FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN 2025

Ejemplos

Lógica de Predicados - Semántica

Ejemplo 1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, x_3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $C = \{c\}$, $F = \{f, g\}$, y $P = \{A\}$, con f de aridad 1; g de aridad 2, A de aridad 2. Determinar cual es una fbf abierta y cual es cerrada.

I. $(\forall x_1)(\exists x_2)A(x_1, f(x_2, x_3))$

Respuesta: Es una fórmula abierta, pues contiene variables libres (no ligadas a ningún cuantificador). Ejemplo: x_3 no está ligada a ningún cuantificador.

II. $(\forall x_1)((\exists x_2)A(x_1, x_2) \rightarrow A(g(c),\ x_1))$

Respuesta: Es una fórmula cerrada, pues **NO** contiene variables libres (todas las variables están ligadas a un cuantificador).

III. $A(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_1 \forall x_2)A(x_1, x_2)$

Respuesta: Es una fórmula abierta, pues contiene variables libres x_1, x_2, en el antecedente de la implicación. Notar que, si bien se llaman igual, las variables que están bajo el rango de acción de los cuantificadores $\forall x_1 \forall x_2$, no son las mismas que las primeras. Así, x_1, x_2 en el antecedente no están ligadas a ningún cuantificador, pero x_1, x_2 en el consecuente si lo están. El concepto es análogo a la declaración de variables en un programa, cuando dos variables reciben el mismo nombre en, por ejemplo, funciones anidadas.

Ejemplo 2. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de *i-equivalencia* o contraejemplos según corresponda):

I.	$(\forall x)P(x)$	$(\exists x)P(x)$
II.	$(\exists x)(\exists y)Q(x, y)$	$(\exists y)(\exists x)Q(x, y)$

Respuesta I. <u>Las fórmulas no son lógicamente equivalentes.</u> Para probarlo, lo hacemos por contraejemplo. Buscamos una interpretación I y mostramos que una de las fórmulas es verdadera mientras la otra no lo es. En otras palabras, mostramos que las fórmulas no se implican mutuamente siempre ($(\exists x)P(x)$ no implica $(\forall x)P(x)$).

Dada la siguiente I:

- Dominio de I: *números naturales*
- $I(P(x))$: "$x\ es\ par$"

$(\forall x)P(x)$ **es falsa**. Pues NO es cierto que para todo x vale $P(x)$ (es decir, NO es cierto que que todos los números naturales son pares, ej: ej: $x = 3$ no es par).
$(\exists x)P(x)$ **es verdadera**. Pues SÍ es cierto que existe un x para el cual vale $P(x)$ (es decir, es cierto que existe un número natural par, ej: $x = 2$ es par).

Respuesta II. <u>Las fórmulas son lógicamente equivalentes.</u> Es decir $(\exists x)(\exists y)Q(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)Q(x, y)$ para toda interpretación I. En otras palabras, se cumple $(\exists x)(\exists y)Q(x, y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)Q(x, y)$ y también

$(\exists y)(\exists x)Q(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)Q(x,y)$. Para probar esta doble implicación, utilizamos el concepto de *i-equivalencia* y la def. del cuantificador involucrado (en este caso $\exists$).

Prueba de $(\exists x)(\exists y)Q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)Q(x,y)$

1. Si se cumple $(\exists x)(\exists y)Q(x,y)$, entonces existe un valor de x para el cual $(\exists y)Q(x,y)$ vale..
2. Si $se\ cumple$ $(\exists y)Q(x,y)$, entonces existe un valor de y para el cual $Q(x,y)$ vale.
3. Por paso 1 y 2, tenemos al menos dos valores para x, y tal que $Q(x,y)$ se cumple.
4. Si tenemos al menos un valor para x tal que $Q(x,y)$ se cumple, entonces también vale $(\exists x)Q(x,y)$
5. Si tenemos al menos un valor para y tal que $(\exists x)Q(x,y)$ se cumple, entonces también vale $(\exists y)(\exists x)Q(x,y)$

Prueba de $(\exists y)(\exists x)Q(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)Q(x,y)$

La implicación a la inversa se construye de manera similar a la anterior.

Ejemplo 3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

- Conjunto de constantes: $C = \{c\}$
- Sin símbolos de función: $F = \emptyset$
- Conjunto de símbolos de predicado: $P = \{A\}$.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los ***números Naturales***:

- $I(c) = 0$
- $I(A(x,\ y)) = "x \leq y"$

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Justificar las respuestas.

- $A(c,x)$ es satisfactible en I.
  Respuesta: SI. Existe un valor de x que satisface la fórmula. Por ejemplo, cuando $x = 1$, ocurre que $0 \leq 1$.
- $A(c,x)$ es verdadera en I.
  Respuesta: SI. Pues todo valor de x en los naturales cumple $0 \leq x$
- $(\forall x)\ A(c,x)$ es satisfactible en I.
  Respuesta: SI. Pues todo valor de x en los naturales cumple $0 \leq x$.
- $(\forall x)\ A(c,x)$ es verdadera en I.
  Respuesta: SI. Pues todo valor de x en los naturales cumple $0 \leq 1$.
- $(\forall x)A(c,x)$ es lógicamente válida.
  Respuesta: NO. Podríamos encontrar otra I completamente distinta donde la fórmula sea Falsa (completar y proponer esa I)

Ejemplo 4. Ofrecer una interpretación donde las siguiente fórmula sea verdadera y otra donde sea falsa. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

I. $(\forall x)P(x,f(x))$

<u>Damos una interpretación I **donde la fórmula sea *Verdadera*.**</u>
Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los ***números Naturales***:

- $I(P(x,\ y)) = "x \leq y"$

- $I(f(x))$: "$x + 1$" (sucesor de x)

La fórmula $(\forall x)P(x, f(x))$ es **Verdadera** en la I dada**.**

Representa "Para todo número x en los naturales, se cumple que x es menor a su sucesor".

Damos una interpretación I **donde la fórmula sea *falsa*.**
Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los ***números Naturales***:

- $I(P(x, y)) =$ "$x = y$"
- $I(f(x))$: "$x + 1$" (sucesor de x)

La fórmula $(\forall x)P(x, f(x))$ es **Falsa** en la I dada**.**

Representa: "Para todo número x en los naturales, NO se cumple que x sea igual a su sucesor"

Nota: con esto también podríamos probar que la fórmula no es lógicamente válida ni contradictoria. No es lógicamente válida porque existe una interpretación donde es falsa. No es contradictoria porque existe una interpretación donde es verdadera.

Ejemplo 5. Determinar si las siguientes fbfs son lógicamente válidas o no. Justificar en cada caso.

I. $P(x, y) \to P(x, y)$

Respuesta: *La fórmula **SI** es lógicamente válida porque proviene de una tautología de L (def. 3.31 Hamilton).*

II. $P(x) \to (\forall x)\ P(x)$

Respuesta: *La fórmula **NO** es lógicamente válida. Para justificarlo debemos encontrar una I donde la fórmula sea falsa (completar justificación).*

III. $(\forall x)P(x) \to P(x)$

Respuesta: *La fórmula **SI** es lógicamente válida (completar justificación).*

IV. $(\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$

Respuesta: *La fórmula **SI** es lógicamente válida. Si todos los elementos x del dominio cumplen $P(x)$ (es decir, $P(x)$ es cierto para toda valoración $v(x)$) , entonces al menos existe uno que lo cumple (es decir, al menos existe una valoración $v(x)$ donde $P(x)$ es cierto).*

Ejemplo 6. Si la fbf $P(x)$ es satisfactible, ¿entonces la fbf $(\exists x)\ P(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.

*Respuesta: **NO.** Para probarlo, proponemos una I donde $P(x)$ sea satisfactible (cumpliendo lo que menciona el enunciado) y otra I donde $(\exists x)\ P(x)$ no sea satisfactible (sea falsa), demostrando así que $(\exists x)\ P(x)$ no es lógicamente válida.*

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los ***números Naturales***:

- $I(P(x)) =$ "$x\ es\ par$"

Es satisfactible, pues en los naturales hay un valor de x tal que x es par (ej. $x = 2$).

Sin embargo, existe otra I donde la fórmula no es verdadera (o *no es satisfactible)*. Sea I la siguiente interpretación sobre el dominio de los ***números Naturales***:

- $I(P(x)) = "x\ es\ menor\ a\ 0"$

La fórmula $(\exists x)\ P(x)$ no se satisface (es falsa), pues no existe en los naturales un número x menor 0. Al encontrar una I donde la fórmula sea falsa, es suficiente para demostrar que NO es lógicamente válida.

Nota: en contrapartida, si quisiéramos probar que una fórmula NO es contradictoria, tendríamos que buscar una I donde la fórmula sea verdadera (o se satisfaga).

Notas varias

Valoraciones i-equivalentes

Supongamos que tenemos una fórmula A, con tres variables $x1$, $x2$, $x3$ y estamos trabajando en una interpretación I en el dominio de los números naturales . Una valoración v posible para esas variables puede ser $v(x1) = 4$, $v(x2) = 10$, $v(x3) = 12$. Otra valoración v' 2-equivalente (o x2-equivalente), es aquella donde todas las demás variables mantienen su valor excepto $x2$. Por ejemplo, $v'(x1) = 4$, $v'(x2) = 11$, $v'(x3) = 12$. De igual manera, otra valoración v'' 3-equivalente (o x3-equivalente) a v, es aquella donde todas las demás variables mantienen su valor excepto $x3$. Por ejemplo, $v'(x1) = 4$, $v'(x2) = 10$, $v'(x3) = 13$. Este concepto es útil para iterar y asignar valores a las variables sobre el dominio que estamos trabajando.

Niveles de verdad

En lógica de predicados, dada una fórmula A y una interpretación I, podemos tener distintos "niveles" de verdad para A. Es decir, A puede ser satisfactible, verdadera/falsa, lógicamente válida/ contradictoria. Una fórmula lógicamente válida es verdadera en cualquier interpretación y por lo tanto satisfactible. Por otro lado, una fórmula contradictoria es falsa en cualquier interpretación y por lo tanto no es satisfactible.

Una fórmula satisfactible NO necesariamente es verdadera en una interpretación y una fórmula verdadera en una interpretación no necesariamente es lógicamente válida (la prueba de este tipo de ejercicios se hace por contraejemplo). Otras pruebas:

- Para probar que una fórmula es satisfactible, debemos proveer una interpretación donde esa fórmula sea cierta para algún valor dentro del dominio.
- Para probar que una fórmula NO es lógicamente válida, debemos proveer una interpretación donde esa fórmula NO se satisfaga para alguna valuación Para probar que una fórmula NO es contradictoria, debemos proveer una interpretación donde esa fórmula se satisfaga para alguna valuación.
- Para probar que una fórmula es lógicamente válida, debemos probar que es verdadera en toda interpretación. Por otro lado, para probar que una fórmula es contradictoria. Debemos probar que es falsa en toda interpretación.

Fórmulas abiertas o cerradas

Las fórmulas abiertas son aquellas que no tienen variables libres (caso contrario es cerrada). Una variable libre es aquella que no está ligada a ningún cuantificador en la fórmula. Las fórmulas cerradas, o son verdaderas o son falsas.