Fórmulas Matemática primer parcial

Conjuntos

1- Leyes de idempotencia

a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

2- Leyes asociativas

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3- Leyes conmutativas

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

4- Leyes distributivas

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5- Leyes de identidad

a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

c) $A \cup U = U$ d) $A \cap U = A$

6- Leyes de complemento

a) $A \cup A^C = U$ b) $A \cap A^C = \varnothing$

c) $(A^C)^C = A$ d) $U^C = \varnothing$, $\varnothing^C = U$

7- Leyes de De Morgan

a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

∪: Unión, equivalente A o B, +.
∩: Intersección, equivalente a A y B, *.
|: El primer evento si pasa el segundo.

Cualquier evento:

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$
3. $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$

Excluyentes: No pueden pasar a la vez

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. $P(A \cap B) = 0$

Independientes: Que ocurra un evento no afecta el otro o $P(B|A) = P(B)$

1. $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
2. $P(A1 \cup A2 \cup A3) = 1 - P((A1 \cup A2 \cup A3)^C)$

Al azar y finito:
1. P(A) = #A/#S

Complemento:
1. $P(A^C) = 1 - P(A)$

Partición de S:
1. A1 U An = S
2. Ai ∩ Aj = vacío si i != j
3. P(Ai) > 0 para todo 1,2,...,n

Probabilidad total: Dado una partición de S, cualquier evento de S se puede describir como:
- P(B) = P(B/A1)P(A1)+P(B/A2)+...+P(B/An)P(An)

Bayes: Útil para cuando usaste probabilidad total antes:

$$P(A_k / B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)} \qquad k = 1,\ldots,n$$

Así como lo ves, lo que va abajo es la probabilidad total. Utiliza por si ya sacaste por ejemplo P(D/A) y tienes que sacar al revés, P(A/D).

Cosas de la práctica 3:
Variables aleatorias:
- **Continuas**: Rango de valores infinito no numerable.
  - Ejemplo:
    - Tiempo en horas que tarda en quemarse una lamparita.
    - Razón: El rango son los reales. Y eso no es numerable.
- **Discreta**: Rango de valores es infinito pero numerable.
  - Ejemplo:
    - Número de accidentes automovilísticos.
    - Razón: El rango son los Naturales. Y es numerable.

Propiedades de la Probabilidad

$$P(A \cap B^C) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$P(\emptyset) = 0$ $P(A^C) = 1 - P(A)$ $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad Condicional

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A)\neq 0$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B)\neq 0$$

si A y B son eventos de un espacio muestral S ***equiprobable***, entonces

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\#(A\cap B)}{\# A}$$

Teorema de la Multiplicación

Si A y B son dos eventos entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ si $P(A)\neq 0$

Por lo tanto

$$P(A\cap B)=P(B/A)\,P(A) \qquad (6)$$

Análogamente de $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si $P(B)\neq 0$, se deduce

$$P(A\cap B)=P(A/B)\,P(B) \qquad (7)$$

Si $A_1,\ A_2,\ A_3$ son tres eventos entonces

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)$$

Teorema de la Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral S que cumplen:

a) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=S$

b) $A_i\cap A_j=\varnothing$ si $i\neq j$

c) $P(A_i)>0 \quad \forall i=1,2,\ldots,n$ Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una ***partición de S*** Entonces para cualquier evento B de S

$$P(B)=P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+\ldots+P(B/A_n)P(A_n)$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral S que cumplen:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad$ si $\quad i \neq j$

c) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$

Entonces para cualquier evento B de S tal que $P(B) > 0$

$$P(A_k / B) = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)} \qquad k = 1,\ldots,n$$

Independencia

A y B son ***independientes*** si $P(B / A) = P(B)$

A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si dos eventos A y B son independientes entonces A y B^C son independientes

si A y B son eventos independientes, entonces A^C y B^C son independientes.

Binomial: - "n" repeticiones independientes // repeticiones idénticas y en cada una se mira si pasa o no el evento // la probabilidad "p" de éxito es constante // X ~ B(n,p)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x} \qquad E(X) = n.p \qquad V(X) = n.p.(1-p)$$

Poisson: - Normalmente es necesario calcular el lambda

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!} \qquad E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

Binomial Negativa: - se hacen repeticiones independientes hasta que ocurre el evento por r-ésima vez // repeticiones idénticas y en cada una se mira si pasa o no el evento // la probabilidad "p" de éxito es constante // X ~ BN(r,p)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} . p^r . (1-p)^{x-r} \qquad E(X) = \frac{r}{p} \qquad V(X) = \frac{r.(1-p)}{p^2}$$

Distribución Geométrica: - se hacen repeticiones independientes hasta que ocurre el evento por primera vez inclusive // repeticiones idénticas y en cada una se mira si pasa o no el evento // la probabilidad "p" de éxito es constante // X ~ G(p)

$$f(x) = P(X = x) = p \ . (1-p)^{x-1} \qquad E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Distribución Hipergeométrica: - "n" es el tamaño de la muestra // "N" es el tamaño de la población // "M" es el número total de éxitos en la población // la variable "X" es el número de éxitos obtenidos en la muestra // X ~ H(n,M,N)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad E(X) = n.\frac{M}{N} \qquad V(X) = n.\frac{M}{N}.\left(1-\frac{M}{N}\right).\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Distribución Exponencial: - Una variable aleatoria continua "X" tiene distribución exponencial con parámetro lambda si su función de densidad de probabilidad es: (contenido del apunte) // Se usa normalmente para modelar el tiempo de espera entre la ocurrencia de eventos // X ~ Exp(lambda)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda . x} & si\, x \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución Uniforme: - Una variable aleatoria continua "X" tiene distribución uniforme en el intervalo [a,b] con a < b si su función de densidad de probabilidad es: (contenido del apunte) // X ~ U[a,b]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\, a \leq x \leq b \\ 1 & si\, x > b \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normal o gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

<u>Notación</u>: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$Y \sim N(0,1)$

Derivadas de funciones básicas:

- $(e^x)' = e^x$
- $(x^n)' = n.x^{n-1}$
- $(Constante)' = 0$
- $(ln(x))' = 1/x$

Reglas de derivación:

- $(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'$
- $(f(x).g(x))' = (f(x))', g(x) + f(x).(g(x))'$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{[\ (f(x))', g(x) - f(x).(g(x))'\ ]}{(g(x))^2}$
- $(f(g(x))' = f'(g(x)).(g(x))'$

Integrales de funciones básicas:

- $\int_a^b x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$
- $\int_a^b 1\, dx = x\Big|_a^b$

1- ***Suma de variables aleatorias independientes con distribución Poisson***

$$X \sim P(\lambda_1)\ ;\ Y \sim P(\lambda_2)\ ;\ X \text{ y } Y \text{ independientes} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

Dem.)

Consideramos el evento $\{X+Y=n\}$ como unión de eventos excluyentes $\{X=k, Y=n-k\}$ $\quad 0 \le k \le n$, entonces

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)}_{X \text{ e } Y \text{ independientes}} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\,k}}{k!} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\,n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^{\,k}}{k!}\frac{\lambda_2^{\,n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^{\,k}\lambda_2^{\,n-k} \underset{\text{Binomio de Newton}}{=} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

O sea $X+Y$ tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda_1+\lambda_2$

2- ***Suma de variables aleatorias binomiales independientes***

$$X \sim B(n_1, p)\ ;\ Y \sim B(n_2, p)\ ;\ X \text{ y } Y \text{ independientes} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

Dem.)

Nuevamente consideramos el evento $\{X+Y=k\}$ como unión de eventos excluyentes $\{X=i, Y=k-i\}$ $\quad 0 \le i \le n_1$, entonces

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{n_1} P(X=i, Y=k-i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i)P(Y=k-i)}_{X \text{ e } Y \text{ independientes}} = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n_2-k+i} =$$

$$= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$$

En la expresión anterior si $j > r$ entonces $\binom{r}{j} = 0$

Por último usamos la siguiente identidad combinatoria $\sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}=\binom{n_1+n_2}{k}$

Y entonces

$$P(X+Y=k)=\binom{n_1+n_2}{k}p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}$$

O sea $X+Y$ tiene distribución binomial con parámetros n_1+n_2 y p

Observación: en los dos casos anteriores se puede generalizar el resultado a n variables aleatorias independientes, usando el principio de inducción completa, es decir

1- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim P(\lambda_i)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i)$

2- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim B(n_i, p)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=0}^{n} n_i, p)$

Combinación lineal de variables aleatorias independientes.

Suma de variables aleatorias normales independientes

Si X e Y son dos variables aleatorias continuas independientes con densidades *g(x)* y *h(y)* respectivamente se puede probar (no lo demostraremos aquí) que la v.a. $Z=X+Y$ tiene densidad dada por $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z-y)h(y)dy$

Usando esto se puede demostrar el siguiente importante resultado:

Si X e Y son variables aleatorias independientes donde $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ entonces $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Por inducción completa se puede generalizar este resultado a n variables:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$

De lo anterior y del hecho que $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ tenemos:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)$ donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales

Se dice que $\sum_{i=0}^{n} a_i X_i$ es una ***combinación lineal de variables aleatorias***.

$E(y) = n.\mu \mid V(y) = n.\sigma^2$

Promedio de variables aleatorias normales independientes

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces la v.a. $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ tiene distribución normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$

Dem.) Notar que $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es un caso particular de combinación lineal de variables aleatorias donde $a_i = \dfrac{1}{n}$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Además en este caso $\mu_i = \mu$ y $\sigma_i^2 = \sigma^2$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Por lo tanto, $\overline{X}$ tiene distribución normal con esperanza $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$ y varianza

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Es decir, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

<u>Observación</u>: a $\overline{X}$ se lo llama ***promedio muestral*** o ***media muestral***

Aproximación de suma de variables independientes idénticamente distribuidas con TCL:

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$, es decir ***independientes idénticamente distribuidas***

Sea la v.a. promedio muestral $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y sea $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$, esto es $\lim_{n\to\infty} P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx$

Donde $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ es el ***promedio muestral estandarizado***

Solución:

Definimos las variables aleatorias

X_i: "cantidad de calorías que una persona consume en el día i" $\quad i = 1,2,\ldots,365$

Se sabe que $E(X_i) = 3000$ y $V(X_i) = 230^2$

Si $\overline{X} = \dfrac{1}{365}\sum_{i=1}^{365} X_i$ entonces $E(\overline{X}) = 3000$ y $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{230^2}{365}$

La probabilidad pedida es

Z≈N(0,1) → T.C.L

$$P(2959 \leq \overline{X} \leq 3050) = P\left(\frac{2959-3000}{230/\sqrt{365}} \leq \frac{\overline{X}-3000}{230/\sqrt{365}} \leq \frac{3050-3000}{230/\sqrt{365}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3050-3000}{230/\sqrt{365}}\right) - \Phi\left(\frac{2959-3000}{230/\sqrt{365}}\right) = \Phi(4.15) - \Phi(-3.40) \approx 1 - 0 = 1$$

por app

Aproximación Binomial con TCL:

$$X_i = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ en \ \ la \ \ i-ésima \ \ repetición \ \ de \ \ \varepsilon \ \ ocurre \ \ éxito \\ \qquad 0 \qquad caso \ \ contrario \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

entonces cada X_i se la puede considerar $B(1,p)$, y además $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes

Podemos escribir $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y ***si n es grande*** entonces X tendrá ***aproximadamente*** una distribución normal con parámetros np y $np(1-p)$, es decir

$$Z_n = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}} \approx N(0,1) \quad \text{si } n \text{ es lo suficientemente grande}$$

Observaciones:

1- La aproximación normal a la distribución binomial funciona bien aun cuando n no sea muy grande si p no está demasiado cerca de cero o de uno. En particular la aproximación normal a la binomial es buena si n es grande , $np > 5$ y $n(1-p) > 5$, ***pero es más efectivo aplicar esta aproximación cuando*** $np > 10$ ***y*** $n(1-p) > 10$

2- Corrección por continuidad.

Acabamos de ver que si $X \sim B(n,p)$ entonces, para n suficientemente grande, podemos considerar que aproximadamente es $X \sim N[n.p, n.p(1-p)]$. El problema que surge de inmediato si deseo calcular, por ejemplo, la probabilidad de que $X = k$ (con k alguno de los valores posibles $0,1,2,\ldots,n$) es que la binomial es una distribución discreta y tiene sentido calcular probabilidades como $P(X = k)$ mientras que la normal es una distribución continua y, en consecuencia, $P(X = k) = 0$ puesto que para una variable aleatoria continua la probabilidad de que ésta tome un valor aislado es cero. Esto se resuelve si se considera $P(X = k) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right)$

También se puede usar esta corrección para mejorar la aproximación en otros casos, específicamente en lugar de $P(X \leq k)$ calculamos

$P(X \leq k) \approx P\left(X \leq k + \frac{1}{2}\right)$

Y en lugar de $P(X \geq k) \approx P\left(X \geq k - \frac{1}{2}\right)$

$P(X = k) \approx P(k - 1/2 \leq X \leq k + 1/2)$

Aproximación normal a la distribución Poisson

Se puede probar aplicando Teorema central del límite que

> Si $X \sim P(\lambda)$ entonces para λ suficientemente grande $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ tiene aproximadamente distribución $N(0,1)$

Es decir para λ suficientemente grande $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$

En la práctica si $\lambda \geq 30$ la aproximación es buena.

Observación: la demostración es sencilla si λ es igual a un número natural n pues, si consideramos las variables aleatorias $X_i \sim P(1)$ con $i = 1,2,\ldots,n$ independientes, entonces ya sabemos que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)$, es decir $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$

Pero además por T.C.L. si n es grande $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene aproximadamente distribución normal con parámetros $n\mu = n \times 1 = n$ y $n\sigma^2 = n \times 1 = n$

O sea la distribución de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ que es exactamente Poisson con parámetro n, se puede aproximar con una $N(n,n)$, por lo tanto $\dfrac{X-n}{\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ aproximadamente para valores de n suficientemente grandes

En los gráficos siguientes se muestra para diferentes valores de λ cómo aproxima la distribución $N(\lambda,\ \lambda)$ a la distribución $P(\lambda)$

Bidimensionales:

Deseamos saber si las variables aleatorias X e Y son independientes o dependientes.
Para demostrar que son independientes debemos probar que se verifica $\forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$ $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$ Verificamos directamente que

$p(0,0) = 0.1 = p(0)q(0) = 0.2 \times 0.5$
$p(0,1) = 0.04 = p(0)q(1) = 0.2 \times 0.2$
$p(0,2) = 0.06 = p(0)q(2) = 0.2 \times 0.3$
$p(1,0) = 0.2 = p(1)q(0) = 0.4 \times 0.5$
$p(1,1) = 0.08 = p(1)q(1) = 0.4 \times 0.2$
$p(1,2) = 0.12 = p(1)q(2) = 0.4 \times 0.3$
$p(2,0) = 0.2 = p(2)q(0) = 0.4 \times 0.5$
$p(2,1) = 0.08 = p(2)q(1) = 0.4 \times 0.2$
$p(2,2) = 0.12 = p(2)q(2) = 0.4 \times 0.3$

Luego X e Y son independientes.

En general ***la esperanza de un producto de variables aleatorias no es igual al producto de las esperanzas***

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional tal que X e Y son variables aleatorias ***independientes***, entonces: $E(X.Y) = E(X).E(Y)$

Varianza de una suma de variables aleatorias

.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\sigma_{XY} \quad \text{con} \quad \sigma_{XY} = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

5.6 - Covarianza

Sean X e Y dos variables aleatorias. La ***covarianza de X e Y*** se define:

$$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\} = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Propiedades de la covarianza

Las siguientes propiedades son útiles y su verificación se deja como ejercicio
1- $Cov(a + bX, c + dY) = bdCov(X,Y)$
2- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$
3- $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$
4- $Cov(X,X) = V(X)$