Práctica 2

(1) ∘ $S = \{ (a,b) ; 1 \leq a \leq 6 ; 1 \leq b \leq 6 ; a, b \in \mathbb{N} \}$ equiprobable y finito

$\#S = 6^2 = 36$

∘ A = "La suma de los números es mayor o igual a 10"

$A = \{(5,5), (5,6), (6,5), (4,6), (6,4), (6,6)\}$

$\#A = 6$

∘ B = "Aparece un 5 en el primer dado"

$B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$

$\#B = 6$

∘ C = "Aparece un 5 en al menos 1 dado"

$C = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$

$\#C = 11$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad P(C) = \frac{\#C}{\#S} = \frac{11}{36}$

a) $A \cap B = \{(5,5), (5,6)\}$

$\# A \cap B = 2$

$P(A \cap B) = \frac{\# A \cap B}{\# S} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

∘ $P(A / B) = \frac{\#(A \cap B)}{\# B} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

NOTA

b) $A \cap C = \{(5,5), (5,6), (6,5)\}$

- $P(A/C) = \dfrac{\# A \cap C}{\# C} = \dfrac{3}{11}$

(2) - S es equiprobable y finito

$\# S = 2^3 = 8$

- $A =$ "Todas son caras"

$\# A = 1$

- $B =$ "La primer moneda es cara"

$B = \{(c,s,s), (c,c,s), (c,s,c), (c,c,c)\}$

$\# B = 4$

- $C =$ "Una de las monedas es cara"

$C = \{(c,s,s), (s,c,s), (s,s,c)\}$

$\# C = 3$

a) $P(A/B) = \dfrac{\# A \cap B}{\# B} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(A/C) = \dfrac{\# A \cap C}{\# C} = \dfrac{0}{3} = 0$

(3) - S es equiprobable y finito

$\# S = 9^2 = 81$

- $A =$ "La suma de los dígitos es par"

Por regla:

- par + par = par
- impar + impar = par

Del 1 al 9 hay 4 números pares y 5 impares, entonces:

$\# A = 5^2 + 4^2 = 41$

5^2 combinaciones de números impares y 4^2 combinaciones para pares

B = "Ambos números son impares"

$\# B = 5^2 = 25 \rightarrow$ Seguimos la lógica anterior

$$P(B/A) = \frac{\# P(A \cap B)}{\# A} = \frac{25}{41}$$

4) $P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

a) $P(A/B) = \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}_{\text{definición}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

b) $P(B/A) = \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}}_{\text{definición}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}_{\text{prop. de la unión}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

d) $P(A^c / B^c) = \underbrace{\frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)}}_{\text{definición}} = \underbrace{\frac{P[(A \cup B)^c]}{P(B^c)}}_{\text{prop. de Morgan}} = \underbrace{\frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}}_{\text{prop. del complemento}} = \frac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{3}} =$

$$= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

e) $P(B^c / A^c) = \underbrace{\frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)}}_{\text{definición}} = \underbrace{\frac{P[(A \cup B)^c]}{P(A^c)}}_{\text{prop. de Morgan}} = \underbrace{\frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}}_{\text{prop. del complemento}} = \frac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

NOTA

(5) Anotamos A_i: "el i-ésimo estudiante elegido es un niño" $i = 1, 2, 3$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

Usamos el Teorema de la Multiplicación.

(6) Si definimos:

A_1 = "La primer bolilla extraída es roja"

A_1^c = "La primer bolilla extraída no es roja" (es blanca)

$P(A_1) = \frac{3}{10}$ $\quad$ $P(A_1^c) = \frac{7}{10}$

Podemos ver lo siguiente:

- $A_1 \cup A_1^c = S$
- $A_1 \cap A_1^c = \emptyset$
- $P(A_1) > 0 \wedge P(A_1^c) > 0$

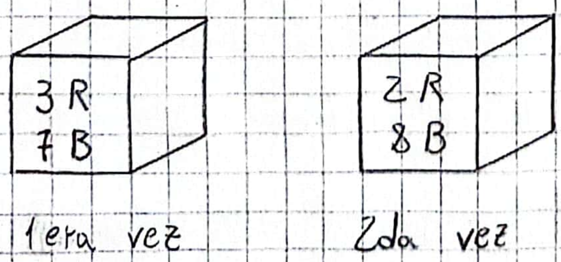
a) Ahora definimos el siguiente evento:

B = "La segunda bolilla extraída es roja"

Podemos buscar la $P(B)$ usando el teorema de la probabilidad total. Entonces nos queda:

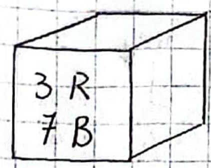
- $P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_1^c) \cdot P(A_1^c)$

- $P(B/A_1) \longrightarrow$ La segunda es roja si la primera también fue roja

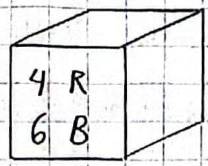


Entonces $P(B/A_1) = \frac{2}{10}$

- $P(B/A_1^c) \rightarrow$ La segunda es roja si la primera fue blanca



1era vez



2da vez

Entonces $P(B/A_1^c) = \frac{4}{10}$

Reemplazando los valores obtenidos

- $P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{17}{50}$

b) $A_1^c \cap B^c =$ "Las dos bolillas extraídas son blancas"

$(A_1 \cap B) \cup (A_1^c \cap B^c) =$ "Las dos bolillas extraídas son del mismo color"

- $P[(A_1^c \cap B^c)/((A_1 \cap B) \cup (A_1^c \cap B^c))] = \longrightarrow$ def. prob. condicional

$= \dfrac{P[(A_1^c \cap B^c) \cap ((A_1 \cap B) \cup (A_1^c \cap B^c))]}{P[((A_1 \cap B) \cup (A_1^c \cap B^c))]} = \longrightarrow$ hacemos la intersección en el numerador y prop. de Unión en denominador

$= \dfrac{P[(A_1^c \cap B^c)]}{P[(A_1 \cap B)] + P[(A_1^c \cap B^c)] - P[((A_1 \cap B) \cap (A_1^c \cap B^c))]} = \longrightarrow$ cancelamos por mutuamente excluyentes

$= \dfrac{P[(A_1^c \cap B^c)]}{P[(A_1 \cap B)] + P[(A_1^c \cap B^c)] - 0} = \longrightarrow$ regla de la Multiplicación

$= \dfrac{P(B^c/A_1^c) \cdot P(A_1^c)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B^c/A_1^c) \cdot P(A_1^c)} = \longrightarrow$ prop. del complemento en prob. condicional

$= \dfrac{(1 - P(B/A_1^c)) \cdot 7/10}{2/10 \cdot 3/10 + (1 - P(B/A_1^c)) \cdot 7/10} =$

$= \dfrac{(1 - 4/10) \cdot 7/10}{3/50 + (1 - 4/10) \cdot 7/10} =$

$= \dfrac{6/10 \cdot 7/10}{3/50 + 6/10 \cdot 7/10} =$

$= \dfrac{21/50}{3/50 + 21/50} = \dfrac{21/50}{12/25} = \dfrac{7}{8}$

7) C_i = "El carro i está disponible" $i = 1, 2$

C_1 y C_2 son independientes entre ellos

a) $P(C_1^c \cap C_2^c) = P(C_1^c) \cdot P(C_2^c) = (1 - P(C_1)) \cdot (1 - P(C_2)) = 0{,}04 \cdot 0{,}04 = 0{,}0016$

definición de independencia

propiedad del complemento

b) $P(C_1 \cup C_2) = 1 - P(C_1 \cup C_2)^c = 1 - P(C_1^c \cap C_2^c) = 1 - 0{,}0016 = 0{,}9984$

Por independencia

De Morgan

8) A_i = "se saca un caramelo de coco de la caja i" $i = 1, 2$

A_1 y A_2 son independientes entre ellos

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

definición de independencia

b) $P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{6}\right) =$

definición de independencia

propiedad del complemento

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) B_i = "se saca un caramelo de chocolate de la caja i" $i = 1, 2$

C = "Ambos caramelos son distintos"

$P(C) = P(A_1 \cap A_2^c) \cup P(B_1 \cap B_2^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Al ser A_1 y A_2 independientes entonces A_1 y A_2^c también.

Idem para B_1 y B_2^c

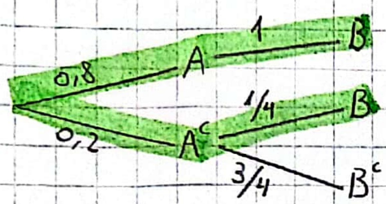
(9) A = "el estudiante sabe la repuesta"

A^c = "el estudiante responde al azar"

Podemos ver:

- $A \cup A^c = S$
- $A \cap A^c = \emptyset$
- $P(A) = 0{,}8 > 0 \wedge P(A^c) = 0{,}2 > 0$

a) B = "el estudiante contesta correctamente"



$$P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^c) \cdot P(A^c) =$$

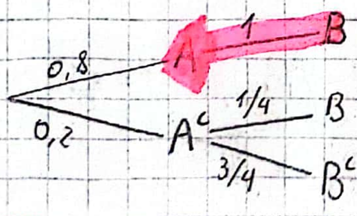
$$= 1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{20} =$$

T. Prob. Total

$$= \frac{17}{20}$$

b) $P(A/B)$ = "Si contesto correctamente, cuál es la probabilidad de que sepa la respuesta"



$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^c) \cdot P(A^c)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0{,}8}{1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{17}{20}} = \frac{16}{17}$$

T. Bayes

(10) A_i = "Sale el 1 en la tirada i" $i = 1,2,3,4,5$

A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 son independientes entre ellos

a) $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4^c) \cdot P(A_5^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$

definición de independencia

b) $\left.\begin{matrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{matrix}\right\}$ El uno puede salir en 5 posiciones distintas

Entonces

- $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cdot 5 =$ "Sale exactamente un solo uno"

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cdot 5 = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4^c) \cdot P(A_5) \cdot 5 =$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 =$

$= \frac{3125}{7776}$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \longrightarrow$ por independencia

$= 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c) = \longrightarrow$ De Morgan

$= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) =$

$= 1 - \frac{3125}{7776} =$

$= \frac{4651}{7776}$

11 a) Para que 2 eventos A y B sean independientes, tiene que ocurrir que $P(A/B) = P(A)$. Desarrollando esta idea:

$\left.\begin{matrix} P(A/B) = P(A) \\ 0{,}4 \neq 0{,}6 \end{matrix}\right\} \therefore$ A y B no son independientes

Podemos probarlo de otra forma, A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Veamos:

$\left.\begin{matrix} \circ\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \\ 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \\ 0{,}32 \neq 0{,}48 \end{matrix}\right\} \therefore$ No son independientes

b) Primero veamos si A y B son independientes aplicando que para serlo $P(A/B) = P(A)$. Veamos

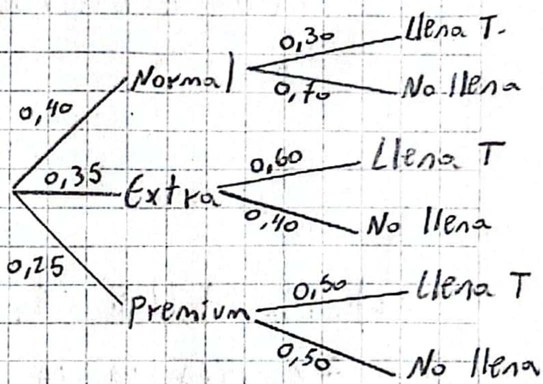
$$\left.\begin{array}{l} P(A/B) = P(A) \\ 0{,}3 = 0{,}3 \end{array}\right\} \therefore \text{ por definición A y B son independientes}$$

Para demostrar que si A y B son independientes, entonces A^c y B también lo son, se puede resolver aplicando la demostración de esta definición en la pág. 23 del apunte

12) A_1="el cliente utiliza nafta normal"

A_2="el cliente utiliza nafta extra"

A_3="el cliente utiliza nafta premium"



- Notar lo siguiente:
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $P(A_i) > 0 \ \forall i = 1, 2, 3$

a) B="el cliente llena el tanque"

$P(A_2 \cap B) = P(B/A_2) \cdot P(A_2) = 0{,}60 \cdot 0{,}35 = 0{,}21$

regla de la multiplicación

b) $P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) =$

teorema de la probabilidad total

$= 0{,}30 \cdot 0{,}40 + 0{,}60 \cdot 0{,}35 + 0{,}50 \cdot 0{,}25 =$

$= 0{,}12 + 0{,}21 + 0{,}125 =$

$= 0{,}455$

Escaneado con CamScanner

c) $P(A_1/B) = \dfrac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/A_i) \cdot P(A_i)} = \dfrac{0{,}30 \cdot 0{,}40}{0{,}455} = \dfrac{0{,}12}{0{,}455} = 0{,}2637$

Teorema de Bayes

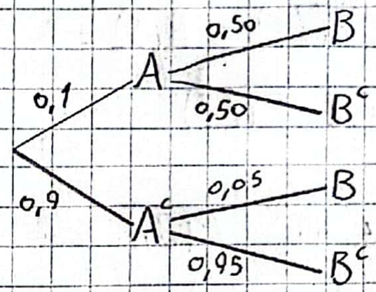
d) Las puse en cada inciso.

13) A = "el chip es pirata"

A^c = "el chip no es pirata"

B = "el chip es defectuoso"

B^c = "el chip no es defectuoso"



$P(A) = 0{,}1 \quad P(A^c) = 0{,}9 \quad P(B/A) = 0{,}50 \quad P(B/A^c) = 0{,}05$

Podemos ver:

- $A \cup A^c = S$
- $A \cap A^c = \phi$
- $P(A) > 0 \wedge P(A^c) > 0$

b) $P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^c) + P(A^c) = 0{,}50 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 =$

teorema de la probabilidad total

$= 0{,}05 + 0{,}045 = 0{,}095 \cdot 100 = 9{,}5\ \%$

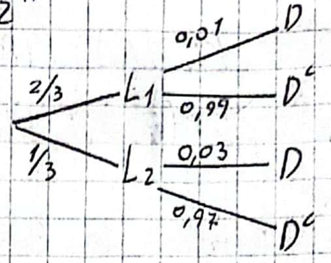
c) $P(A/B) = \dfrac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A^c) \cdot P(A^c)} = \dfrac{0{,}50 \cdot 0{,}1}{0{,}095} = \dfrac{0{,}05}{0{,}095} = 0{,}5263$

Teorema de Bayes

(14) L_1 = "la bolsa viene de la linea 1"

L_2 = "la bolsa viene de la linea 2"

Podemos ver que:



- $L_1 \cup L_2 = S$
- $L_1 \cap L_2 = \phi$

- La linea 1 produce el doble que la linea 2. Entonces:

$$\begin{cases} P(L_1) + P(L_2) = P(S) = 1 \\ P(L_1) = 2 \cdot P(L_2) \end{cases}$$

Reemplazamos $P(L_1)$ por $2P(L_2)$ en la primera ecuación

- $2P(L_2) + P(L_2) = 1$

$$3P(L_2) = 1$$

$$P(L_2) = \frac{1}{3}$$

Reemplazamos el valor obtenido de $P(L_2)$ para obtener la $P(L_1)$

- $P(L_1) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Una vez obtenidas las 2 probabilidades podemos ver que

- $P(L_1) > 0 \wedge P(L_2) > 0$

b) D = "la bolsa está defectuosa"

$$P(D) = P(D/L_1) \cdot P(L_1) + P(D/L_2) \cdot P(L_2) = 0{,}01 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}03 \cdot \frac{1}{3} =$$

teorema de la multiplicación

$$= \frac{1}{150} + \frac{1}{100} = \frac{1}{60}$$

c) $P(L_1/D) = \dfrac{P(D/L_1) \cdot P(L_1)}{P(D/L_1) \cdot P(L_1) + P(D/L_2) \cdot P(L_2)} = \dfrac{0{,}01 \cdot 2/3}{\frac{1}{60}} = \dfrac{1/150}{1/60} = \dfrac{2}{5}$

Teorema de bayes

d) $P(L_1/D^c) = \dfrac{P(L_1 \cap D^c)}{P(D^c)} = \dfrac{P(D^c/L_1) \cdot P(L_1)}{P(D^c)} = (*)$

definición de probabilidad condicional

teorema de la Multiplicación

- $P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 1/60 = 59/60$

propiedad del complemento

- $P(D^c/L_1) = 1 - P(D/L_1) = 1 - 0{,}01 = 99/100$

propiedad del complemento para probabilidades condicionales

$(*)\ P(L_1/D^c) = \dfrac{99/100 \cdot 2/3}{59/60} = \dfrac{198}{295}$