Práctica 5

1) X = "La longitud medida" Y = "El ancho medido"

a) $P(X=129) = P(X=129, Y=15) + P(X=129, Y=16) = 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}2$

b) $P(Y=16) = P(X=129, Y=16) + P(X=130, Y=16) + P(X=131, Y=16) =$

$= 0{,}08 + 0{,}28 + 0{,}04 = 0{,}4$

c)

Y \ X	129	130	131	f(y)
15	0,12	0,42	0,06	0,6
16	0,08	0,28	0,04	0,4
f(x)	0,2	0,7	0,1	

$P(X=129)=0,2$

$P(X=130)=P(X=130,\ Y=15)+P(X=130,\ Y=16)=0,42+0,28=0,7$

$P(X=131)=P(X=131,\ Y=15)+P(X=131,\ Y=16)=0,06+0,04=0,1$

$P(Y=15)=P(X=129,\ Y=15)+P(X=130,\ Y=15)+P(X=131,\ Y=15)=$

$=0,12+0,42+0,06=0,6$

$P(Y=16)=0,4$

d)

$E(X)=129\cdot0,2+130\cdot0,7+131\cdot0,1=129,9$

$E(X^2)=(129)^2\cdot0,2+(130)^2\cdot0,7+(131)^2\cdot0,1=16874,3$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=16874,3-(129,9)^2=0,29$

$E(Y)=15\cdot0,6+16\cdot0,4=15,4$

$E(Y^2)=(15)^2\cdot0,6+(16)^2\cdot0,4=237,4$

$V(Y)=E(Y)-(E(Y))^2=237,4-(15,4)^2=0,24$

2

$$P(Y=15\mid X=130)=\frac{P(X=130,\ Y=15)}{P(X=130)}=\frac{0,42}{0,7}=0,6$$

$$P(Y=16\mid X=130)=\frac{P(X=130,\ Y=16)}{P(X=130)}=\frac{0,28}{0,7}=0,4$$

Para que X e Y sean independientes se tiene que probar que:

$\forall(x_i,y_j)\in R_{x,y}\quad p(x_i,y_j)=p(x_i)\,q(y_j)$

$$\left.\begin{aligned}
p(129,15)&=0,12=p(129)\,q(15)=0,2\cdot0,6=0,12\\
p(129,16)&=0,08=p(129)\,q(16)=0,2\cdot0,4=0,08\\
p(130,15)&=0,42=p(130)\,q(15)=0,7\cdot0,6=0,42\\
p(130,16)&=0,28=p(130)\,q(16)=0,7\cdot0,4=0,28\\
p(131,15)&=0,06=p(131)\,q(15)=0,1\cdot0,6=0,06\\
p(131,16)&=0,04=p(131)\,q(16)=0,1\cdot0,4=0,04
\end{aligned}\right\}$$

Dado que cumplen X e Y son independientes

Escaneado con CamScanner

③

X = "Número de llamadas hechas a la subrutina A"

Y = "Número de llamadas hechas a la subrutina B"

a)

X \ Y	1	2	3	f(x)
1	0,15	0,10	0,10	0,35
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0,05	0,05	0,10	0,2
f(y)	0,3	0,35	0,35	

- $P(X=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) =$
  $= 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}35$
- $P(X=2) = P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=2, Y=3) =$
  $= 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}45$
- $P(X=3) = P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) + P(X=3, Y=3) =$
  $= 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}2$
- $P(Y=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1) =$
  $= 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}3$
- $P(Y=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=2) =$
  $= 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}05 = 0{,}35$
- $P(Y=3) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) =$
  $= 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}35$

b)

$E(X) = 1 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}85$

$E(X^2) = (1)^2 \cdot 0{,}35 + (2)^2 \cdot 0{,}45 + (3)^2 \cdot 0{,}2 = 3{,}95$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3{,}95 - (1{,}85)^2 = 0{,}5275$

$E(Y) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}35 = 2{,}05$

$E(Y^2) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}35 + 3^2 \cdot 0{,}35 = 4{,}85$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 4{,}85 - (2{,}05)^2 = 0{,}6475$

c)

$\text{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) =$

$= (1 \cdot 1 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 1 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 3 \cdot 0{,}10) - 1{,}85 \cdot 2{,}05 = 0{,}1075$

d) Ya que la $\text{cov}(X,Y) \neq 0$ podemos decir que X e Y no son independientes.

4

a)

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1{,}85 + 2{,}05 = 3{,}9$

b)

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X,Y) =$

$= 0{,}5275 + 0{,}6475 + 2 \cdot 0{,}1075 = 1{,}39$

$\sigma X+Y = \sqrt{V(X)+V(Y)} = \sqrt{0{,}5275 + 0{,}6475} = \sqrt{1{,}175}$

c)

$P(X+Y=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=3, Y=1) + P(X=2, Y=2) =$

$= 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}20 = 0{,}35$

d)

Z = "Número de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las 2 subrutinas"

$\boxed{Z = 100X + 200Y}$

d1) $E(Z) = E(100X + 200Y) = 100 \cdot E(X) + 200 \cdot E(Y) =$

$= 100 \cdot 1{,}85 + 200 \cdot 2{,}05 = 595$

d2) $\sigma Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{35475}$

$V(Z) = V(100X + 200Y) = V(100X) + V(200Y) + 2 \cdot cov(100X, 200Y) =$

$= 100^2\, V(X) + 200^2\, V(Y) + 2 \cdot 100 \cdot 200\, cov(X,Y) =$

$= 10000\, V(X) + 40000\, V(Y) + 40000\, cov(X,Y) =$

$= 10000 \cdot 0{,}5275 + 40000 \cdot 0{,}6475 + 40000 \cdot 0{,}1075 = 35475$

5

X = "Número de fallas semanales de la computadora 1"

Y = "Número de fallas semanales de la computadora 2"

a)

$P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) =$

$= 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}30 \cdot 0{,}40 + 0{,}20 \cdot 0{,}25 =$

$= 0{,}2575$

b)

$P(X>Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=0)$

$+ P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 +$

$0{,}30 \cdot 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}40 = 0{,}2925$

6

X = "Tiempo de vida del primer componente"

Y = "Tiempo de vida del segundo componente"

$$f(x) \begin{cases} e^{-x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \leq 0 \Rightarrow 0$
- Si $x > 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = \frac{-1 + e^{x}}{e^{x}} = 1 + \frac{-1}{e^{x}} =$

$$= 1 - e^{-x}$$

a)

$$P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1) \cdot P(Y \leq 1) = F_X(1) \cdot F_Y(1) =$$

↳ independencia

$$= (1 - e^{-1}) \cdot (1 - e^{-1}) = (1 - e^{-1})^2$$

b)

- Podemos ver que $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\lambda)$ ambos con $\lambda = 1$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1 \qquad E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$$

c)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1 + 1 = 2$$

7

A = "Duración del foco A en cientos de horas"

B = "Duración del foco B en cientos de horas"

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ A \sim N(8, 1^2) \\ \circ\ B \sim N(9, 1{,}5^2) \end{array}\right\} A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

NOTA

a)

T = "Tiempo mayor del foco B respecto al A"

$T = B - A$

$\mu = E(T) = E(B-A) = E(B) - E(A) = 9 - 8 = 1$

$\sigma^2 = V(T) = V(B-A) = V(B) + V(A) = (1,5)^2 + 1^2 = 3,25$

independencia

combinación lineal de v.a norm. indep.

$T \sim N(1, 3,25)$ $\quad P(T > 0) = P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{0-1}{\sqrt{3,25}}\right) = P(Z > -0,5547) = 0,71045$

estandarización

app

b)

C = "Duración de ambos focos"

$C = B + A$

$\mu = E(C) = E(B+A) = E(B) + E(A) = 9 + 8 = 17$

$\sigma^2 = V(C) = V(B+A) = V(B) + V(A) = (1,5)^2 + 1^2 = 3,25$

independencia

combinación lineal de v.a norm. indep.

$C \sim N(17, 3,25)$ $\quad P(C > 20) = P\left(\frac{C-\mu}{\sigma} > \frac{20-17}{\sqrt{3,25}}\right) = P(Z > 1,6641) = 0,04805$

estandarización

app

8

X_i = "Peso del caramelo i en gramos" $\quad i = 1, \ldots, n \quad n = 16$

$X_i \sim N(2,835, 0,2835^2)$

a)

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(45,36, 1,2859)$

combinación lineal de v.a norm. indep.

- $\mu_T = E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \mu = 45,36$

linealidad

- $\sigma_T^2 = V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n \cdot \sigma^2 = 1,2859$

independencia

b)

$$P(T < 45{,}5) = P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} < \frac{45{,}5 - 45{,}36}{\sqrt{1{,}2859}}\right) = P(Z < 0{,}12345) = 0{,}54912$$

estandarización app

(9)

X_i: "Tiempo, medido en segundos, para que un sistema automatizado localice la pieza i" $\quad i = 1, \dots, n \quad n = 10$

$X_i \sim N(45, 30^2)$

a) $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(45, 56{,}25)$ combinación lineal de v.a norm. indep.

- $\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu = 45$

linealidad

- $\sigma^2_{\overline{X}} = V(\overline{X}) = V\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \dfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} = 90$

independencia

- $P(\overline{X} > 60) = P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} > \dfrac{60-45}{\sqrt{90}}\right) = P(Z > 1{,}58113) = 0{,}05692$

estandarización app

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(450, 9000)$ combinación lineal de v.a norm indep.

- $\mu_T = E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \mu = 450$

linealidad

NOTA

$\circ\ \sigma_T^2 = V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n.\sigma^2 = 9000$

independencia

$\circ\ P(T > 600) = P\left(\frac{T-\mu_T}{\sigma_T} > \frac{600-450}{\sqrt{9000}}\right) = P(Z > 1{,}58113) = 0{,}05692$

(10)

X_i = "Cantidad de memoria, medida en MB, ocupada por la página i" $i = 1, \ldots, n$ $n = 500$

$\mu = E(X_i) = 1{,}3$ $\sigma = 0{,}3$

$\circ$ X_i son v.a. independientes e identicamente distribuidas

$\circ\ n \geq 30$

estandarización

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 660\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu}{\sqrt{n}\,.\,\sigma} > \frac{660 - 500.1{,}3}{\sqrt{500}\,.\,0{,}3}\right) \overset{T.C.L}{\approx}$$

$$\overset{T.C.L}{\approx} P(Z > 1{,}49071) = 0{,}06802$$

app

(11)

X = "Tiempo de vida, en horas, de un componente electrónico"

$X \sim Exp(\lambda)$ $\lambda = 1/5$

$$f(x) = \begin{cases} 2Ke^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

a) Teóricamente : $f(x)\begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$

Entonces por deducción podemos averiguar el valor de "K"

- $\lambda = \frac{1}{5} \longrightarrow 2.K = \frac{1}{5} \longrightarrow K = \frac{1}{10}$
- F.d.A : $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-1/5 x} & si \ x \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$

b)

$P(2 \leq X \leq 10) = F(10) - F(2) = \underbrace{0,86466}_{app} - 0,32968 = 0,53498$

$P(X > 24) \overset{app}{=} 0,00823$

$E(X) = 1/\lambda = 1/1/5 = 5 \qquad V(X) = 1/\lambda^2 = 1/(1/5)^2 = 25$

c)

X_i = "Duración en horas del componente electrónico i"

$i = 1, \ldots, n \qquad n = 40$

$X_i \sim Exp(\lambda) \qquad \lambda = 1/5 \qquad \mu = 5 \qquad \sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{25} = 5$

$P(2 \leq \bar{X} \leq 10) \underset{\text{estandarización}}{=} P\left(\frac{2-5}{5/\sqrt{40}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{10-5}{5/\sqrt{40}}\right) \overset{T.C.L}{\approx}$

$\overset{T.C.L}{\approx} P(Z \leq 6,32455) - P(Z \leq -3,79473) \underset{app}{=} 0,9999$

(12)

X_i = "Resistencia a la ruptura de un remache i medida en $lb/pulg^2$" $i = 1, \dots, n$ $n = 40$

$\mu = E(X_i) = 10000$ $\sigma = 500$

a)

- X_i son v.a independientes con distribución desconocida
- $n \geq 30$

$$P(9900 \leq \bar{X} \leq 10200) = P\left(\frac{9900 - 10000}{500/\sqrt{40}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{10200 - 10000}{500/\sqrt{40}}\right)$$

estandarización

$$\overset{T.C.L}{\approx} P(Z \leq 2{,}52982) - P(Z \leq -1{,}26491) = 0{,}8913$$

app

b)

Si $n = 15$ no se podría calcular la probabilidad pedida en a) ya que $n < 30$ por lo tanto no es posible aplicar T.C.L.

(13)

X = "Número de válvulas defectuosas entre 100"

$X \sim B(n, p)$ $n = 100$ $p = 0{,}03$

i) $P(X = 0) = 0{,}04755$ app ii) $P(X > 5) = 0{,}08084$ app iii) $P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}5997$ app

Inciso b)

a) Para usar aproximación normal a la binomial:

- $n \cdot p > 10 \Rightarrow 100 \cdot 0{,}03 > 10 \Rightarrow 3 > 10$

Como $n \cdot p$ no es mayor que 10 no podemos usar la aproximación normal a la binomial.

(14)

$X =$ "Longitud de una pieza en m.m"

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \mu = 32 \qquad \sigma = 0{,}3$

a)

$$P(31{,}1 < X < 32{,}6) = P\left(\frac{31{,}1 - 32}{0{,}3} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{32{,}6 - 32}{0{,}3}\right) =$$

$Z \sim N(0,1)$

estandarización

$$= P(Z < 2) - P(Z < -3) = 0{,}9759$$

app

Por propiedad de complemento podemos encontrar la probabilidad de que una pieza sea defectuosa ya que la probabilidad anterior es la probabilidad de que una pieza se válida $\therefore$ $1 - 0{,}9759 = 0{,}0241$

b)

$Y =$ "Número de piezas defectuosas en un lote de 500"

$Y \sim B(n, p) \qquad n = 500 \qquad p = 0{,}0241$

Calculando la probabilidad exacta:

- $P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) = 1 - 0{,}84342 = 0{,}15658$

complemento

app

Con aproximación normal a la binomial

- $n \cdot p > 10 \Rightarrow 500 \cdot 0{,}0241 > 10 \Rightarrow 12{,}05 > 10$
- $n \cdot (1-p) > 10 \Rightarrow 500\,(1-0{,}0241) > 10 \Rightarrow 487{,}95 > 10$
- $n \geq 30 \Rightarrow 500 \geq 30$

$$P(Y>15) \underbrace{=}_{\text{complemento}} 1 - P(Y \leq 15) \underbrace{\approx}_{\text{corrección por continuidad}} 1 - P(Y \leq 15{,}5) \underbrace{=}_{\text{estandarización}} 1 - P\left(\overbrace{\frac{Y - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}}}^{Z \approx N(0,1)} \leq \frac{15{,}5 - 12{,}05}{\sqrt{11{,}7595}}\right)$$

$$\overset{T.C.L}{\approx} 1 - P(Z \leq 1{,}0060) \underbrace{=}_{\text{app}} 1 - 0{,}84279 = 0{,}15721$$

Escaneado con CamScanner