Trabajo Práctico Nro 11 - Lógica de Predicados, Semántica

Ejercicio 1

Señalar las ocurrencias libres o ligadas de $x_1,\ x_2,\ x_3$ en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $C = \{c\},\ F = \{f, g\},\ P = \{A\}$ y , con f de aridad 1; g de aridad 2, A de aridad 2. Determinar cual es una fbf abierta y cual es cerrada.

1. $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3)) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3))$
2. $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3))) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3)$

Análisis de $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3)) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3))$

- x_1 *ligada* por $(\forall x_1)$.
- x_2 *ligada* por $(\exists x_2)$ dentro de $A(x_1, f(x_2, x_3))$.
- x_3 está *libre*.

$(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3)) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3))$ es **abierta** ya que contiene al menos una variable libre.

Análisis de $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3))) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3)$

- x_1 *ligada* por $(\forall x_1)$ en parte izquierda, en la derecha está *libre*.
- x_2 *ligada* por $(\exists x_2)$ dentro de $A(x_1, f(x_2, x_3))$.
- x_3 está *libre*.

$(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3))) \to (\forall x_3)A(g(c), x_1) \vee A(x_1, x_3)$ es **abierta** ya que contiene al menos una variable libre.

Ejercicio 2

Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.

No es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I ya que necesitamos de las **valoraciones** para decidir acerca del valor de verdad de la fórmula dentro de la interpretación, solo con la interpretación no podemos decidir ya que para que la fórmula sea *verdadera en la interpretación* se tiene que satisfacer en todas las valoraciones o para que la fórmula sea *falsa en la interpretación* no debe existir una valoración que la satisfaga.

Ejercicio 3

Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

Conceptos

- Dos valoraciones son i-equivalentes si coinciden en todas las variables excepto en x_i
- Dos fórmulas son lógicamente equivalentes si tienen el mismo valor de verdad en todas las interpretaciones posibles.
    - Para demostrar que no son equivalentes, basta encontrar al menos una interpretación donde difieran en valor de verdad
- Cuantificadores del mismo tipo pueden conmutar entre ellos sin cambiar el significado de la fbf.
- Con Cuantificadores de distinto tipo si importa el orden para el significado de la fbf (no es lo mismo $(\forall x)(\exists y)$ que $(\exists y)(\forall x)$ la segunda es más fuerte).

1. $(\forall x)P(x)$ - $(\exists x)P(x)$

- Si tomamos una interpretación I en el dominio de los **números Naturales** con:
    - $I(P(x))$ = "x es par".
- Podemos ver que $(\forall x)P(x)$ es **falsa** pero $(\exists x)P(x)$ es **verdadera**. Por lo tanto, **no son lógicamente equivalentes.**

2. $(\exists x)(\exists y)Q(x,y)$ - $(\exists y)(\exists x)Q(x,y)$

Estas dos fórmulas **si son lógicamente equivalentes** ya que se implican una a la otra, si tomamos primero la implicación de la fórmula de la izquierda a la de la derecha:

- Sabemos que existe un x que cumple $(\exists y)Q(x,y)$ por definición del existe.
- También sabemos que existe un y que cumple $Q(x,y)$ por definición del existe.
- Encontramos entonces un x y un y que cumplen $Q(x,y)$.
- Entonces podemos decir que se cumple que $(\exists x)Q(x,y)$ por definición del existe.

- Y por lo tanto, podemos decir que se cumple que $(\exists y)(\exists x)Q(x,y)$ por definición del existe. El análisis de la implicación al revés es análogo a este.

3. $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$ - $(\forall y)(\exists x)R(x,y)$

- Si tomamos una interpretación I en el dominio de los números Naturales con:
  - $I(P(x))$ = "$x > y$".
- Podemos ver que $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$ es falsa ya que los Naturales son infinitos, por lo tanto, no existe un Natural que sea mayor que todos los demás, pero $(\forall y)(\exists x)R(x,y)$ es verdadera ya que tomando siempre $x = y + 1$ se cumple. Por lo tanto, no son lógicamente equivalentes.

4. $(\exists x)(S(x) \wedge T(x))$ - $(\exists x)S(x) \wedge (\exists x)T(x)$

- Si tomamos una interpretación I en el dominio de los números Naturales con:
  - $I(S(x))$ = "x es par".
  - $I(T(x))$ = "x es impar".
- Podemos ver que $(\exists x)(S(x) \wedge T(x))$ es falsa pero $(\exists x)S(x) \wedge (\exists x)T(x)$ es verdadera. Por lo tanto, no son lógicamente equivalentes.

5. $(\exists x)(S(x) \vee T(x))$ - $(\exists x)S(x) \vee (\exists x)T(x)$

Estas dos fórmulas si son lógicamente equivalentes ya que se implican una a la otra, si tomamos primero la implicación de la fórmula de la izquierda a la de la derecha:

- Sabemos que si $(\exists x)(S(x) \vee T(x))$ es verdadera, entonces existe un x que cumple $S(x) \vee T(x)$.
- Entonces, si $S(x)$ es verdadera, se cumple $(\exists x)S(x)$, y por lo tanto la disyunción también es verdadera.
- Si $T(x)$ es verdadera, se cumple $(\exists x)T(x)$, lo mismo.
- Por lo tanto, $(\exists x)S(x) \vee (\exists x)T(x)$ es verdadera.

Ahora si vemos la implicación de derecha a izquierda tenemos:

- Sabemos que si $(\exists x)S(x) \vee (\exists x)T(x)$ es verdadera, o bien existe un x que cumple $(\exists x)S(x)$, o bien que cumple $(\exists x)T(x)$, o bien que cumple los 2.
- En cualquiera de los casos, ese mismo x también hace verdadera la fórmula $S(x) \vee T(x)$.
- Por lo tanto, se cumple que $(\exists x)(S(x) \vee T(x))$.

6. $(\forall x)(S(x) \vee T(x))$ - $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)T(x)$

- Si tomamos una interpretación I en el dominio de los números Naturales con:
  - $I(S(x))$ = "x es par".

- $I(T(x))$ = "x es impar".

- Podemos ver que $(\forall x)(S(x) \vee T(x))$ es **verdadera** pero $(\forall x)S(x) \vee (\forall x)T(x)$ es **falsa** esto se debe a que $(\forall x)S(x)$ es *falsa* ya que no todo número natural es par, y $(\forall x)T(x)$ también es *falsa* ya que no todo número natural es impar. Por lo tanto, **no son lógicamente equivalentes.**

Ejercicio 4

Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

- Conjunto de constantes: $C = \{c, u\}$.
- Sin símbolos de función: $F = \emptyset$
- Conjunto de símbolos de predicado: $P = \{A\}$.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los **números Naturales:**

- $I(c) = 0$
- $I(u) = 1$
- $I(A(x, y)) = "x \leq y"$

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Justificar las respuestas.

- $A(c, x)$ es satisfactible en I.

En esa interpretación I $A(c, x)$ es **satisfactible** siempre ya que no nos importa el valor de x, en el dominio de los naturales c que es igual a 0 siempre va a ser menor.

- $A(u, x)$ es satisfactible en I.

En esa interpretación I, $A(u, x)$ es **satisfactible** ya que si se asigna por ejemplo $x = 2$, $A(u, x)$ es satisfactible.

- $(\forall x)A(c, x)$ es satisfactible en I.

En esa interpretación I, $A(c, x)$ es **satisfactible** siempre ya que no nos importa el valor de x, en el dominio de los naturales c que es igual a 0 siempre va a ser menor.

- $(\forall x)A(u, x)$ es satisfactible en I.

En esa interpretación I, $(\forall x)A(u, x)$ **no es satisfactible** ya que no se cumple para todo valor de x, siempre que se tenga la valoración $x = 0$, no se satisface.

- $A(c, x)$ es verdadera en I.

En esa interpretación I, $A(c, x)$ es verdadera ya que no nos importa el valor de x, en el dominio de los naturales c que es igual a 0 siempre va a ser menor.

- $(\forall x)A(c, x)$ es lógicamente válida.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(c) = 0$
- $I(u) = 1$
- $I(A(x, y)) = "x \geq y"$

Podemos ver que $(\forall x)A(c, x)$ no es lógicamente válida ya que encontramos una Interpretación donde no es verdadera.

- $A(u, c) \wedge \neg A(u, c)$ es contradictoria.

$A(u, c) \wedge \neg A(u, c)$ es contradictoria ya que vemos que posee la forma de una contradicción del tipo $A \wedge \neg A$.

Ejercicio 5

Ofrecer una interpretación donde las siguientes fórmulas sean todas verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

1. $(\forall x)P(x, x)$

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, x)) = "x = x"$

Vemos que $(\forall x)P(x, x)$ es *verdadero* y se traduce como "Para todo x, x es igual a x".

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, x)) = "x \neq x"$

Vemos que $(\forall x)P(x, x)$ es *falso* y se traduce como "Para todo x, x es distinto a x".

2. $\neg((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)))$

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, y)) = "x < y"$

Vemos que $\neg((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)))$ es *verdadera* y se traduce como "No se cumple que para todo x y para todo y, si x es menor a y entonces y menor a x"

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, y)) = "x = y"$

Vemos que $\neg((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)))$ es *falso* y se traduce como "No se cumple que para todo x y para todo y, si x es igual a y entonces y es igual a x".

3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, y)) = "x > y"$

Vemos que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$ es *verdadera* y se traduce como "Para todo x, para todo y y para todo z, si x es mayor que y e y es mayor que z, entonces x es mayor que z".

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(P(x, y)) = "x \neq y"$

Vemos que $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$ es *falsa* y se traduce como "Para todo x, para todo y y para todo z, si x es distinto a y e y es distinto a z, entonces x es distinto a z".

4. $(\forall x)P(c, x)$

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(c) = 0$
- $I(P(c, x)) = "c \leq x"$

Vemos $(\forall x)P(c, x)$ es *verdadero* y se traduce como "Para x, se cumple que 0 es menor o igual a x".

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- $I(c) = 5$
- $I(P(c, x)) = "c \leq x"$

Vemos $(\forall x)P(c,x)$ es *falso* y se traduce como "Para x, se cumple que 5 es menor o igual a x".

5. $(\forall x)P(x, f(x))$

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los **números Naturales:**

- $I(f(x)) = \text{"el sucesor de } x\text{"}$
- $I(P(x,y)) = \text{"}x < y\text{"}$

Vemos $(\forall x)P(x, f(x))$ es *verdadero* y se traduce como "Para x, se cumple que x es menor al sucesor de x".

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los **números Naturales:**

- $I(f(x)) = \text{"el sucesor de } x\text{"}$
- $I(P(x,y)) = \text{"}x > y\text{"}$

Vemos $(\forall x)P(x, f(x))$ es *falso* y se traduce como "Para x, se cumple que x es mayor al sucesor de x".

Ejercicio 6

Determinar para cada una de las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden si son satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación, falsas en alguna interpretación, lógicamente válidas o contradictorias. Fundamentar

1. $(\forall x)P(x)$

Esta fórmula es:

- *Satisfactible en alguna interpretación* → sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales: $I(P(x))$ = "x es un número".
- *Verdadera en alguna interpretación* → sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales: $I(P(x))$ = "x es un número".
- *Falsa en alguna interpretación* → sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales: $I(P(x))$ = "x es par".

2. $((\forall x)(\forall y)Q(x,y)) \rightarrow Q(x,y)$

Esta fórmula es:

- *Satisfactible en alguna interpretación* → sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales: $I(Q(x,y)) =$ "$x > y$". $((\forall x)(\forall y)Q(x,y))$ es falsa porque, por ejemplo $0 > 0$ no se cumple. Y $Q(x,y)$ con, por ejemplo, $x = 2$ e $y = 1$ es verdadera, y por lo tanto, la fórmula se satisface.
- *Verdadera en alguna interpretación* → sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales: $I(Q(x,y)) =$ "$x > y$". $((\forall x)(\forall y)Q(x,y))$ es falsa por misma justificación que arriba, por lo que no nos importa si $Q(x,y)$ es verdadera o falsa ya que la implicación siempre será verdadera, por lo tanto, la fórmula es verdadera en esta interpretación.
- *Lógicamente válida* → Es lógicamente válida ya que no existe el caso donde esta fórmula sea Falsa en alguna interpretación, es decir, se de el caso $V \to F$, ya que, si $((\forall x)(\forall y)Q(x,y))$ es verdadera, entonces $Q(x,y)$ no importa los valores que se tomen, será verdadera por la definición del cuantificador universal. Y en caso de que $((\forall x)(\forall y)Q(x,y))$ sea falsa, no nos importa el la parte derecha de la implicación ya que está siempre será verdadera. Por lo tanto, en cualquier caso será verdadera para toda interpretación.

3. $(\exists x)(\exists y)Q(x,y) \to (\exists y)(\exists x)Q(x,y)$

Esta fórmula es:

- *Lógicamente válida* → Como se vio que los cuantificadores son conmutativos en este caso, vemos que para cualquier interpretación va a existir una valoración que no satisface a $(\exists x)(\exists y)Q(x,y)$ y por lo tanto hace a la fórmula verdadera, y también va a existir una valoración que satisface a $(\exists x)(\exists y)Q(x,y)$ y por lo tanto, se satisface $(\exists y)(\exists x)Q(x,y)$ haciendo a la fórmula verdadera.
- Al ser *Lógicamente válida* también es *Verdadera en alguna interpretación* y *Satisfactible en alguna interpretación*

4. $Q(x) \to Q(x)$

Esta fórmula es:

- *Lógicamente válida* → La fórmula tiene la forma $p \to p$ por lo tanto es una tautología, por lo tanto, es lógicamente válida.
- Al ser *Lógicamente válida* también es *Verdadera en alguna interpretación* y *Satisfactible en alguna interpretación*

5. $(\exists x)(\neg P(x)) \vee (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

Esta fórmula es:

- *Lógicamente válida* → Para cualquier interpretación va a existir una valoración que no satisface a $(\exists x)(\neg P(x))$ y por lo tanto $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ es verdadero, lo que hace verdadera a la fórmula, y también va a existir una valoración que satisface a $(\exists x)(\neg P(x))$ y por lo tanto, la fórmula se hace verdadera.
- Al ser *Lógicamente válida* también es *Verdadera en alguna interpretación* y *Satisfactible en alguna interpretación*

Ejercicio 7

Determinar si las siguientes fbfs son (o no) lógicamente válidas o contradictorias. Fundamentar en cada caso.

1. $((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$

Esta fórmula **no es ni Lógicamente válida, ni una contradicción** → Pueden existir Interpretaciones donde se cumpla $((\forall x)(P(x) \vee Q(x)))$ porque todas las x cumplen $P(x)$ por ejemplo, y, por lo tanto, la fórmula es verdadera, como también pueden existir Interpretaciones donde donde se cumpla $((\forall x)(P(x) \vee Q(x)))$ pero no necesariamente $((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$ y, por lo tanto, es falsa.

Si tomamos una interpretación I en el dominio de los números Naturales con:

- $I(P(x))$ = "x es par".
- $I(Q(x))$ = "x es impar".

Por lo tanto, La fórmula es falsa.

Si tomamos una interpretación I en el dominio de los números Naturales con:

- $I(P(x))$ = "x es un número".
- $I(Q(x))$ = "x es impar".

Por lo tanto, La fórmula es verdadera.

2. $P(x,y) \rightarrow P(x,y)$

Esta fórmula es Lógicamente válida → La fórmula tiene la forma $p \rightarrow p$ por lo tanto es una tautología, por lo tanto, es lógicamente válida.

3. $P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(P(x,y))$

Esta fórmula **no es ni Lógicamente válida, ni una contradicción** → Pueden existir Interpretaciones donde se cumpla $P(x, y)$ y no necesariamente la segunda parte del entonces, por lo tanto, la fórmula es falsa, como también pueden existir Interpretaciones donde donde se cumpla $P(x, y)$ y también $(\forall x)(\forall y)(P(x, y))$, por lo tanto, la fórmula es verdadera.

Si tomamos una interpretación I en el dominio de los **números Naturales** con:

- $I(P(x, y))$ = "$x > y$".

Por lo tanto, La fórmula puede ser **falsa** o **verdadera** según la valoración.

Ejercicio 8

Si la fbf $P(x)$ es satisfactible, ¿entonces la fbf $(\exists x)P(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.

Si la fbf $P(x)$ es satisfactible no necesariamente se cumple que la fbf $(\exists x)P(x)$ es lógicamente válida, esto se debe a que la fbf $(\exists x)P(x)$ tiene que ser verdadera para cualquier interpretación, si encontramos una interpretación donde sea falsa, entonces la propiedad no se cumple, lo podemos ver con este contra-ejemplo:

Si tomamos una interpretación I en el dominio de los **números Naturales** con:

- $I(P(x))$ = "x es par".

La fórmula $P(x)$ es *satisfactible*, pero si ahora tenemos esta interpretación:

Si tomamos una interpretación I en el dominio de los **números Naturales** con:

- $I(P(x))$ = "$x < 0$".

La fórmula $(\exists x)P(x)$ es *falsa*, por lo tanto, la **fbf $(\exists x)P(x)$ no es lógicamente válida.**