ALGUNOS EJEMPLOS DE MATEMÁTICAS NO RECURSIVAS

Existen muchas áreas de las matemáticas en las que aparecen problemas que son no recursivos. Así, se nos puede presentar una clase de problemas para los que la respuesta en cada caso es o "si" o "no", pero para los que no existe ningún algoritmo general que determine cuál de los dos es el caso. Algunas de estas clases de problemas tienen una apariencia notablemente sencilla.

Consideremos, en primer lugar, el problema de encontrar soluciones enteras de sistemas de ecuaciones algebraicas con coeficientes también enteros. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones *diofánticas* (en honor del matemático griego Diofanto, que vivió en el siglo III antes de Cristo y estudió este tipo de ecuaciones). Un conjunto de tales ecuaciones podría ser

$$z^3 - y - 1 = 0 \qquad yz^2 - 2x - 2 = 0, \qquad y^2 - 2xz = 0$$

y el problema consiste en determinar si tienen solución para valores *enteros* de x, y, z. En este caso particular sí la tienen, y la solución está dada por

$$x = 13, \qquad y = 7, \qquad z = 2$$

Sin embargo, no existe algoritmo que establezca lo mismo en el caso de un conjunto arbitrario*[*] de ecuaciones diofánticas. La aritmética diofántica, pese a la naturaleza elemental de sus ingredientes, es parte de las matemáticas no algorítmicas.

(Un ejemplo algo menos elemental lo constituye la *equivalencia topológica de variedades*. Lo menciono debido a su importancia para los temas discutidos en el capítulo VIII. Para entender lo que es una "variedad" consideremos primero un lazo de cuerda, que es una variedad de *una* sola dimensión, y consideremos luego una superficie cerrada, una variedad de *dos* dimensiones. A continuación tratemos de imaginar una "superficie" con *tres* o un número mayor de dimensiones. "Equivalencia topológica" de dos variedades significa que una de ellas puede ser deformada hasta que coincida con la otra en un movimiento continuo, sin raspar ni pegar. Por ejemplo, una superficie esférica y la superficie de un cubo son topológicamente equivalentes, mientras que ambas son topológicamente no equivalentes a la superficie de un anillo o de una taza de té, siendo estas dos últimas topológicamente equivalentes entre sí.

Ahora bien, para variedades bidimensionales existe un algoritmo útil para saber si dos de ellas son o no topológicamente equivalentes — lo que corresponde, en realidad, a contar el número de "asas" que tiene cada superficie. En el caso de tres dimensiones todavía no se conoce una respuesta, pero sí se sabe que para cuatro o más dimensiones *no* existe algoritmo que ayude a conocer la equivalencia. El caso tetradimensional tiene cierta importancia para la física a partir de que, según la teoría de la relatividad general de Einstein, espacio y tiempo constituyen conjuntamente una 4-variedad; véase capítulo V. Geroch y Hartle 1986 han sugerido que esta propiedad no algorítmica podría tener importancia para la "gravitación cuántica"; cfr. también capítulo VIII.)

Consideremos un problema distinto: el *problema de las palabras*.[11] Supongamos que tenemos algún alfabeto de símbolos y consideremos varias cadenas de estos símbolos, que llamaremos

[*] Esto da una respuesta negativa al décimo problema de Hilbert mencionado (Véase, por ejemplo, Devlin, 1988.) Aquí el número de variables no está restringido, aunque se sabe que no son necesarias más de nueve para que la propiedad no-algorítmica sea válida.

[11] Este problema particular se denomina con más propiedad "el problema de las palabras para semigrupos". Existen también otras formas del problema de las palabras en las que las reglas son ligeramente diferentes No nos ocuparemos de esto aquí.

palabras. Las palabras mismas no necesitan tener un significado, pero habrá una lista (finita) de "igualdades" entre ellas, que usaremos para derivar otras nuevas "igualdades". Esto se hará sustituyendo palabras de la lista inicial con otras palabras (normalmente más largas) que las contengan como porciones. Cada una de esas porciones puede ser reemplazada por otra porción que, según la lista, se considere igual a ella. El problema entonces es decidir, para un par de palabras dado, si de acuerdo con estas reglas son "iguales" o no.

Como ejemplo podríamos tener en nuestra lista inicial

LAS = AS

ASO = A

NASO = RON

SAN = LIRÓN

GAS = DEL

A partir de éstas podemos derivar, por ejemplo

BOA = BOLA

mediante el uso de sustituciones sucesivas de la segunda, la primera, y de nuevo la segunda de las relaciones de la lista inicial:

BOA = BOASO = BOLASO = BOLA

El problema es: dado un par de palabras, ¿podemos obtener una a partir de la otra utilizando simplemente estas sustituciones? ¿Podemos, por ejemplo, ir de GASOLINA a DEAN o, pongamos por caso, de GASTAR a DELATAR? En el primer caso la respuesta resulta ser "sí", mientras que en el segundo caso es "no". Cuando la respuesta es "sí", la manera normal de probarlo sería simplemente mostrando una cadena de igualdades en la que cada palabra se obtiene de la precedente mediante el uso de una relación permitida. Así (indicando en **negritas** las letras que van a ser cambiadas, y en *itálicas* las letras que acabamos de cambiar):

G**ASO**LINA = CALIN**A** = GALI**N**ASO — GA**LI**RON = **GA**SAN

= *DELAN* = DELASON = DEASON = DEAN

Cómo podemos decir que es imposible ir de GASTAR a DELATAR por medio de las reglas permitidas? Necesitamos pensar un poco más, pero no es difícil ver que existen varias formas de lograrlo. La más simple puede ser la siguiente: en cada "igualdad" de nuestra lista inicial, el número de As más el número de Rs más el número de Ds es el mismo en cada lado. Por lo tanto, el número total de As, Rs y Ds no puede cambiar a lo largo de cualquier sucesión de sustituciones permitidas. Pero como dicho número es 3 para GASTAR mientras que es 4 para DELATAR, no hay sustituciones permitidas para ir de GASTAR a DELATAR.

Nótese que cuando las dos palabras son "iguales" podemos probarlo exhibiendo una cadena formal de símbolos permitidos, con las reglas que nos han sido dadas, mientras que en el caso en que son "desiguales" tenemos que recurrir a argumentos *acerca* de esas reglas. Hay un algoritmo evidente que podemos utilizar para establecer la "igualdad" entre palabras, siempre que las palabras *sean* efectivamente "iguales". Todo lo que tenemos que hacer es un listado lexicográfico

de todas las secuencias posibles de palabras, y luego tachar de la lista las cadenas en las que haya un par de palabras consecutivas donde la segunda no se siga de la primera siguiendo las reglas establecidas. Las secuencias restantes proporcionan todas las "igualdades" buscadas entre palabras. Sin embargo, no existe, en general, un algoritmo tan obvio para determinar cuándo dos palabras *no* son "iguales", y tenemos que recurrir a la "inteligencia" para establecer el hecho. (Realmente necesité algún tiempo antes de encontrar un "truco" para establecer que GASTAR y DELATAR *no* son "iguales"; con otro ejemplo podría ser necesario un "truco" diferente. La inteligencia, dicho sea de paso, es también útil —aunque no indispensable— para establecer la *existencia* de una "igualdad".)

No es excesivamente difícil encontrar un algoritmo que verifique si dos palabras de la lista particular dada al principio son "desiguales" cuando efectivamente lo son. Y no obstante, para *encontrar* el algoritmo que funcione en este caso necesitamos ejercitar la inteligencia. Porque no hay un único algoritmo que se pueda utilizar universalmente para *todas* las elecciones posibles de la lista inicial; no hay solución algorítmica para el problema de las palabras. El problema general de la palabra pertenece a las matemáticas no recursivas.

Existen incluso ciertas selecciones *particulares* de la lista inicial para las que no hay ningún algoritmo con el cual saber cuándo dos palabras son desiguales. Una de éstas viene dada por

AH = HA

OH = HO

AT = TA

OT = TO

TAI = IT

HOI = IH

THAT = ITHT

(Esta lista está adaptada de la presentada en 1955 por G. S. Tseitin y Dana Scott; véase Gardner, 1958, p. 144.)

Por lo tanto, el problema particular de las palabras constituye por *si mismo* un ejemplo de matemáticas no recursivas, en el sentido de que si usamos esta lista inicial particular no podemos decidir algorítmicamente si dos palabras dadas son o no "iguales".

El problema general de las palabras surgió a partir de consideraciones de lógica matemática formalizada ("sistemas formales", etc.). La lista inicial juega el papel de un sistema de axiomas, y la regla de sustitución de palabras, el papel de las reglas formales de inferencia. La demostración de la no recursividad del problema de la palabra surge de ahí.

Como ejemplo final de un problema matemático que es no recursivo, consideremos la cuestión del recubrimiento del plano euclidiano con formas poligonales, en donde se nos da un número finito de formas diferentes y se pregunta si es posible recubrir completamente el plano, sin huecos ni solapamientos, con el mero empleo de estas formas. Una disposición de formas semejante se denomina una *teselación* del plano. Estamos familiarizados con el hecho de que estas teselaciones son posibles si sólo se utilizan cuadrados, o sólo triángulos equiláteros, o sólo

hexágonos regulares (como se ilustra en la fig. X.2, capítulo X), pero no si sólo se utilizan pentágonos regulares.

Habrá muchas otras formas que teselarán el plano, tales como cada uno de los dos pentágonos *irregulares* ilustrados en la fig. IV.6. Con un *par* de formas las teselaciones pueden ser mucho más elaboradas. En la fig. IV.7 se dan dos ejemplos sencillos. Todos los ejemplos dados hasta ahora tienen la propiedad de ser *periódicos*, lo que significa que son exactamente repetitivos en dos direcciones independientes. En términos matemáticos, decimos que existe un *paralelogramo periodo* —un paralelogramo tal que, si lo marcamos de alguna manera y luego lo repetimos una y otra vez en las dos direcciones paralelas a sus lados, reproducirá el patrón de la teselación dada. En la fig. IV.8 se muestra un ejemplo en el que una teselación periódica con una tesela en forma de espina es representada a la izquierda y relacionada con un paralelogramo periodo cuya teselación periódica se muestra a la derecha.

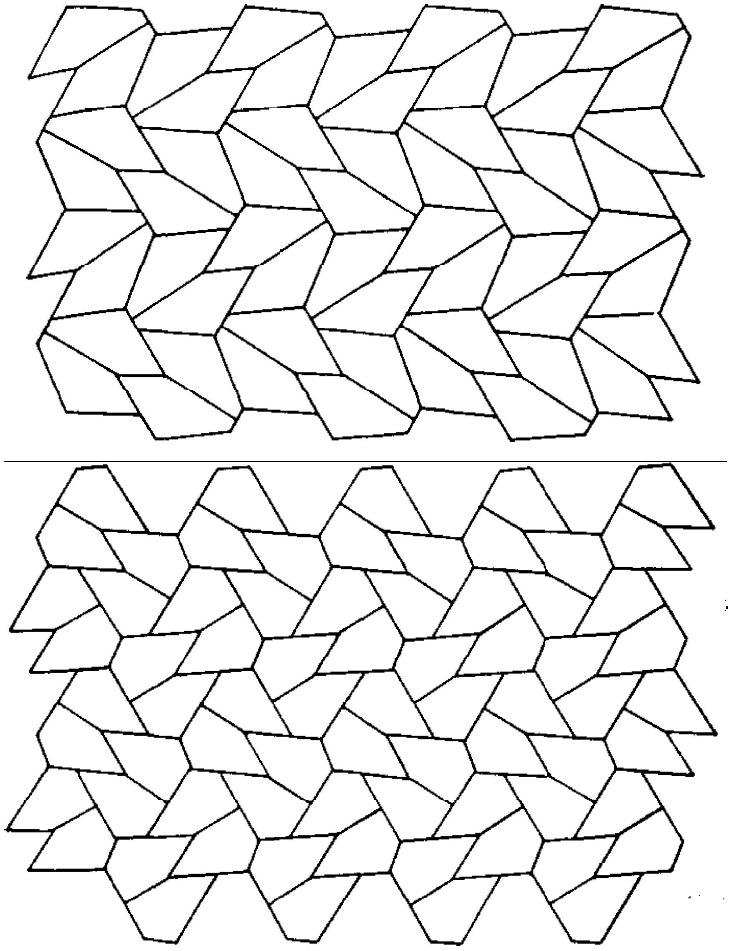

FIGURA IV.6. *Dos ejemplos de teselaciones periódicas del plano que utilizan —cada una— una sola forma, descubiertos por Marjorie Rice en 1976.*

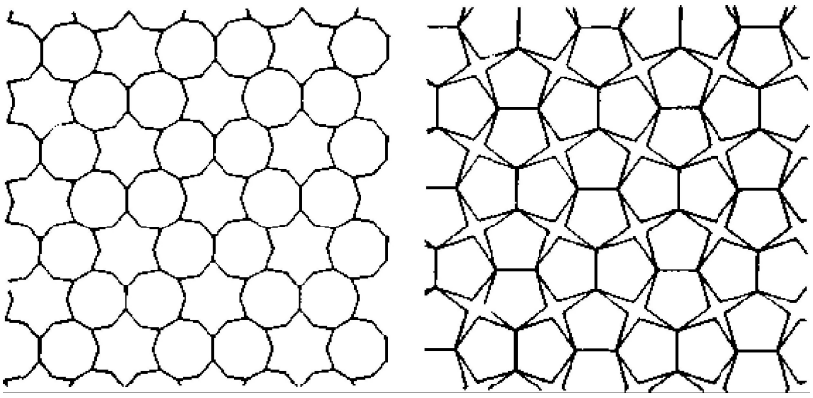

FIGURA IV. 7. *Dos ejemplos de teselaciones periódicas del plano, de dos formas cada una.*

Ahora bien, existen muchas teselaciones del plano que *no* son periódicas. La fig. IV.9 muestra tres teselaciones "espirales" no periódicas con la misma tesela en forma de espina que la de la fig. IV.8. Esta forma particular de tesela se conoce como *versatile*[*] y fue ideada por B. Grünbaum y G. C. Shephard (1981, 1987), aparentemente con base en una forma anterior debida a H. Voderberg. Nótese que el versátil teselará tanto periódica como no periódicamente. Esta propiedad es compartida por muchas otras formas de tesela y conjuntos de formas de tesela. ¿Existen teselas simples o conjuntos de ellas que teselen el plano *sólo* no periódicamente? La respuesta a esta pregunta es "sí". En la fig. IV. 10 he representado un conjunto de seis teselas, construido por el matemático estadounidense Raphael Robinson (1971), que teselan el plano entero pero sólo de manera no periódica.

Merece la pena entrar un poco en la historia de cómo surgió este conjunto no periódico de teselas (*cfr*. Grünbaum y Shepard, 1987). En 1961 el lógico chino-estadounidense Hao Wang abordó la cuestión de si hay o no un *procedimiento de decisión* para el problema de la teselación, es decir, si existe un *algoritmo* para prever si un conjunto finito de formas poligonales diferentes teselará el plano entero.[**] Wang demostró que tal procedimiento de decisión existiría si se pudiera probar que todo conjunto finito de teselas diferentes que tésele el plano, también lo hará periódicamente.

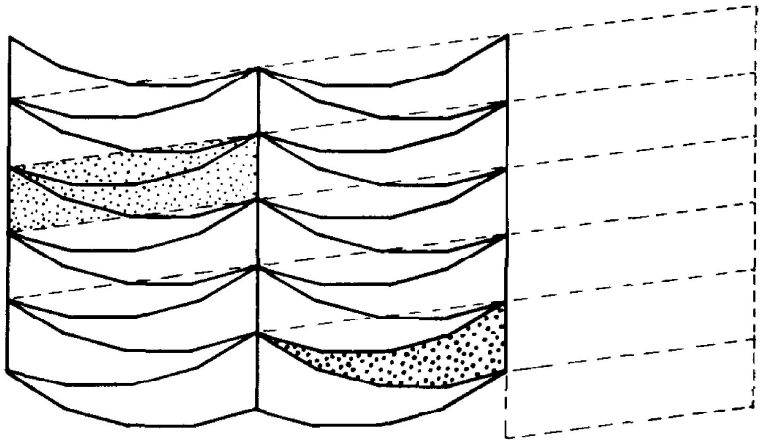

FIGURA IV. 8. *Una teselación periódica, ilustrada en relación con su paralelogramo periodo.*

[*] Juego de palabras entre "tile" = tesela y "versatile" = versátil. [N. del T.]

[**] En realidad, Hao Wang concibió un problema ligeramente distinto —con teselas cuadradas, sin rotación y con bordes parejos coloreados, pero estas diferencias no son importantes aquí para nosotros.

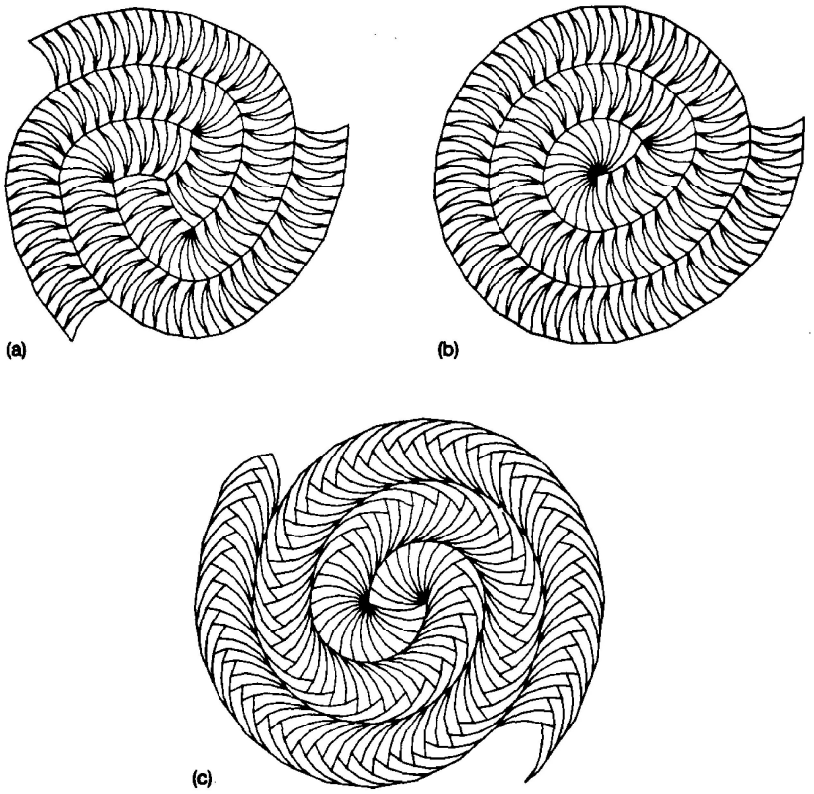

FIGURA IV.9. *Tres teselaciones "espirales" no periódicas que utilizan la misma forma "versátil" que se usó en la fig. IV.8.*

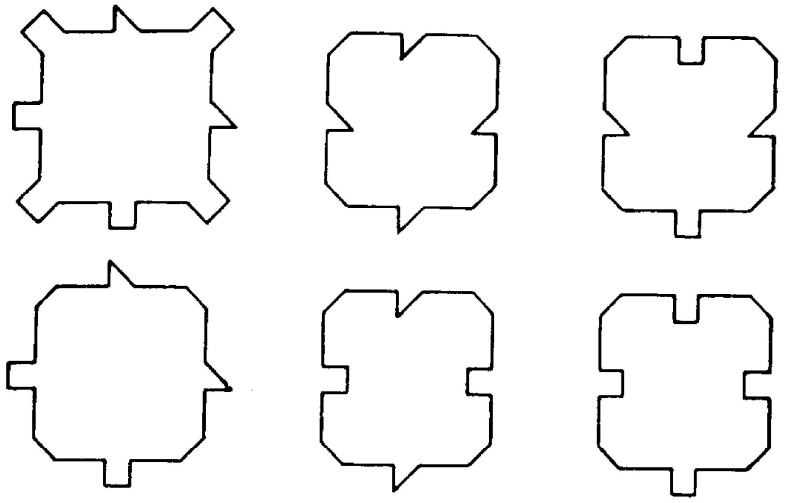

FIGURA IV. 10. *Las seis teselas de Raphael Robinson que teselan el plano sólo de forma no periódica.*

Yo pienso que en esa época existía la sensación generalizada de que era poco probable que pudiera existir un conjunto que violase esta condición, es decir, un conjunto "aperiódico" de teselas. Sin embargo, en 1966, Robert Berger fue capaz de probar, siguiendo algunas de las líneas que Hao Wang había sugerido, que *no* existe procedimiento de decisión para el problema

de la teselación: el problema de la teselación forma también parte de las matemáticas no recursivas.[12]

Del resultado previo de Hao Wang se deduce que debe existir un conjunto aperiódico de teselas, y Berger fue capaz de probarlo, encontrando el primero de estos conjuntos. Pero, debido a lo complicado de esta línea argumental, su conjunto incluía un número desorbitadamente alto de teselas diferentes, originalmente 20426. Con algún ingenio adicional, Berger pudo reducir su número a 104, y más tarde, en 1971, Raphael Robinson logró hacerlo hasta las seis mostradas en la fig. IV. 10.

En la figura IV. 11 se muestra otro conjunto aperiódico de seis teselas. Yo mismo lo presenté en 1973, siguiendo una línea de pensamiento bastante diferente. (Volveré a este tema en el capítulo X en cuya fig. X.3 se representa una mosaico teselado con estas formas.) Después de que el conjunto aperiódico de seis teselas de Robinson hubiera llamado mi atención, pensé varias operaciones de recortado y repegado y con ellas pude reducirlo a dos. En la fig. IV. 12 se muestran dos esquemas opcionales. Las estructuras necesariamente no periódicas que exhiben las teselaciones completas tienen muchas propiedades notables, incluso una estructura cuasi-periódica con simetría quíntuple aparentemente imposible en cristalografía. Más tarde volveremos sobre este punto.

Es notable que una área de las matemáticas tan "trivial" como ésta —a saber, el recubrimiento del plano con formas congruentes—, que parece casi un juego de niños, forme parte de las matemáticas no recursivas, pero en esa área hay muchos problemas difíciles y no resueltos. No se sabe, por ejemplo, si existe un conjunto aperiódico que conste de *una sola* tesela.

El problema de la teselación, tal como lo tratan Wang, Berger y Robinson, utiliza teselas basadas en cuadrados. Yo admito aquí polígonos de forma general, y se requiere un método de computación para mostrar las teselas individuales. Una manera de hacerlo sería señalar sus vértices como puntos en el plano de Argand, y estos puntos pueden perfectamente darse como números algebraicos.

¿ES EL CONJUNTO DE MANDELBROT SEMEJANTE A LA MATEMÁTICA NO RECURSIVA?

Volvamos ahora a nuestro anterior examen sobre el conjunto de Mandelbrot. Voy a suponer, con propósito de ilustración, que el conjunto de Mandelbrot es no recursivo en un sentido. Puesto que su complemento es recursivamente numerable, esto querría decir que el propio conjunto no sería recursivamente numerable. Es posible que la forma del conjunto de Mandelbrot nos dé algunas lecciones acerca de la naturaleza de los conjuntos no recursivos y las matemáticas no recursivas. Volvamos a la Fig. III.2 que ya encontramos en el capítulo III.

[12] Hanf (1974) y Myers (1974) han demostrado, además, que hay un solo conjunto (de un gran número de teselas) que teselará el plano sólo de un modo *no-computable*.

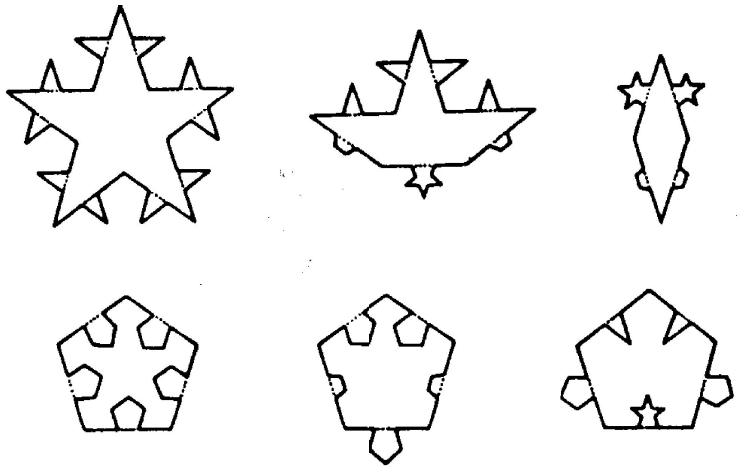

FIGURA IV. 11. *Otro conjunto de seis teselas que tesela el plano sólo de forma no periódica.*

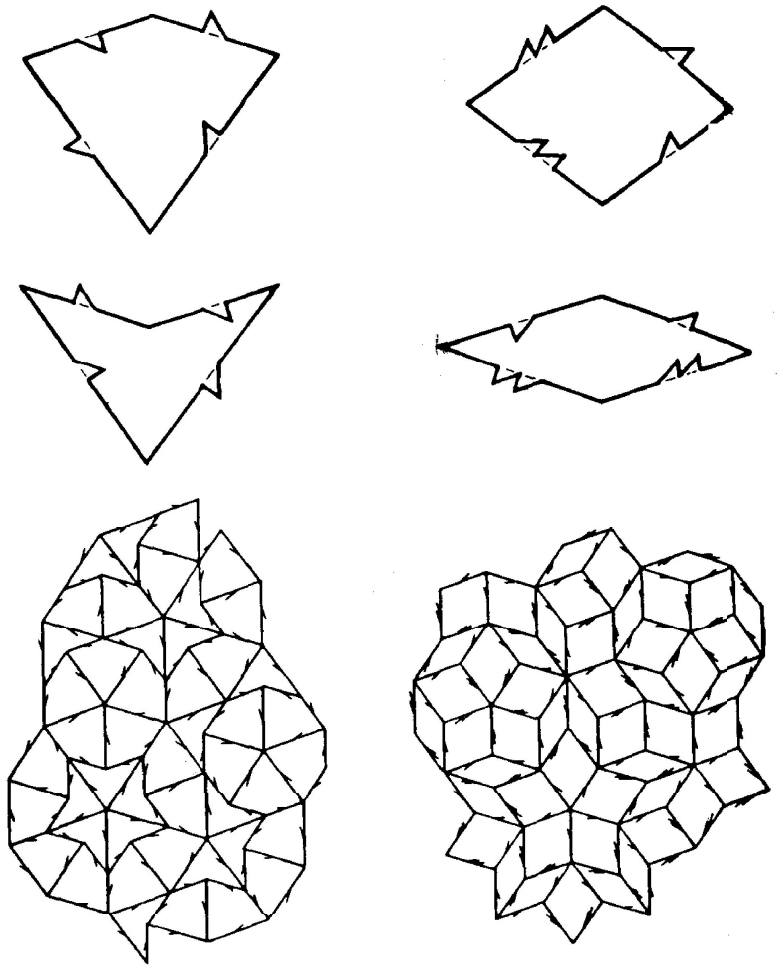

FIGURA IV. 12. *Dos pares, cada uno de los cuales teselará sólo de forma no periódica,* "*teselas de Penrose*", *y las regiones del plano teseladas con cada par.*

La mayor parte del conjunto parece estar ocupada por una extensa región en forma de corazón, que he llamado A en la fig. IV. 13. La forma se conoce como un *cardioide* y su región interior se define matemáticamente como el conjunto de puntos *c* del plano de Argand que surgen de la expresión

$$c=z-z^2,$$

donde z es un número complejo cuya distancia al origen es menor que ½. Este conjunto es recursivamente enumerable en el sentido sugerido antes: existe un algoritmo tal que, cuando se aplica a un punto en el interior de la región, verificará que el punto está efectivamente en dicha región interior. El algoritmo real se obtiene a partir de esa fórmula.

Consideremos ahora la región en forma de disco inmediatamente a la izquierda del cardioide principal (región B en la fig. IV.13). Su interior es el conjunto de puntos

$$c= z-1$$

donde z dista del origen menos de 1/4 .

Esta región es el interior de un disco. Es decir, se trata del conjunto de puntos dentro de un círculo exacto. De nuevo esta región es recursivamente enumerable en el sentido anterior. ¿Qué sucede con las otras "verrugas" del cardioide? Consideremos las dos verrugas que siguen en tamaño. Estas son las gotas más o menos circulares que aparecen encima y debajo del cardioide en la fig. III.2 y que están marcadas como C_1, C_2 en la fig. IV. 13. Vienen dadas en términos del conjunto

$$c^3 + 2c^2 + (1-z)c + (1-z)^2 = 0$$

en donde z recorre la región que está a una distancia 1/8 del origen.

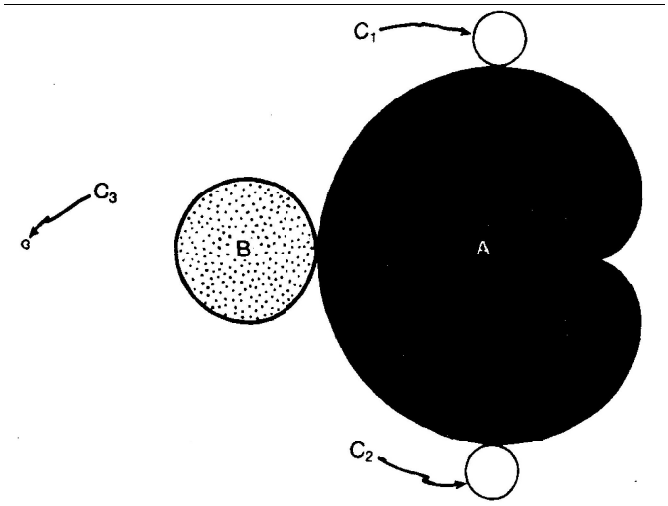

FIGURA IV. 13. *Las partes principales del interior del conjunto de Mandelbrot pueden ser definidas mediante sencillas ecuaciones algorítmicas.*

En realidad, esta ecuación nos da no solamente estas dos gotas (a la vez) sino también la forma "bebé" de tipo cardioide que aparece a la izquierda en la fig. III.2 —la región principal de la fig. III.1— y es la región marcada C_3 en la fig. IV. 13. de nuevo, estas regiones (juntas o separadas) constituyen conjuntos recursivamente enumerables (en el sentido sugerido antes), debido a la existencia de la fórmula anterior.

A pesar de la sugerencia en el sentido de que el conjunto de Mandelbrot puede ser no recursivo, ya hemos sido capaces de vaciar las áreas mayores del conjunto con algoritmos definidos y no-demasiado-complicados. Parece que este proceso continuará. Las regiones más visibles del conjunto —y ciertamente un porcentaje abrumador de su área (si no toda ella)— pueden tratarse

algorítmicamente. Si, como estoy suponiendo, el conjunto completo es realmente no recursivo, entonces las regiones que no pueden alcanzarse mediante nuestros algoritmos deben ser muy delicadas y difíciles de encontrar.

Más aún, cuando hayamos localizado una de estas regiones podremos mejorar nuestros algoritmos y llegar incluso a las regiones concretas. Pero entonces habría (si es correcta mi suposición de no recursividad) *otras* regiones ocultas aún más profundamente, tanto que ni siquiera nuestro algoritmo mejorado sería capaz de llegar. Una vez más, mediante esfuerzos prodigiosos de intuición, ingenio y aplicación, podríamos localizar una de estas regiones; pero todavía habría otras que se nos escaparían. Y así.

Nada de esto es distinto de la manera frecuente en que proceden las matemáticas sobre áreas en las que los problemas son difíciles y presumiblemente no recursivos. Los problemas más comunes pueden ser tratados con sencillos procedimientos algorítmicos, algunos de ellos conocidos durante siglos, pero otros escaparán de la red o requerirán de procedimientos más sofisticados. Por supuesto, los que aún escapen intrigarán particularmente a los matemáticos y les aguijonearán para desarrollar métodos más potentes, basados sobre cada vez más profundas reflexiones en torno a la naturaleza de las matemáticas implicadas. Hay algo de intuición en nuestra comprensión del mundo. En los problemas de la teselación y de las palabras subyace mucho de todo esto, no importa que se trate de áreas donde la maquinaria matemática no está aún muy desarrollada. Pudimos utilizar un argumento muy sencillo en cada caso particular, a fin de probar que una determinada palabra no puede ser obtenida a partir de otra mediante las reglas permitidas, pero no es difícil imaginar que entrarían en juego líneas arguméntales más sofisticadas para los casos complejos. Es muy probable que las nuevas líneas de razonamiento se desarrollen sobre la base de un procedimiento algorítmico.

Sabemos que ningún procedimiento es válido para todos los ejemplo[5]

del problema de las palabras, aunque los ejemplos que escapen tendrían que ser construidos con mucho cuidado y sutileza. En la práctica, cuando *sepamos* cómo se construyen esos ejemplos —cuando sepamos con certeza de un caso particular en que ha sido eludido nuestro algoritmo—, podremos mejorarlo e incluir también ese caso. Solamente pueden escapar pares de palabras que no son "iguales", de modo que en cuanto sepamos que han escapado, sabremos que no son "iguales". Y tal hecho puede ser añadido a nuestro algoritmo. Nuestra reflexión mejorada nos conducirá a un algoritmo mejorado.

TEORÍA DE LA COMPLEJIDAD

Los argumentos que he dado más arriba, y en los capítulos precedentes, respecto a la naturaleza, existencia y limitaciones de los algoritmos han sido en gran medida a un nivel "de principios". No he discutido en absoluto la cuestión de si los algoritmos que aparecen pueden ponerse en práctica. Incluso para problemas en donde sabemos que los algoritmos pueden construirse y conocemos cómo hacerlo, es necesario un trabajo arduo para desarrollarlos y aprovecharlos. A veces un poco de intuición e ingenio conduce a una reducción considerable en la complejidad, y a veces también a mejoras en su velocidad.

Estas cuestiones son con frecuencia demasiado técnicas y detalladas, y en los últimos años se ha trabajado en contextos diferentes para construir, comprender y mejorar los algoritmos —un área