Parcial 10|12|12

HOJA N°

FECHA MAT IV

1_a- Si W es un subespacio vectorial

1- $\vec{0} \in W$

2_ Si $\vec{a} \in W$ y $\vec{b} \in W \to \overrightarrow{a+b} \in W$

3_ Si $\vec{a} \in W$ y $k \in R \to \vec{a}k \in W$

Prueba de 1.

Si $\vec{0} = (0,0,0) \in W$ entonces

$-20 + 20 + 0 = 0$ y $0 = 30$

Claramente se cumple

Prueba de 2

sea $a = (x_1, y_1, z_1) \in W \to -2x_1 + 2y_1 + z_1 = 0$ (4) y

$y_1 = 3x_1$ (5)

sea $b = (x_2, y_2, z_2) \in W \to -2x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$ (6) y

$y_2 = 3x_2$ (7)

$a+b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Si $a+b \in W \to -2(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) + z_1 + z_2 = 0$ (8) y

$y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2)$ (9)

De (8) $-2x_1 - 2x_2 + 2y_1 + 2y_2 + z_1 + z_2 = 0$

$-2x_1 + 2y_1 + z_1 - 2x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$

$0 + 0 = 0$ por (4) y (6)

NOTA

de (5) $y_1 - 3x_1 = 0$ (10) y de (7) $y_2 - 3x_2 = 0$ (11)

de (9) $y_1 + y_2 - 3x_1 + 3x_2 = 0$

$y_1 - 3x_1 + y_2 - 3x_2 = 0$

$0 + 0 = 0$ por 10 y 11

Prueba de 3

sea $a = (x_1, y_1, z_1) \in W \rightarrow -2x_1 + 2y_1 + z_1 = 0$ (12) y

$y_1 = 3x_1$ (13)

sea $ka = (kx_1, ky_1, kz_1)$

si $ka \in W \rightarrow -2kx_1 + 2ky_1 + kz_1 = 0$ (14) y

$ky_1 = 3kx_1$ (15)

De (14) $k(-2x_1 + 2y_1 + z_1) = 0$

$k\,0 = 0$ por (12)

De (15) $ky_1 = 3kx_1$

$y_1 = \frac{3kx_1}{k}$

$y_1 = 3x_1$ que vale por (13)

Como se cumplen las tres propiedades w es un subespacio vectorial

Base

Tenemos que $-2x + 2y + z = 0$ (16) y $y = 3x$ (17)

Reemplazo (17) en (16) $-2x + 6x + z = 0$

$-4x = z$

Entonces se forma el vector $\begin{pmatrix} x \\ 3x \\ -4x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Por lo tanto la base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ que tiene Dim $= 1$

NOTA

1-b
Expreso cada vector como combinación lineal de la base destino

$(1,0,0) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 & (1) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Reemplazando (3) en (2) $\lambda_2 + 0 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0$ (4)

Reemplazando (3) y (4) en (1) $\lambda_1 = 1$

El vector expresado en la base es $(1,0,0)$

Expreso el el segundo vector como combinación lineal de la base destino

$(0,1,0) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (5) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 & (6) \\ \lambda_3 = 0 & (7) \end{cases}$$

Reemplazando (7) en (6) $\lambda_2 = 1$ (8)

Reemplazando (4) y (8) en (1) $\lambda_1 + 1 = 0$

$\lambda_1 = -1$

El vector expresado a la base queda entonces $(-1, 1, 0)$

Expreso el tercer vector

$(0,0,1) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (9) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (10) \\ \lambda_3 = 1 & (11) \end{cases}$$

Reemplazando (11) a (10) $\lambda_2 + 1 = 0$

$$\lambda_2 = -1 \quad (12)$$

Reemplazando (12) y (11) en (9)

$$\lambda_1 + (-1) + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

Por lo tanto el vector queda expresado

$$(0, -1, 1)$$

2. Si T es lineal, sea $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$

1. $T(\vec{p}) + T(\vec{q}) = T(\overrightarrow{p+q})$
2. $T(\overrightarrow{kp}) = k\,T(\vec{p})$

Definiciones

Sea $p = (x_1, y_1, z_1)$ y $q = (x_2, y_2, z_2)$

$T(\vec{p}) = (x_1 - y_1, z_1 - 2y_1) \quad (1)$

$T(\vec{q}) = (x_2 - y_2, z_2 - 2y_2) \quad (2)$

$\overrightarrow{p+q} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad (3)$

Prueba de 1

$$\begin{aligned}
T(\overrightarrow{p+q}) &= (x_1 + x_2 - (y_1 + y_2), z_1 + z_2 - 2(y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, z_1 + z_2 - 2y_1 - 2y_2) \\
&= (x_1 - y_1 + x_2 - y_2, z_1 - 2y_1 + z_2 - 2y_2) \\
&= (x_1 - y_1, z_1 - 2y_1) + (x_2 - y_2, z_2 - 2y_2) \\
&= T(\vec{p}) + T(\vec{q}) \quad \text{por (1) y (2)}
\end{aligned}$$

NOTA