Parciales FTC Segunda Parte

Parcial 2023

Fundamentos de teoría de la computación 2023. Lógica. Examen 1. 04/07/2023. T2

Ejercicio 1. Dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

a) Obtener la fórmula asociada utilizando **sólo los conectivos de negación y conjunción (¬, ∧).** $p \wedge \neg p$

b) Obtener una fórmula **lógicamente equivalente** a la fbf obtenida en el punto a) utilizando **sólo los conectivos de negación e implicación (¬, →).**

$\neg (p \rightarrow p)$

Ejercicio 2. Dada la siguiente argumentación dar una forma argumentativa que se corresponda con ella y determinar si es válida o inválida: inv

$p \quad \rightarrow \quad q \quad \vee \quad r$

"Si Gomez ha instalado la actualización, entonces el software funciona bien o tiene un error en el código. Por lo tanto, si el software no funciona bien entonces Gomez no ha instalado la actualización"

$\neg q \quad \rightarrow \quad \neg p$

Ejercicio 3. Dada la siguiente secuencia de fbfs de L:

1. (t → u) h
2. (t → (u → t)) → ((t → u)→(t → t)) L2
3. (t → (u → t)) L1
4. ((t → u)→(t → t)) MP
5. (t → t) A

$\{t \rightarrow u\}$ $(t \rightarrow t)$

a) Indicar si es una demostración sintáctica válida en L para algún conjunto Γ y una fórmula A tal que $\Gamma \vdash_L A$. En caso afirmativo indicar Γ, A y que axioma, hipótesis o regla de inferencia fue aplicado en cada paso de la demostración. En caso negativo, identificar los errores.

b) Es A un teorema de L? Justificar. si, es tanto

Ejercicio 4. Sea B una fbf cualquiera. ¿Es posible que se cumpla $\vdash_L B$ y al mismo tiempo B sea una contradicción? Justificar. no, tiene que ser tanto

Ejercicio 5. Dado el predicado M(x,y) que representa *"x es mayor que y"* y la función *f(x)* que representa *"x-1"*, formular en lenguaje simbólico de primer orden cada una de las siguientes expresiones:

a) Existe un número que es mayor a todos los demás. $\exists_x \forall_y \; M(x, y)$

b) Todo número es mayor que su antecesor. $\forall_x \; M(x, f(x))$

c) Para todo par de números existe uno que está entre ambos. $\forall_x \forall_y \exists_z \left(M(x, z) \wedge M(z, y) \right)$

** Tener en cuenta que estamos trabajando sobre el dominio de los* ***números reales*** *(no es necesario especificarlo). Se pueden utilizar los cuantificadores "∀" y "∃" y conectivos lógicos si es necesario pero* ***NO*** *se deben utilizar predicados ni funciones adicionales.*

Ejercicio 6. Dado el predicado binario "P", la constante "a", la función "f(x)" y la fórmula A = "∀x P(f(x),a)" indicar si A es **satisfactible** en una I (Interpretación), **verdadera** en una I, **falsa** en una I, **lógicamente válida** o **contradictoria**. Justificar en cada caso.

Ejercicio 7. ¿Es posible escribir una fórmula **abierta** y **contradictoria**? En caso afirmativo justificar y ofrecer una fórmula que sirva como ejemplo. En caso negativo, justificar.

Ejercicio 8. Dados los predicados unarios P y Q, analizar si la siguiente fbf es lógicamente válida. Justificar.

(∃ x P(x) ∧ ∃ x Q(x)) → (∃ x (P(x) ∧ Q(x)))

F V V

P = par Q = impar

$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$

Ejercicio 1

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1. $p \wedge \neg p$. Esta fórmula es una contradicción, por lo tanto, según definición 1.5 de Hamilton, tomará el valor de verdad F bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella. Es más, está fórmula se utiliza como ejemplo, en el ejemplo 1.6 b) de Hamilton.
2. Una fórmula A es lógicamente equivalente a una fórmula B si $(A \leftrightarrow B)$ es una tautología (Def. 1.7 Hamilton). Por def. 1.2 de Hamilton sabemos que la negación invierte el valor de verdad de una fórmula, por lo tanto, podemos definir una contradicción como la negación de una tautología. Por def. 1.6 sabemos que todas las contradicciones de n variables de enunciado comparten una misma función de verdad de n argumentos (la que toma siempre F), entonces, si tomamos por ejemplo la contradicción $\neg(p \rightarrow p)$ vemos que es lógicamente equivalente a $p \wedge \neg p$ ya que ambas son siempre falsas y por definición de la conectiva bicondicional $F \leftrightarrow F$ siempre es Verdadero, por lo tanto $(\neg(p \rightarrow p) \leftrightarrow (p \wedge \neg p))$ es una tautología.

Ejercicio 2

Variables de enunciado

- p = "Gomez ha instalado la actualización".
- q = "El software funciona bien".
- r = "El software tiene un error en el código".

Premisas

- A_1 = $(p \rightarrow (q \vee r))$

Tomamos como A a $(\neg q \rightarrow \neg p)$. Vamos a analizar: $A_1 \therefore A$

$(p \rightarrow (q \vee r))$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
p - V q - F	$\neg q$ - V $\neg p$ - F

$(p \to (q \vee r))$	$(\neg q \to \neg p)$
r - V $(q \vee r)$ - V $(p \to (q \vee r))$ - V	$(\neg q \to \neg p)$ - F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que A_1 toma el valor V y A toma el valor F. Def. 1.28 de Hamilton.

Ejercicio 3

1. Si, es una demostración sintáctica válida en L ya que, a partir de un conjunto Γ de fbfs del sistema L, donde Γ en este caso contiene $\{(t \to u)\}$, y una fórmula $A = (t \to t)$, se cumple que la deducción de A dada (sucesión finita de fbfs de L presentadas) verifica, en cada uno de sus pasos, alguna de las condiciones siguientes: la fbf es proveniente de una hipótesis de Γ, la fbf es proveniente una axioma de L o la fbf es proveniente es la deducción directa a partir de la aplicación de la regla MP. De este modo, por def. 2.5 de Hamilton, la deducción de A a partir de Γ se convierte en una demostración sintáctica válida.
   - *Paso 1:* Hipótesis.
   - *Paso 2:* Instancia de axioma L_2.
   - *Paso 3:* Instancia de axioma L_3.
   - *Paso 4:* Aplicación de MP entre Pasos 2 y 3.
   - *Paso 5:* Aplicación de MP entre Pasos 1 y 4.
2. Según la proposición 2.23 que nos habla del Teorema de Adecuación para L, se nos indica que si A es una fbf de L y A es una tautología, entonces A es un teorema de L. En este caso, teniendo que $A = (t \to t)$ vemos efectivamente que A es una tautología (podemos verificarlo mediante construcción de su tabla de verdad), por lo tanto, es un teorema de L.

Ejercicio 4

No, no es posible, esto se debe al Teorema de la Corrección (Proposición 2.14) que nos demuestra por inducción que todo Teorema de L es una tautología, por lo tanto si se cumple $\vdash_L B$ siendo B una fbf cualquiera, no puede pasar que B sea una contradicción.

Ejercicio 5

1. $(\exists x)(\forall y)M(x, y)$ → "Existe un número que es mayor que todos los demás".
2. $(\forall x)M(x, f(x))$ → "Todo número es mayor que su predecesor".
3. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(M(x, z) \wedge M(z, y))$ → "Para todo par de números existe uno que está entre ambos".

Ejercicio 6

Fórmula dada: $(\forall x)P(f(x), a)$

- *Verdadera en una Interpretación:* Si tomamos una Interpretación I en el Dominio de los números naturales, donde $I(a) = 0$, $I(f(x)) =$ "$x + 1$" y la $I(P(x, a)) =$ "x es mayor que a" vemos que la fórmula se satisface para toda valoración de x posible dentro de esa Interpretación, por lo tanto, es Verdadera en esa Interpretación por definición.
- *Satisfactible en una Interpretación:* Al ver que la fórmula es Verdadera en una Interpretación es trivial ver que también es satisfactible en una interpretación.
- *Falsa en una Interpretación*: Si tomamos una Interpretación I en el Dominio de los números naturales, donde $I(a) = 0$, $I(f(x)) =$ "$x + 1$" y la $I(P(x, a)) =$ "x es menor que a" vemos que la fórmula no se satisface para ninguna valoración de x posible dentro de esa Interpretación, por lo tanto, es Falsa en esa Interpretación por definición.
- *Lógicamente Válida:* La fórmula sería lógicamente válida por definición si fuese Verdadera en toda interpretación posible, pero al ver que puede ser Falsa en una Interpretación vemos que no sería posible que sea Lógicamente Válida.
- *Contradictoria:* La fórmula sería Contradictoria por definición si fuese Falsa en toda interpretación posible, pero al ver que puede ser Verdadera en una Interpretación vemos que no sería posible que sea Contradictoria.

Ejercicio 7

Ya vimos lo que significa que una fórmula sea **Contradictoria**, ahora que una **fórmula sea abierta** significa que al menos tiene la ocurrencia de una variable libre (variable que no está bajo el alcance de un cuantificador). Por la **def. 3.35 de Hamilton**, sabemos que el concepto de fórmula Contradictoria es análogo al concepto de contradicciones del sistema L, y que, toda contradicción del sistema L es una fórmula contradictoria, esto nos indica que podríamos tener una fórmula abierta como por ejemplo: $(P(x) \wedge \neg P(x))$ que en el sistema L es una contradicción del tipo $(A \wedge \neg A)$ y, por lo tanto, también una **fórmula contradictoria**.

Ejercicio 8

Fórmula dada: $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \rightarrow ((\exists x)(P(x) \wedge Q(x)))$

Si tomamos una Interpretación I en el dominio de los números naturales donde:

- $I(P(x)) =$ "x es par".
- $I(Q(x)) =$ "x es impar".

Podemos ver que la fórmula es **Falsa en esta interpretación**, ya que $((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x))$ es **Verdadero**, ya que por definición del Cuantificador Existencial, con que haya una valoración que satisfaga a la fórmula, entonces se considera verdadera (existe un número que satisface $P(x)$ como por ejemplo el 2 y existe un número que satisface $Q(x)$ como por ejemplo el 3), pero $((\exists x)(P(x) \wedge Q(x)))$ es **Falso** ya que estaríamos pidiendo que un número sea par e impar a la vez, algo imposible, por lo tanto, la fórmula queda con la forma $V \to F$, que por la **observación 3.5 (c)** vemos que sería **Falsa en esa Interpretación**.

La fórmula sería **lógicamente válida** por definición si fuese **Verdadera en toda interpretación posible**, pero al ver que puede ser **Falsa en una Interpretación** vemos que no sería posible que sea Lógicamente Válida.

Parcial 2024

Fundamentos de teoría de la computación 2024. Lógica. Examen 1. 08/07/2024

Ejercicio 1. Dada la siguiente tabla de verdad:

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

a) Obtener la fórmula asociada utilizando **sólo los conectivos de negación y conjunción (¬, ∧)**.

b) Obtener una fórmula **lógicamente equivalente** a la fbf obtenida en el punto a) utilizando **sólo los conectivos de negación e implicación (¬, →)**.

c) ¿La fórmula **"(¬p∧p)" implica lógicamente** a la fórmula obtenida? Justificar.

Ejercicio 2. Dada la siguiente argumentación dar una forma argumentativa que se corresponda con ella y determinar si es válida o inválida:

"Si la actualización ha sido instalada entonces el software funciona bien. El software funciona bien o tiene un error en el código. La actualización ha sido instalada. Por lo tanto, el software no funciona bien."

Ejercicio 3. Dada la siguiente demostración sintáctica válida en L: MP

1. s
2. (s → (t → u))
3. (t → u)

a) Identificar el conjunto Γ con menor cantidad de fbfs y la fórmula A tal que Γ $\vdash_L$ A. Indicar, si es posible, que axioma, hipótesis o regla de inferencia fue aplicado en cada paso de la demostración.

b) ¿Es A un teorema de L? Justificar.

Ejercicio 4. Sea A una fbf y Γ un conjunto de fbfs. Si se cumple Γ $\vdash_L$ A, ¿Es cierto que vale $\vdash_L$ A para todo A y para todo Γ? Justificar.

Ejercicio 5. Utilizando **solo** el predicado M(x,y) que significa "x es menor que y", el cuantificador universal y los conectivos **(∧, →)**, escribir una fbf en lógica de predicados que represente una relación transitiva.

Ejercicio 6. Dado el predicado unario "P" y la fórmula A="(∀x)P(x)" indicar si A es **lógicamente válida.** *Justificar*

Ejercicio 7. Dado el predicado binario "P", la función "f(x)" y la fórmula A="(∀x)(∀y)P(f(x),y)" indicar si A es ***verdadera*** en alguna interpretación. Justificar.

Ejercicio 8. ¿Es posible escribir una fórmula **lógicamente válida y cerrada que NO provenga de una tautología en L**? En caso afirmativo, ofrecer una fórmula que sirva como ejemplo y justificar. En caso negativo, justificar.

Ejercicio 9. Especificar un programa que a partir de un estado inicial en el que $x > 0$, termine en un estado final en el que el valor de la variable "*y*" sea el factorial del valor inicial de "x".

Ejercicio 10 Aplicar el axioma de asignación (ASI) para obtener las **precondiciones** correspondientes a las siguientes ternas de Hoare:

a) {?} x := y {x + 1 ≠ 0}

b) {?} x := y + 1 {x = y}

Ejercicio 1

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

1. $p \wedge \neg q$.
2. Si tomamos la fórmula: $\neg(p \to q)$ podemos ver que es lógicamente equivalente a la anterior si tomamos en cuenta la def. 1.7 de Hamilton, verificamos viendo que $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \to q)$ es una tautología:

p	q	$p \wedge \neg q$	$\leftrightarrow$	$\neg(p \to q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

3. Si la fórmula $(\neg p \wedge p)$ implicara lógicamente a $\neg(p \to q)$ según def. 1.7 de Hamilton se tiene que cumplir que $(\neg p \wedge p) \to \neg(p \to q)$ es una tautología, verificamos con la construcción de tablas de verdad:

p	q	$(\neg p \wedge p)$	$\neg(p \to q)$	$(\neg p \wedge p) \to \neg(p \to q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Ejercicio 2

Variables de Enunciado

- p: "La actualización ha sido instalada".
- q: "El software funciona bien".
- r: "El software tiene un error en el código".

Premisas

- A_1: $p \to q$
- A_2: $q \vee r$
- A_3: p

Tomamos como A a $\neg q$, vamos a analizar $A_1, A_2, A_3 \therefore A$

$p \to q$	$q \vee r$	p	$\neg q$
V	r - V $q \vee r$ - V	V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de forma que A_1, A_2, A_3 tomen el valor V y A tome el valor F. (def 1.28 Hamilton).

Ejercicio 3

1. El conjunto Γ con la menor cantidad de fbf sería $\{s, (s \to (t \to u)\}$ y la fórmula A sería $(t \to u)$. En los pasos de la demostración pasa lo siguiente:
   - *Paso 1:* Hipótesis de Γ
   - *Paso 2:* Hipótesis de Γ
   - *Paso 3:* Aplicación de la regla de inferencia MP entre pasos 1 y 2.
2. A no es un Teorema de L ya que por el Teorema de Adecuación para L par que A sea un Teorema de L debe de ser una tautología del sistema L (Proposición 2.23 Hamilton), podemos verificar que A no es una tautología viendo su tabla de verdad:

t	u	$(t \to u)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejercicio 4

No es cierto que si se cumple $\Gamma \vdash_L A$ vale $\vdash_L A$ para todo A y para todo Γ. La relación $\Gamma \vdash_L A$ significa que A es derivable a partir de Γ en el sistema L, pero esto no implica que A sea un teorema del sistema L. Esto lo podemos demostrar con el siguiente contra ejemplo:

Si tomamos $\Gamma = \{p\}$ se cumple que $\Gamma \vdash_L (p)$ porque p pertenece a Γ, pero $\emptyset \vdash_L (p)$ no es cierto, porque p no es un teorema de L, es decir, no es demostrable sin premisas.

De esta forma encontramos un contra ejemplo que demuestra que no es cierto que si se cumple $\Gamma \vdash_L A$ vale $\vdash_L A$ para todo A y para todo Γ.

Ejercicio 5

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((M(x, y) \wedge M(y, z)) \rightarrow M(x, z))$

Ejercicio 6

Esta fórmula no es lógicamente válida, para serlo, por definición 3.35 Hamilton debe ser Verdadera en toda interpretación, para ser Verdadera en una Interpretación (def 3.24 Hamilton), todas las valoraciones posibles de la Interpretación deben satisfacer a la fórmula. Veamos con un contra-ejemplo:

Si tomamos la Interpretación I en el dominio de los números naturales, donde:

- $I(P(x))$: "x es par".

La fórmula es Falsa en esa interpretación ya que por definición del Cuantificador Universal (def. 3.27 Hamilton), no se satisface en todas las valoraciones posibles para la Interpretación dada, si tomamos, por ejemplo, $x = 3$ podemos ver que no cumple, por lo tanto, al ser Falsa en al menos una Interpretación, no puede ser Lógicamente Válida.

Ejercicio 7

La fórmula A es Verdadera en alguna Interpretación ya que se cumple que todas las valoraciones posibles de la Interpretación satisfacen a la fórmula en la siguiente Interpretación:

Si tomamos la Interpretación I en el dominio de los números naturales, donde:

- $I(P(x, y))$: "x es menor o igual que y".
- $I(f(x))$: $x - x$

Podemos ver que A en todos los casos posibles se satisface ya que cualquier número y será mayor o igual que 0, por lo tanto, A en esta Interpretación es verdadera.

Ejercicio 8

Si, es posible, si tomamos la fórmula $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$ vemos que es cerrada ya que no contiene ocurrencias de variables libres (variables que no son alcanzadas por un cuantificador) y además es lógicamente válida ya que:

- Si $(\forall x)P(x)$ es Falso, no nos importa el valor de la segunda parte de la implicación ya que la misma por definición siempre será Verdadera.
- Si $(\forall x)P(x)$ es Verdadero, por definición de los cuantificadores, no puede pasar que $(\exists x)P(x)$ sea Falso, por lo tanto, la implicación también es siempre verdadera.

Ejercicio 9

La especificación sería: $(x = X \wedge x > 0, y = X!)$

Ejercicio 10

1. $\{y + 1 \neq 0\}x := y\{x + 1 \neq 0\}$
2. $\{y + 1 = y\}x := y + 1\{x = y\}$

Parcial 2022

Fundamentos de teoría de la computación 2022. Lógica. Examen 1. 5/07/2022

Ejercicio 1.

a) Usando letras de enunciado p y q, escribir simbólicamente una forma argumentativa válida.
b) Usando letras de enunciado p y q, escribir simbólicamente una forma argumentativa inválida.
c) Es posible que una **forma argumentativa** sea válida cuando al menos una de sus premisas es una **contradicción**? En caso de ser afirmativo, justificar y ofrecer una forma argumentativa que sirva como ejemplo. En caso de responder negativamente, justificar.

Ejercicio 2.

a) Utilizando **sólo los conectivos de negación, conjunción y disyuncion (¬, ∧, ∨)**, obtener la fórmula que se corresponda con la siguiente tabla de verdad:

p	q	
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b) Determinar si la fórmula (p ∧ ¬p) **implica lógicamente** a la fórmula obtenida para la tabla de verdad. Justificar.
c) Determinar si la fórmula (p ∨ q) es **lógicamente equivalente** a la fórmula obtenida para la tabla de verdad. Justificar.

Ejercicio 3. Dada la siguiente secuencia de fbfs de L:

1. (r → (p → r))
2. (r → p)
3. (r → (p → r)) → ((r → p)→(r → r))
4. ((r → p)→(r → r))
5. (r → r)

a) Indicar si es una demostración sintáctica válida en L para algún conjunto Γ y una fórmula A tal que $\Gamma \vdash_L A$. En caso afirmativo indicar Γ, A y que axioma, hipótesis o regla de inferencia fue aplicado en cada paso de la demostración. En caso negativo, identificar los errores.
b) Es A un teorema de L? Justificar.
c) Sea B una fbf cualquiera. Es cierto que si se cumple $\vdash_L$ B, entonces B es satisfactible? Justificar

Ejercicio 4. Dado el predicado C(x,y), que representa *"hay un camino entre la ciudad x y la ciudad y"*, formular en lenguaje simbólico de primer orden cada una de las siguientes expresiones:

a) No puede haber un camino de una ciudad a si misma.
b) Todos los caminos entre ciudades son simétricos (si se puede ir de una ciudad A a otra B, también se puede ir de B a A).
c) Se puede ir desde cualquier ciudad a la ciudad *Roma*, de forma directa o pasando por exactamente una ciudad intermedia.

Se pueden utilizar los cuantificadores "∀" y "∃"* y conectivos lógicos si es necesario *pero **sólo se debe utilizar el predicado C provisto.*

Ejercicio 5.

a) Dado el predicado binario "P", la constante "a", la función "f(x)" y la fórmula "∀x∀y(P(x,a)→P(y,f(x)))" indicar si: es **satisfactible** en una I (Interpretación), **verdadera** en una I, **falsa** en una I, **lógicamente válida** o **contradictoria**. Justificar en cada caso.
b) Es posible escribir una fórmula **sin cuantificadores y lógicamente válida**? En caso afirmativo justificar y ofrecer una fórmula que sirva como ejemplo. En caso negativo, justificar.

Ejercicio 1

1. Si tomamos como A_1 a $(p \wedge q)$ y como A a p, Analizamos $A_1 \therefore A$:

$(p \wedge q)$	p
F	F

Es una forma argumentativa válida ya que no se cumple el caso en el que se pueden asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1 sea Verdadera y A sea Falsa.
2. Si tomamos como A_1 a $(p \vee q)$ y como A a p, Analizamos $A_1 \therefore A$:

$(p \vee q)$	p
q - V V	F

Es una forma argumentativa inválida ya que se cumple el caso en el que se pueden asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1 sea Verdadera y A sea Falsa.
3. Si nos puede pasar que una forma argumentativa sea válida cuando al menos una de sus premisas es una contradicción. Si tomamos como A_1 a $(p \wedge q)$ y A_2 como $(p \wedge \neg p)$, y como A a p, Analizamos $A_1, A_2 \therefore A$:

$(p \wedge \neg p)$	$(p \wedge q)$	p
F	F	F

Es una forma argumentativa válida ya que no se cumple el caso en el que se pueden asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1, A_2 sean Verdaderas y A sea Falsa.

Ejercicio 2

p	q	?
V	V	V
V	F	F
F	V	F

p	q	?
F	F	V

1. $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ u otra forma: $((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$.
2. Para ver si una fórmula A implica lógicamente a una fórmula B, se tiene que cumplir que $A \rightarrow B$ sea una tautología, en nuestro caso tomamos como A a $(p \wedge \neg p)$ y como B a $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ y analizamos construyendo la tabla de verdad:

p	q	$(p \wedge \neg p)$	$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

En este caso se cumple que $(p \wedge \neg p)$ implica lógicamente a $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$.
3. Para ver si una fórmula A es lógicamente equivalente a una fórmula B, se tiene que cumplir que $A \leftrightarrow B$ sea una tautología, en nuestro caso tomamos como A a $(p \vee q)$ y como B a $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ y analizamos construyendo la tabla de verdad:

p	q	$(p \vee q)$	$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	v
F	F	F	V	F

En este caso no se cumple que $(p \vee q)$ sea lógicamente equivalente a $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$.

Ejercicio 3

1. Es una demostración sintáctica válida en L, el conjunto $\Gamma = \{(r \rightarrow p)\}$ y $A = (r \rightarrow r)$. En los pasos pasa lo siguiente:
   - *Paso 1:* Instancia de L_1
   - *Paso 2:* Hipótesis de Γ
   - *Paso 3:* Instancia de L_2
   - *Paso 4:* Aplicación de MP entre pasos 3 y 1.

- *Paso 5:* Aplicación de MP entre pasos 4 y 2.

2. Por el Teorema de la Adecuación para L al ver que A es una tautología en el sistema L podemos afirmar que es un Teorema de L.
3. Si se cumple que $\vdash_L B$, es decir, B es Teorema de L, entonces, por el Teorema de Corrección sabemos que B es una tautología, que, por definición, tiene una función de verdad que es toda Verdadera, y por lo tanto, es satisfactible.

Ejercicio 4

1. $(\forall x)\neg(C(x,x))$
2. $(\forall x)(\forall y)(C(x,y) \to C(y,x))$
3. Tomamos como constante $r = Roma$ y hacemos $(\forall x)(C(x,r) \vee (\exists y)(C(x,y) \wedge C(y,r))$.

Ejercicio 5

1. **Fórmula dada:** $(\forall x)(\forall y)(P(x,a) \to P(y,f(x)))$
   - *Verdadera en una Interpretación*: Si tomamos la Interpretación I en el dominio de los naturales donde $I(a)$ = 0, $I(P(x,y))$ = "x mayor o igual que y" y $I(f(x))$ = "x - x", vemos que la fórmula se satisface para toda valoración posible, y, por lo tanto, es verdadera en esa Interpretación ya que cualquier x es mayor o igual que 0, y cualquier y es mayor o igual que cero.
   - *Satisfactible*: Como vimos que es Verdadera en una Interpretación vemos que es satisfactible también.
   - *Falsa en una Interpretación*: Si tomamos la Interpretación I en el dominio de los naturales donde $I(a)$ = 0, $I(P(x,y))$ = "x mayor o igual que y" y $I(f(x))$ = "x + 1", vemos que la fórmula es Falsa, ya que no se satisface para todas las valoraciones posibles en la Interpretación, nos basta que $x = 0$ e $y = 0$ para ver que es Falsa.
   - *Lógicamente Válida:* La fórmula sería lógicamente válida por definición si fuese Verdadera en toda interpretación posible, pero al ver que puede ser Falsa en una Interpretación vemos que no sería posible que sea Lógicamente Válida.
   - *Contradictoria:* La fórmula sería Contradictoria por definición si fuese Falsa en toda interpretación posible, pero al ver que puede ser Verdadera en una Interpretación vemos que no sería posible que sea Contradictoria.
2. Si, es posible, toda fbf del sistema formal L que sea una tautología será una fórmula lógicamente válida, esto se debe a que el concepto de lógicamente válido es análogo a tautología del sistema L, además, las fórmulas lógicamente válidas tienen como subconjunto a todas las fbf del sistema formal L que sean una tautología. Un ejemplo sería $(P(x) \to P(x))$ que es de la forma $(p \to p)$ en L.

Parcial 2020

Ejercicio 1

Se tienen las siguientes
premisas:

1. Bruno viaja al exterior si y sólo si tiene pasaporte y tiene suerte.

2. Si Bruno tiene suerte o termina la pandemia, Bruno tendrá su pasaporte.

3. Si Bruno tiene suerte, termina la pandemia.

Sabiendo que **Bruno tiene pasaporte**,
responder:

I. ¿Viajará al exterior Bruno?
II. ¿Terminará la pandemia?

Variables de enunciado

- p: "Bruno viaja al exterior".
- q: "Bruno tiene pasaporte".
- r: "Bruno tiene suerte".
- s: "Termina la pandemia".

Premisas

- A_1: $(p \leftrightarrow (q \wedge r))$
- A_2: $((r \vee s) \rightarrow q)$
- A_3: $(r \rightarrow s)$
- A_4: q

1. Tomamos A como p y analizamos $A_1, A_2, A_3, A_4 \therefore A$

$(p \leftrightarrow (q \wedge r))$	$((r \vee s) \rightarrow q)$	$(r \rightarrow s)$	q	p
p - F r - F q - V $(q \wedge r)$ - F $(p \leftrightarrow (q \wedge r))$ - V	s - V $(r \vee s)$ - V $((r \vee s) \rightarrow q)$ - V	V	V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1, A_2, A_3, A_4 tomen el valor V y A tome el valor F. Por lo tanto, no hay pruebas suficientes para afirmar que Bruno viajará al exterior.
2. Tomamos A como s y analizamos $A_1, A_2, A_3, A_4 \therefore A$

$(p \leftrightarrow (q \wedge r))$	$((r \vee s) \rightarrow q)$	$(r \rightarrow s)$	q	s
p - F r - F q - V $(q \wedge r)$ - F $(p \leftrightarrow (q \wedge r))$ - V	$(r \vee s)$ - F $((r \vee s) \rightarrow q)$ - V	V	V	F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1, A_2, A_3, A_4 tomen el valor V y A tome el valor F. Por lo tanto, no hay pruebas suficientes para afirmar que terminará la pandemia.

Ejercicio 2

Sean A,B y C fbfs que cumplen que (A→B) es **contradicción**. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs es **tautología** y cuál **contradicción**. Justificar las respuestas.

A. ((¬A) ∨ B) → C
B. (¬(A→B))→ ((¬A) ∨ B)

1. **La primera fórmula es: $((\neg A) \vee B) \rightarrow C$. Analizamos:**
   - $((\neg A) \vee B)$ es lógicamente equivalente a $(A \rightarrow B)$ y sabemos que $(A \rightarrow B)$ es una contradicción y que además 2 fórmulas lógicamente equivalentes comparten una misma función de verdad, por lo tanto, $((\neg A) \vee B)$ siempre tomará el valor F.
   - Una vez sabemos que la parte izquierda de la implicación es Falsa, no nos hace falta analizar la parte derecha ya que por definición de la conectiva sabemos que $F \rightarrow V \; o \; F = V$, por lo tanto, la fórmula es una tautología.
2. **La primera fórmula es: $(\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow ((\neg A) \vee B)$. Analizamos:**
   - Por definición sabemos que la negación de una una tautología es una contradicción, y viceversa, por lo tanto, $(\neg(A \rightarrow B))$ es la negación de la contradicción que nos proveen será una tautología, por lo tanto, tomará siempre el valor V.
   - $((\neg A) \vee B)$ es lógicamente equivalente a $(A \rightarrow B)$ y sabemos que $(A \rightarrow B)$ es una contradicción y que además 2 fórmulas lógicamente equivalentes comparten una misma función de verdad, por lo tanto, $((\neg A) \vee B)$ siempre tomará el valor F.
   - Vemos que la fórmula queda con la forma $V \rightarrow F$, por lo tanto, por definición de la conectiva vemos que siempre tomará el valor F y, por lo tanto, la fórmula será una

contradicción.

Ejercicio 3

3.1. Indicar si las siguientes afirmaciones valen en el sistema formal L (justificar):

A. $\vdash_L p \to q$

B. $\{p\} \vdash_L r \to (s \to r)$

1. $\vdash_L p \to q$

Análisis:

- Para que la fórmula sea Teorema de L se tiene que cumplir el Teorema de la Corrección que nos dice que toda fbf A que sea Teorema de L debe ser una tautología del sistema L, construimos la tabla de verdad de $p \to q$ y verificamos:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Como se ve, la función de verdad de $p \to q$ no es toda verdadera, por lo tanto, no es una tautología por definición, por lo tanto, no es un Teorema de L lo que hace que la afirmación no valga en el sistema L.
2. $\{p\} \vdash_L r \to (s \to r)$

Análisis:

- La fórmula que nos piden deducir, $r \to (s \to r)$, tiene la estructura del axioma L_1 del sistema formal L, $A \to (B \to C))$. Todo Axioma es un Teorema de L, es decir, se puede deducir desde un conjunto Γ vacío, por lo tanto, esa deducción se vuelve posible dentro del sistema sin importar lo que contenga Γ, por lo tanto, la afirmación vale en el sistema L. La demostración es la siguiente:

$\{p\} \vdash_L r \to (s \to r)$:

1. $r \to (s \to r)$ - Instancia de Axioma L_1 donde $A = r$ y $B = s$.

3.2. Indicar si la siguiente cadena de pasos es una **demostración de teorema en L**. En caso afirmativo indicar qué axiomas y reglas se usan en cada paso. En caso negativo justificar.

(1) $(\neg p \to ((q \to p) \to \neg p))$
(2) $((\neg p \to ((q \to p) \to \neg p)) \to ((\neg p \to (q \to p)) \to (\neg p \to \neg p)))$
(3) $((\neg p \to (q \to p)) \to (\neg p \to \neg p))$

Si, es una demostración válida de un Teorema en L, en particular se está demostrando $\vdash_L ((\neg p \to (q \to p)) \to (\neg p \to \neg p))$. Esto es lo que ocurre en cada paso:

- *Paso 1:* Instancia de Axioma L_1 donde $A = \neg p$ y $B = (q \to p)$.
- *Paso 2:* Instancia de Axioma L_2 donde $A = \neg p$, $B = (q \to p)$ y $C = \neg p$.
- *Paso 3*: Obtención de A mediante aplicación de regla de inferencia MP entre pasos 1 y 2.

Ejercicio 4

Dar una interpretación y traducir las fórmulas presentadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural. El universo o dominio de la interpretación dada deben ser los **números enteros**. Indicar para cada fbf si es **verdadera** o **falsa** en esa interpretación y justificar.

Funciones = {f(x)}

Predicados = $\{A_1^1, A_1^2\}$

1. $\forall(x)(A_1^1(x) \to A_1^1(f(x)))$
2. $\forall(x)\forall(y)(A_1^2(x, y) \to A_1^2(y, x))$

Fórmulas dadas: $(\forall x)(A_1^1(x) \to A_1^1(f(x)))$ y $(\forall x)(\forall y)(A_1^2(x, y) \to A_1^2(y, x))$

Si tomamos una Interpretación I en el dominio de los números enteros, donde:

- $I(f(x))$: "x + 1".
- $I(A_1^1(x))$: "x es positivo".
- $I(A_1^2(x, y))$: "$x \neq y$".

Podemos ver que $(\forall x)(A_1^1(x) \to A_1^1(f(x)))$ es Verdadera en esa interpretación ya que se satisface en todas las valoraciones posibles:

- Con todo $x \geq 0$ vemos que la fórmula quedará con la forma $V \to V$, y por lo tanto será verdadera por definición de la conectiva,
- Y con todo $x < 0$ vemos que la fórmula quedará con la forma $F \to V\ o\ F$ (Con -1 queda V), y por lo tanto también será verdadera por definición de la conectiva.

Traducción: "Para todo x, si x es positivo, entonces su sucesor también lo será".

Podemos ver que $(\forall x)(\forall y)(A_1^2(x,y) \rightarrow A_1^2(y,x))$ también es Verdadera en esa interpretación ya que se satisface en todas las valoraciones posibles:

- Si x e y son diferentes la fórmula queda con la forma $V \rightarrow V$, y por lo tanto será verdadera por definición de la conectiva,
- Si x e y son iguales la fórmula queda con la forma $F \rightarrow F$, y por lo tanto también será verdadera por definición de la conectiva.

Traducción: "Para todo x y para todo y, si x es distinto de y, entonces y será distinto de x".

Ejercicio 5

Indicar si las siguientes fórmulas son **lógicamente válidas** y justificar la respuesta en cada caso:

1. $\forall (x)\, A_1^2(x, x)$
2. $A_1^1(x) \rightarrow A_1^1(x)$

1. $(\forall x) A_1^2(x,x)$

Esta fórmula no es lógicamente válida, para serlo por definición tiene que ser Verdadera en toda Interpretación, si tomamos una Interpretación I en el dominio de los números naturales donde:

- $I(A_1^2(x,y))$: "$x > y$"

Vemos que la fórmula no se satisface para ninguna valoración posible, es Falsa en esa Interpretación, por lo tanto, no podría ser lógicamente válida ya que existe al menos una Interpretación donde es Falsa.
2. $A_1^1(x) \rightarrow A_1^1(x)$

Esta fórmula es lógicamente válida ya que por definición el concepto de fórmula lógicamente válida es análogo al de tautología dentro del sistema L, por lo tanto, si una fbf A es una tautología dentro de L, entonces también será una fórmula lógicamente válida. Dentro del sistema L, la fórmula dada tiene la forma $A \rightarrow A$, que es una tautología, por lo tanto, la fórmula es lógicamente válida.

Parcial 2018

Fundamentos de Teoría de la Computación – 10 de Julio de 2018

EJERCICIO 1:

Traducir la siguiente información al lenguaje de la Lógica Proposicional.

A_1 Si Ana toma el autobús, entonces Ana pierde su entrevista si el autobús llega tarde.
A_2 Ana no vuelve a su casa si: a) Ana pierde su entrevista, y b) Ana se siente deprimida.
A_3 Si Ana no consigue el trabajo, entonces a) Ana se siente deprimida y b) Ana no vuelve a su casa.
A_4 Si Ana no pierde su entrevista, entonces a) Ana no vuelve a su casa y b) Ana no consigue el trabajo.

Decidir si la siguiente es una argumentación valida. Justificar.
$A_1, A_2, A_3 \therefore A_4$

EJERCICIO 2:
Sean A,B fbfs que cumplen que $(\neg A \vee B)$ es tautología. Y C es una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuales contradicciones. Justificar las respuestas.

i. $((\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow C)$
ii. $(C \rightarrow ((\neg A) \vee B))$
iii. $((\neg A) \rightarrow B)$

EJERCICIO 3:
Decir si las siguientes fbf son teoremas de L. En caso afirmativo escribir la demostración. En caso negativo justificar.
$\vdash_L (p \rightarrow p)$
$\vdash_L (q \rightarrow (p \rightarrow p))$
Decir si las siguientes fbf se deducen en L a partir de las premisas. En caso afirmativo escribir la demostración. En caso negativo justificar.
$\{p\} \vdash_L (q \rightarrow p)$
$\{p\} \vdash_L (p \rightarrow q)$

EJERCICIO 4:
Dar una interpretación para cada uno los siguientes lenguajes de primer orden, y traducir en cada caso las fórmulas presentadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

Para estas fbf el dominio debe ser el conjunto de alumnos de FTC.

i. $\forall(x) \neg(x, x)$
ii. $\forall(x)\forall(y) ((x, y)$
iii. $\forall(x)((x) \rightarrow (x))$

Para estas fbf el dominio puede ser cualquiera.

i. $\forall(x)\forall(y)\forall(z)((x, y) \wedge (y, z) \rightarrow (x, z))$
ii. $\forall(x)((x, c) \rightarrow (x, f(x)))$

Ejercicio 1

Variables de Enunciado

- p: "Ana toma el autobús".
- q: "Ana no pierde su entrevista".
- r: "El autobús no llega a tarde".
- s: "Ana vuelve a su casa".
- t: "Ana se siente deprimida".
- u: "Ana consigue el trabajo".

Información

- A_1: $(p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q))$
- A_2: $((\neg q \wedge t) \rightarrow \neg s)$
- A_3: $(\neg u \rightarrow (t \wedge \neg s))$
- A_4: $(q \rightarrow (\neg s \wedge \neg u))$

Analizamos si la argumentación $A_1, A_2, A_3 \therefore A_4$ es válida:

$(p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q))$	$((\neg q \wedge t) \rightarrow \neg s)$	$(\neg u \rightarrow (t \wedge \neg s))$	$(q \rightarrow (\neg s \wedge \neg u))$
p - F $\neg q$ - F $\neg r$ - F $(\neg r \rightarrow \neg q)$ - V $(p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q))$ - V	$\neg q$ - F $\neg s$ - F t - V $(\neg q \wedge t)$ -F $((\neg q \wedge t) \rightarrow \neg s)$ - V	$\neg u$ - F $(t \wedge \neg s)$ -F $(\neg u \rightarrow (t \wedge \neg s))$ - V	q - V $(\neg s \wedge \neg u)$ - F $(q \rightarrow (\neg s \wedge \neg u))$ - F

La forma argumentativa es inválida ya que es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella de tal manera que A_1, A_2, A_3 tomen el valor V mientras que A_4 toma el valor F (def. 1.28). Por lo tanto, no hay pruebas suficientes para asegurar que: Si Ana no pierde su entrevista, entonces Ana no vuelve a su casa y Ana no consigue el trabajo.

Ejercicio 2

1. Fórmula dada: $((\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow C)$

Análisis

- Por equivalencias entre conectivas $(A \rightarrow B)$ es equivalente a $(\neg A \vee B)$, por lo tanto, podemos decir que $(A \rightarrow B)$ es una tautología,
- La negación de toda tautología deriva en una contradicción por definición y viceversa, por lo tanto $(\neg(A \rightarrow B))$ es una contradicción,

- Al ser la primera parte de la implicación una contradicción, por definición de la conectiva podemos asegurar que la fórmula es una tautología.

2. Fórmula dada: $(C \rightarrow ((\neg A \vee B))$

Análisis

- La negación de toda tautología deriva en una contradicción por definición y viceversa, por lo tanto $(\neg(\neg A \vee B))$ es una contradicción,
- Al no poder determinar el valor de verdad de la fbf C, no es posible determinar si la fórmula es una tautología o una contradicción, ya que si $v(C) = V$ entonces sería una contradicción, pero si $v(C) = F$ sería una tautología.

3. Fórmula dada: $((\neg A) \rightarrow B)$

Análisis

- Por proposición 1.24 de Hamilton podemos ver que la fórmula $((\neg A) \rightarrow B)$ es lógicamente equivalente a $(A \vee B)$, por lo tanto, comparten una misma función de verdad por definición, entonces, como $(A \vee B)$ no es ni una tautología ni una contradicción, no podemos determinar si la fórmula dada es una tautología o una contradicción.

Ejercicio 3

Análisis de las que nos dicen si pueden ser Teoremas

- $\vdash_L (p \rightarrow p)$
  1. Por Metateorema de la deducción podemos realizar la deducción $\{p\} \vdash_L (p)$ que es equivalente a la que nos proponen. La deducción se resuelve en un paso:
     1. p - Vale por hipótesis en esa deducción.
  2. Al haberse deducido $\{p\} \vdash_L (p)$ por Metateorema de la Deducción sabemos que también se puede deducir $\vdash_L (p \rightarrow p)$, por lo tanto, la fbf dada es un Teorema de L.
- $\vdash_L (q \rightarrow (p \rightarrow p))$
  1. Podemos aplicar el Metateorema de la deducción 2 veces para obtener la deducción $\{q\} \cup \{p\} \vdash_L (p)$ que es equivalente a la que nos proponen. La deducción se resuelve en una paso:
     1. p - Vale por hipótesis en esa deducción.
  2. Al haberse deducido $\{q\} \cup \{p\} \vdash_L (p)$ por Metateorema de la Deducción sabemos que también se puede deducir $\vdash_L (q \rightarrow (p \rightarrow p))$, por lo tanto, la fbf dada es un Teorema de L.

Análisis de las que nos dicen si se pueden deducir por las premisas

- $\{p\} \vdash_L (q \to p)$
  1. Por Metateorema de la deducción podemos realizar la deducción $\{p\} \cup \{q\} \vdash_L (p)$ que es equivalente a la que nos proponen. La deducción se resuelve en un paso:
     1. p - Vale por hipótesis en esa deducción.
  2. Al haberse deducido $\{p\} \cup \{q\} \vdash_L (p)$ por Metateorema de la Deducción sabemos que también se puede deducir $\{p\} \vdash_L (q \to p)$, por lo tanto, **la fbf se deduce en L a partir de las premisas.**
- $\{p\} \vdash_L (p \to q)$
  1. Desde la aplicación de Axiomas del sistema formal L, hipótesis o aplicación de la regla de deducción MP **no es posible realizar la deducción en L de $\{p\} \vdash_L (p \to q)$ a partir de las premisas.**

Ejercicio 4

1. $(\forall x)\neg P(x,x)$
   - Podemos tomar una Interpretación I en el dominio del conjunto de alumnos de FTC, donde: $I(P(x,y)) =$ "x tiene el mismo legajo que y".
   - "Para todo alumno x de FTC, no se cumple que el alumno x tenga el mismo legajo que el alumno x".
2. $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$
   - Podemos tomar una Interpretación I en el dominio del conjunto de alumnos de FTC, donde: $I(P(x,y)) =$ "x sacó más nota que y".
   - "Para todo alumno x de FTC y para todo alumno y de FTC, se cumple que el alumno x sacó más nota que el alumno y.
3. $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
   - Podemos tomar una Interpretación I en el dominio del conjunto de alumnos de FTC, donde: $I(P(x)) =$ "x estudió para el parcial de Lógica" e $I(Q(x)) =$ "x aprueba el parcial de Lógica".
   - "Para todo alumno x de FTC, se cumple que si el alumno x estudió para el parcial de Lógica, entonces aprobará el examen de Lógica".

Fórmulas con cualquier dominio

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z))$
   - Podemos tomar una Interpretación I en el dominio de los números Naturales donde: $I(P(x,y)) =$ "$x > y$".
   - "Para todo número natural x, para todo número natural y y para todo número natural z, se cumple que si x es mayor que y e y es mayor que z, entonces x es mayor que z".
2. $(\forall x)(P(x,c) \to P(x,f(x)))$

- Podemos tomar una Interpretación I en el dominio de los números Naturales donde: $I(P(x,y)) =$ "$x > y$", $I(fx)) = x - 1$ e $I(c) = 0$.
- "Para todo número natural x, se cumple que si x es mayor que 0, entonces x es mayor que su predecesor".