Geometría Computacional

Conceptos básicos

Problemas geométricos

Segmentos

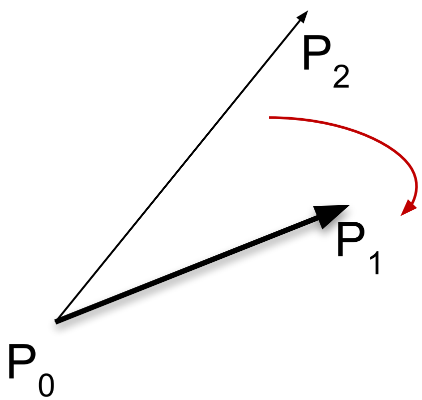
Problemas geométricos

Segmentos de línea

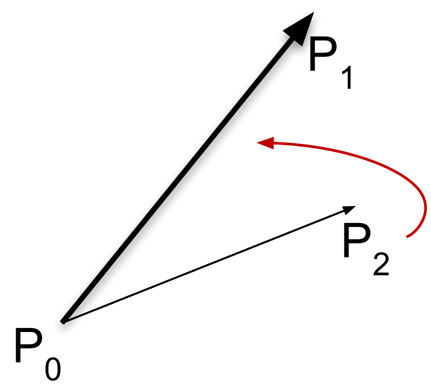
1. ¿Cuándo un segmento (o punto) está ubicado en el sentido horario o anti-horario respecto de otro?
2. ¿Hacia dónde doblamos cuando pasamos de un segmento a otro?
3. Intersección de 2 segmentos.
   a) Visión analítica
   b) Aplicando Producto en cruz

Segmentos de línea

1. a) - Dados 2 segmentos P_0P_1 y P_0P_2; ¿está P_0P_1 ubicado en el **sentido horario** de P_0P_2 respecto a P_0 ?



SI



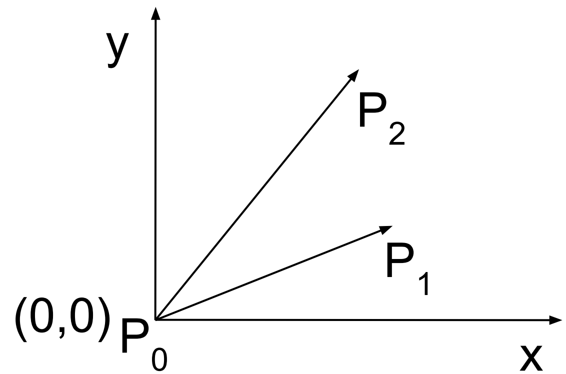
NO, está en el sentido **anti-horario**

Producto cruzado

$$P_1 \times P_2 = \det \begin{pmatrix} x1 & x2 \\ y1 & y2 \end{pmatrix}$$

$$= x1\, y2 - x2\, y1$$

$$P_2 \times P_1 = - P_1 \times P_2$$



$P_1 \times P_2$ > 0 entonces P_1 está ubicado en el sentido **horario** de P_2 respecto a P_0, en este caso el origen (0,0)

< 0 entonces P1 está ubicado en el sentido **anti-horario** de P_2

= 0 entonces los vectores son colineales

Segmentos de línea

1.b) Dados 3 puntos P_0 P_1 y P_2; ¿está P_2 ubicado en el **sentido horario** del segmento dirigido que pasa por P_0 y P_1 ?

P_2

P_1

P_0

(a)

P_1

P_2

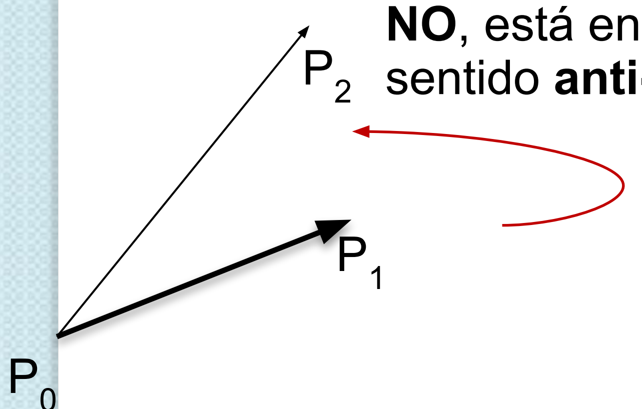
P_0

(b)

Segmentos de línea

1.b) Dados 3 puntos P_0 P_1 y P_2; está P_2 ubicado en el **sentido horario** del segmento dirigido que pasa por P_0 y P_1 ?

NO, está en el sentido **anti-horario**



(a)

P_1

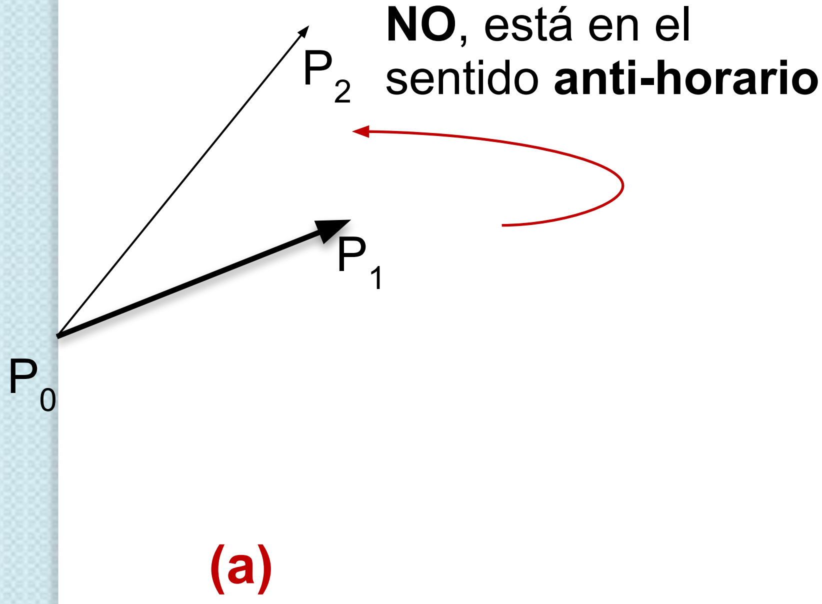
P_2

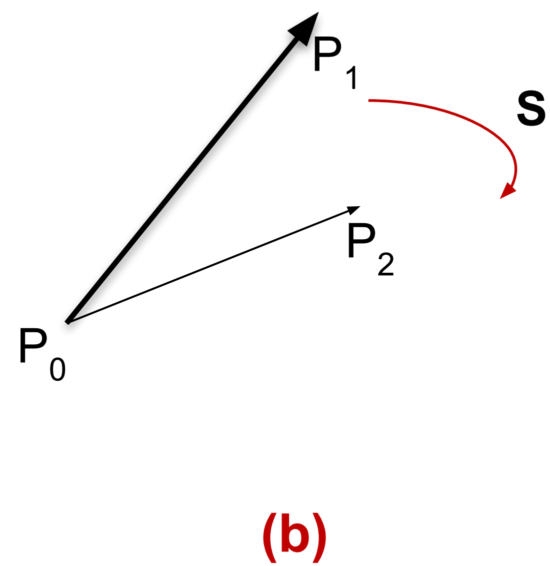
P_0

(b)

Segmentos de línea

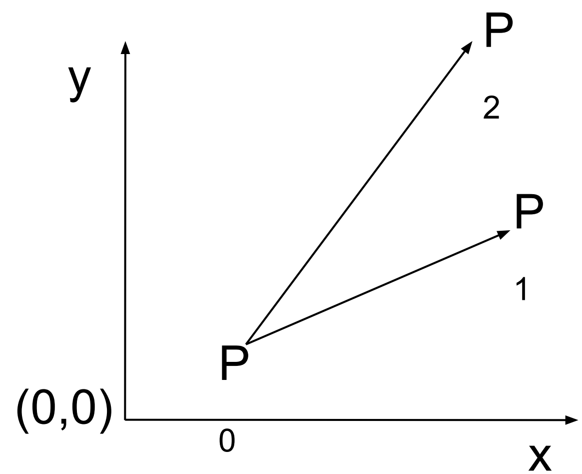
1.b) Dados 3 puntos P_0 P_1 y P_2; está P_2 ubicado en el **sentido horario** del segmento dirigido que pasa por P_0 y P_1 ?





Producto cruzado

Para un P_0 cualquiera, simplemente se lo traslada al origen



$(P_1 – P_0)$ $P'_{1\,=}$ $(x'1, y'1)$

$x'1 = (x1-x0)$ y $y'1 = (y1-y0)$

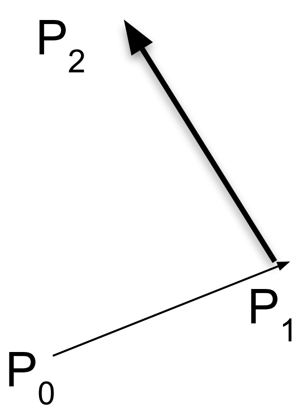
$(P_2 – P_0)$ $P'_{2\,=}$ $(x'2, y'2)$

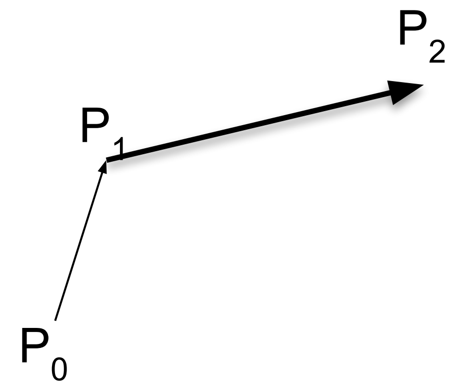
$$P'_1 \times P'_2 = \det \begin{pmatrix} x'1 & x'2 \\ y'1 & y'2 \end{pmatrix}$$

$$P'_1 \times P'_2 = (P_1 – P_0) \times (P_2 – P_0) = (x1-x0)(y2-y0) – (x2-x0)(y1-y0)$$

Segmentos de línea

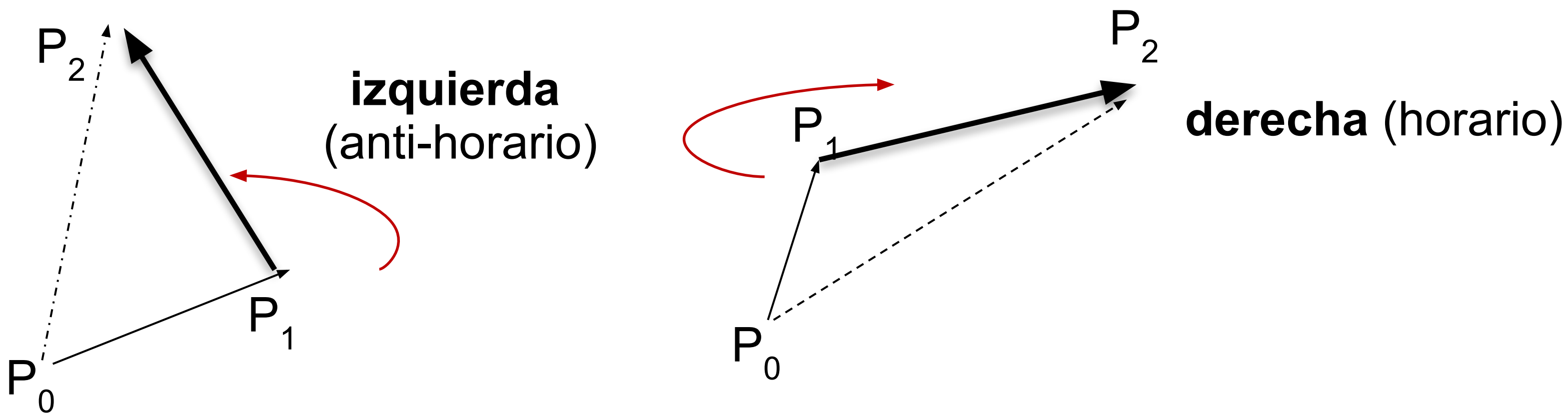
2.- Dados 2 segmentos consecutivos P_0P_1 y P_1P_2: ¿P_1P_2 gira a izquierda o a derecha del punto P_1 ?





Segmentos de línea

2.- Dados 2 segmentos consecutivos P_0P_1 y P_1P_2; P_1P_2 gira a izquierda o a derecha del punto P_1 ?



Solución: Chequear si el segmento P_0P_2 está en el sentido horario o anti-horario en relación al segmento P_0P_1 usando el producto en cruz.

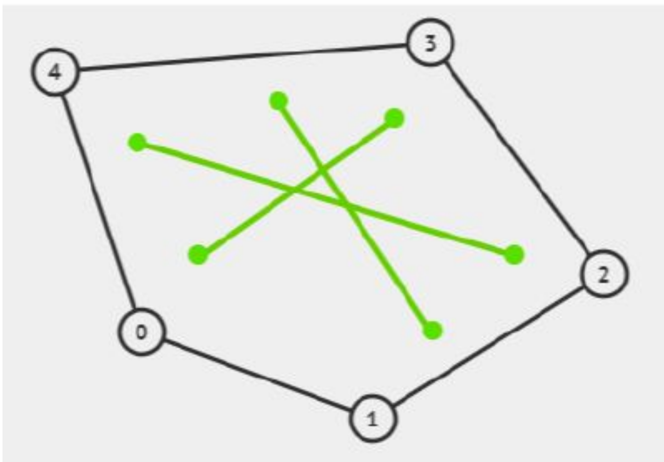
Producto cruzado

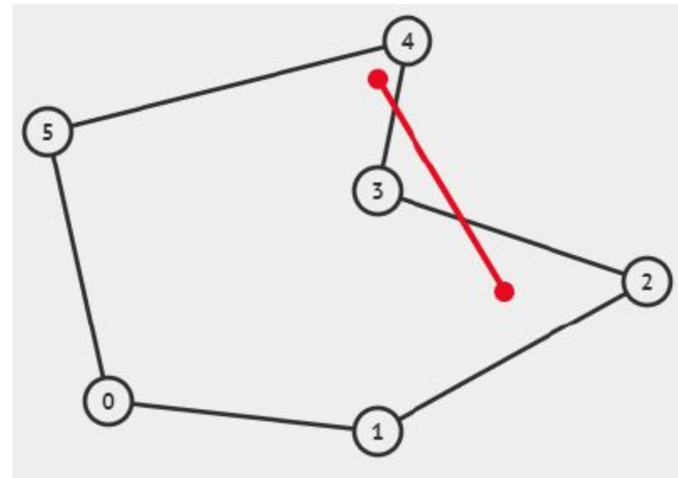
$P'_1 \times P'_2 = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) = (x1-x0)(y2-y0) - (x2-x0)(y1-y0)$

$a = P_0$, $b = P_1$ y $c = P_2$

```
double producto_en_cruz(point a, point b, point c)
{
	return( (a[X]*b[Y] - a[Y]*b[X] + a[Y]*c[X]
	- a[X]*c[Y] + b[X]*c[Y] - c[X]*b[Y]));
}
```

Producto cruzado
Convexidad y concavidad

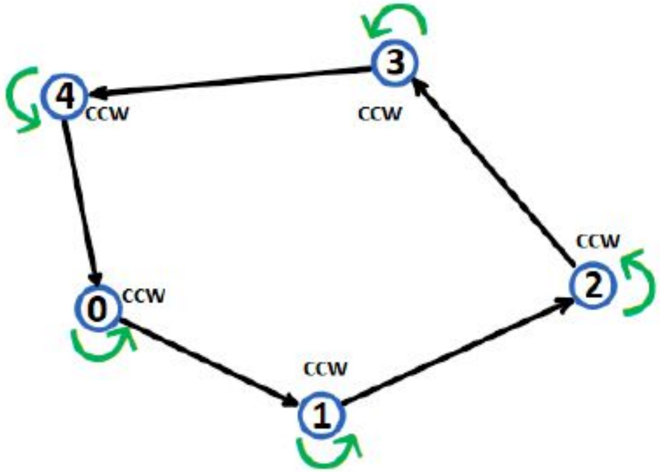


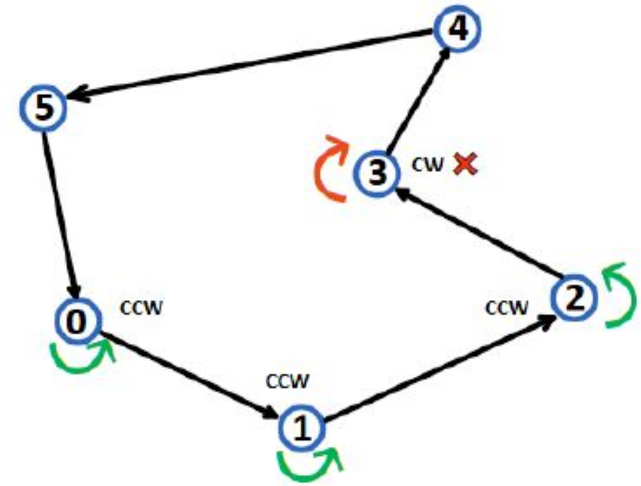


Un polígono P es convexo si cualquier segmento de línea formado por dos puntos dentro de P, se encuentra contenido por completo en el polígono, sin intersectarse con ningún lado. Caso contrario, se considera que el polígono es cóncavo.

Producto cruzado

Convexidad y concavidad





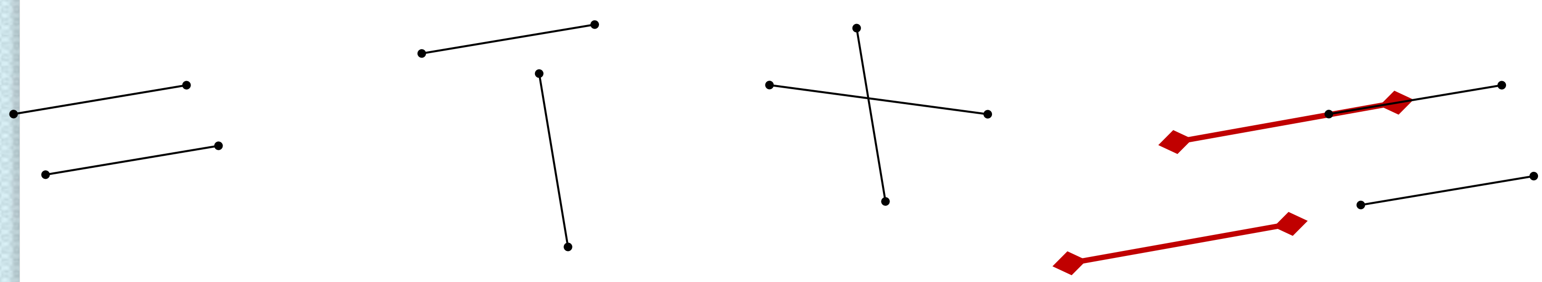
Un método sencillo consiste en revisar si todos los grupos de tres vértices consecutivos del polígono tienen el mismo sentido de giro.

Fuente: Trabajo Final de Taller de Tecnologías de Producción de Software de Andrea Goyechea, Octubre, 2024

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos (visión analítica)

```
typedef struct {
        point p1,p2;            /* endpoints of line segment */
       } segment;
```

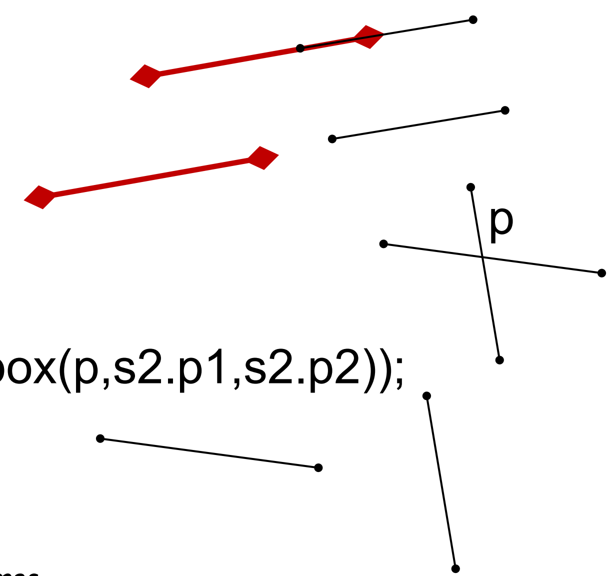


```
bool point_in_box(point p, point b1, point b2)
{
     return( (p[X] >= min(b1[X],b2[X])) && (p[X] <= max(b1[X],b2[X]))
     && (p[Y] >= min(b1[Y],b2[Y])) && (p[Y] <= max(b1[Y],b2[Y])) );
}
```

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos (visión analítica)

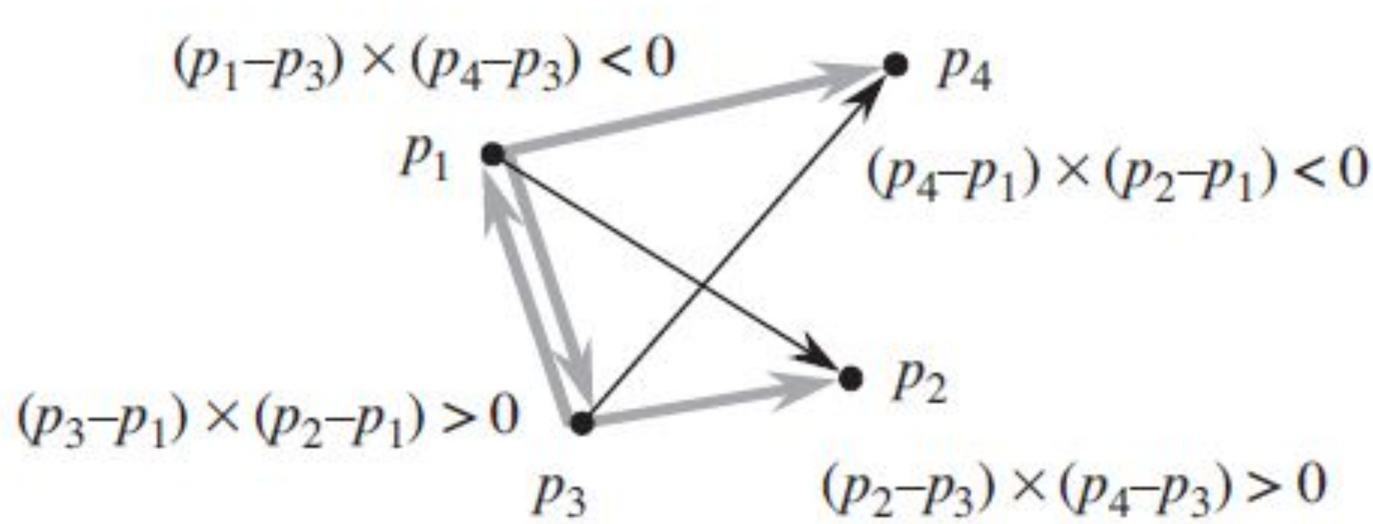
```
bool segments_intersect(segment s1, segment s2)
{
    line l1,l2;                 /* lines containing the input segments */
    point p;                    /* intersection point */
  points_to_line(s1.p1,s1.p2,&l1);
  points_to_line(s2.p1,s2.p2,&l2);
  if (same_lineQ(l1,l2))        /* overlapping or disjoint segments */
          return( point_in_box(s1.p1,s2.p1,s2.p2) ||
                  point_in_box(s1.p2,s2.p1,s2.p2) ||
                  point_in_box(s2.p1,s1.p1,s1.p2) ||
                  point_in_box(s2.p2,s1.p1,s1.p2) );
  if (parallelQ(l1,l2)) return(FALSE);
   intersection_point(l1,l2,p);
   return(point_in_box(p,s1.p1,s1.p2) && point_in_box(p,s2.p1,s2.p2));
}
```



Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

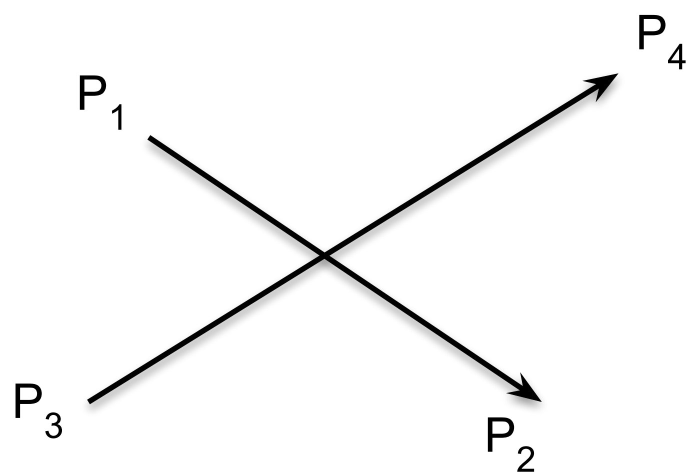
(visión geometría computacional)



Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)



(a)

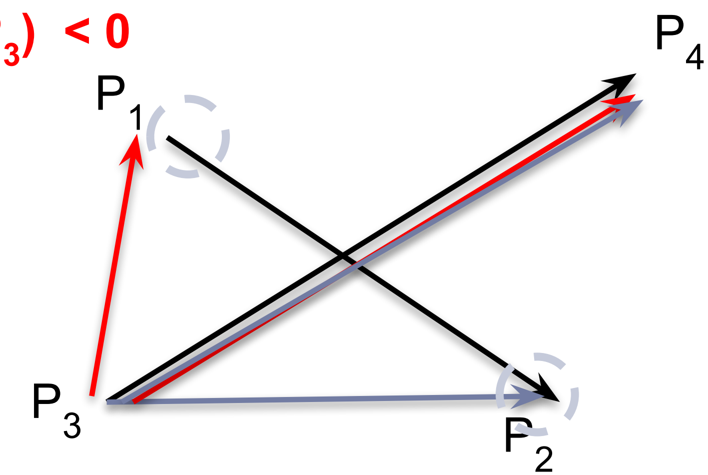
Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)

Ver si los extremos del seg P_1P_2 están a cada lado del seg P_3P_4

$(P_1 - P_3) \times (P_4 - P_3) < 0$



$(P_2 - P_3) \times (P_4 - P_3) > 0$

(a)

Segmentos de línea

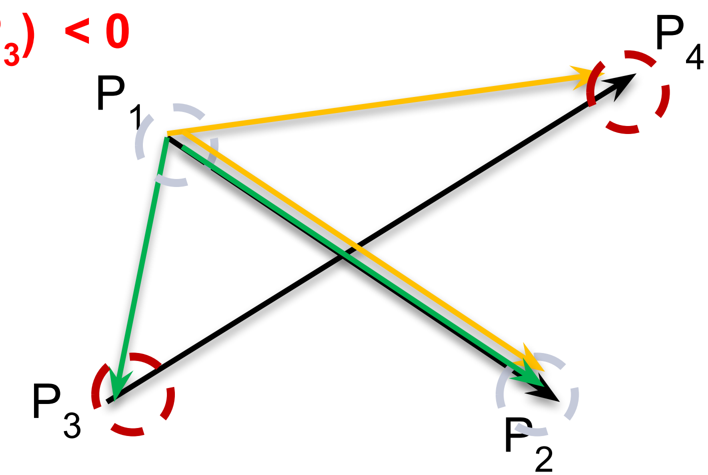
Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)

Ver si los extremos del seg P_1P_2 están a cada lado del seg P_3P_4

$(P_4 - P_1) \times (P_2 - P_1) < 0$

$(P_1 - P_3) \times (P_4 - P_3) < 0$



Ver si los extremos del seg P_3P_4 están a cada lado del segmento P_1P_2

$(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) > 0$

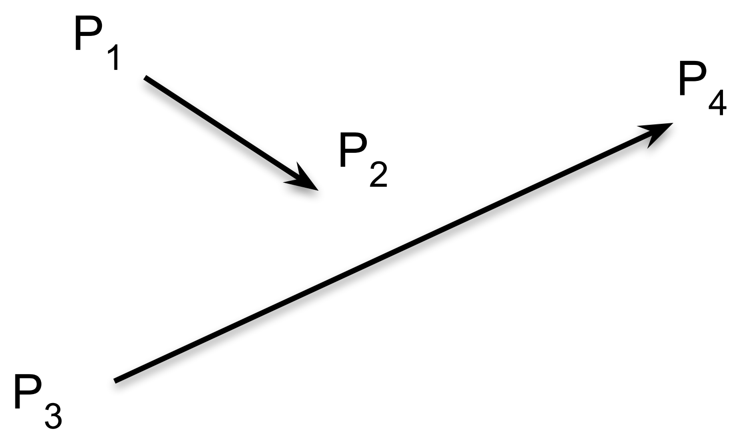
$(P_2 - P_3) \times (P_4 - P_3) > 0$

(a)

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)



(b)

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

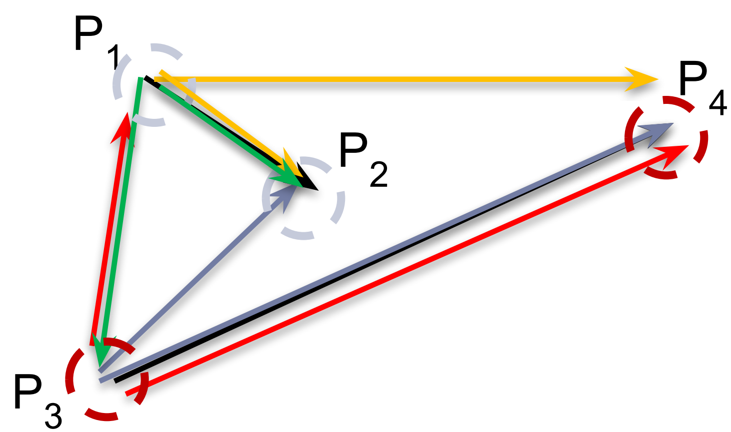
(usando Producto en cruz)

Ver si los extremos del seg P_1P_2 están a cada lado del seg P_3P_4

$(P_4 - P_1) \times (P_2 - P_1) < 0$

$(P_1 - P_3) \times (P_4 - P_3) < 0$

Ver si los extremos del seg P_3P_4 están a cada lado del segmento P_1P_2



$(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) > 0$

$(P_2 - P_3) \times (P_4 - P_3) < 0$

(b)

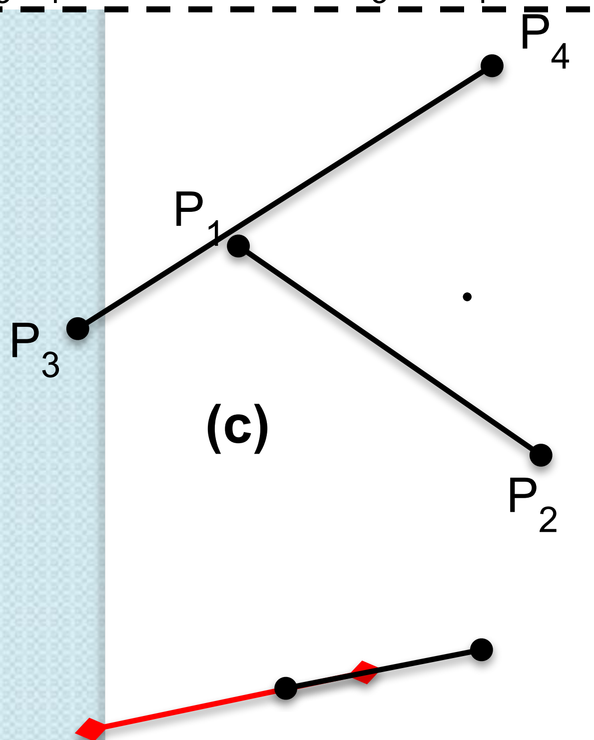
Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

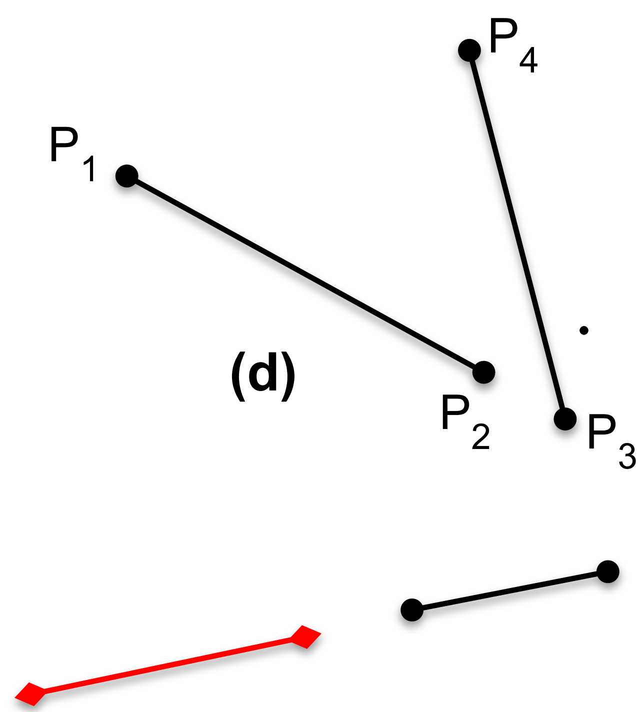
(usando Producto en cruz)

El punto P_1 es colineal con el segmento P_3P_4 y está entre P_3 y P_4

El punto P_3 es colineal con el segmento P_1P_2 pero no está entre P_1 y P_2



(c)



(d)

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)

Seudocódigo

```
SEGMENTS-INTERSECT(p1, p2, p3, p4)
  d1 ← DIRECTION(p3, p4, p1)
  d2 ← DIRECTION(p3, p4, p2)
  d3 ← DIRECTION(p1, p2, p3)
  d4 ← DIRECTION(p1, p2, p4)
  if ((d1 > 0 and d2 < 0) or (d1 < 0 and d2 > 0)) and
          ((d3 > 0 and d4 < 0) or (d3 < 0 and d4 > 0))
     then return TRUE
  elseif d1 = 0 and ON-SEGMENT(p3, p4, p1)
     then return TRUE
  elseif d2 = 0 and ON-SEGMENT(p3, p4, p2)
     then return TRUE
  elseif d3 = 0 and ON-SEGMENT(p1, p2, p3)
     then return TRUE
  elseif d4 = 0 and ON-SEGMENT(p1, p2, p4)
     then return TRUE
  else return FALSE
```

Segmentos de línea

Intersección de 2 segmentos

(usando Producto en cruz)

```
DIRECTION(pi, pj, pk)
  return (pk - pi) × (pj - pi)

ON-SEGMENT(pi, pj, pk)
  if min(xi, xj) ≤ xk ≤ max(xi, xj) and min(yi, yj) ≤ yk ≤ max(yi, yj)
      then return TRUE
      else return FALSE
```

Bibliografía

Programming Challenges. The Programming Contest Training Manual. Steven S. Skiena, Miguel A. Revilla. Springer-Verlag New York, Inc., 2003 ISBN 0-387-00163-8.

Introduction to Algorithms, 2nd Ed –Thomas H. Cormen
ISBN 0-262-03293-7 (hc.: alk. paper, MIT Press).-ISBN 0-07-013151-1 (McGraw-Hill)

Problemas geométricos

Puntos:

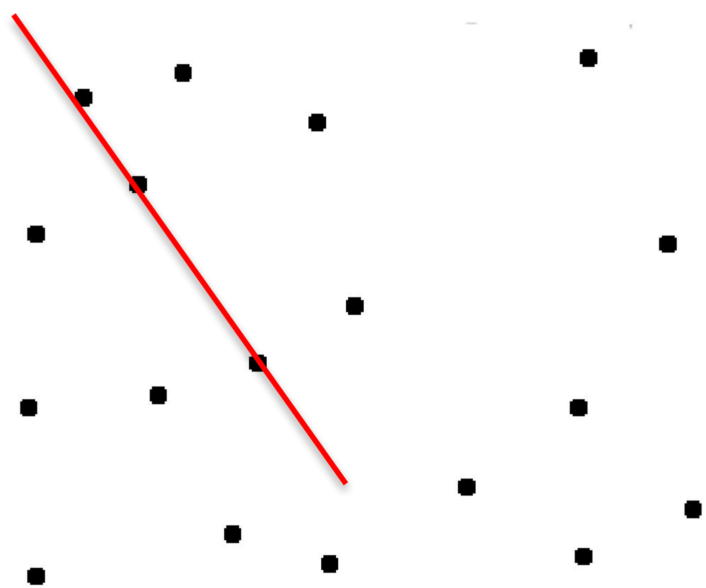
1. Máxima cantidad de puntos en una recta

2. Par de puntos más cercanos

Problemas geométricos: Puntos
Descripción

1. Máxima cantidad de puntos en una recta

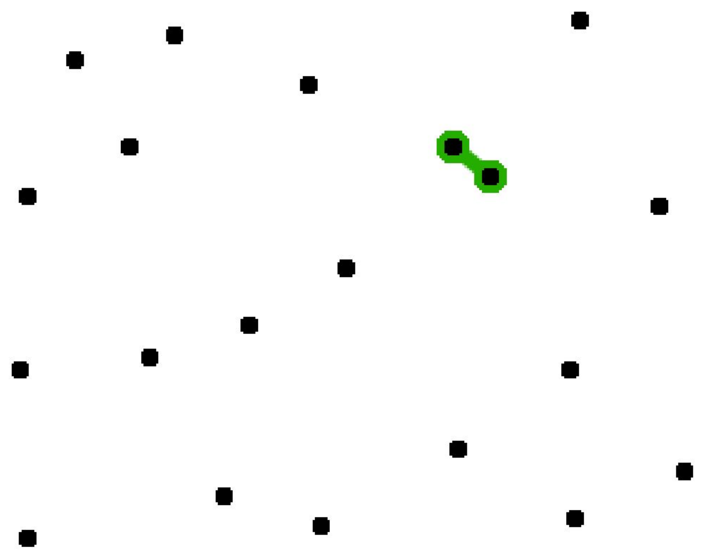
Dado un conjunto P de puntos en R^2 se debe encontrar la máxima cantidad de ellos que se encuentran alineados, es decir, que caen en una misma recta.



Problemas geométricos: Puntos
Descripción

2. Par de puntos más cercanos

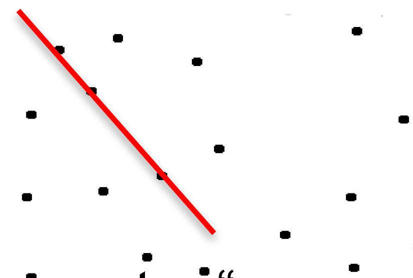
Dado un conjunto P de puntos en R^2 se debe encontrar el par de puntos más cercanos.



Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

Dado un conjunto P de puntos en R^2 se debe encontrar la máxima cantidad de ellos que se encuentran alineados, es decir, que caen en una misma recta (son colineales).



Estrategia de solución ??
Qué sabemos ??

a.- Todos los puntos p_i que caen en una misma recta "$y = mx + n$" deben satisfacer dicha ecuación.

b.- Si definimos la ec. de la recta que pasa por 2 puntos, p_i y p_j □ un 3er punto p_k estará alineado con p_i y p_j si cumple que $m_{i,j} = m_{i,k}$ siendo $m_{a,b}$ la pendiente entre p_a y p_b

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

b.- Definimos la ec. de la recta que pasa por 2 puntos, p_i y p_j □

Recta que pasa por los puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) se tiene que la pendiente $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ y ordenada al origen $n = y_1 - m\, x_1$

Como tienen que satisfacer "y = mx + n" entonces

$$y = [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)] * x + y_1 - [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)]\, x_1$$

$$y - y_1 = [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)] * (x - x_1)$$

Dado otro punto p_k la ec recta que pasa por P_1 y P_k es:

$$y - y_1 = [(y_k - y_1) / (x_k - x_1)] * (x - x_1)$$

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

b.- Definimos la ec. de la recta que pasa por 2 puntos, p_i y p_j

Recta que pasa por los punto P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) se tiene que la pendiente $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ y ordenada al origen $n = y_1 - m\, x_1$

Como tienen que satisfacer "y = mx + n" entonces

$$y = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)*x + y_1 - [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)]\, x_1$$

$$y - y_1 = [(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)] * (x - x_1) \qquad m_{1,2}$$

Dado otro punto p_k la ec recta que pasa por P_1 y P_k es:

$$y - y_1 = [(y_k - y_1) / (x_k - x_1)] * (x - x_1) \qquad m_{1,k}$$

Entonces el 3er punto p_k estará alineado con p_1 y p_2 si cumple :

$m_{1,2} = m_{1,k}$ siendo $m_{a,b}$ la pendiente entre p_a y p_b

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

Solución 1: Fuerza Bruta --- > $O(n^3)$

a) Dado un punto $p_i \in P$

i.- calcular la pendiente entre el p_i y los restantes n-1 puntos.

ii.- calcular la cantidad máxima de pendientes iguales.

b) Repetir a) para los restantes $p_i \in P$ e ir calculando el máximo entre las cantidades obtenidas en a) ii.-

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

Solución 1: $O(n^3)$

Código guía

```
Const
      cero= 1e-8;
      infinito= 1e+1000;

Type
     point = record
            x,y: longint;
            end;

Var
    i,n: longint;
    p: array [1..200] of point;

Function PuntLinea(n: longint): longint;
         var i,j,k,r,t: longint;
             m: array [1..200] of extended;
         begin
         r:= 0;
         for i:= 1 to n-1 do
             begin
             if (r+2 >n-i) then break;
             for j:= i+1 to n do
                 if (p[i].x<> p[j].x)
                    then m[j]:= (p[i].y -p[j].y)/(p[i].x -p[j].x)
                    else m[j]:= infinito;
             for j:= i+1 to n-1 do
                 begin
                 t:= 0;
                 for k:= j+1 to n do
                     if (abs(m[j]-m[k])< cero) then Inc(t);
                 if (t > r) then r:= t;
                 end;
             end;
         PuntLinea:= r+2;
         end;

Begin
      readln(input,n);
      for i:= 1 to n do
          readln(input,p[i].x, p[i].y);
      writeln(output,PuntLinea(n));
End.
```

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

Solución 1: $O(n^3)$

Código guía

```
01: Const
02:      cero= 1e-8;
03:      infinito= 1e+1000;
04:
05: Type
06:     point = record
07:           x,y: longint;
08:           end;
09:
10: Var
11:    i,n: longint;
12:    p: array [1..200] of point;
13:
14: Function PuntLinea(n: longint): longint;
15:          var i,j,k,r,t: longint;
16:              m: array [1..200] of extended;
17:          begin
18:          r:= 0;
19:          for i:= 1 to n-1 do
20:              begin
21:              if (r+2 >n-i) then break;
22:              for j:= i+1 to n do
23:                  if (p[i].x<> p[j].x)
24:                     then m[j]:= (p[i].y -p[j].y)/(p[i].x -p[j].x)
25:                     else m[j]:= infinito;
26:              for j:= i+1 to n-1 do
27:                  begin
28:                  t:= 0;
29:                  for k:= j+1 to n do
30:                      if (abs(m[j]-m[k])< cero) then Inc(t);
31:                  if (t > r) then r:= t;
32:                  end;
33:              end;
34:          PuntLinea:= r+2;
35:          end;
36:
37: Begin
38:      readln(input,n);
39:      for i:= 1 to n do
40:          readln(input,p[i].x, p[i].y);
41:      writeln(output,PuntLinea(n));
42: End.
```

ordenar el vector de pendientes antes de calcular la cantidad máxima de pendientes iguales.
Cambiar líneas 26-35

Resolución

Máxima cantidad de puntos en una recta

Solución 2: mejorada --- > O(n^2 log n)

Se modifica la solución 1 ordenando el vector de pendientes antes del paso ii.-

Código guía

```
            quicksort(m,i,n-1);
            t:= 0;
            for j:= i+1 to n-1 do
                if (abs(m[j]-m[j+1])< cero)
                   then Inc(t)
                   else begin
                        if (t>r) then r:= t;
                        t:= 0;
                        end;
            if (t>r) then r:= t;
            end;
        PuntLinea:= r+2;
        end;
```

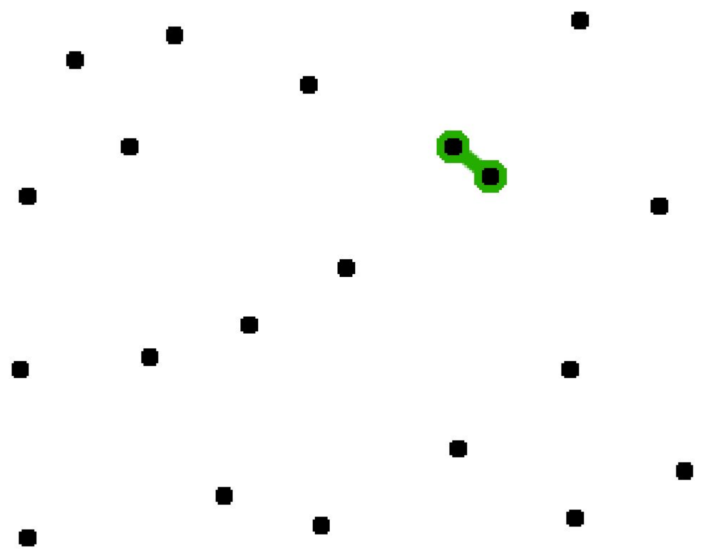
http://pier.guillen.com.mx/algorithms/07-geometricos/07.2-puntos_en_recta.htm

Resolución

Par de puntos más cercanos

2. Par de puntos más cercanos

Dado un conjunto P de puntos en R^2 se debe encontrar el par de puntos más cercanos.



Resolución

Par de puntos más cercanos

Solución 1: Fuerza Bruta --- > $O(n^2)$

Calcula distancia entre cada punto $(p_i, p_j) \varepsilon P$ quedándose con la mínima

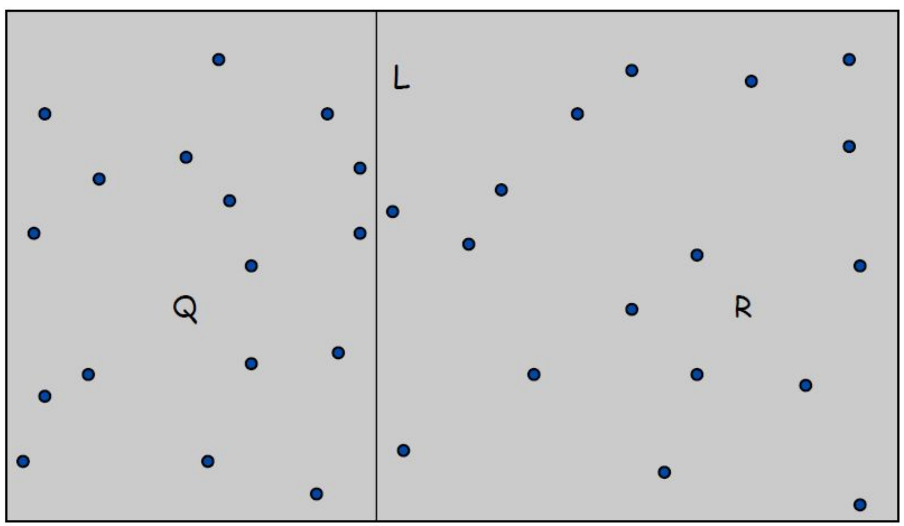
Solución 2: Divide & Conquer --- > $O(n \log n)$

Resolución

Par de puntos más cercanos

Algoritmo

- *Divide*: divide el conjunto de puntos P en 2 subconjuntos R y Q , trazando una línea vertical L, de manera que queden la mitad de puntos a cada lado.
Se hace ordenando los puntos por la coordenada x (O(n log n)

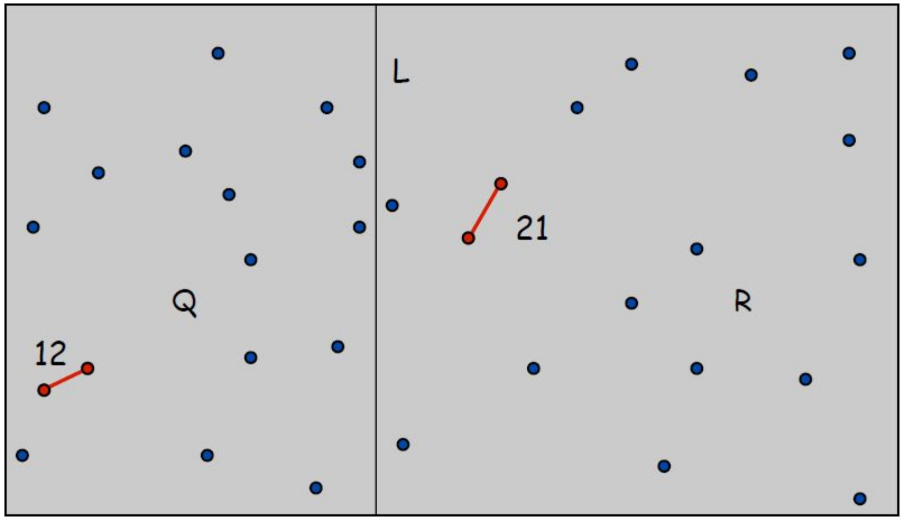


Resolución

Par de puntos más cercanos

Algoritmo

- Divide: divide el conjunto de puntos P en 2 subconjuntos R y Q
- *Recur:* encontrar el par de puntos más cercanos de cada lado recursivamente.

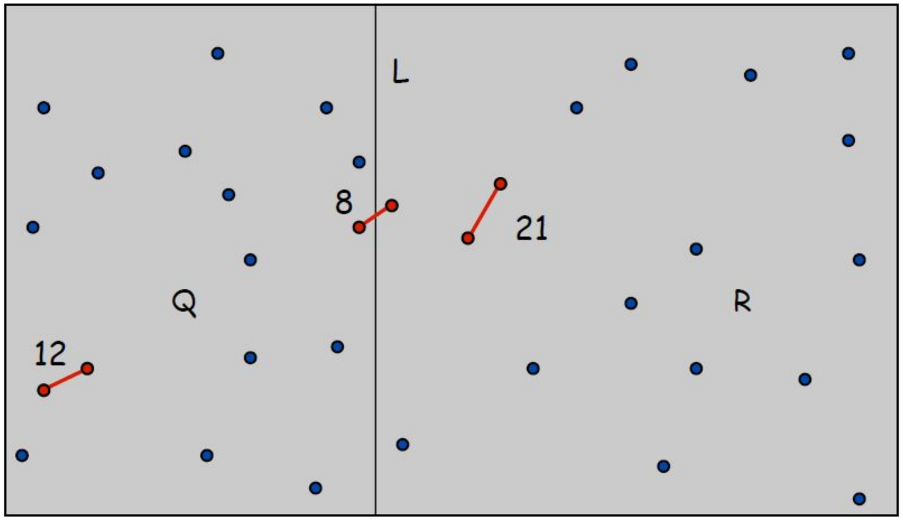


Resolución

Par de puntos más cercanos

Algoritmo

- Divide: divide el conjunto de puntos P en 2 subconjuntos R y Q
- Recur: encontrar el par de puntos más cercanos de cada lado recursivamente.
- *Combine:* encontrar el par de puntos más cercano, con un punto de cada lado
- Retornar el menor de los 3 valores.



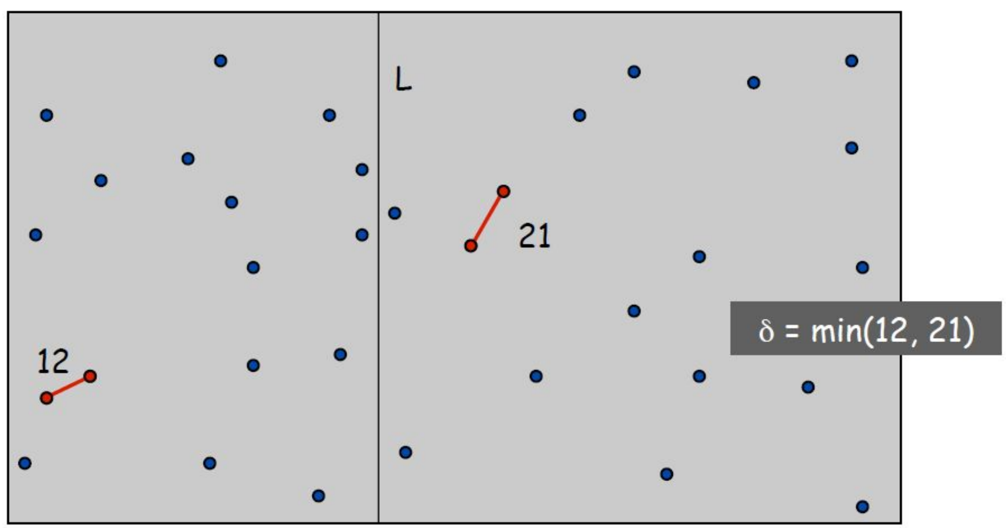
Resolución

Par de puntos más cercanos

Combinando las soluciones

Dados Qs el mínimo par (q1, q2) y Rs el mínimo par (r1, r2), δ = min(dist(q1, q2), dist(r1, r2))

Conocer la distancia δ, nos permite acotar la cantidad de puntos en Q y R que necesitamos comparar.

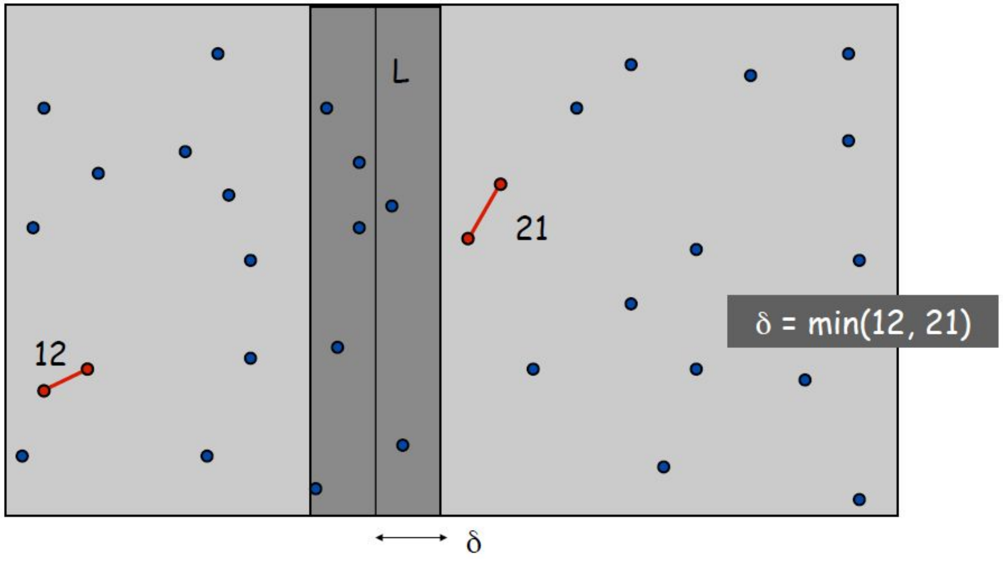


Resolución

Par de puntos más cercanos

Combinando las soluciones

Vamos a encontrar el par de puntos más cercanos, con un punto de cada lado de la recta, asumiendo una distancia < δ



Resolución

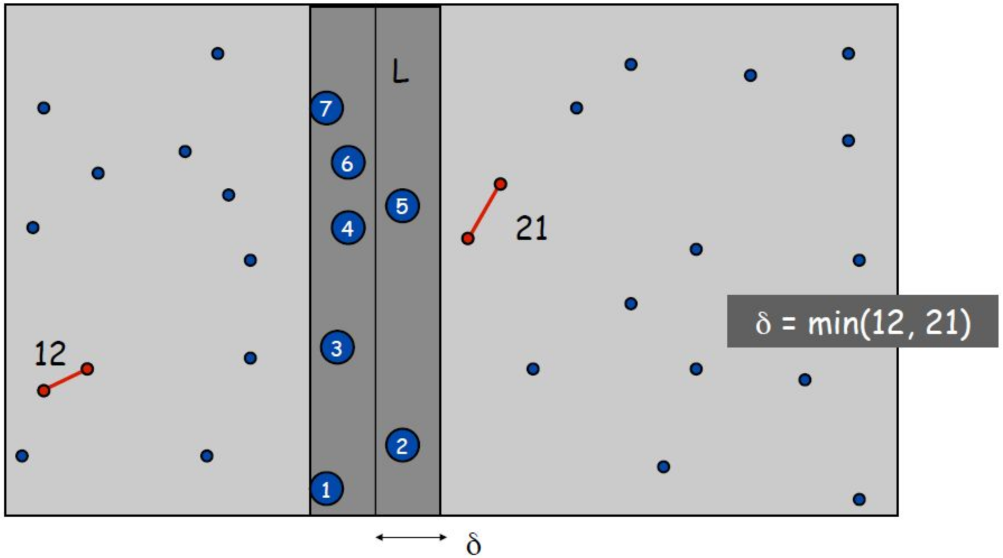
Par de puntos más cercanos

Combinando las soluciones

Vamos a encontrar el par de puntos más cercanos, con un punto de cada lado de la recta, asumiendo una distancia < δ

- Seleccionamos los puntos ordenados por la coordenada **y** que caen en esa franja de 2δ
- ¿Cuántos puntos → pares puede haber en esa franja?

Puntos: $O(n) \rightarrow O(n^2)$



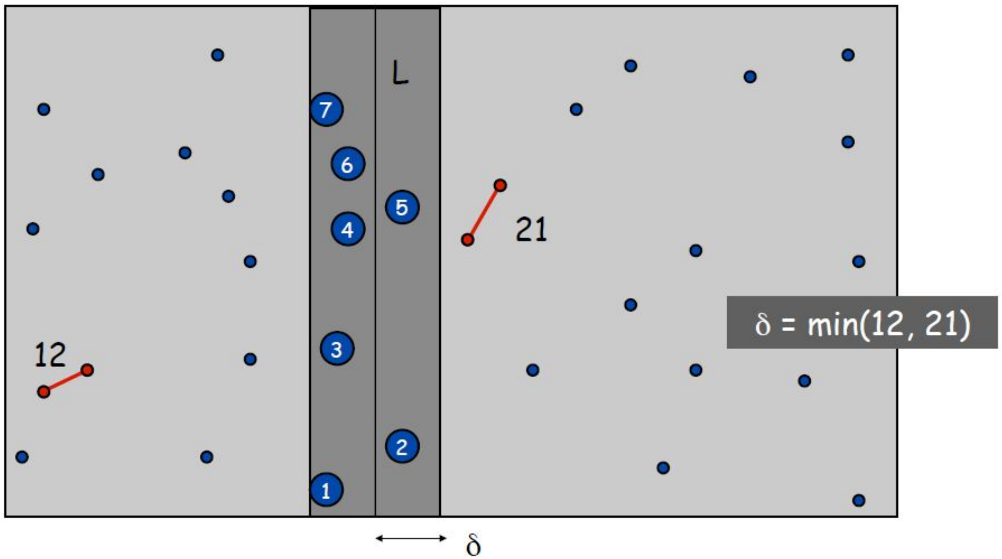
Resolución

Par de puntos más cercanos

Combinando las soluciones

Vamos a encontrar el par de puntos más cercanos, con un punto de cada lado de la recta, asumiendo una distancia < δ

- Seleccionamos los puntos ordenados por la coordenada **y** que caen en esa franja de 2δ
- Para cada punto en la franja, sólo se chequea la distancia con aquellos que están en las 7 posiciones siguientes en la lista



Resolución

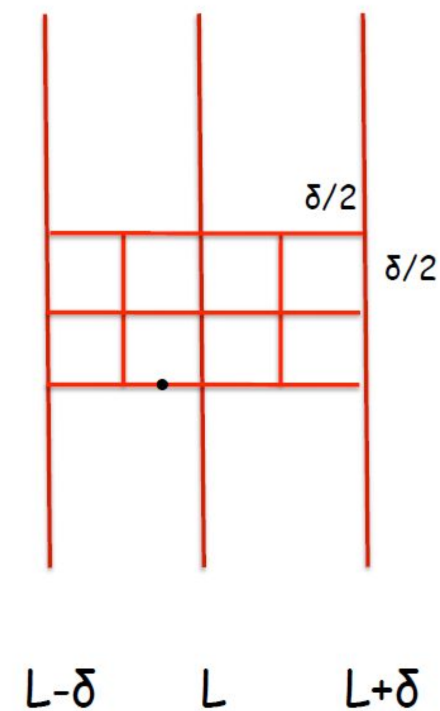
Par de puntos más cercanos

¿Por qué chequear las 7 posiciones siguientes es suficiente?

Considere 2 filas de cuatro $\delta/2$ x $\delta/2$ cuadrados dentro de la franja, comenzando en la coordenada y del punto.

A lo sumo, puede haber un punto en cada cuadrado!

Dado que la máxima distancia entre dos puntos en cada cuadrado es $(\sqrt{2}/2)\,\delta < \delta$



Resolución

Par de puntos más cercanos

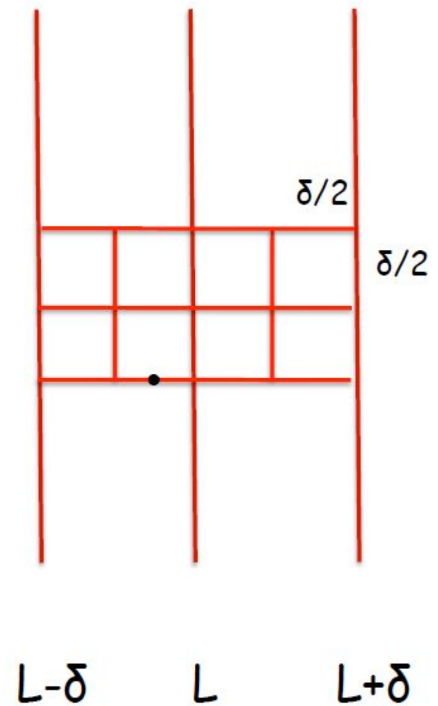
¿Por qué chequear las 7 posiciones siguientes es suficiente?

Considere 2 filas de cuatro δ/2 x δ/2 cuadrados dentro de la franja, comenzando en la coordenada *y* del punto.

A lo sumo, puede haber un punto en cada cuadrado!

Si un punto está más lejos de 7 índices, su distancia será > δ. De esta manera, combinar las soluciones, puede hacerse en tiempo lineal.

Cuando la coordenada *y* del próximo punto es > δ, se detiene.



Resolución

Par de puntos más cercanos

```
Closest-Pair (p1, …, pn)
{
   Compute separation line L such that half the points      ← O(n)
   are on one side and half on the other side.

   δ1 = Closest-Pair(left half)                             ← T(n/2)
   δ2 = Closest-Pair(right half)                            ← T(n/2)
   δ  = min(δ1, δ2)

   Delete all points further than δ from separation line L  ← O(n)

   Sort remaining points by y-coordinate.                   ← O(n log n)

   Scan points in y-order and compare distance between
   each point and next 11 neighbors. If any of these        ← O(n)
   distances is less than δ, update δ.

   return δ.
}
```

Resolución

Par de puntos más cercanos

```
Closest-Pair (p1, …, pn)
{
    Compute separation line L such that half the
points are on one side and half on the other side.

    δ1 = Closest-Pair(left half)
    δ2 = Closest-Pair(right half)
    δ = min(δ1, δ2)

    Scan points in δ strip by their y-order and compare
    distance between each point next neighbors until
    distance > δ.
    If any of these distances is less than δ, update δ.

    return δ.
}
```

← *O(n)*

← *T(n/2)*

← *T(n/2)*

← *O(n)*

Se puede mejorar la eficiencia del algoritmo si no se reordenan desde cero los puntos de la franja 2δ

¿Cómo? Haciendo que cada llamada recursiva devuelva los puntos ordenados tanto por la coordenada y como por la x (mezclando las listas ordenadas en O(n))

Tiempo de ejecución: O(n log n)

Bibliografía

Algorithm Design. Jon Kleinberg, Éva Tardos. Pearson-Addison Wesley. 1st Edition ISBN 0-321-29535-8. Lecture Slides disponible en: https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/.

Puntos más cercanos. Análisis y Diseño de Algoritmos. DECSAI Departamento de Ciencias de la computación e I.A. Universidad de Granada. Disponible en:
htt
po