Trabajo Práctico Nro 8 - Lógica Proposicional

Ejercicio 1

Dada la siguiente información:

“Si el unicornio es mítico, entonces es inmortal, pero si no es mítico, entonces es un mamıfero mortal. Si el unicornio es o inmortal o un mamıfero, entonces tiene un cuerno. El unicornio es mágico sí tiene un cuerno. Simbolizar en el Cálculo de Enunciados y responder:

1. El unicornio es mítico?. Fundamentar.
2. El unicornio no es mítico?. Fundamentar.
3. El unicornio es mágico?. Fundamentar.

Sabiendo ahora que el unicornio es inmortal, responder:

4. El unicornio no es mágico?. Fundamentar.

Ayuda: simbolizar como forma argumentativa y determinar si es válida o no. Ver def. 1.28, Hamilton.

Variables de enunciado

- p: "El unicornio es mítico"
- q: "El unicornio es mortal"
- r: "El unicornio es un mamífero"
- s: "El unicornio tiene un cuerno"
- t: "El unicornio es mágico"

Premisas

- $\mathcal{A}_1 \ : \ p \to (\neg q)$
- $\mathcal{A}_2 \ : \ (\neg p) \to (r \wedge q)$
- $\mathcal{A}_3 \ : \ ((\neg q) \vee r) \to s$
- $\mathcal{A}_4 \ : \ s \to t$

1. **El unicornio es mítico?. Fundamentar.**

Tomamos como $\mathcal{A}$ a p. Analizamos: $\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2, \ \mathcal{A}_3, \ \mathcal{A}_4 \ \therefore \ \mathcal{A}$

$p \to (\neg q)$	$(\neg p) \to (r \wedge q)$	$((\neg q) \vee r) \to s$	$s \to t$	p
p - F $(\neg q)$ - F $p \to (\neg q)$ - V	$(\neg p)$ - V r - V q - V $(r \wedge q)$ - V $(\neg p) \to (r \wedge q)$ - V	$(\neg q)$ - F r - V $((\neg q) \vee r)$ - V s - V $((\neg q) \vee r) \to s$ - V	s - V t - V $s \to t$ - V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $\mathcal{A}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}_4$ tomen el valor V y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, no se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio es mítico.

2. El unicornio no es mítico?. Fundamentar.

Tomamos como $\mathcal{A}$ a $(\neg p)$. Analizamos: $\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2, \ \mathcal{A}_3, \ \mathcal{A}_4 \ \therefore \ \mathcal{A}$

$p \to (\neg q)$	$(\neg p) \to (r \wedge q)$	$((\neg q) \vee r) \to s$	$s \to t$	$(\neg p)$
p - V $(\neg q)$ - V $p \to (\neg q)$ - V	$(\neg p)$ - F r - V q - F $(r \wedge q)$ - F $(\neg p) \to (r \wedge q)$ - V	$(\neg q)$ - V r - V $((\neg q) \vee r)$ - V s - V $((\neg q) \vee r) \to s$ - V	s - V t - V $s \to t$ - V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $\mathcal{A}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}_4$ tomen el valor V y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, no se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio no es mítico.

3. El unicornio es mágico?. Fundamentar.

Tomamos como $\mathcal{A}$ a t. Analizamos: $\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2, \ \mathcal{A}_3, \ \mathcal{A}_4 \ \therefore \ \mathcal{A}$

$p \to (\neg q)$	$(\neg p) \to (r \wedge q)$	$((\neg q) \vee r) \to s$	$s \to t$	t
p - F $(\neg q)$ - F $p \to (\neg q)$ - V	$(\neg p)$ - V r - V q - V $(r \wedge q)$ - V $(\neg p) \to (r \wedge q)$ - V	$(\neg q)$ - F r - V $((\neg q) \vee r)$ - V s - V $((\neg q) \vee r) \to s$ - V	s - V t - F $s \to t$ - F	F

La forma argumentativa es válida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que alguna $\mathcal{A}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}_4$ tome el valor F y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, **se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio no es mítico**.

4. **El unicornio no es mágico?. Fundamentar.**

Tomamos como $\mathcal{A}$ a $(\neg t)$. Analizamos: $\mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2, \ \mathcal{A}_3, \ \mathcal{A}_4 \ \therefore \ \mathcal{A}$ Sabiendo que el unicornio es inmortal, por lo tanto $(\neg q)$ es V.

$p \rightarrow (\neg q)$	$(\neg p) \rightarrow (r \wedge q)$	$((\neg q) \vee r) \rightarrow s$	$s \rightarrow t$	$(\neg t)$
p - V $(\neg q)$ - V $p \rightarrow (\neg q)$ - V	$(\neg p)$ - F r - V q - F $(r \wedge q)$ - F $(\neg p) \rightarrow (r \wedge q)$ - V	$(\neg q)$ - V r - V $((\neg q) \vee r)$ - V s - V $((\neg q) \vee r) \rightarrow s$ - V	s - V t - V $s \rightarrow t$ - V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $\mathcal{A}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}_4$ tomen el valor V y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, **no se presentan pruebas suficientes para garantizar que el unicornio no es mágico sabiendo que el unicornio es inmortal**.

Ejercicio 2

Para cada una de las siguientes argumentaciones, escribir una forma argumentativa que se corresponda con ella y determinar si es válida o inválida.

1. Si la función f no es continua, entonces la función g no es diferenciable. g es diferenciable. Por lo tanto, f no es continua.

Variables de enunciado

- p: "La función f es continua"
- q: "La función g es diferenciable"

Premisas

- $\mathcal{A}_1 \ : \ (\neg p) \rightarrow (\neg q)$
- $\mathcal{A}_2 \ : \ q$

La función f no es continua?

Tomamos como $\mathcal{A}$ a $(\neg p)$. Analizamos: $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2\ \therefore\ \mathcal{A}$.

$(\neg p) \to (\neg q)$	q	$(\neg p)$
$(\neg p)$ - F $(\neg q)$ - F $(\neg p) \to (\neg q)$ - V	q - V	F

La forma argumentativa es **inválida** ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ tomen el valor V y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, **no se presentan pruebas suficientes para garantizar que la función f no es continua**.

2. Sí Juan ha instalado la calefacción central, entonces ha vendido su coche o ha pedido dinero prestado al banco. Juan no ha vendido su coche ni ha pedido dinero prestado al banco. Por lo tanto, Juan no ha instalado la calefacción central.

Ayuda: Ver def. 1.28, Hamilton.

Variables de enunciado

- p: "Juan ha instalado la calefacción central"
- q: "Juan ha vendido su coche"
- r: "Juan ha pedido dinero prestado al banco"

Premisas

- $\mathcal{A}_1\ :\ p \to (q \vee r)$
- $\mathcal{A}_2\ :\ (\neg q) \wedge (\neg r)$

Juan no ha instalado la calefacción central?

Tomamos como $\mathcal{A}$ a $(\neg p)$. Analizamos: $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2\ \therefore\ \mathcal{A}$.

$p \to (q \vee r)$	$(\neg q) \wedge (\neg r)$	$(\neg p)$
p - V q - F r - V $(q \vee r)$ - V $p \to (q \vee r)$ - V	$(\neg q)$ - V $(\neg r)$ - F $(\neg q) \wedge (\neg r)$ - F	F

La forma argumentativa es válida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que alguna $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ tome el valor F y $\mathcal{A}$ tome el valor F. Por lo tanto, **se presentan pruebas suficientes para garantizar que Juan no ha instalado la calefacción central**.

Ejercicio 3

Una fórmula booleana es satisfactible si existe al menos una combinación de valores de verdad (una asignación de verdadero o falso a las variables) que hace que la fórmula sea verdadera. Dados los siguientes enunciados, determinar cuales son verdaderos y cuáles son falsos. Justificar en cada caso.

1. Una fórmula que es una tautología es satisfactible.
2. Una fórmula que es satisfactible es una tautología.
3. Una fórmula que no es satisfactible es una contradicción.
4. Una fórmula que es una contradicción no puede ser satisfactible.

Ayuda: Ver def. 1.5, Hamilton.

1. **Una fórmula que es una tautología es satisfactible.**

Verdadero. Una fórmula booleana que es una tautología toma el valor V bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables que aparecen en ella, por lo tanto, es satisfactible ya que existe al menos una combinación de valores de verdad que hace que la fórmula sea verdadera.

2. **Una fórmula que es satisfactible es una tautología.**

Falso. Que exista al menos una combinación de valores de verdad que hace que la fórmula sea verdadera no garantiza que la misma sea verdadera para toda asignación de valores de verdad posible.

3. **Una fórmula que no es satisfactible es una contradicción.**

Verdadero. Una fórmula booleana que no tiene al menos una combinación de valores de verdad que hace que la fórmula sea verdadera es una fórmula que toma el valor F bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables que aparecen en ella, por lo tanto, es una contradicción.

4. **Una fórmula que es una contradicción no puede ser satisfactible.**

Verdadero. Una contradicción es una fórmula que toma el valor F bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables que aparecen en ella, eso quiere decir que no existe alguna asignación que la pueda hacer verdadera, por lo tanto, no puede ser satisfactible.

Ejercicio 4

Un conjunto de fórmulas es satisfactible si existe al menos una asignación de valores de verdad (una interpretación) que hace que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas al mismo tiempo. Determinar si los siguientes conjuntos son satisfactibles:

1. $\{p,\ (p \rightarrow q),\ r\}$

p	$p \rightarrow q$	r	$\{p,\ (p \rightarrow q),\ r\}$
p - V	p - V q - V $p \rightarrow q$ - V	r - V	satisfactible

2. $\{p,\ q,\ (p \wedge \neg p)\}$

p	q	$p \wedge \neg p$	$\{p,\ q,\ (p \wedge \neg p)\}$
p - V	q - V	p - V $\neg p$ - F $p \wedge \neg p$ - F	insatisfactible

---

Ejercicio 5

Sean A, B fbfs que cumplen que $(\neg A \vee B)$ es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuales contradicciones. Justificar las respuestas.

1. $((\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow C)$
2. $(C \rightarrow ((\neg A) \vee B))$
3. $((\neg A) \rightarrow B)$

Ayuda: Ver def. 1.5, Hamilton.

1. $((\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow C)$

Sabemos que $(\neg A \vee B)$ que es una tautología, es equivalente a $(A \rightarrow B)$, por lo tanto, $(A \rightarrow B)$ también es una tautología. Si negamos $(A \rightarrow B)$ nos encontramos con una contradicción, por lo tanto, estamos implicando $F \rightarrow C$ lo que es una tautología.

2. $(C \rightarrow ((\neg A) \vee B))$

Sabemos que $(\neg A \vee B)$ es una tautología que en este este caso es el consecuente de esta implicación. En una implicación $P \rightarrow Q$, si Q es siempre verdadero, la implicación entera es una tautología, sin importar P.

3. $((\neg A) \rightarrow B)$

Sabemos que $(\neg A \vee B)$ que es una tautología, es equivalente a $(A \rightarrow B)$, por lo tanto, $(A \rightarrow B)$ también es una tautología. Pero $((\neg A) \rightarrow B)$ no es lógicamente equivalente a $(A \rightarrow B)$, por lo tanto, no tenemos información directa sobre si esta fórmula en particular es una tautología o una contradicción, ya que:

- *Caso 1:*
    - $A = V$
    - $B = V$
    - $(A \rightarrow B) = V$
    - $\neg A = F$
    - $((\neg A) \rightarrow B) = V$
- *Pero en un Caso 2:*
  - $A = F$
  - $B = F$
  - $(A \rightarrow B) = V$
  - $\neg A = V$
  - $((\neg A) \rightarrow B) = F$
  Existen un caso donde la fórmula da falso, aunque $(A \rightarrow B)$ es una tautología.

Ejercicio 6

Definición >

Para saber si una forma enunciativa $\mathcal{A}$ es lógicamente equivalente a otra forma enunciativa $\mathcal{B}$ tenemos que ver si $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Responder y justificar:

1. ¿"$(p \to q)$" es lógicamente equivalente a "$(p \vee \neg q)$" ?

No son lógicamente equivalentes.

p	q	$\neg q$	$(p \to q)$	$(p \vee \neg q)$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

2. ¿"$(p \leftrightarrow q)$" es lógicamente equivalente a "$((p \to q) \ \wedge \ (q \to p))$" ?

Son lógicamente equivalentes.

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$((p \to q) \ \wedge \ (q \to p))$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \ \wedge \ (q \to$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

3. ¿"$(\neg(p \wedge q))$" es lógicamente equivalente a "$(\neg p \vee \neg q)$" ?

Son lógicamente equivalentes.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$(\neg(p \wedge q))$	$(\neg p \vee \neg q)$	$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

4. ¿"$(\neg(p \vee q))$" es lógicamente equivalente a "$(p \wedge q)$" ?

Ayuda: ver def. 1.7, Hamilton.

No son lógicamente equivalentes.

p	q	$(p \vee q)$	$(\neg(p \vee q))$	$(p \wedge q)$	$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	F	V	F
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F

Ejercicio 7

Sea $\#$ el operador binario definido como $p\#q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Tabla de verdad del operador $\#$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

1. Probar que $\#$ es asociativo, es decir, $x\#(y\#z)$ es lógicamente equivalente a $(x\#y)\#z$

El operador $\#$ es asociativo.

x	y	z	$(y\#z)$	$x\#(y\#z)$	$(x\#y)$	$(x\#y)\#z$	$x\#(y\#z) \leftrightarrow (x\#y)\#z$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V

x	y	z	$(y \# z)$	$x \#(y \# z)$	$(x \# y)$	$(x \# y) \# z$	$x \#(y \# z) \leftrightarrow(x \# y) \# z$
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

2. Probar que $\#$ es conmutativo, es decir, $y \# z$ es lógicamente equivalente a $z \# y$.

El operador $\#$ es conmutativo.

y	z	$(y \# z)$	$(z \# y)$	$(y \# z) \leftrightarrow(z \# y)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Ejercicio 8

¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aun así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. En caso de responder positivamente, dar un ejemplo y justificar. En caso de responder negativamente, justificar.

Ayuda: Ver sec. 1.3, Hamilton.

Sí, es cierto. Si tomamos, por ejemplo, dos fórmulas fbfs que son tautologías, siempre serán equivalentes sin importar su estructura o las variables que utilicen ya que al ser tautologías su resultado final siempre es Verdadero. *Ejemplo:*

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee \neg p)$	$(q \vee \neg q)$	$(p \vee \neg p) \leftrightarrow(q \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Ejercicio 9

> Definición
>
> Para saber si una forma enunciativa $\mathcal{A}$ es implica lógicamente a otra forma enunciativa $\mathcal{B}$ tenemos que ver si $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología.

Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf $(A \wedge B)$. Fundamentar.

1. A

Es lógicamente implicada por $(A \wedge B)$.

$v(A)$	$v(B)$	$v((A \wedge B))$	$v((A \wedge B) \to A)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2. $A \leftrightarrow B$

Es lógicamente implicada por $(A \wedge B)$.

$v(A)$	$v(B)$	$v((A \wedge B))$	$v((A \leftrightarrow B))$	$v((A \wedge B) \to (A \leftrightarrow B))$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

3. $\neg B \to \neg A$

Es lógicamente implicada por $(A \wedge B)$.

$v(A)$	$v(B)$	$v(\neg A)$	$v(\neg B)$	$v((A \wedge B))$	$v((\neg B \rightarrow \neg A))$	$v((A \wedge B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

4. $A \rightarrow B$

Ayuda: Ver def. 1.7, Hamilton.

Es lógicamente implicada por $(A \wedge B)$.

$v(A)$	$v(B)$	$v((A \wedge B))$	$v((A \rightarrow B))$	$v((A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B))$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Ejercicio 10

Dada la siguiente tabla de verdad, encontrar tres fbfs para cada una que las tenga por tablas de verdad:

1. Una fbf (sin restricciones de conectivos).
2. Una fbf en FNC (forma normal conjuntiva).
3. Una fbf en FND (forma normal disyuntiva).

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ayuda: Ver sec. 1.4, Hamilton.

- Una fbf (sin restricciones de conectivos). → Usamos el XOR.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Una fbf en FNC (forma normal conjuntiva).

p	q	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Una fbf en FND (forma normal disyuntiva).

p	q	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejercicio 11

Definición

> Un *conjunto adecuado de conectivas* es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa que contenga solamente conectivas del conjunto.

Explicar porque el siguiente conjunto no es un conjunto adecuado de conectivas $\{\wedge, \vee\}$.

Ayuda: utilizar def. en sec. 1.5, Hamilton.

El conjunto $\{\wedge, \vee\}$ **no es un conjunto adecuado de conectivas** ya que **no posee a la negación** $\neg$, esto provoca que no se puedan representar expresiones como "no p", "si p entonces q", etc. Con las conectivas del conjunto solo podemos representar el "sentido positivo" de las proposiciones.

Ejercicio 12

¿Es cierto que si una fbf A es satisfactible entonces A es una tautología?

Ayuda: utilizar la técnica de demostración por contraejemplo.

Esta propiedad no vale, lo vamos a demostrar construyendo un contraejemplo. **Si tomamos** $\mathcal{A} = p \wedge q$ podemos ver:

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{A}$ es una fbf **satisfactible** ya que existe al menos usa asignación de valores de verdad que la vuelve verdadera pero no es una **tautología**.

Ejercicio 13

Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos $\wedge, \vee, \neg$. Sea A^* la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada $\vee$ por $\wedge$. Si A es una tautología, A^* ¿también lo es?

Justificar.

Ayuda: utilizar la técnica de demostración por contraejemplo.

Esta propiedad no vale, lo vamos a demostrar construyendo un contraejemplo. **Si tomamos** $\mathcal{A} = (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$ y, por lo tanto, $\mathcal{A}^* = (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$ podemos ver:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee \neg p)$	$(q \vee \neg q)$	$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Se cumple que $\mathcal{A}$ es una **tautología**, veamos que pasa con $\mathcal{A}^*$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg p)$	$(q \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F

No se cumple que $\mathcal{A}^*$ sea una **tautología**, es más, en este contraejemplo llegamos a que $\mathcal{A}^*$ es una **contradicción**.

Ejercicio 14

Demostrar utilizando la técnica del **absurdo** que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y $A \rightarrow B$ son tautologías entonces B también lo es.

Ayuda: ver prop. 1.9, Hamilton.

Hipótesis que nos brindan:

- $\mathcal{A}$ es una tautología.
- $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Asumimos que $\mathcal{B}$ no es una tautología.

Demostración:

- Ya que asumimos que $\mathcal{B}$ no es una tautología, sabemos que existe por definición una valuación v tal que $v(\mathcal{B}) = F$.
- Ya que sabemos que $\mathcal{A}$ es una tautología, por definición sabemos que la valuación $v(\mathcal{A}) = V$.
- Ya que también sabemos que $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología, por definición sabemos que la valuación $v((\mathcal{A} \to \mathcal{B})) = V$.
- Entonces, por definición de valoración *"La valoración $v((\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$ será Verdadera si y solo si no se cumple que la $v(\mathcal{A}) = V$ y la $v(\mathcal{B}) = F$"* y por saber que la valoración de $\mathcal{A}$ y de $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es Verdadera, la valoración $v(\mathcal{B}) = V$ si o si.

Hemos llegado a una **contradicción** y, por lo tanto, demostrado que la propiedad se cumple.

Ejercicio 15

Demostrar utilizando la técnica del **absurdo** que $(p \wedge \neg p) \to q$ es una tautología.

Asumimos que $(p \wedge \neg p) \to q$ no es una tautología.

Demostración:

- Por construcción de tablas de verdad podemos demostrar que la valoración $v((p \wedge \neg p)) = F$ ya que $(p \wedge \neg p)$ es una *contradicción*.
- Entonces, por definición de valoración *"La valoración $v((\mathcal{A} \to \mathcal{B}))$ será Verdadera si y solo si no se cumple que la $v(\mathcal{A}) = V$ y la $v(\mathcal{B}) = F$"* y por saber que $v((p \wedge \neg p)) = F$, no nos importa que valor tome la valoración $v(q)$ ya que siempre la valoración $v((p \wedge \neg p)) = F$, por lo tanto, $(p \wedge \neg p) \to q$ es una tautología.

Hemos llegado a una **contradicción** y, por lo tanto, demostrado que la propiedad se cumple.

Ejercicio 16

Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos $\wedge, \neg$. Sea A^* la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por $\neg p$, cada q por $\neg q$, etc.). Probar, utilizando la técnica de **inducción** que A^* es lógicamente equivalente a $\neg A$.

Ayuda: ver prop 1.15, Hamilton

Tomamos como Caso base $n = 0$ siendo n la cantidad de conectivas de la fórmula, en este caso, $\mathcal{A}$ no tiene conectivas, es decir, solo tiene una variable de enunciado p, por ejemplo.

- $\mathcal{A} = p$
- $\mathcal{A}^* = \neg p$
- $\mathcal{A}^*$ es lógicamente equivalente a $\neg\mathcal{A}$

Se cumple el Caso base.

Para nuestra Hipótesis inductiva asumimos que para toda fbf (donde aparecen solo las conectivas $\wedge, \neg$) de n o menos conectivas se cumple que $\mathcal{B}^*$ es lógicamente equivalente a $\neg\mathcal{B}$.

Veamos nuestro Paso de inducción donde $\mathcal{A}$ posee $n + 1$ conectivas. Debido a las 2 formas de construir formas enunciativas según nuestro conjunto de conectivas vamos a considerar los 2 casos posibles:

- *$\mathcal{A}$ es de la forma $(\neg\mathcal{B})$.*
  - Tiene n conectivas, por lo tanto, por Hipótesis inductiva $\neg\mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B}^*$.
  - $\mathcal{A}^* = (\neg\mathcal{B}^*)$, por lo tanto, $\mathcal{A}^*$ es lógicamente equivalente a $\neg(\neg\mathcal{B})$, por ejemplo, a $(\neg\mathcal{A})$.
- *$\mathcal{A}$ es de la forma $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$*
  - Cada fórmula $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen n conectivas, por lo tanto, por Hipótesis inductiva $\neg\mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B}^*$ y $\neg\mathcal{C}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{C}^*$.
  - $\mathcal{A}^* = (\mathcal{B}^* \vee \mathcal{C}^*)$, esto es lógicamente equivalente a $((\neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{C}^*)$, y nuevamente, esto es lógicamente equivalente a $((\neg\mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{C}))$ lo que es es equivalente a $(\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, es decir, $(\neg\mathcal{A})$.

Con este análisis hemos demostrado que para cualquier fbf $\mathcal{A}$ (donde aparecen solo los conectivos $\wedge, \neg$). Sea A^* la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada letra de proposición por su negación, se cumple que A^* es lógicamente equivalente a $\neg A$.

Ejercicio 17

Demostrar utilizando la técnica de inducción que cualquier fórmula bien formada A que contenga sólo los conectivos $\{\vee, \wedge\}$ puede tomar el valor F.

Ayuda: ver ejercicio resuelto en clase teórica

Tomamos como Caso base $n = 0$ donde n representa la cantidad de conectivas de la fórmula, en este caso, $\mathcal{A}$ no tiene conectivas, es decir, solo tiene una variable de enunciado p, por ejemplo.

- $\mathcal{A} = p$
- Existe la valoración $v(p) = F$, por lo tanto, $v(\mathcal{A}) = F$

Se cumple el Caso base

Para nuestra **Hipótesis inductiva** asumimos que para toda fbf $\mathcal{A}$ (donde aparecen solo las conectivas $\vee, \wedge$) de n o menos conectivas se cumple que $v(\mathcal{A}) = F$.

Veamos nuestro **Paso de inducción** donde $\mathcal{A}$ posee $n+1$ conectivas. Debido a las 2 formas de construir formas enunciativas según nuestro conjunto de conectivas vamos a considerar los 2 casos posibles:

- *$\mathcal{A}$ es de la forma $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.*
  - Cada fórmula $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen n conectivas, por lo tanto, por **Hipótesis inductiva** se cumple que $v(\mathcal{B}) = F$ y que $v(\mathcal{C}) = F$.
  - Por definición de valoración *"La valoración $v((\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ será Verdadera si y solo si no se cumple que la $v(\mathcal{B}) = F$ y la $v(\mathcal{C}) = F$"* vemos entonces que se cumple $v((\mathcal{B} \vee \mathcal{C})) = F$.
- *$\mathcal{A}$ es de la forma $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$*
  - Cada fórmula $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen n conectivas, por lo tanto, por **Hipótesis inductiva** se cumple que $v(\mathcal{B}) = F$ y que $v(\mathcal{C}) = F$.
  - Por definición de valoración *"La valoración $v((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ será Verdadera si y solo si no se cumple que la $v(\mathcal{B}) = F$ y la $v(\mathcal{C}) = F$"* vemos entonces que se cumple $v((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})) = F$.

Con este análisis hemos demostrado que $v(\mathcal{A}) = F$, para cualquier fbf (donde aparecen solo las conectivas $\vee, \wedge$)