Trabajo Práctico Nro 9 - Sistema formal L, axiomas y reglas de inferencia

> Axiomas de L
>
> $(L1) = (A \to (B \to A))$
> $(L2) = ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
> $(L3) = (((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A))$

Ejercicio 1

Dada la siguiente demostración sintáctica válida en L:

1. $(((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p))$
2. $((\neg p) \to (\neg(q \to r)))$
3. $((q \to r) \to p)$

- Identificar el conjunto Γ con menor cantidad de fórmulas bien formadas (fbfs) y la fórmula A tal que $\Gamma \vdash_L A$. Indicar, si es posible, que axioma, hipótesis o regla de inferencia fue aplicado en cada paso de la demostración.

Según la demostración que nos proveen podemos ver:

- El paso *1)* es una instancia del axioma $(L3)$ donde:
  - $A = p$
  - $B = (q \to r)$
- El paso *2)* al no ser axioma y no poder deducirse por una regla de inferencia debe ser una hipótesis de Γ
- El paso *3)* es la aplicación del *Modus Ponens* en *1)* y *2)*.

Como el paso *2)* no es una instanciación de ningún axioma de L o la aplicación de ninguna regla de inferencia, podemos ver que tiene que ser fórmula del conjunto Γ, por lo tanto el conjunto Γ nos queda $\Gamma = \{((\neg p) \to (\neg(q \to r)))\}$. La fórmula A es $((q \to r) \to p)$.

- ¿Es A un teorema de L? Justificar.

Para que A sea una teorema de L se tiene que cumplir $\emptyset \vdash_L A$ siendo $A = ((q \to r) \to p)$, pero en este caso para deducir A se tuvo que usar la hipótesis del paso *2)*. Si fuera un teorema de L

tendríamos que poder demostrar A sin ninguna hipótesis.

- ¿Es A tautología? Justificar.

Al haber demostrado que A no es una teorema de L, podemos decir que A **no es una tautología** si nos apoyamos en la definición que nos dice *"$\vdash_L A$, entonces $\models A$."* Es decir, todo lo demostrable es verdadero (tautología), al A no ser un teorema de L sabemos que no es tautología.

Ejercicio 2

Sean A B C, y tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

Ayuda: es posible utilizar, si es necesario, propiedades ya demostradas en el libro de Hamilton, como por ejemplo, metateorema de la Deducción, silogismo hipotético (SH), y otros teoremas ya demostrados en el libro (ver prop 2.11a y prop 2.11b).

1. $\vdash_L (((\neg A) \to A) \to A)$

Esta demostración se encuentra en el **libro de Hamilton** se llega a ella realizando la demostración de $\vdash_L ((\neg A) \to A)$ utilizando los 3 axiomas del sistema L y las reglas de inferencia *Modus ponens* y *Silogismo hipotético*. Al haber demostrado $\vdash_L ((\neg A) \to A)$, por el *Metateorema de la Deducción* también se demuestra $\vdash_L (((\neg A) \to A) \to A)$.

2. $\vdash_L (((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B))$

Vamos a usar el **Metateorema de la Deducción** 2 veces para poder demostrar $\vdash_L (((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B))$ de tal forma que la demostración que podemos hacer es esta:

Demostración de $\emptyset \cup \{((\neg B) \to (\neg A))\} \cup \{((\neg B) \to A)\} \vdash_L B$

- $(((\neg B) \to (\neg A)) \to (A \to B))$ - *Instancia de Axioma $L3$*
- $((\neg B) \to (\neg A))$ - *Hipótesis*
- $(A \to B)$ - *Modus ponens entre 1 y 2*
- $((\neg B) \to A)$ - *Hipótesis*
- $((\neg B) \to B)$ - *Silogismo Hipotético entre 3 y 4*
- $(((\neg B) \to B) \to B)$ - *Instancia de la propiedad 2.11b*
- B - *Modus ponens entre 5 y 6*

Al lograr esta demostración por el Metateorema de la deducción se cumple la demostración $\vdash_L (((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B))$.

3. $\{((A \to B) \to C),\ B\} \vdash_L (A \to C)$

Esta demostración se encuentra en la teoría, la explican de esta forma:

- $((B \to (A \to B))$ - *Instancia de Axioma $L1$*
- B - *Hipótesis*
- $(A \to B)$ - *Modus ponens entre 1 y 2*
- $((A \to B) \to C)$ - *Hipótesis*
- C - *Modus ponens entre 3 y 4*
- $((C \to (A \to C))$ - *Instancia de Axioma $L1$*
- $(A \to C)$ - *Modus ponens entre 5 y 6*

También se puede hacer más sencillo demostrarlo aplicando el Metateorema de la deducción demostrando $\{((A \to B) \to C),\ B\} \cup \{A\} \vdash_L (C)$

- $((B \to (A \to B))$ - *Instancia de Axioma $L1$*
- B - *Hipótesis*
- $(A \to B)$ - *Modus ponens entre 1 y 2*
- $((A \to B) \to C)$ - *Hipótesis*
- C - *Modus ponens entre 3 y 4*

Al lograr esta demostración por el Metateorema de la deducción se cumple la demostración $\{((A \to B) \to C),\ B\} \vdash_L (A \to C)$.

Ejercicio 3

Sea $\mathit{\Gamma}$ un conjunto de fbfs del sistema formal L. Se sabe que $\mathit{\Gamma} \vdash_L A$ ¿Es cierto que para todo $\mathit{\Gamma}_i$ tal que $\mathit{\Gamma}_i \subset \mathit{\Gamma}$; $\mathit{\Gamma}_i \vdash_L A$? Fundar.

No necesariamente, porque la demostración de $\mathit{\Gamma} \vdash_L A$ puede depender de varias fórmulas de $\mathit{\Gamma}$ trabajando juntas. Si tomamos un subconjunto $\mathit{\Gamma}_i$ que no contenga todas las fórmulas necesarias, entonces $\mathit{\Gamma}_i \vdash_L A$ podría ser falso. Podemos demostrarlo con el siguiente contra ejemplo:

Si tomamos a $\mathit{\Gamma} = \{A,\ A \to B\}$ y queremos demostrar $\mathit{\Gamma} \vdash_L B$ esto es posible:

- A - *Hipótesis*

- $A \to B$ - *Hipótesis*
- B - *Modus ponens entre 1 y 2*

Pero si tomamos el subconjunto $\Gamma_i = \{A\}$ no podemos demostrar $\Gamma_i \vdash_L B$ porque sin $A \to B$ no podríamos aplicar el *Modus ponens* para obtener B

De esta forma encontramos un **contra ejemplo** que demuestra que no es cierto que para todo Γ_i tal que $\Gamma_i \subset \Gamma;\ \Gamma_i \vdash_L A$

Ejercicio 4

Sea A una fbf y Γ un conjunto de fbfs. Si se cumple $\Gamma \vdash_L A$, ¿Es cierto que vale $\vdash_L A$ para todo A y para todo Γ? Justificar.

No es cierto que si se cumple $\Gamma \vdash_L A$ vale $\vdash_L A$ para todo A y para todo Γ. La relación $\Gamma \vdash_L A$ significa que A es **derivable a partir de Γ** en el sistema L, pero esto **no implica** que A sea un **teorema del sistema L**. Esto lo podemos demostrar con el siguiente **contra ejemplo:**

Si tomamos $\Gamma = \{p\}$ se cumple que $\Gamma \vdash_L (p)$ porque p pertenece a Γ, pero $\emptyset \vdash_L (p)$ **no es cierto**, porque p no es un teorema de L, es decir, no es demostrable sin premisas.

De esta forma encontramos un **contra ejemplo** que demuestra que no es cierto que si se cumple $\Gamma \vdash_L A$ vale $\vdash_L A$ para todo A y para todo Γ.

Ejercicio 5

Determinar si las siguientes afirmaciones son válidas o no en el sistema formal L. Justificar en cada caso.

1. $\{q\} \vdash_L (p \to q)$

Sí, esta afirmación es válida. Podemos construir una demostración formal que valide $\{q\} \vdash_L (p \to q)$ de esta forma por ejemplo:

- $(q \to (p \to q))$ - *Instancia de $L1$*
- q - *Hipótesis*
- $(p \to q)$ - *Modus ponens entre 1 y 2*

O podríamos demostrarlo por el **Metateorema de la deducción** demostrando $\{q\} \cup \{p\} \vdash_L (q)$

- q - *Hipótesis*

Al poder demostrar q de esa forma, sabemos que se cumple $\{q\} \vdash_L (p \rightarrow q)$

2. $\{p \rightarrow q\} \vdash_L (q)$

No, esta afirmación no es válida. La clave acá es que si bien nos dan a $(p \rightarrow q)$ como premisa, no tenemos como premisa a p, por lo tanto no sabemos si p es verdadera o no, si p fuese falsa, q podría ser verdadera o falsa y aún así la premisa $(p \rightarrow q)$ sería verdadera, por lo tanto, **no hay garantía de que q sea verdadera ni deducible**. Además, necesitaríamos a p para poder aplicar *Modus ponens* y de esta forma demostrar q, y sabemos que p no es un axioma de L ni tampoco teorema de L, por lo tanto, tendría que ser una premisa si o si.

Ejercicio 6

Sean $A,\ B$ y C fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \cup \{A, B\} \vdash_L C$ y también se sabe que $\Gamma \vdash_L A$.

1. ¿Es cierto que $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$? Justificar.

Para saber si podemos demostrar $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$ primero vamos a ver qué podemos demostrar desde Γ con la información que nos brindan:

- $\Gamma \vdash_L A$
- $\Gamma \vdash_L (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ - *Por Metateorema de la deducción*
- $\Gamma \vdash_L (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ - *Por Metateorema de la deducción*

Una vez sabemos esta información, podemos pensar que es equivalente demostrar $(C \rightarrow B)$ a partir de la información que nos brinda Γ, es decir, podríamos tener la demostración: $\{A, (A \rightarrow (B \rightarrow C)), (B \rightarrow (A \rightarrow C))\} \vdash_L (C \rightarrow B)$. A su vez, gracias a el *Metateorema de la deducción* sabemos que es equivalente también demostrar: $\vdash_L (A \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (C \rightarrow B))))$.

Ahora tenemos esta última fórmula que si se demuestra que es un teorema en L quedaría demostrado también $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$ como algo cierto, yo voy a proponer un **contra ejemplo** para demostrar que no es cierto, tomamos:

- $A = p$
- $B = q$
- $C = r$

p	q	r	$(r \to q)$	$(q \to (p \to r))$	$(p \to (q \to r))$	$(p \to ((p \to (q \to r)) \to ((q \to$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	X
F	V	V	V	V	V	X
F	V	F	V	V	V	X
F	F	V	F	V	V	X
F	F	F	V	V	V	X

La fórmula de la última columna es: $(p \to ((p \to (q \to r)) \to ((q \to (p \to r)) \to (r \to q))))$

Como ya encontramos una fila donde el valor final de la fórmula es **Falso** queda demostrado que no es una tautología, por lo tanto, la demostración $\vdash_L (A \to ((A \to (B \to C)) \to ((B \to (A \to C)) \to (C \to B))))$ no es válida, por lo tanto, $\Gamma \vdash_L (C \to B)$ **no es cierto.**

2. ¿Es cierto que $\emptyset \vdash_L (A)$? Justificar.

Esto no es cierto, se probó para el Ejercicio 4 que aunque se sepa que $\Gamma \vdash_L A$ no necesariamente se cumple que $\emptyset \vdash_L (A)$.

Ejercicio 7

¿Es el sistema formal L decidible? Justificar.

Ayuda: si es decidible, debería ser posible determinar (decidir) para cada fbf, si es o no teorema de L.

Si, el sistema formal L es decidible, nosotros podemos construir un algoritmo que decida si una fbf es una tautología construyendo su tabla de verdad y verificando que todos sus valores finales sean Verdaderos, de esta forma, si es una tautología entonces es un teorema en L.