# Resolución de Primer Parcial. Primera Fecha

Matemática IV

12 de noviembre de 2013

## 1. Ejercicio 1

$P(n) : 2^n > 2n + 1; \forall n \geq 3$

### 1.1. Caso Base: k=3

$$\begin{aligned} P(3): &\ ¿\ 2^3 > 2^3 + 1\ ? \\ &\quad 8 > 6 + 1 \text{ Verdadero} \end{aligned}$$

Se cumple $P(3)$

### 1.2. Hipótesis Inductiva

- $P(k) : 2^k > 2k + 1$ Verdadero por Hipótesis Inductiva

### 1.3. Tesis Inductiva

$$P(k+1):\ ¿\ 2^{k+1} > 2(k+1) + 1\ ?$$

Demostración

$$2^{k+1} = \underbrace{2{,}2^k > 2(2k+1)}_{\text{por hipótesis inductiva}}$$

$$\begin{aligned} &2(2k+1) = 4k + 2 = 2k + 2k + 2 \\ &\quad \text{Como } 2k > 1 \Rightarrow 2k + 2 > 3 \\ &\quad \Rightarrow 2k + 2k + 2 > 2k + 3 \qquad = 2k + 2 + 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2(k+1) + 1 \end{aligned}$$

Luego

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

Como de $P(k)$ se surge $P(k+1)$ y $P(3)$ es verdadero, por Principio de Inducción Completa es verdadero $P(n) : 2^n > 2n + 1; \forall n \geq 3$

## 2. Sea $\mathbb{J}$ el conjunto de los múltiplos comunes de 3 y 5

Sea $a, b \in \mathbb{J} \Rightarrow \begin{matrix} 3|a & \wedge & 3|b \\ 5|a & \wedge & 5|b \end{matrix}$

- ¿ $\mathbb{J} \neq \emptyset$ ?

  Sea $a = 15 \Rightarrow 3|15 \wedge 5|15$

  $\Rightarrow 15 \in J$

  $\mathbb{J} \neq \emptyset$

- ¿ $a \pm b \in \mathbb{J}$ ?

  Sean $a, b \in \mathbb{J} \Rightarrow \begin{matrix} \exists m, n/ & a = 3m & \wedge & a = 5n \\ \exists s, t/ & a = 3s & \wedge & a = 5t \end{matrix}$

  Entonces

$$\begin{aligned} a \pm b &= 3m \pm 3s \\ &= 3(m \pm s) \\ &= 3k_1; \quad k_1 \in \mathbb{Z} \text{ por LCI} \\ &\therefore 3|a \pm b \\ a \pm b &= 5n \pm 5t \\ &= 5(n \pm t) \\ &= 5k_2; \quad k_2 \in \mathbb{Z} \text{ por LCI} \\ &\therefore 5|a \pm b \end{aligned}$$

  $\therefore a \pm b \in \mathbb{J}$

- ¿ $a.b \in \mathbb{J}$ ?

$$\begin{aligned} a.b &= 3m{,}3s \\ &= 3(m3s) \\ &= 3k_3; \quad k_3 \in \mathbb{Z} \text{ por LCI} \\ &\therefore 3|a.b \\ a.b &= 5m{,}5t \\ &= 5(m5t) \\ &= 5k_4; \quad k_4 \in \mathbb{Z} \text{ por LCI} \\ &\therefore 5|a.b \end{aligned}$$

  $\therefore a.b \in \mathbb{J}$

| |
|---|
| Por lo tanto, $\mathbb{J}$ es un ideal |

# 3. $Z^2 + 2iZ + 1 = 0$

## 3.1. Versión 1: Completando cuadrados

Completo Cuadrados

$$
\begin{aligned}
Z^2 + 2iZ + (i)^2 - (i)^2 + 1 = 0 \\
(Z+i)^2 - (-1) + 1 = 0 \\
(Z+i)^2 + 1 + 1 = 0 \\
(Z+i)^2 = -2 \\
(Z+i) = \sqrt{-2}
\end{aligned}
$$

Dos Soluciones

$$
\begin{aligned}
Z_1 + i &= \sqrt{2}i & \qquad Z_2 + i &= -\sqrt{2}i \\
Z_1 &= \sqrt{2}i - i & \qquad Z_2 &= -\sqrt{2}i - i
\end{aligned}
$$

## 3.2. Versión 2: Bhaskara

$$Z^2 + 2iZ + 1 = 0$$

Siendo $a = 1$, $b = 2i$, $c = 1$. Aplico Bhaskara

$$
\begin{aligned}
\frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4{,}1{,}1}}{2{,}1} &= \frac{-2i \pm \sqrt{4i^2 - 4}}{2} \\
&= \frac{-2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} \\
&= \frac{-2i}{2} \pm \frac{\sqrt{-8}}{2} \\
&= -i \pm \frac{i\sqrt{8}}{2} \\
&= -i \pm \frac{i\sqrt{2^2 2}}{2} \\
&= -i \pm \frac{i2\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Las dos soluciones son

$$= -i \pm \sqrt{2}i$$

# 4. Ejercicio 4

## 4.1. a) $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y = 1\}$

- ¿ $0 \in S$ ?

$$\begin{aligned} 0 &= [x_0, y_0, z_0] \\ &= [0, 0, 0] \\ x_0 + y_0 &\neq 1 \\ 0 + 0 &\neq 1 \\ &\Rightarrow 0 \notin S \end{aligned}$$

Como no contiene al vector nulo, no es un subespacio

## 4.2. b) $S' = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y = 0\}$ o $S'' = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y = z\}$

Utilizo S'

- ¿ $0 \in S'$ ?

$$\begin{aligned} 0 &= [x_0, y_0, z_0] \\ &= [0, 0, 0] \\ x_0 + y_0 &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 \\ &\Rightarrow 0 \in S' \end{aligned}$$

- ¿ $a, b \in S' \to a + b \in S'$?

  Sea $a = [x_a, y_a, z_a] \in S' \to \underbrace{x_a + y_a = 0}_{(1)}$

  Sea $b = [x_b, y_b, z_b] \in S' \to \underbrace{x_b + y_b = 0}_{(2)}$

$$\begin{aligned} a + b &= [x_a, y_a, z_a] + [x_b, y_b, z_b] \\ &= [x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b] \\ &\text{Entonces} \\ x_a + x_b + y_a + y_b &= x_a + y_a + x_b + y_b \\ &\text{Por (1) y (2)} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore a + b \in S'$

- ¿ $k \in R, a \in S' \to ka \in S'$ ? Sea $a = [x_a, y_a, z_a] \in S' \to \underbrace{x_a + y_a = 0}_{(3)}$

$$
\begin{aligned}
ka &= k\,[x_a, y_a, z_a] \\
&= [kx_a, ky_a, kz_a] \\
&\text{Entonces} \\
kx_a + ky_a &= k(x_a + y_a) \\
&\text{Por (3)} \\
&= k(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore ka \in S'$

$$\boxed{\text{Como se cumplen las tres propiedades } S' \text{ es un subespacio vectorial}}$$

## 4.3. c) Base y dimensión

Los vectores de $S'$ cumplen con la restricción

$$
\begin{aligned}
x + y &= 0 \\
y &= -x \\
&\text{Entonces los vectores de } S' \text{ tienen la forma} \\
[x, -x, z] &= [x, -x, 0] + [0, 0, z] \\
&= x\,[1, -1, 0] + z\,[0, 0, 1]
\end{aligned}
$$

Luego $B = \{[1, -1, 0], [0, 0, 1]\}$ generan S'

### 4.3.1. Pruebo sin son LI

$$
\begin{aligned}
k_1(1, -1, 0) + k_2(0, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\
(k_1, -k_1, 0) + (0, 0, k_2) &= (0, 0, 0) \\
(k_1, -k_1, k_2) &= (0, 0, 0) \\
&\begin{cases} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \end{cases} \\
&\therefore \text{ Son LI}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $B$ es una base de $S'$ y Dim($S'$)=2

# 5. $T : R^3 \to R^2; T(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z)$

- ¿ $T(0) = 0$ ?
  $T(0, 0, 0) = (0, 0)$
  Verdadero

- Sea $u, v \in R^3$ ¿ $T(u+v) = T(u) + T(v)$ ?
  Sea $u \in R^3, u = (u_1, u_2, u_3)$
  Sea $v \in R^3, v = (v_1, v_2, v_3)$
  $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T\left[(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\right] \\
&= [u_1 + v_1 - (u_2 + v_2) + u_3 + v_3, -2(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3)] \\
&= [u_1 - u_2 + u_3 + v_1 - v_2 + v_3, -2u_1 + 2u_2 - 2u_3 - 2v_1 + 2v_2 - 2v_3] \\
&= [u_1 - u_2 + u_3, -2u_1 + 2u_2 - 2u_3] + [v_1 - v_2 + v_3, -2v_1 + 2v_2 - 2v_3] \\
&= T(u) + T(v) \\
&\text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

- Sea $\alpha \in R, u \in R^3$ ¿$\alpha T(u) = T(\alpha u)$ ?
  $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$
\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T\left[(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)\right] \\
&= [\alpha u_1 - \alpha u_2 + \alpha u_3, -2\alpha u_1 + 2\alpha u_2 - 2\alpha u_3] \\
&= [\alpha(u_1 - u_2 + u_3), \alpha(-2u_1 + 2u_2 - 2u_3)] \\
&= \alpha\left[u_1 - u_2 + u_3, -2u_1 + 2u_2 - 2u_3\right] \\
&= \alpha T(u) \\
&\text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $T$ es una transformación lineal

## 5.1. Nucleo

Nu$(T) = \{(x, y, z)/T(x, y, z) = (0, 0)\}$ Sea $v \in R^3, v = (x, y, z)$

$$
\begin{aligned}
T(v) &= (0, 0) \\
T\left[(x, y, z)\right] &= (0, 0) \\
(x - y + z, -2x + 2y - 2z) &= (0, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\begin{array}{ll} x - y + z & = 0 \\ -2x + 2y - 2z & = 0 \end{array}\right. \text{Las ecuaciones son equivalentes}
$$

De la primera

$$x = y - z$$

Luego si $v \in \text{Nu}(T) \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
v &= (y - z, y, z) \\
&= (y, y, 0) + (-z, 0, z) \\
&= y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Luego $\text{Nu}(T) = \text{gen}\{(1, 1, 0)(-1, 0, 1)\}$. $\text{Dim}(\text{Nu}(T)) = 2$

## 5.2. Imagen

$\mathrm{Im}(T) = \big\{(x, y)/\exists z \in R^3 \wedge T(z) = (x, y)\big\}$
Sea $w \in R^3, w = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
T(w) &= (x - y + z, -2x + 2y - 2z) = (a, b)\\
a &= x - y + z\\
b &= -2x + 2y - 2z\\
b &= -2a\\
&\rightarrow w = (a, -2a) = a(1, -2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \mathrm{gen}\{(1, -2)\}\\
\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(T)) &= 1
\end{aligned}$$

## 5.3. Matriz Asociada

$$\begin{aligned}
T(1, 0, 0) &= (1, -2)\\
T(0, 1, 0) &= (-1, 2)\\
T(0, 0, 1) &= (1, -2)\\
[T] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$