# Colas de prioridad

# Agenda

- Aplicaciones
- Definición
- Distintas implementaciones
- Heap Binaria
  - Propiedad Estructural
  - Propiedad de Orden
  - Implementación
- Operaciones: Insert, DeleteMin, Operaciones adicionales
- Construcción de una Heap: operación BuildHeap
  - Eficiencia
- HeapSort

# Aplicaciones

- Cola de impresión
- Sistema Operativo
- Algoritmos de Ordenación

# Definición

Una cola de prioridad es una estructura de datos que permite al menos dos operaciones:

- Insert

  Inserta un elemento en la estructura

- DeleteMin

  Encuentra, recupera y elimina el elemento mínimo

# Implementaciones

- ✔ Lista ordenada
  - Insert tiene O(N) operaciones
  - DeleteMin tiene O(1) operaciones

- ✔ Lista no ordenada
  - Insert tiene O(1) operaciones
  - DeleteMin tiene O(N) operaciones

- ✔ Árbol Binario de Búsqueda
  - Insert y DeleteMin tienen en promedio O(log N) operaciones

# Heap Binaria

-  Es una implementación de colas de prioridad que no usa punteros y permite implementar ambas operaciones con O(log N) operaciones en el peor caso
-  Cumple con dos propiedades:
  - ✔ Propiedad estructural
  - ✔ Propiedad de orden

# Propiedad estructural

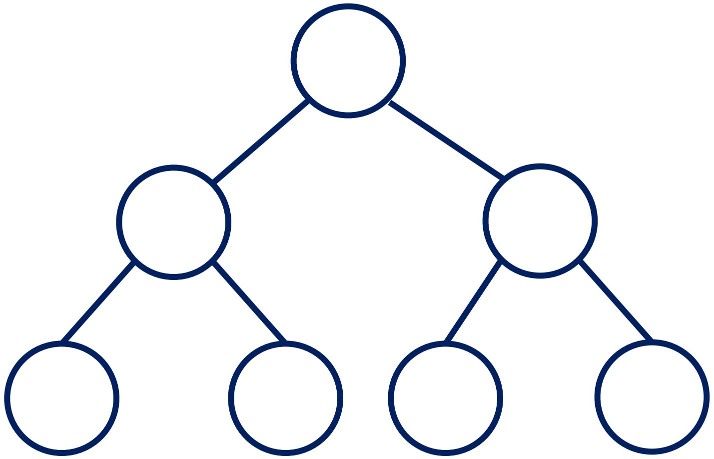
***Una heap es un árbol binario completo***

- ✔ En un árbol binario lleno de altura *h*, los nodos internos tienen exactamente 2 hijos y las hojas tienen la misma profundidad

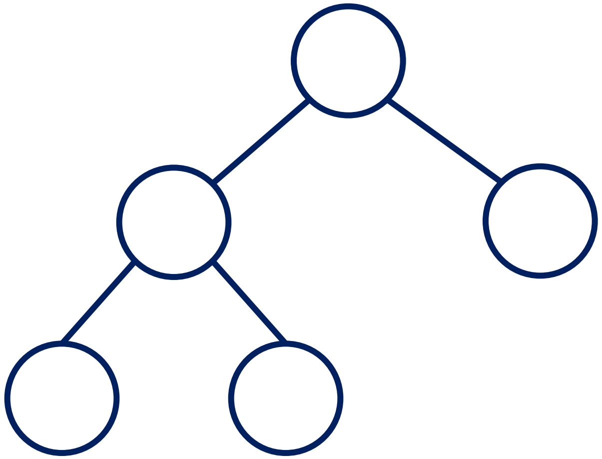
- ✔ Un árbol binario completo de altura *h* es un árbol binario lleno de altura *h-1* y en el nivel *h*, los nodos se completan de izquierda a derecha

# Propiedad estructural (cont.)

Árbol binario lleno

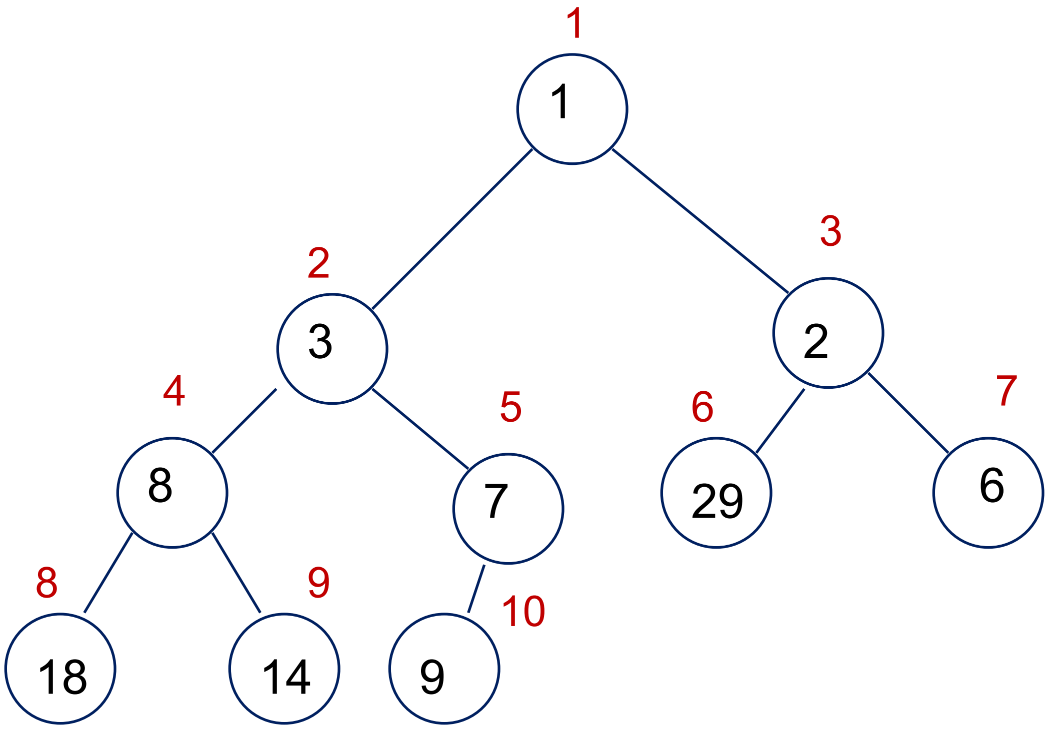


Árbol binario completo



# Propiedad estructural (cont.)

## Ejemplo:



# Propiedad estructural (cont.)

✔ El número de nodos *n* de un árbol binario completo de altura *h*, satisface:

$$2^h \leq n \leq (2^{h+1}-1)$$

Demostración:

- Si el árbol es lleno, $n= 2^{h+1}-1$
- Si no, el árbol es lleno en la altura *h-1* y tiene por lo menos un nodo en el nivel *h:*

  $n= 2^{h-1+1}-1+1=2^h$

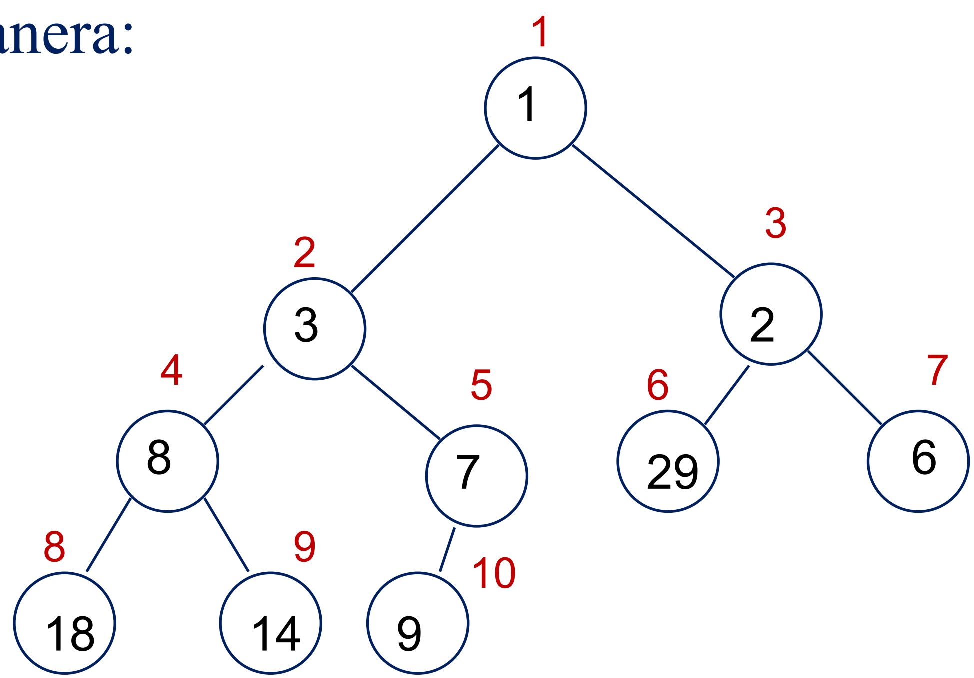
La altura *h* del árbol es de **O(log n)**

# Propiedad estructural (cont.)

- Dado que un árbol binario completo es una estructura de datos regular, puede almacenarse en un arreglo, tal que:
  - ✔ La raíz está almacenada en la posición 1
  - ✔ Para un elemento que está en la posición i:
    - El hijo izquierdo está en la posición 2*i
    - El hijo derecho está en la posición 2*i + 1
    - El padre está en la posición $\lfloor i/2 \rfloor$

# Propiedad estructural (cont.)

El árbol que vimos como ejemplo, puede almacenarse de la siguiente manera:




| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 8 | 7 | 29 | 6 | 18 | 14 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

# Propiedad de orden

- MinHeap
  - El elemento mínimo está almacenado en la raíz
  - El dato almacenado en cada nodo es menor o igual al de sus hijos

- MaxHeap
  - Se usa la propiedad inversa

# Implementación de Heap

Una heap H consta de:

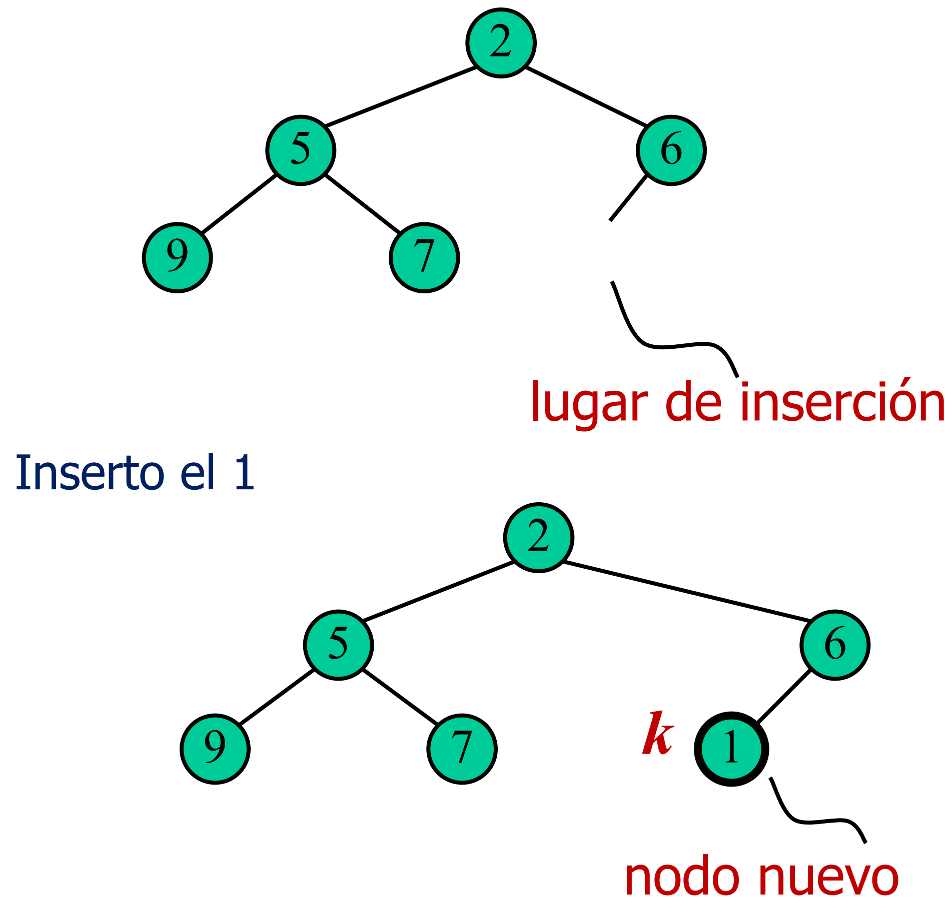
- *Un arreglo que contiene los datos*
- *Un valor que me indica el número de elementos almacenados*

Ventaja:

- ✔ No se necesita usar punteros
- ✔ Fácil implementación de las operaciones

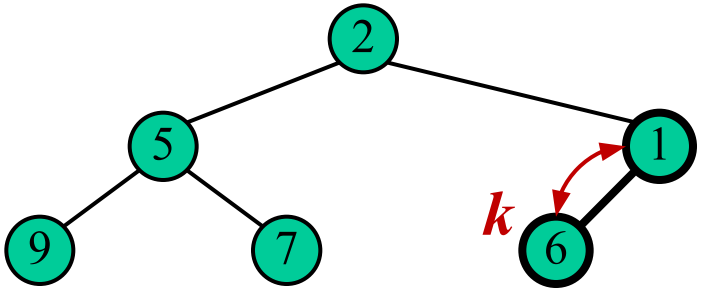
# Operación: Insert

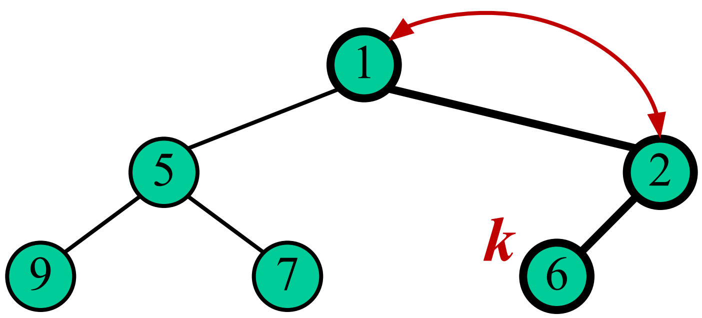
- El dato se inserta como último ítem en la heap
  - La propiedad de la heap puede ser violada
- Se debe hacer un filtrado hacia arriba para restaurar la propiedad de orden



# Insert: Filtrado hacia arriba (Percolate Up)

- El filtrado hacia arriba restaura la propiedad de orden intercambiando ***k*** a lo largo del camino hacia arriba desde el lugar de inserción
- El filtrado termina cuando la clave ***k*** alcanza la raíz o un nodo cuyo padre tiene una clave menor
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene *O(log n)* intercambios



# Operación: insert (Versión 1)

```
insert (Heap h, Comparable x)  {

    h.tamaño  =  h.tamaño + 1;
    n  =  h.tamaño;

    while ( n / 2 > 0 & h.dato[n/2]  > x ) {
         h.dato[n]  = h.dato[n/2];
         n = n/2;
         }
    h.dato[n] = x;    // ubicación correcta de "x"

}  // end del insert
```

*Filtrado hacia arriba o Percolate_up*

# Operación: percolate_up

```
percolate_up (Heap h, Integer i)  {

    temp = h.dato[i];
    while (i/2 > 0 & h.dato[i/2] > temp ) {
        h.dato[i] = h.dato[i/2];
        i = i/2;
        }
    h.dato[ i ] = temp;   //  ubicación correcta del elemento a filtrar

}  // end del percolate_up
```

# Operación: insert (Versión 2)

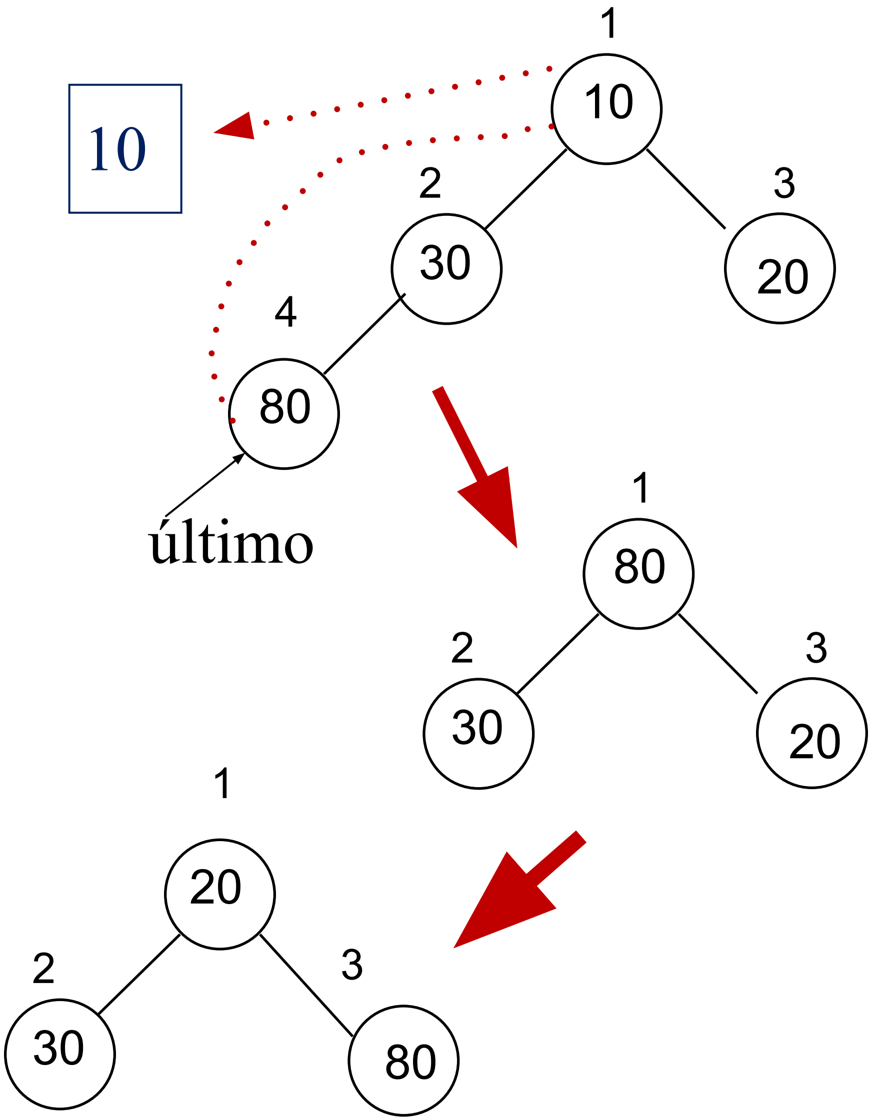
```
insert (Heap h, Comparable x)  {

    h.tamaño =  h.tamaño + 1;
    h.dato[h.tamaño] = x;
    percolate_up ( h , h.tamaño )

}  // end del insert
```

# Operación: DeleteMin

- Guardo el dato de la raíz

- Elimino el último elemento y lo almaceno en la raíz

- Se debe hacer un filtrado hacia abajo para restaurar la propiedad de orden



# DeleteMin: Filtrado hacia abajo (Percolate Down)

- Es similar al filtrado hacia arriba
- El filtrado hacia abajo restaura la propiedad de orden intercambiando el dato de la raíz hacia abajo a lo largo del camino que contiene los hijos mínimos
- El filtrado termina cuando se encuentra el lugar correcto dónde insertarlo
- Ya que el algoritmo recorre la altura de la heap, tiene *O(log n)* operaciones de intercambio.

# Operación: delete_min (Versión 1)

```
delete_min ( Heap h, Comparable e)  {
 if (not esVacía(h) ) {
       e := h.dato[1];
       candidato := h.dato[ h.tamaño ];
       h.tamaño :=  h.tamaño  - 1;
       p := 1;
       stop_perc := false;
       while ( 2* p <= h.tamaño )  and ( not stop_perc) {
            h_min := 2 * p;   // buscar el hijo con clave menor
            if h_min <> h.tamaño   //como existe el hijo derecho comparo a ambos
                        if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )
                                 h_min := h_min + 1
            if  candidato  > h.dato [h_min] { //  percolate_down
                                 h.dato [p] := h.dato[ h_min ];
                                 p := h_min;
                                    }
            else    stop_perc := true;
       }
      h.dato[p] := candidato;
 }
}  // end del delete_min
```

***Filtrado hacia abajo o Percolate_down***

# Operación: percolate_down

```
percolate_down ( Heap h, int p) {

      candidato := h.dato[ p ]
      stop_perc := false;
      while (  2* p <= h.tamaño )  and ( not stop_perc) {
            h_min := 2 * p;   //  buscar el hijo con clave menor
            if h_min <> h.tamaño   then
            if ( h.dato[h_min +1] < h.dato[h_min] )
                                    h_min := h_min + 1
            if  candidato  > h.dato [h_min] { // percolate_down
                                    h.dato [p] := h.dato[ h_min ]
                                    p := h_min;
                                    }
            else   stop_perc := true;
       }    // end  { while }
      h.dato[p] := candidato;
}     // end {percolate_down }
```

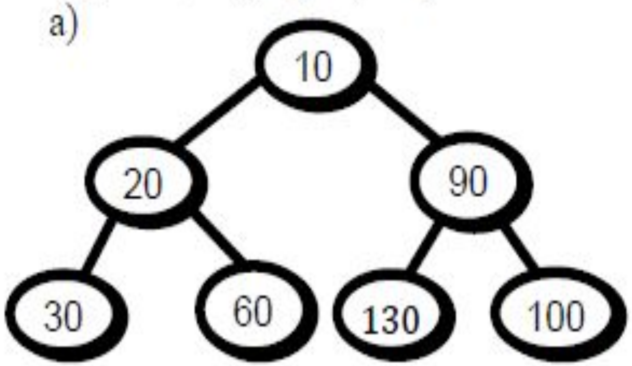
# Operación: delete_min (Versión 2)

```
delete_min ( Heap h; Comparable e) {

  if (h.tamaño > 0  )    { //  la heap no está vacía
     e := h.dato[1] ;
     h.dato[1] := h.dato[h.tamaño] ;
     h.tamaño :=  h.tamaño - 1;
     percolate_down ( h ; 1);

  }
}   // end del delete_min
```

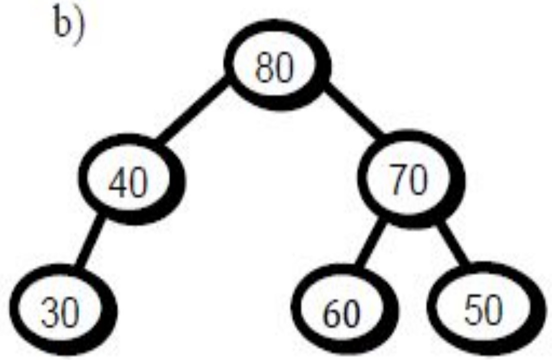
# Ejercitación

1.- Indique para cada uno de los siguientes árboles binarios si son un árbol parcialmente ordenado. En caso negativo, explique por qué.

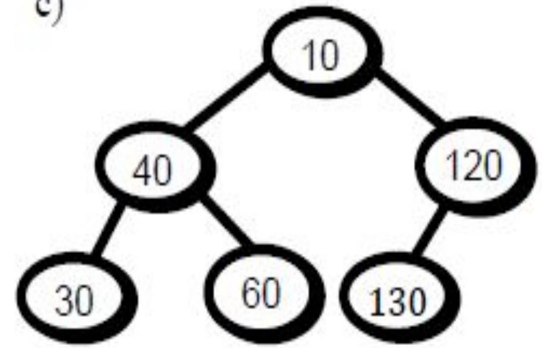
a)




b)

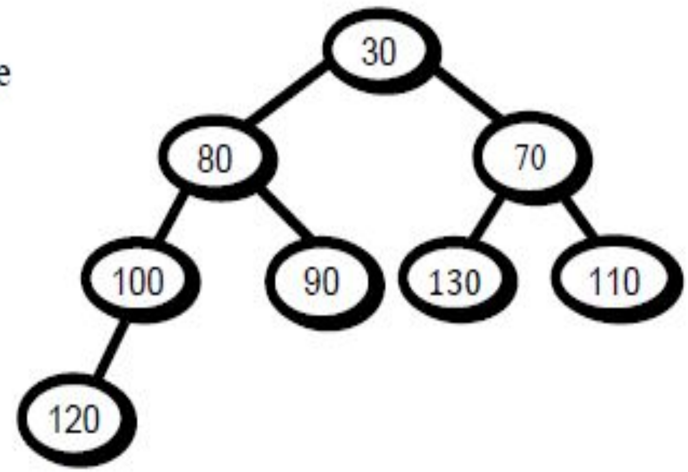



c)




2.- ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al almacenamiento lineal del siguiente árbol parcialmente ordenado o Heap binaria?

a) 30,70, 80 90,100, 110,120, 130
b) 30,80, 70,100, 90,130, 110, 120
c) 30,80, 100,120, 90,70, 130, 110
d) 120, 100, 90, 80, 130, 110, 70, 30




3.- Inserte los valores 60,75 y 10 a la heap anterior. Dibuje la heap resultante después de cada operación.

# Otras operaciones

- DecreaseKey( x, Δ, H )
  - Decrementa la clave que está en la posición x de la heap H, en una cantidad Δ
- IncreaseKey( x, Δ, H )
  - Incrementa la clave que está en la posición x de la heap H, en una cantidad Δ
- DeleteKey( x )
  - Elimina la clave que está en la posición x
  - Puede realizarse:

**DecreaseKey( x,∞, H )**

**DeleteMin( H )**