1. Resultados Matemáticos Preliminares

Repasaremos a continuación algunos resultados de cálculo que se utilizarán en este curso.

Teorema 1 (Teorema del Valor Intermedio) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces, para cada β tal que $f(a) \leq \beta \leq f(b)$, existe al menos un ξ en $[a,b]$ tal que $f(\xi) = \beta$.*

Teorema 2 (Teorema del Valor Intermedio: otra versión) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, y sea*

$$m = \operatorname*{Inf}_{a \leq x \leq b} f(x), \qquad M = \operatorname*{Sup}_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Luego, para cualquier número β en el intervalo $[m,M]$, existe al menos un punto ξ en $[a,b]$ tal que

$$f(\xi) = \beta$$

En particular, existen puntos $\underline{x}$ y $\overline{x}$ en $[a,b]$ tales que

$$m = f(\underline{x}), \qquad M = f(\overline{x})$$

Teorema 3 (Teorema del Valor Medio) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces, existe al menos un punto ξ en (a,b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Teorema 4 (Teorema de Rolle) *Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$.*

El Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio.

Teorema 5 (Teorema Generalizado de Rolle) *Sea $f \in \mathrm{C}$ en $[a,b]$, y sea $f \in \mathrm{C}^n$ en (a,b). Si $f(x)$ se anula en los $n+1$ números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en $[a,b]$, entonces existe c en (a,b) tal que $f^{(n)}(c) = 0$.*

Teorema 6 (Teorema del Valor Medio para Integrales) *Sea $g(x)$ una función no negativa e integrable en el intervalo $[a,b]$, y sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Luego*

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

para algún punto $\xi \in [a,b]$.

Las demostraciones de estos teoremas se pueden hallar en la mayoría de los libros de cálculo.

2. Polinomio de Taylor

Definición

Sea $f(x)$ una función dada, derivable alrededor del punto $x = a$, con tantas derivadas como sea necesario. Buscamos un polinomio $p(x)$ de grado n, tal que:

$$\begin{aligned} p(a) &= f(a) \\ p'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ p^{(j)}(a) &= f^{(j)}(a) \\ &\vdots \\ p^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

La fórmula general de dicho polinomio es:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Luego, $f(x) \approx p_n(x)$ para x cercano a a.

Ejemplo. Consideremos $f(x) = \log(x)$ con $a = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} &f(1) = \log(1) = 0 \\ &f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1}(j-1)!\frac{1}{x^j} \qquad \text{(por inducción)} \\ &f^{(j)}(1) = (-1)^{j-1}(j-1)!, \qquad j \geq 1 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(x-1)^j \end{aligned}$$

Error del Polinomio de Taylor

Teorema 7 (Error del Polinomio de Taylor) *Suponga que $f(x)$ tiene $n+1$ derivadas continuas en un intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$, y que el punto a pertenece a dicho intervalo. El error del polinomio de Taylor está dado por:*

$$R_n(x) \equiv f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c_x) \qquad (1)$$

donde c_x pertenece al intervalo entre x y a.

Existe además otra fórmula del error del polinomio de Taylor dada por:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Interpretación. Veremos la interpretación de la ecuación (1).

Caso $n = 0$

$$\begin{aligned} p_0(x) &= f(a) \\ R_0(x) &= f(x) - p_0(x) = f(x) - f(a) = (x-a)f'(c_x) \end{aligned}$$

para algún c_x entre a y x.

Vemos que para el caso $n = 0$ obtenemos el Teorema del Valor Medio.

Caso $n = 1$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ R_1(x) &= f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 f^{(2)}(c_x) \end{aligned}$$

para algún c_x entre a y x. Diferenciando tenemos:

$$f'(x) - p_1'(x) = f'(x) - f'(a) = (x-a)f^{(2)}(c_x)$$

para algún c_x entre a y x.

Vemos que para el caso $n = 1$ obtenemos el Teorema del Valor Medio aplicado a $f'(x)$.

Caso $n = n$

Derivando n veces la ecuación (1) obtenemos:

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = (x-a)f^{(n+1)}(c_x)$$

para algún c_x entre a y x.

Vemos que obtenemos el Teorema del Valor Medio aplicado a $f^{(n)}(x)$.

La fórmula del error del polinomio de Taylor en (1) puede interpretarse como una generalización del Teorema del Valor Medio.

Ejemplo. Consideremos $f(x) = e^x$ con $a = 0$. Tenemos que

$$f^{(k)}(x) = e^x, \qquad \text{luego} \ \ f^{(k)}(0) = 1, \ \ \text{para} \ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ R_n(x) &= e^x - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{c_x} \end{aligned}$$

para algún c_x entre x y 0.

Para obtener una aproximación del número e, tomamos $x = 1$. Luego

$$e \approx p_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

El error de dicha aproximación está dado por:

$$e - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{c_x}, \qquad 0 \leq c_x \leq 1 \tag{2}$$

Vemos que, independientemente del valor que tome c_x, el error $e - p_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$. De ello concluimos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Supongamos ahora que queremos acotar el error dado por la ecuación (2). Tenemos que

$$e^0 \leq e^{c_x} \leq e^1$$

Luego

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - p_n(1) \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Si queremos acotar el error sin conocer el número e, podemos emplear la cota conocida $e < 3$. Luego

$$|e - p_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Para obtener una aproximación con un error menor o igual a 10^{-5}, elegimos n suficientemente grande tal que

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

Veamos ahora que $e < 3$. Tenemos que

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \text{para todo } n \geq 1$$

Se sigue que

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad n \geq 1$$

Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Luego

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 3$$

Es decir, obtenemos que $e < 3$.