(f(x) - p(x)\big) \frac{(n + 1)!}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

Despejando $f(x)$ tenemos:

$$f(x) = p(x) + \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}$$

lo cual coincide con la ecuación (8). □

Caso particular: Error de la interpolación lineal

Sean $x, x_0, x_1 \in [a, b]$, y sea $f(x) \in \mathrm{C}^2$ en $[a, b]$. Luego, el error de la interpolación lineal está dado por

$$f(x) - p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(c_x)$$

para algún c_x entre el mínimo y el máximo de x, x_0 y x_1.

Ejemplo 3 *Sea* $f(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(10)}$. *Notar que* $\log_{10}(e) = \dfrac{1}{\log(10)}$.

La derivada segunda está dada por

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\log_{10}(e)$$

Luego, el error de interpolación está dado por:

$$\log_{10}(x) - p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}\left(-\frac{\log_{10}(e)}{c_x^2}\right) = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2}\left(\frac{\log_{10}(e)}{c_x^2}\right)$$

Si estamos interpolando se cumple que $x_0 \leq x \leq x_1$, *y en este caso tenemos*

$$(x-x_0)(x_1-x) \geq 0, \quad y \quad x_0 \leq c_x \leq x_1$$

Por lo tanto, podemos acotar el error de interpolación lineal como

$$(x-x_0)(x_1-x)\left(\frac{\log_{10}(e)}{2x_1^2}\right) \leq \log_{10}(x) - p_1(x) \leq (x-x_0)(x_1-x)\left(\frac{\log_{10}(e)}{2x_0^2}\right)$$

Supongamos que queremos hallar una cota del error que sea válida para todo $x \in [x_0, x_1]$. *Tenemos*

$$0 \leq \log_{10}(x) - p_1(x) \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} (x-x_0)(x_1-x)\left(\frac{\log_{10}(e)}{2x_0^2}\right)$$

Siendo $q(x) = (x-x_0)(x_1-x)$ *una función cuadrática estrictamente cónvaca, el valor de* x *que la maximiza en el intervalo* $[x_0, x_1]$ *puede hallarse en el (único) punto estacionario, es decir, el punto* $\bar{x}$ *para el cual* $q'(\bar{x}) = 0$, *si* $\bar{x} \in [x_0, x_1]$, *o puede hallarse en un punto extremo del intervalo si* $\bar{x} \notin [x_0, x_1]$.

$$q'(x) = -2x + x_0 + x_1$$

de donde

$$\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2} \in (x_0, x_1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\max_{x_0 \leq x \leq x_1} q(x) = q(\bar{x}) &= \frac{(x_0+x_1)^2}{2} - \frac{(x_0+x_1)^2}{4} - x_0x_1 \\ &= \frac{(x_0+x_1)^2}{4} - x_0x_1 = \frac{(x_0-x_1)^2}{4} = \frac{h^2}{4}\end{aligned}$$

donde $h = x_1 - x_0$. *Luego*

$$0 \leq (x-x_0)(x_1-x) \leq \frac{h^2}{4}, \quad x \in [x_0, x_1]$$

y por lo tanto

$$0 \leq \log_{10}(x) - p_1(x) \leq \frac{h^2}{4}\left(\frac{\log_{10}(e)}{2x_0^2}\right) \approx 0{,}0543\frac{h^2}{x_0^2}$$

Supongamos ahora que tenemos tabulados los valores de $\log_{10}(x)$ *en el intervalo* $[1, 10]$, *con un espaciado* $h = 0{,}01$. *Esta tabla se puede emplear para calcular por interpolación lineal el valor* *de* $\log_{10}(x)$ *para cualquier* $x \in [1,10]$. *Si queremos una cota uniforme para todo* $x_0 \in [1,10)$, *tenemos*

$$0 \leq \log_{10}(x) - p_1(x) \leq 0{,}0543h^2$$

Para $h = 0{,}01$ *tenemos*

$$0 \leq \log_{10}(x) - p_1(x) \leq 5{,}43 \times 10^{-6}$$

Típicamente, las tablas de $\log_{10}(x)$ *presentaban valores con 4 cifras decimales, por ejemplo,* $\log_{10}(5{,}41) = 0{,}7332$. *El máximo error de redondeo es* $0{,}00005$, *el cual es mayor que el máximo error de interpolación lineal.*

Acotación del error: Caso general

El procedimiento empleado en el Ejemplo 3 para acotar el error de interpolación se puede generalizar. Para $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ distintos en $[a,b]$ y x en $[a,b]$, el error de interpolación está dado por

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

donde

$$\Phi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Queremos hallar una cota del error $|f(x) - p_n(x)|$ en $[a,b]$.

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |\Phi_n(x)| \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Éstas cotas no son fáciles de evaluar, salvo en casos particulares.

Fenómeno de Runge

El fenómeno de Runge es un problema que sucede cuando se usa interpolación polinómica con polinomios de alto grado utilizando nodos equidistantes. Analizaremos el fenómeno de Runge estudiando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 (Error para nodos uniformemente espaciados) *Supongamos que tenemos* $n+1$ *nodos equiespaciados en un intervalo* $[a,b]$. *Tenemos*

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

En particular, tomemos

$$\begin{aligned} a = x_0 = 0, &\qquad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad \ldots \\ b = x_n = 1 & \end{aligned}$$

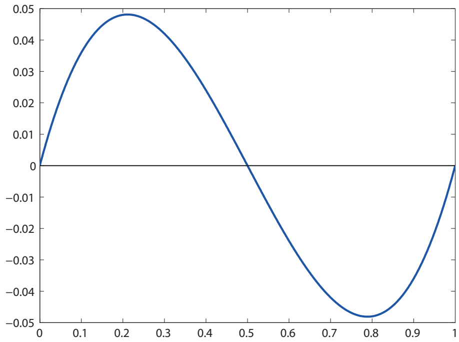
Luego

$$\Phi_n(x) = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-1)$$

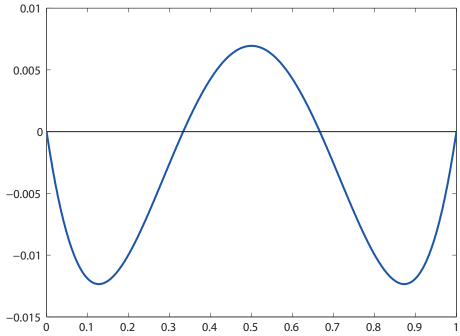
La Figura 3 muestra la gráfica de $\Phi_n(x)$ *para distintos valores de* n.

Para valores de n grandes (por ejemplo, $n \geq 5$), los valores de $|\Phi_n(x)|$ varían mucho en el itervalo $[x_0, x_n]$. Los valores en los extremos del intervalo pueden ser mucho mayores que los valores en el medio del intervalo. Esta disparidad aumenta a medida que n aumenta.

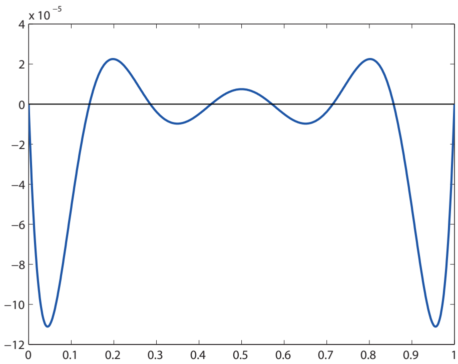
La oscilación se puede minimizar usando nodos de Chebyshev en lugar de equidistantes. En este caso, se garantiza que el error máximo disminuye al crecer el orden polinómico.



(a) $\Phi_2(x)$



(b) $\Phi_3(x)$



(c) $\Phi_7(x)$

Figura 3: Fenómeno de Runge.