Reemplazando (11) a (10) $\lambda_2 + 1 = 0$

$$\lambda_2 = -1 \quad (12)$$

Reemplazando (12) y (11) en (9)

$$\lambda_1 + (-1) + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

Por lo tanto el vector queda expresado

$(0, -1, 1)$

2. Si T es lineal, sea $\vec{p} \in R^3$ y $\vec{q} \in R^3$ y $k \in R$

1. $T(\vec{p}) + T(\vec{q}) = T(\overrightarrow{p+q})$
2. $T(k\vec{p}) = k\,T(\vec{p})$

Definiciones

Sea $p = (x_1, y_1, z_1)$ y $q = (x_2, y_2, z_2)$

$T(\vec{p}) = (x_1 - y_1, z_1 - 2y_1)$ (1)

$T(\vec{q}) = (x_2 - y_2, z_2 - 2y_2)$ (2)

$\overrightarrow{p+q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ (3)

Prueba de 1

$$T(\overrightarrow{p+q}) = (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2), z_1 + z_2 - 2(y_1 + y_2))$$

$$= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, z_1 + z_2 - 2y_1 - 2y_2)$$

$$= (x_1 - y_1 + x_2 - y_2, z_1 - 2y_1 + z_2 - 2y_2)$$

$$= (x_1 - y_1, z_1 - 2y_1) + (x_2 - y_2, z_2 - 2y_2)$$

$$= T(\vec{p}) + T(\vec{q})$$ por (1) y (2)

NOTA

Parcial 10/12/12

MAT IV

Prueba de 2

sea $\overline{K\vec{p}} = (Kx_1, Ky_1, Kz_1)$

$T(\overline{K\vec{p}}) = (Kx_1 - Ky_1, Kz_1 - 2Ky_1)$

$= K(x_1 - y_1, z_1 - 2y_1)$

$= K \cdot T(\vec{p})$ por 1

b. Núcleo

Sea $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x, y, z)$

$T(x) = \vec{0}$

$(x - 2y, z - 2y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 & (1) \\ z - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x = y$

De (2) $z = 2y$

Expresando al núcleo en función de y nos queda

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} y$$

Por lo tanto el núcleo es generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Nu(T) = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y es de dimensión 1

c. Transformo los vectores de la base origen y los expreso como combinación lineal de la de destino. Como la base destino es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, los vectores permanecerán iguales. Estos vectores transformados serán las columnas de la matriz asociada

$$T((1,0,0)) = (1-0,\ 0-2\cdot 0)$$
$$= (1,\ 0)$$

$$T((0,1,0)) = (0-1,\ 0-2)$$
$$= (-1,\ -2)$$

$$T((0,0,1)) = (0-0,\ 1-2\cdot 0)$$
$$= (0,\ 1)$$

Por lo tanto la matriz asociada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d. $T(x,y,z) = \lambda_1(-1,1) + \lambda_2(0,-1)$
$$= (-\lambda_1, \lambda_1) + (0, -\lambda_2)$$
$$= (-\lambda_1,\ \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$T((1,1,0)) = (1-1,\ 0-2\cdot 1)$$
$$(0,\ -2)$$
$$\begin{cases} -\lambda_1 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -2 & (2) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (2) $\lambda_2 = 2$

Por lo tanto la primer columna de la matriz asociada será $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

NOTA

$T((0,-1,0)) = (0+1, 0+2)$

$(1, 2)$

$$\begin{cases} -\lambda_1 = 1 & (3) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 & (4) \end{cases}$$

De (3) $\lambda_1 = -1$ (5)

Reemplazando (5) en (4) $-1 - \lambda_2 = 2$

$\lambda_2 = -3$

la segunda columna de la matriz asociada será $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$T((0,0,1)) = (0-0, 1-0)$

$(0, 1)$

$$\begin{cases} -\lambda_1 = 0 & (6) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 & (7) \end{cases}$$

Reemplazando (6) en (7)

$\lambda_2 = -1$

la tercer columna de la matriz será $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

la matriz asociada es entonces $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$