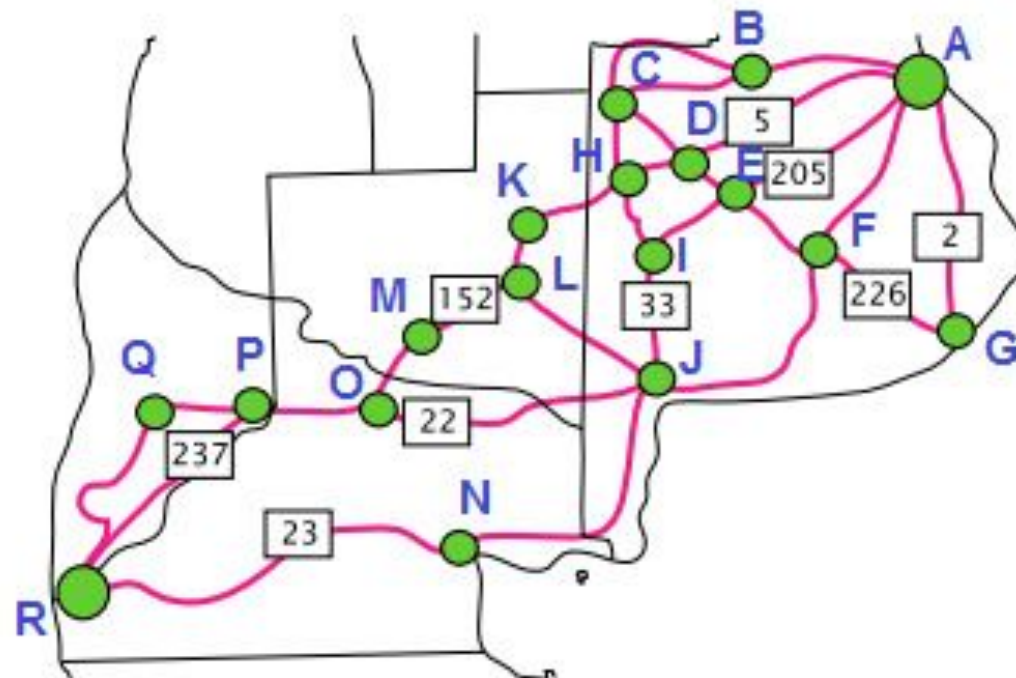


Grafos

1. Ejemplos y terminología
2. Representaciones
3. Recorridos

Grafos

Ejemplo 1: Mapa de ciudades

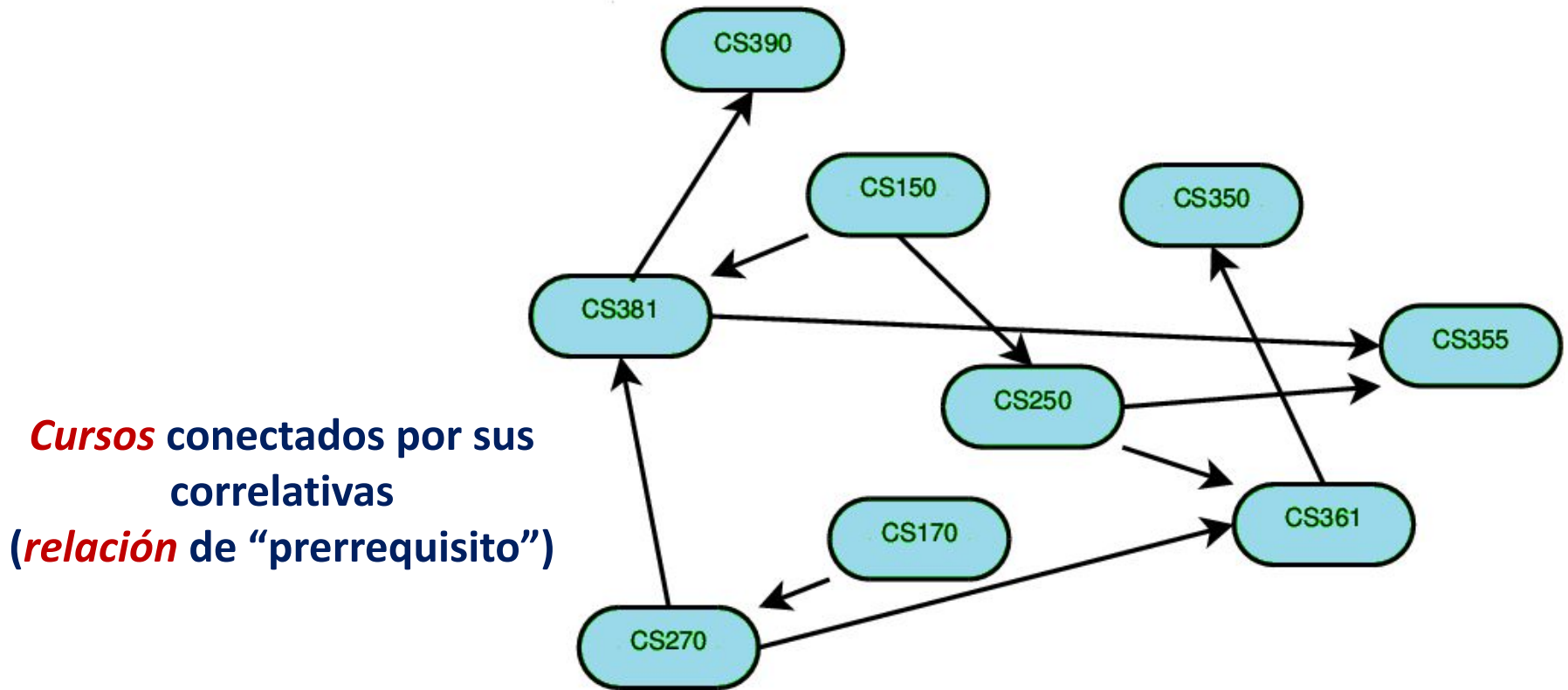


Ciudades conectadas
por **Rutas**

Rutas entre ciudades

Grafos

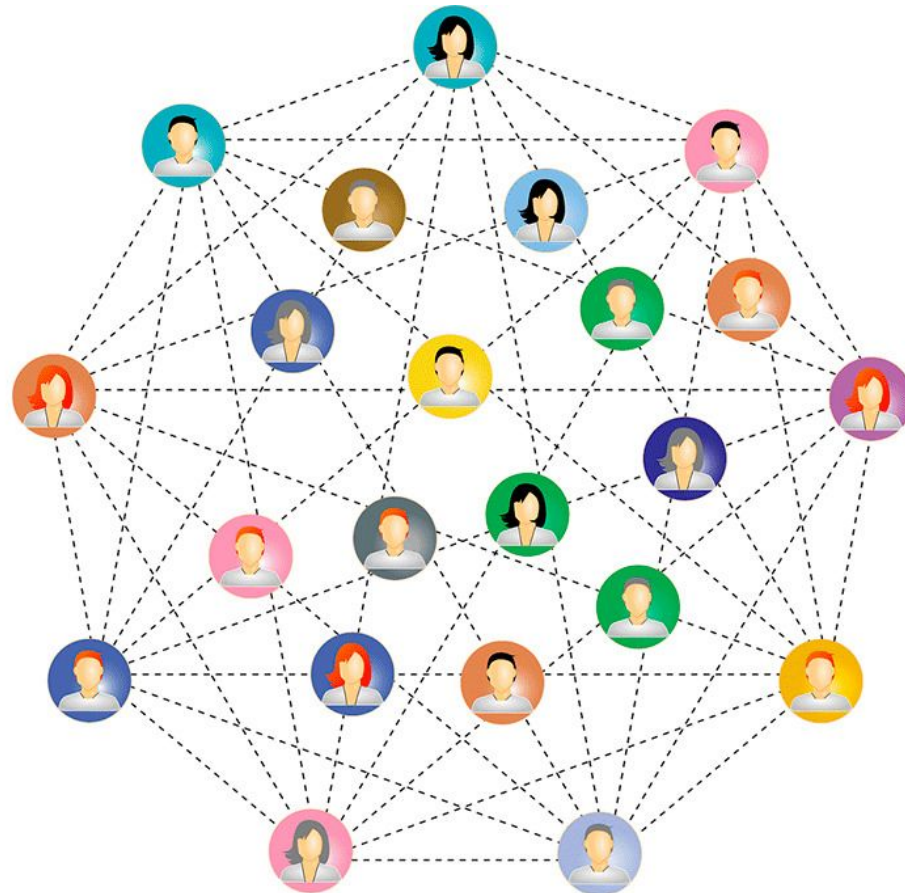
Ejemplo 2: Pre-requisitos de un curso



Grafos

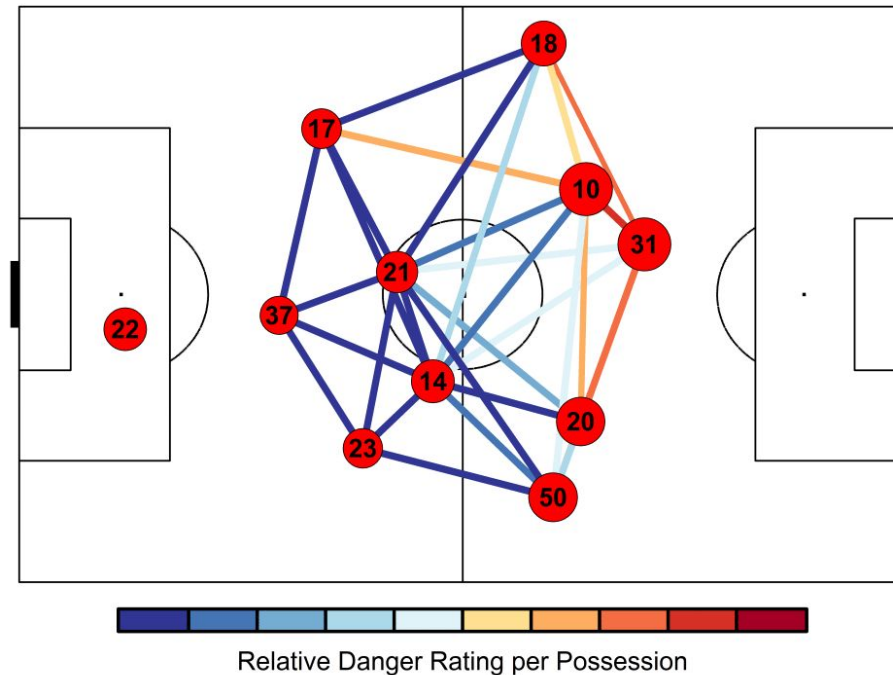
Ejemplo 3: Redes sociales

Personas conectadas
en una red social



Grafos

Ejemplo 4: red de pases de un partido de fútbol



Red de pases para el Barcelona y el AC Milan de un partido de Liga de Campeones. Las flechas más oscuras y gruesas indican más pases entre cada jugador.

Grafos

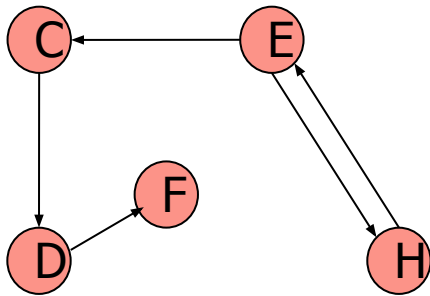
Terminología (1 de 9)

- **Grafo** → es una estructura de datos no lineal que consiste de un conjunto finito de vértices y un conjunto finito de aristas.
- **Grafo:** Un grafo es un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto de vértices o nodos y E es un conjunto de pares (u, v) , $u, v \in V$, llamados aristas o arcos.
- **Grafo dirigido:** la relación sobre V no es simétrica. Arista \equiv par ordenado (u, v) .
- **Grafo no dirigido:** la relación sobre V es simétrica. Arista \equiv par no ordenado $\{u, v\}$, $u, v \in V$ y $u \neq v$.

Grafos

Terminología (2 de 9)

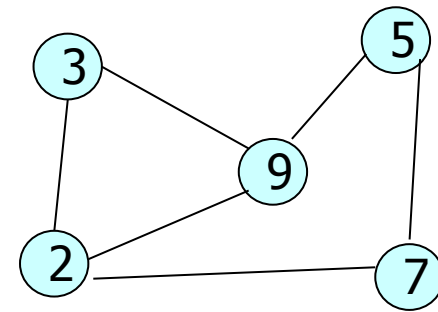
Ejemplos



Grafo dirigido $G(V,E)$

$$V = \{C,D,E,F,H\}$$

$$E = \{(C,D), (D,F), (E,C), (E,H), (H,E)\}$$



Grafo no dirigido $G(V,E)$

$$V = \{2,3,5,7,9\}$$

$$E = \{\{2,3\}, \{2,7\}, \{2,9\}, \{3,9\}, \{5,7\}, \{5,9\}\}$$

Dado un grafo $G(V,E)$, v es **adyacente** a u si existe una arista $(u,v) \in E$:

- en un grafo dirigido, $(u,v) \in E$, parte de u e incide en v , $u \rightarrow v$
- en un grafo no dirigido, $\{u,v\} \in E$, incide en los nodos u, v .

Grafos

Terminología (3 de 9)

Grado

□ *En grafos no dirigidos:*

- *El **grado** de un nodo: número de arcos que inciden en él; es el número de vértices adyacentes*

□ *En grafos dirigidos:*

- *existen el grado de salida (**outdegree**) y el grado de entrada (**indegree**).*

□ *el **outdegree** es el número de arcos que parten de él y*

□ *el **indegree** es el número de arcos que inciden en él.*

- *El **grado** del vértice será la suma de los grados de entrada y de salida.*

□ ***Grado de un grafo:** máximo grado de sus vértices.*

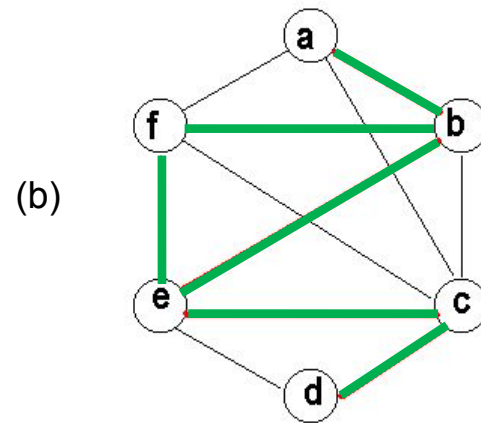
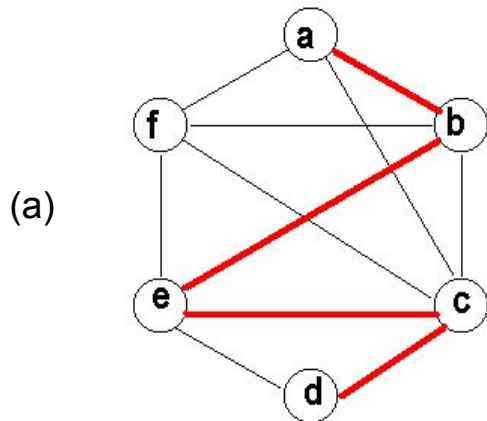
Grafos

Terminología (4 de 9)

▣ **Camino** desde $u \in V$ a $v \in V$: secuencia v_1, v_2, \dots, v_k tal que $u=v_1$, $v=v_k$, y $(v_{i-1}, v_i) \in E$, para $i = 2, \dots, k$.

Camino desde **a** a **d** $\rightarrow \langle a, b, e, c, d \rangle$

camino desde **a** a **d** $\rightarrow \langle a, b, e, f, b, e, c, d \rangle$



▣ **Longitud de un camino**: número de arcos del camino.

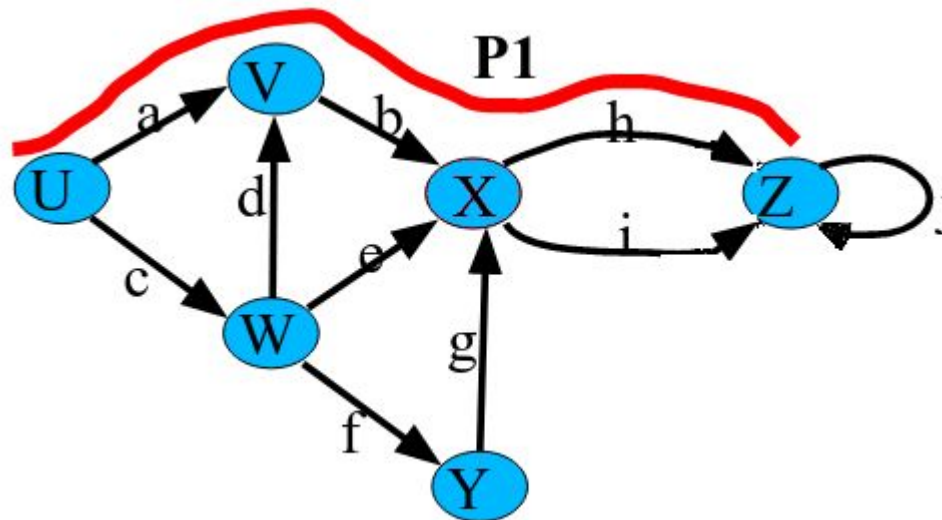
Ejemplos: long. del camino (a) desde **a** a **d** $\rightarrow 4$

long. del camino (b) desde **a** a **d** $\rightarrow 7$

Grafos

Terminología (5 de 9)

Camino simple: camino en el que todos sus vértices son distintos -excepto para caminos que son ciclo, donde el primero y el último son iguales-. $P1$ es un camino simple desde U a Z .



Ejemplos anteriores: (a) es camino simple, (b) no lo es.

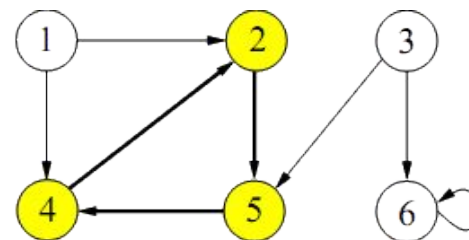
Grafos

Terminología (6 de 9)

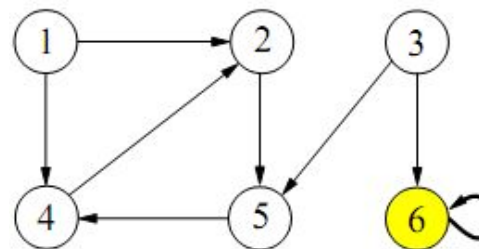
□ **Ciclo:** camino desde v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_1 = v_k$

Ej: $\langle 2, 5, 4, 2 \rangle$ es un ciclo de longitud 3.

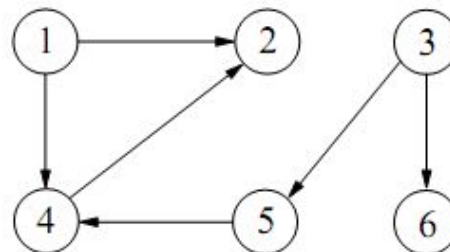
El ciclo es simple si el camino es simple.



□ **Bucle:** ciclo de longitud 1.



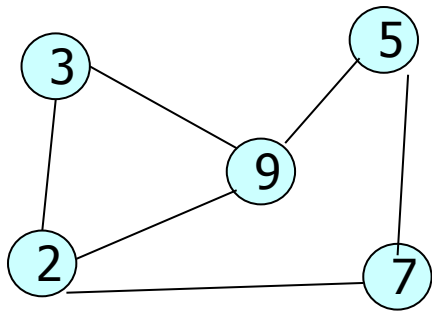
□ **Grafo acíclico:** grafo sin ciclos.



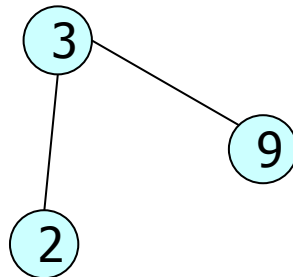
Grafos

Terminología (7 de 9)

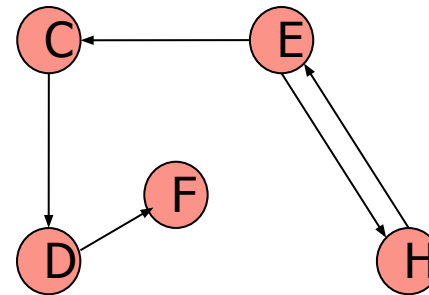
*Dado un grafo $G=(V, E)$, se dice que $G'=(V', E')$ es un **subgrafo** de G , si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.*



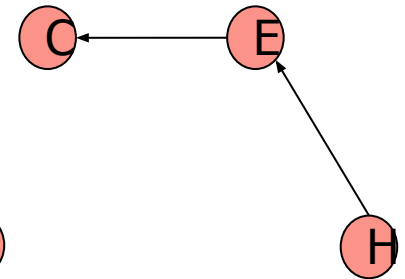
$G = (V, E)$



$G' = (V', E')$



$G = (V, E)$

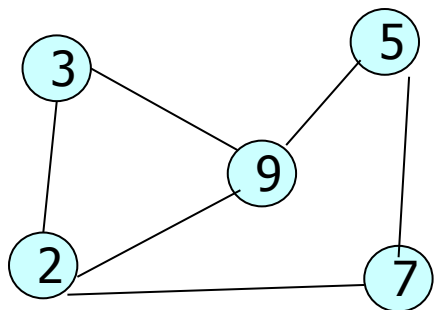


$G' = (V', E')$

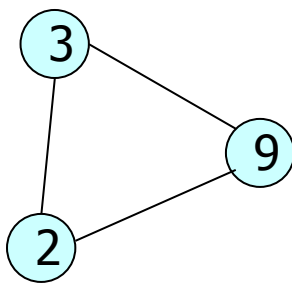
Grafos

Terminología (8 de 9)

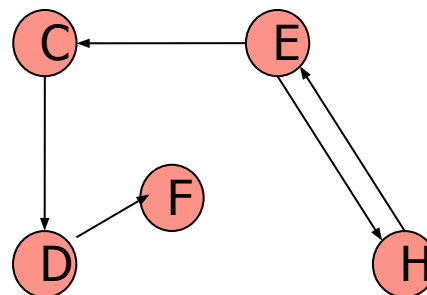
Un subgrafo inducido por $V' \subseteq V: G' = (V', E')$ tal que
$$E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}.$$



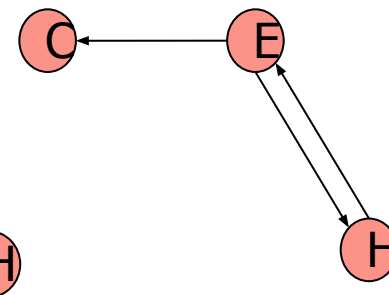
$G = (V, E)$



$G' = (V', E')$



$G = (V, E)$

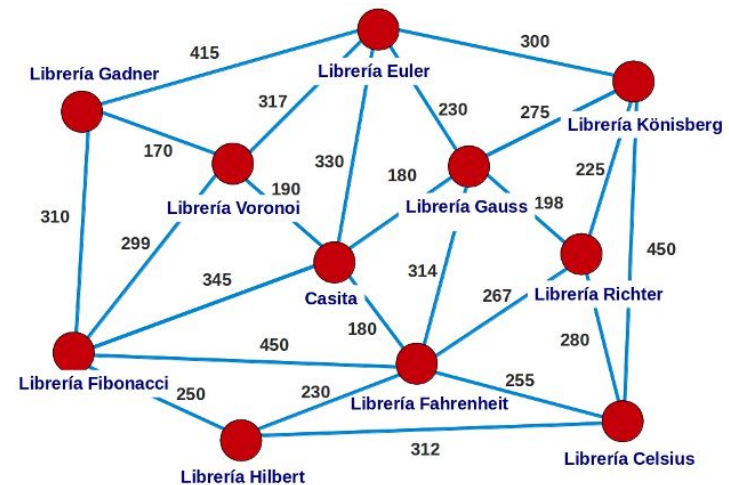
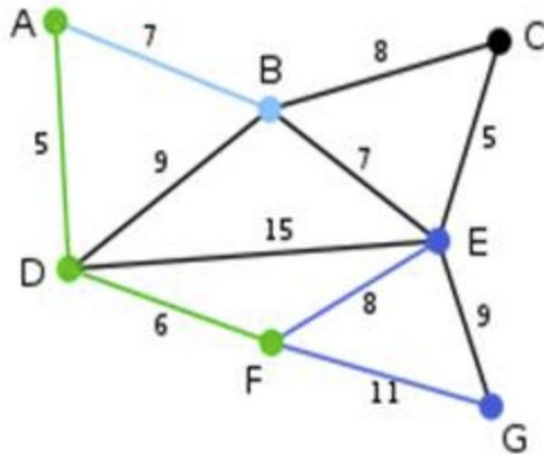


$G' = (V', E')$

Grafos

Terminología (9 de 9)

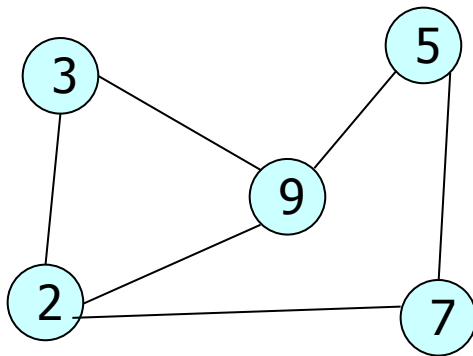
□ En un grafo **ponderado**, **pesado** o **con costos**, cada arco o arista tiene asociado un valor o etiqueta



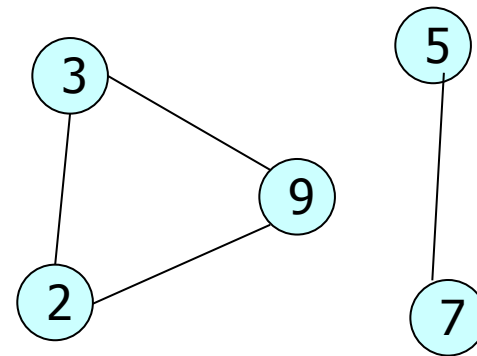
Grafos no dirigidos

Conectividad (1 de 3)

□ Un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices.



Conexo

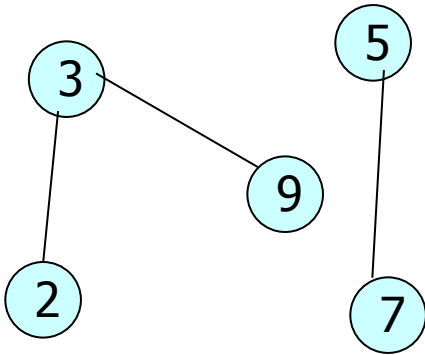


No Conexa

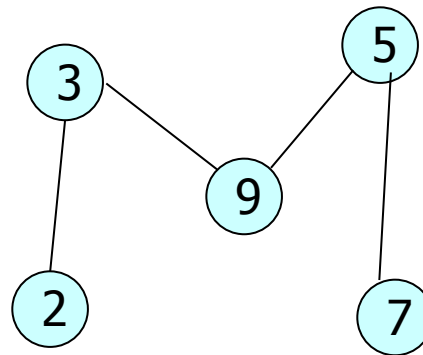
Grafos no dirigidos

Conectividad (2 de 3)

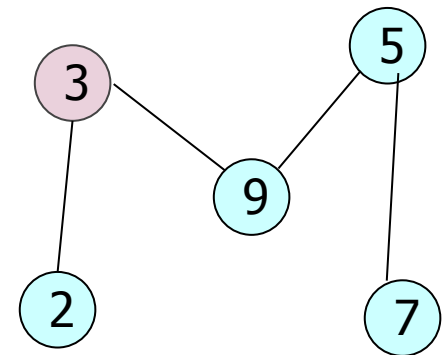
- *Un **bosque** es un grafo sin ciclos.*
- *Un **árbol libre** es un grafo sin ciclo y conexo.*
- *Un **árbol** es un grafo conexo y sin ciclo en el que un nodo se ha designado como raíz.*



Bosque



Árbol libre



Árbol

Grafos no dirigidos

Conectividad (2 de 3)

*Sea G un grafo **no dirigido** con n vértices y m arcos, entonces:*

$$\sum_{v \in G} \text{grado}(v) = 2*m$$

y siempre: $m \leq (n(n-1))/2$*

Si G es un árbol: $m=n-1$

Si G es conexo: $m \geq n-1$

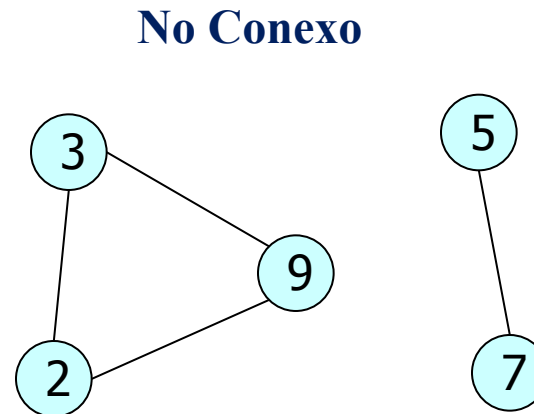
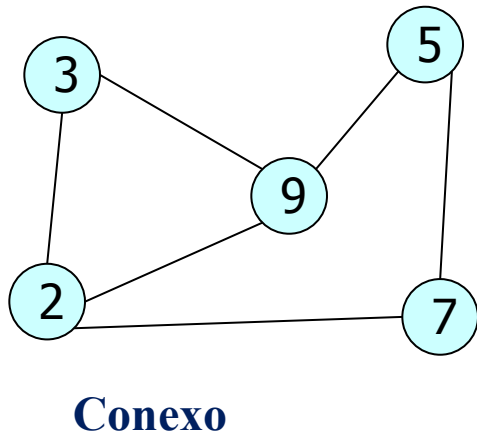
Si G es un bosque: $m \leq n-1$

Grafos no dirigidos

Componentes conexas

*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga. Es un **subgrafo conexo maximal**.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*

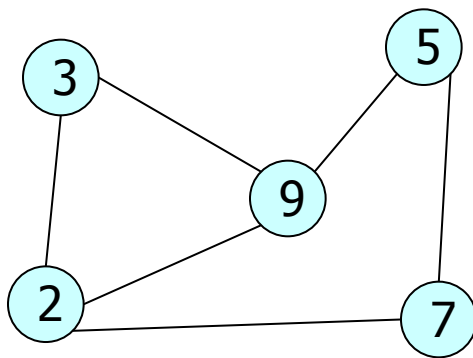


Grafos no dirigidos

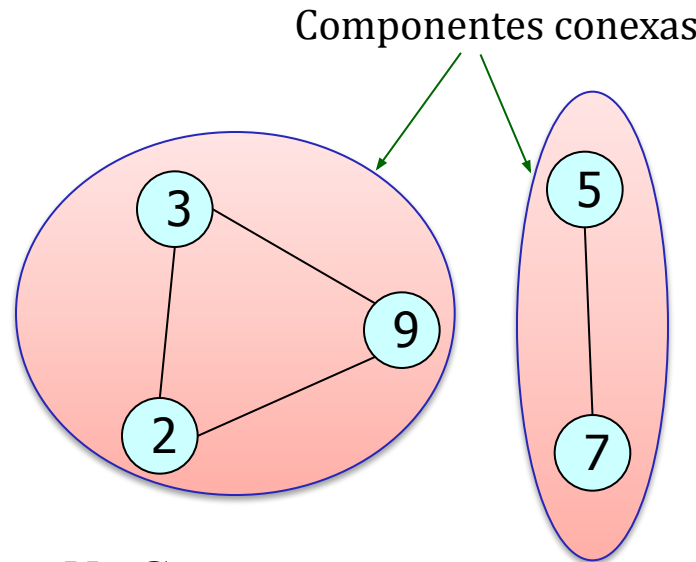
Componentes conexas

*En un grafo no dirigido, una **componente conexa** es un subgrafo conexo tal que no existe otra componente conexa que lo contenga. Es un subgrafo conexo maximal.*

*Un grafo no dirigido es **no conexo** si está formado por varias componentes conexas.*



Conexo

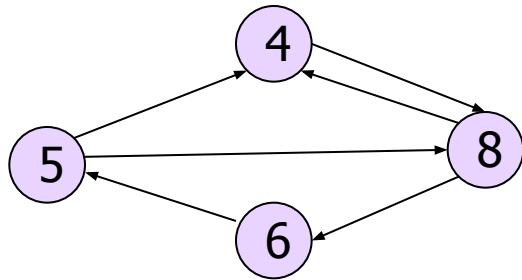


No Conexa

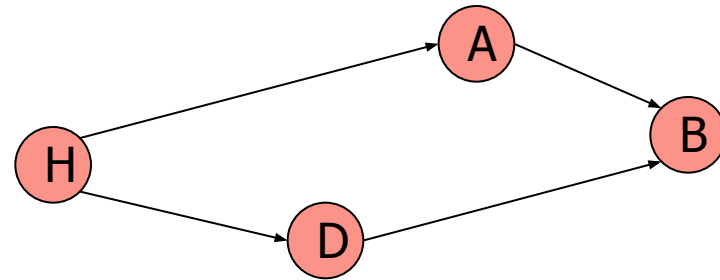
Grafos dirigidos

Conectividad

- v es **alcanzable desde** u , si existe un camino de u a v .
- Un grafo dirigido se denomina **fuertemente conexo** si existe un camino desde cualquier vértice a cualquier otro vértice del grafo.



Fuertemente Conexo



No Fuertemente Conexo
Débilmente Conexo

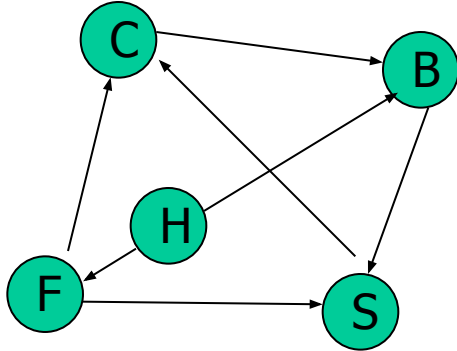
- Si un grafo dirigido no es fuertemente conexo, pero el grafo subyacente (sin sentido en los arcos) es conexo, el grafo es **débilmente conexo**.

Grafos dirigidos

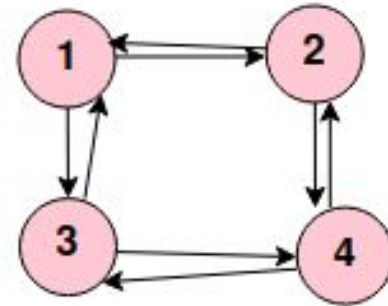
Componentes Conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexo



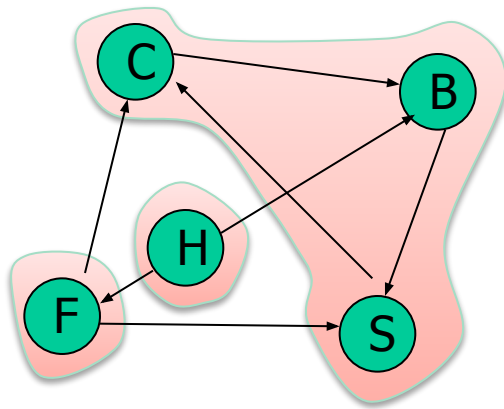
Fuertemente Conexo

Grafos dirigidos

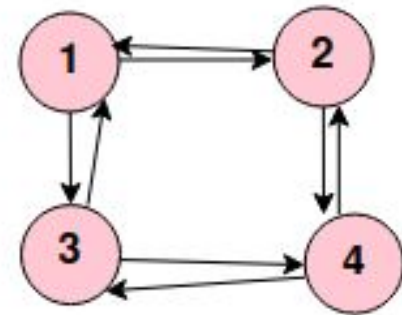
Componentes Conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*



No Fuertemente Conexo



Fuertemente Conexa

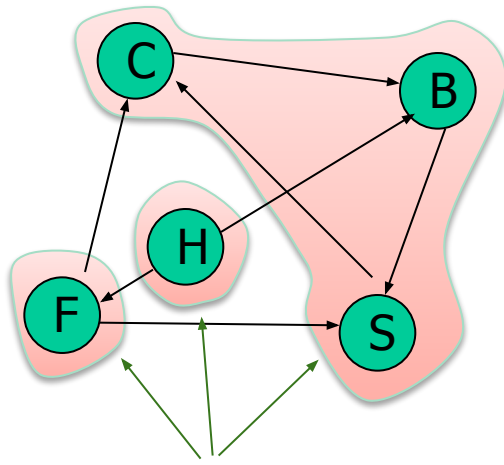
Grafos dirigidos

Componentes Conexas

*En un grafo dirigido, una **componente fuertemente conexa**, es el máximo subgrafo fuertemente conexo.*

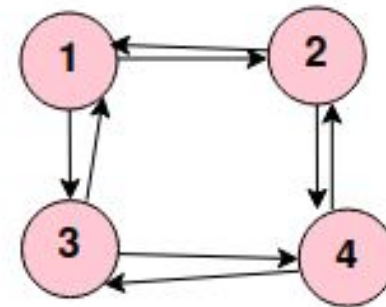
*Un grafo dirigido es **no fuertemente conexo** si está formado por varias componentes fuertemente conexas.*

No Fuertemente Conexo



Componentes fuertemente
conexas

Fuertemente Conexo



Grafos

1. Ejemplos y terminología
- 2. Representaciones**
3. Recorridos

Agenda - Grafos

- Representaciones
 - Matriz de Adyacencias
 - Lista de Adyacencias

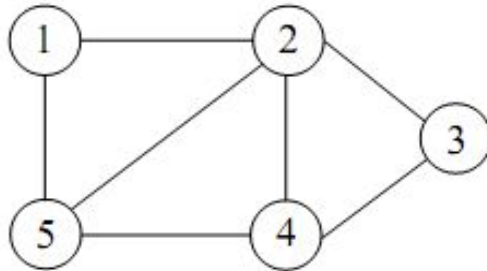
Representaciones

Matriz de Adyacencias

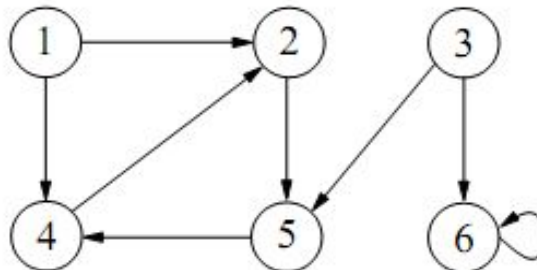
□ $G=(V,E)$: matriz A de dimensión $|V| \times |V|$.

□ Valor a_{ij} de la matriz:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Representaciones

Matriz de Adyacencias

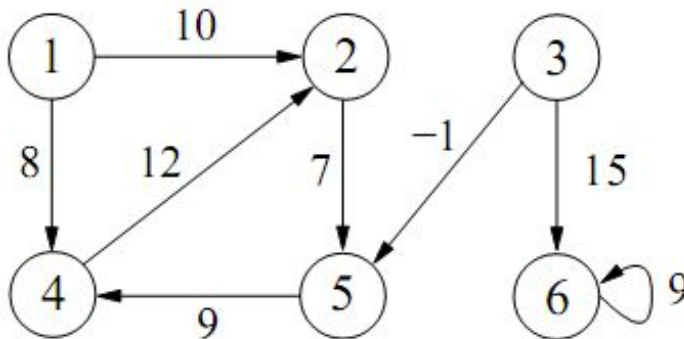
- ▣ *Costo espacial: $O(|V|^2)$*
- ▣ *Representación es útil para grafos con un número de vértices pequeño, o grafos densos ($|E| \approx |V| \times |V|$)*
- ▣ *Comprobar si una arista (u,v) pertenece a $E \rightarrow$ consultar posición $A(u,v)$*
- ▣ *Costo de tiempo: $T(|V|, |E|) = O(1)$*

Representaciones

Matriz de Adyacencias

- Representación aplicada a Grafos pesados
- El peso de (i,j) se almacena en $A(i,j)$

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 \text{ o } \infty & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6
1	0	10	0	8	0	0
2	0	0	0	0	7	0
3	0	0	0	0	-1	15
4	0	12	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0
6	0	0	0	0	0	9

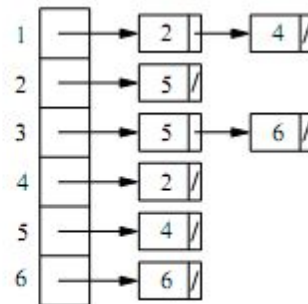
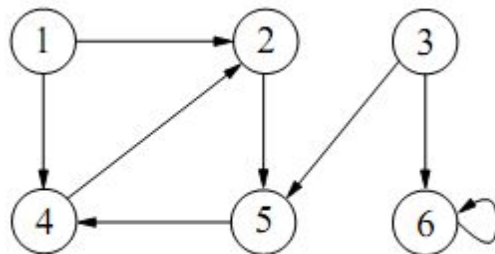
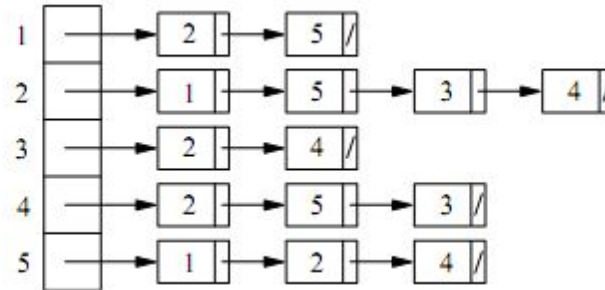
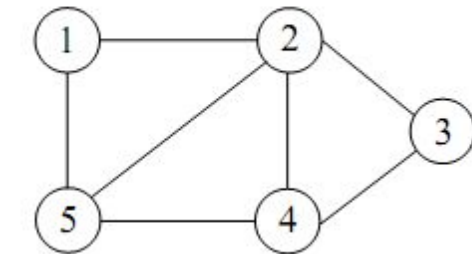
Representaciones

Lista de Adyacencias

□ $G=(V,E)$: vector de tamaño $|V|$

□ En la posición i de $V \rightarrow$ referencia a una lista enlazada de elementos (lista de adyacencia)

Los elementos de la lista representan los vértices adyacentes al vértice que está en i



Representaciones

Lista de Adyacencias

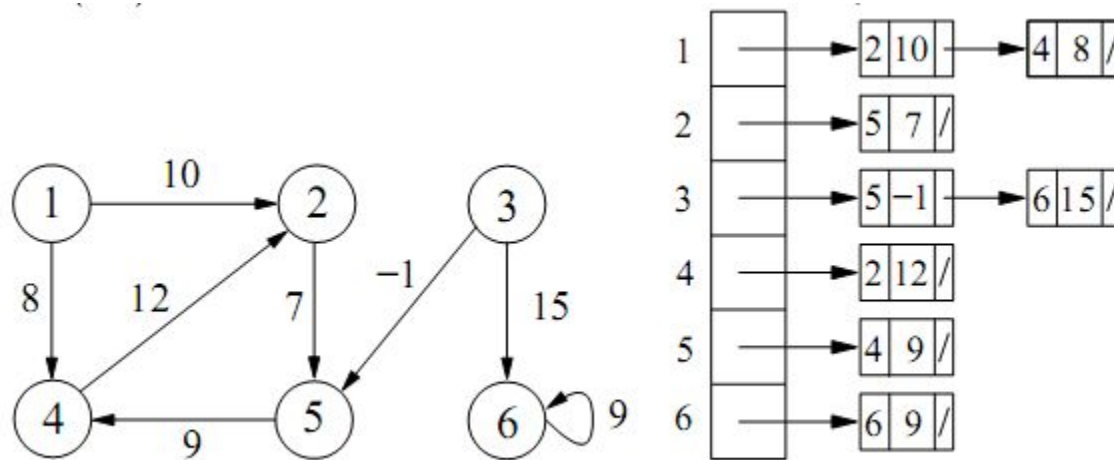
- ▢ Si G es dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $|E|$
- ▢ Si G es no dirigido, la suma de las longitudes de las listas de adyacencia será $2|E|$.
- ▢ **Costo espacial:** $O(|V| + |E|)$ -sea dirigido o no-
- ▢ Representación apropiada para grafos con $|E|$ menor que $|V|^2$.
- ▢ Desventaja: si se quiere comprobar si una arista (u,v) pertenece a $E \Rightarrow$ buscar v en la lista de adyacencia de u .
- ▢ **Costo de tiempo:** $T(|V|, |E|)$ será $O(\text{Grado } G) \subseteq O(|V|)$

Representaciones

Lista de Adyacencias

□ *Representación aplicada a Grafos pesados*

□ *El **peso de (u,v)** se almacena en la lista de adyacencia de u .*

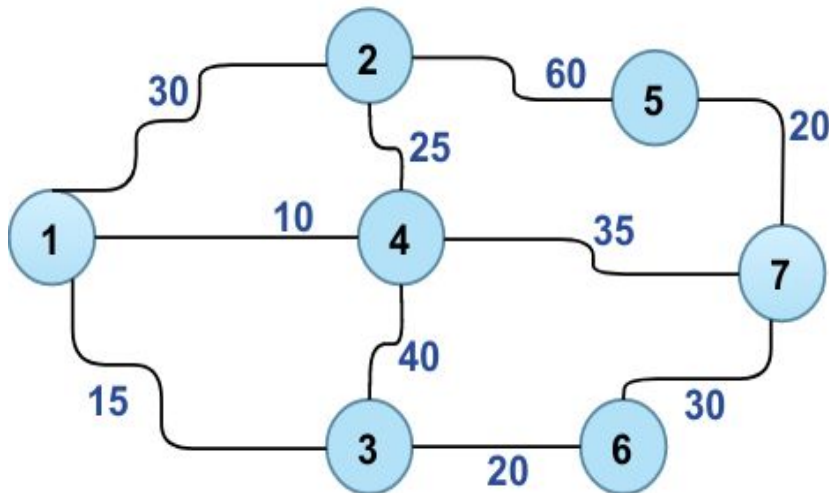


Problema: El Guía de Turismo



El señor H es un guía de turismo de la ciudad de Buenos Aires. Su trabajo consiste en mostrar a grupos de turistas diferentes **puntos de interés** de la ciudad.

Estos puntos de interés están **conectados por rutas en ambos sentidos**. Dos puntos de interés vecinos tienen un servicio de bus que los conecta, con una limitación en el **número máximo de pasajeros** que puede transportar. No es siempre posible para el señor H transportar de una única vez a todos los turistas a un destino en particular.



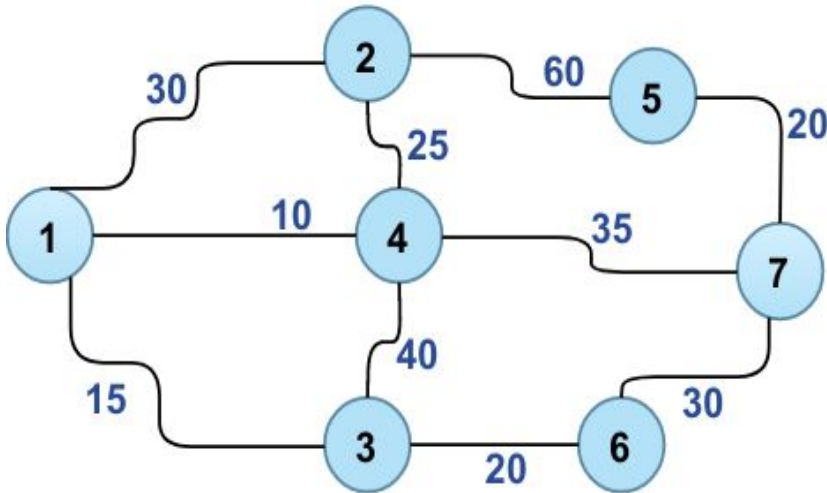
Por ejemplo, consideremos el siguiente mapa con **7 puntos de interés**, donde las aristas representan las rutas y **el peso de ellas representa el límite máximo de pasajeros a transportar por el servicio de bus**. Su misión es indicarle al Sr. H cuál es el menor número de viajes que deberá realizar para llevar al grupo de turistas de un origen a un destino.

Problema: El Guía de Turismo



El señor H es un guía de turismo de la ciudad de Buenos Aires. Su trabajo consiste en mostrar a grupos de turistas diferentes **puntos de interés** de la ciudad.

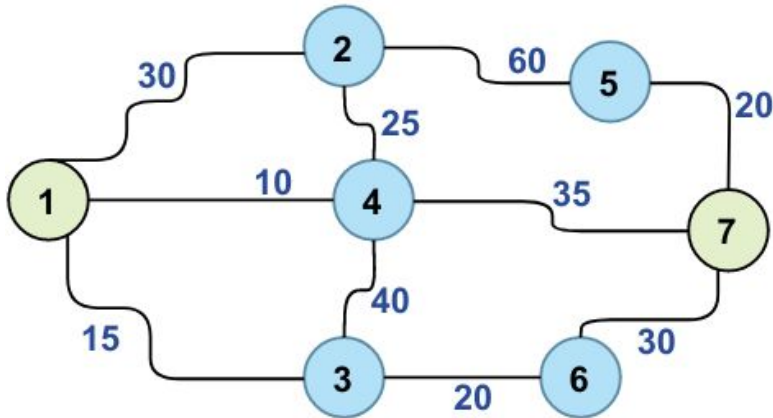
Estos puntos de interés están **conectados por rutas en ambos sentidos**. Dos puntos de interés vecinos tienen un servicio de bus que los conecta, con una limitación en el **número máximo de pasajeros** que puede transportar. No es siempre posible para el señor H transportar de una única vez a todos los turistas a un destino en particular.



Por ejemplo, consideremos el siguiente mapa con **7 puntos de interés**, donde las aristas representan las rutas y **el peso de ellas representa el límite máximo de pasajeros (capacidad del ómnibus)**. Su misión es indicarle al Sr. H qué camino debe tomar para llevar un grupo de turistas de un origen a un destino y haciendo el menor número de viajes.

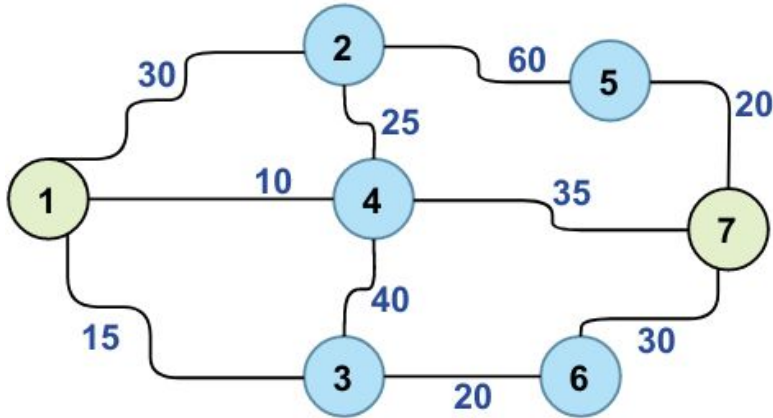
Supongamos que el señor H debe transportar a **99 turistas** del punto **1** al punto **7**.
Cuáles son los recorridos posibles?Cuál implica realizar el menor número de viajes?

Problema: El Guía de Turismo



Puntos de interés	Cant turistas x viaje	Cant. viajes
1 2 4 3 6 7	20	6
1 2 4 7	25	5
1 2 5 7	20	6
1 3 4 2 5 7	15	8
1 3 4 7	15	8
1 3 6 7	15	8
1 4 2 5 7	10	11
1 4 3 6 7	10	11
1 4 7	10	11

Problema: El Guía de Turismo



Puntos de interés	Cant turistas x viaje	Cant. viajes
1 2 4 3 6 7	20	6
1 2 4 7	25	5
1 2 5 7	20	6
1 3 4 2 5 7	15	8
1 3 4 7	15	8
1 3 6 7	15	8
1 4 2 5 7	10	11
1 4 3 6 7	10	11
1 4 7	10	11

Entonces, para transportar a los **99 turistas** del punto 1 al punto 7, se necesitarán 5 viajes, eligiendo la ruta: **1 → 2 → 4 → 7**

Grafos

Recorrido en profundidad: DFS

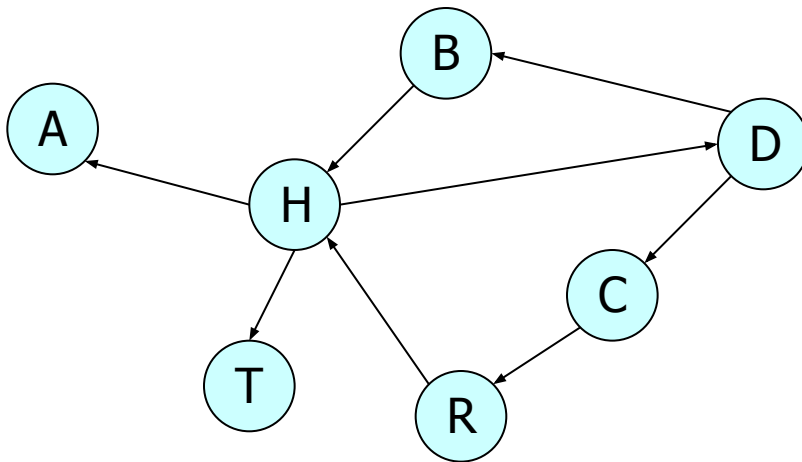
Generalización del recorrido preorden de un árbol

Estrategia:

- *Partir de un vértice determinado v .*
- *Cuando se visita un nuevo vértice, explorar cada camino que salga de él*
- *Hasta que no se haya finalizado de explorar uno de los caminos no se comienza con el siguiente*
- *Un camino deja de explorarse cuando se llega a un vértice ya visitado -o sin adyacentes-.*
- *Si existían vértices no alcanzables desde v el recorrido queda incompleto; entonces, se debe seleccionar algún vértice como nuevo vértice de partida, y repetir el proceso.*

Grafos

Recorrido en profundidad: DFS



Si tomamos como vértice de partida a **D**

Se Muestra:

D C R H T A B

Grafos

Recorrido en profundidad: DFS

Esquema recursivo: dado $G = (V, E)$

- 1. Marcar todos los vértices como no visitados.*
 - 2. Elegir vértice u como punto de partida.*
 - 3. Marcar u como visitado.*
 - 4. $\forall v$ adyacente a $u, (u,v) \in E$, si v no ha sido visitado, repetir recursivamente (3) y (4) para v .*
- Finalizar cuando se hayan visitado todos los nodos alcanzables desde u .*
 - Si desde u no fueran alcanzables todos los nodos del grafo: volver a (2), elegir un nuevo vértice de partida v no visitado, y repetir el proceso hasta que se hayan recorrido todos los vértices.*

Recorrido en profundidad: DFS

dfs (grafo)

inicializar **marca** en false (arreglo de booleanos);

para cada vértice **v** del grafo

si **v** no está visitado

dfs(v);

dfs (v: vértice)

marca[v] := visitado;

para cada nodo **w** adyacente a **v**

si **w** no está visitado

dfs(w);

Recorrido DFS: Tiempo de ejecución

- *El método $\mathbf{dfs(v)}$ se aplica únicamente sobre vértices no visitados
→ sólo una vez sobre cada vértice.*
- *$\mathbf{dfs(v)}$ depende del número de vértices adyacentes que tenga
(longitud de la lista de adyacencia).
→ el tiempo de todas las llamadas a $\mathbf{dfs(v)}$: $O(|E|)$*
- *añadir el tiempo asociado al bucle de $\mathbf{main_dfs(grafo)}$: $O(|V|)$
⇒ Tiempo del recorrido en profundidad es $O(|V| + |E|)$.*

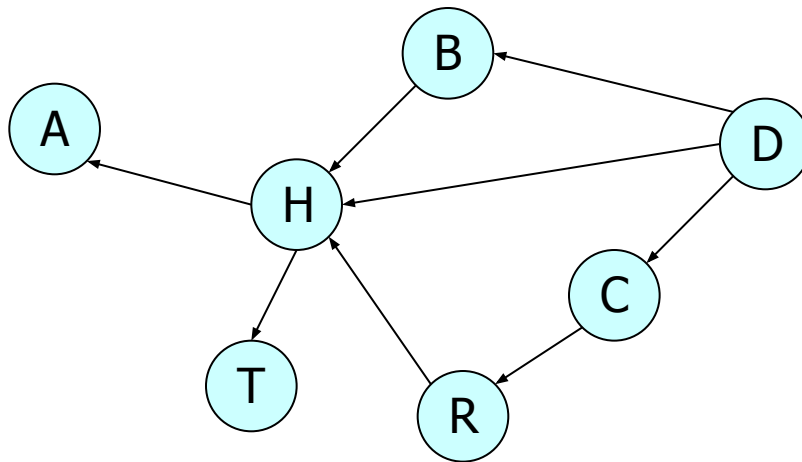
Recorrido en amplitud: BFS

→ *Generalización del recorrido por niveles de un árbol.*

Estrategia:

- *Partir de algún vértice u , visitar u y, después, visitar cada uno de los vértices adyacentes a u .*
- *Repetir el proceso para cada nodo adyacente a u , siguiendo el orden en que fueron visitados.*

Recorrido en amplitud: BFS



Si tomamos como vértice de partida a **D**

Se Muestra:

D C H B R T A

Cola:

D C H B R T A

Recorrido en amplitud: BFS

Esquema iterativo: dado $G = (V, E)$

- 1. Encolar el vértice origen u .*
- 2. Marcar el vértice u como visitado.*
- 3. Desencolar u de la cola*
- 4. \forall $adyacente$ a $u, (u, v) \in E$,
si v no ha sido visitado encolar y visitar v*

Si desde u no fueran alcanzables todos los nodos del grafo: volver a (1), elegir un nuevo vértice de partida no visitado, y repetir el proceso hasta que se hayan recorrido todos los vértices

Costo $T(|V|, |E|)$ es de $O(|V| + |E|)$