Resolución. Segundo parcial. Segunda Fecha

Matemática 4

February 6, 2014

Ejercicio 1

si $(x, y) \neq (0, 0)$, la función es racional y por lo tanto es continua en tanto no se anula el denominador. Por lo tanto, es continua. Para analizar la continuidad en $(0, 0)$ se debe verificar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exista y sea igual a cero. Caso contrario, la función no será continua en el punto.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^3}{2x^2+y^2}$

Me acerco por rectas $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2+m^3x^3}{2x^2+m^2x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^3x)}{x^2(2+m^2)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-m^3x}{2+m^2}\end{aligned}$$

No existe el límite porque depende de la pendiente de la recta. Luego la función es continua en $\Re^2 - \{(0, 0)\}$

Ejercicio 2

$f(x, y) = x\sqrt{y}$ en el punto $P(1, 4)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \sqrt{y} \text{ ; continua en } \{(x, y) \in \Re^2 : y \geq 0\}\\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{2\sqrt{y}} \text{ ; continua en } \{(x, y) \in \Re^2 : y > 0\}\end{aligned}$$

Luego, las derivadas parciales son continuas en un entorno del punto $(1, 4) \Rightarrow$ la función es diferenciable.

$$\begin{aligned}
f(1,4) &= 1\sqrt{4} = 2 \\
\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,4)} &= 2 \\
\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,4)} &= \frac{1}{4} \\
L(x,y) &= 2 + 2(x-1) + \frac{1}{4}(y-4) \\
&= 2 + 2x - 2 + \frac{y}{4} - 1 \\
&= 2x + \frac{y}{4} - 1
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Inciso a

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$$\tfrac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{2x}{x^2+y^2} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \tfrac{2(2)}{2^2+1^2} = \tfrac{4}{5}$$

$$\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{2y}{x^2+y^2} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \tfrac{2(1)}{2^2+1^2} = \tfrac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla f}(x,y) &=< \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} > \\
\overrightarrow{\nabla f}(2,1) &=< \frac{4}{5}, \frac{2}{5} >
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{v} =< -1, 2 > \qquad |\overrightarrow{v}| = \sqrt{5} \qquad \overrightarrow{v} =< \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} >$$

$$D_v(2,1) =< \tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5} >< \tfrac{-1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}} >= \tfrac{-4}{5\sqrt{5}} + \tfrac{4}{5\sqrt{5}} = 0$$

La derivada direccional es nula por lo tanto la función se mantiene constante en esa dirección (no crece ni decrece)

Ejercicio 4

$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

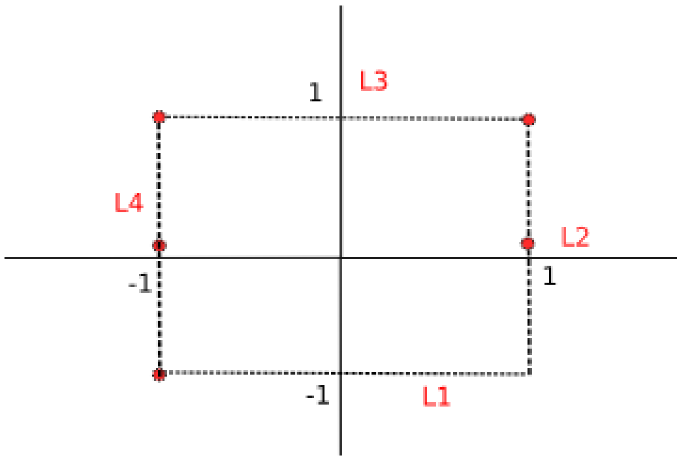
$D = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

- **Interior**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 0 \qquad => (x = 0, y = -1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x^2 = 0 \qquad => 2y = -x^2$$

Entonces los candidatos serán: $(0,0), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, -1)$, pero como los dos últimos están fuera del dominio quedan descartados.

- **Frontera**



- $L_1 : f(x, -1) = x^2 + 1 - x^2 + 4, x \in [-1, 1]$

$$f'(x, -1) = 2x - 2x = 0; \text{ constante}$$

- $L_2 : f(1, y) = 1 + y^2 + y + 4, y \in [-1, 1]$

$$f'(1, y) = 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{-1}{2} \qquad => \text{ candidato } (1, \frac{-1}{2})$$

- $L_3 : f(x, 1) = x^2 + 1 + x^2 + 4, x \in [-1, -1]$

$$f'(x, 1) = 2x + 2x = 0$$
$$x = 0 \qquad => \text{candidato } (0, 1)$$

- $L_4 : f(-1, y) = 1 + y^2 + y + 4, y \in [-1, 1]$

$$f'(-1, y) = 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{-1}{2} \qquad => \text{candidato } (-1, \frac{-1}{2})$$

También hay que considerar como candidatos las esquinas: $(1,1), (-1,1), (-1,-1) y (1,-1)$

Evaluo f en todos los candidatos:

$$\begin{aligned}
f(0,0) =& 4 \rightarrow \text{ Mínimo} \\
f(1,\frac{-1}{2}) =& 1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4=\frac{19}{4} \\
f(0,1) =& 5 \\
f(-1,-\frac{1}{2}) =& 1+\frac{1}{4}-1+4=\frac{17}{4} \\
f(1,1) =& 1+1+1+4=7 \rightarrow \text{ Máximo} \\
f(-1,1) =& 1+1+1+4=7 \rightarrow \text{ Máximo} \\
f(-1,-1) =& 1+1-1+4=5 \\
f(1,-1) =& 1+1-1+4=5
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

$\int\int_R (x+y)dA$, R: $\{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 3, \frac{2}{3}x \leq y \leq 2$

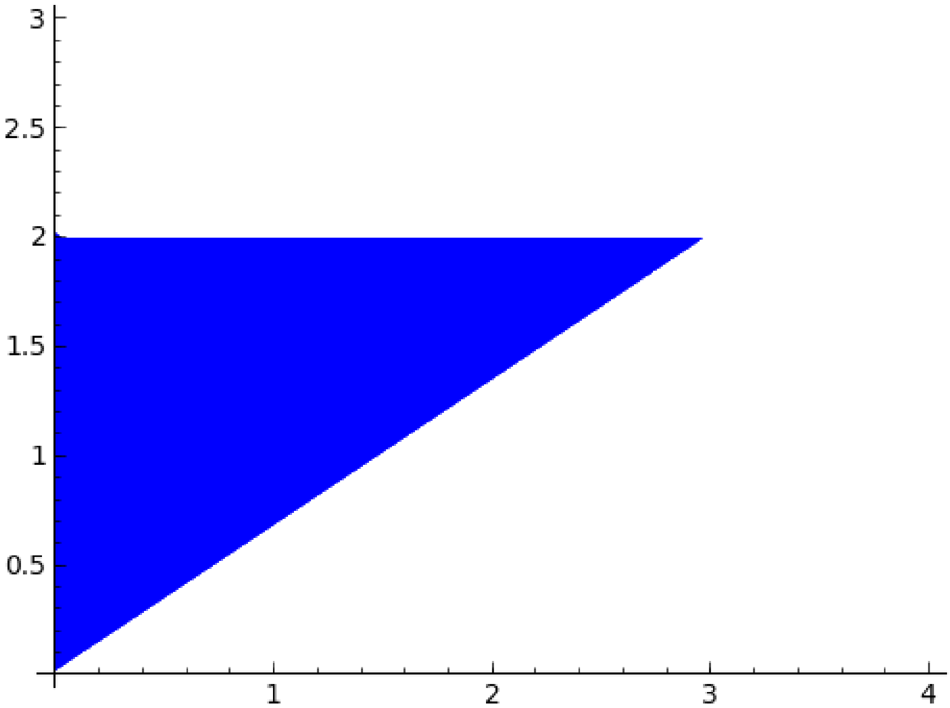


Figure 1: Región a integrar

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \int_{\frac{2x}{3}}^2 y^3 dy dx &= \int_0^3 \left.\frac{y^4}{4}\right|_{\frac{2x}{3}}^2 dx \\
&= \int_0^3 \frac{16}{4} - \frac{16x^4}{384} dx \\
&= \int_0^3 4 - \frac{4x^4}{81} dx \\
&= 4x - \left.\frac{4x^5}{405}\right|_0^3 \\
&= \frac{48}{5}
\end{aligned}
$$