0

Práctica 4

① X = "Tiempo total medido en cientos de horas que un adolescente utiliza su estéreo en un periodo de un año"

a) $$P(X<1,2) = \int_{-\infty}^{1,2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1,2} 2-x\,dx =$$

$$= 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^{1,2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{42}{25} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{50} = 0,68$$

b) $$P(0,5 \leq X \leq 1) = \int_{0,5}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,5}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 0,375$$

② X = "Distancia entre un blanco puntual y un disparo dirigido al punto"

a) $P(X>0) = \int_0^1 0{,}75(1-x^2)\,dx + \int_1^{+\infty} 0\,dx = \left[0{,}75\left(1x - \frac{x^3}{3}\right)\right]\Big|_0^1 + 0 =$

$= \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{4} - 0 = 0{,}5$

b) $P(-0{,}5 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} 0{,}75(1-x^2)\,dx = 0{,}75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-0{,}5}^{0{,}5} =$

$= 0{,}75 \cdot \left(\frac{11}{24} + \frac{11}{24}\right) = 0{,}75 \cdot \frac{11}{12} = 0{,}6875$

c) $P(X < -0{,}25 \text{ ó } X > 0{,}25) = P(X < -0{,}25) + P(X > 0{,}25) =$

$= \int_{-1}^{-0{,}25} 0{,}75(1-x^2)\,dx + \int_{0{,}25}^{1} 0{,}75(1-x^2)\,dx =$

$= 0{,}75\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{-0{,}25} + 0{,}75\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0{,}25}^{1} =$

$= 0{,}75\left(\left(-\frac{47}{192}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + 0{,}75\left(\frac{2}{3} - \frac{47}{192}\right) =$

$= 0{,}75\left(\frac{27}{64}\right) + 0{,}75\left(\frac{27}{64}\right) = \frac{81}{256} + \frac{81}{256} = 0{,}6328$

d) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0{,}75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

∘ Cálculos:

Si $x < -1 \Rightarrow 0$

Si $-1 < x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} 0{,}75(1-t^2)\,dt = 0{,}75\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} =$

$= 0{,}75\left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right] = 0{,}75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right)$

Si $x > 1 = F(x) = 1$

NOTA

3

a) $\circ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \circ\ f(x) \geq 0 \ \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_{0}^{1} K\sqrt{x}\,dx + \underbrace{\int_{1}^{\infty} 0\,dx}_{0} = 1$$

$$= \int_0^1 K x^{1/2}\,dx = K\cdot\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^1 = K\frac{1}{3/2} = 1$$

$\therefore\ K\frac{1}{3/2} = 1$

$= K = 3/2$

b) $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x^{3/2} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$\circ$ Cálculos:

Si $x < 0 \Rightarrow 0$

Si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 3/2\sqrt{t}\,dt = 3/2\left(\frac{t^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^x =$

$= x^{3/2}$

Si $x > 1 \Rightarrow F(x) = 1$

c) $P(0{,}3 < X < 0{,}6) = F(0{,}6) - F(0{,}3) = 0{,}6^{3/2} - 0{,}3^{3/2} = 0{,}3$

④

Ejercicio 1

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x.(x)\,dx + \int_1^2 x.(2-x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 2x - x^2\,dx =$$

$$= 1/3 + 2/3 = 1$$

PhotoMath

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2(x)\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 2x^2 - x^3\,dx = 1/4 + 11/12 = 7/6$$

PhotoMath

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 7/6 - (1)^2 = 1/6$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1/6}$$

Ejercicio 2

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x.[0{,}75(1-x^2)]\,dx = \int_{-1}^{1} x(0{,}75 - 0{,}75x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 0{,}75x - 0{,}75x^3\,dx = 0$$

malMath

$$E(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2[0{,}75(1-x^2)]\,dx = \int_{-1}^{1} x^2(0{,}75 - 0{,}75x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 0{,}75x^2 - 0{,}75x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

malMath

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1/5}$$

NOTA

Ejercicio 3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx = \frac{3}{5}$$

malMath

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx = \frac{3}{7}$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 3/7 - (3/5)^2 = \frac{12}{175}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{12/175}$$

5) Y = "Número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año"

$$Y = 60X^2 + 39X$$

teorema

$$E(Y) = E(60X^2 + 39X) = \int_{-\infty}^{\infty} (60x^2 + 39x)\, f(x)\, dx =$$

PhotoMath

$$= \int_0^1 (60x^2 + 39x)\, x\, dx + \int_1^2 (60x^2 + 39x)(2 - x)\, dx =$$

$$= 28 + 81 = 109$$

6) X = "Distancia desde el extremo izquierdo en el que ocurre la rotura"

a) $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ x^2/48 - x^3/864 & si \quad 0 \leq x \leq 12 \\ 1 & si \quad x > 12 \end{cases}$$

Cálculos

si $x < 0 \Rightarrow 0$

si $0 \leq x \leq 12 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_0^x \tfrac{1}{24} t \left(1 - t/12\right) dt = 0 + \int_0^x \tfrac{1}{24} t - \tfrac{1}{288} t^2 =$

$$= \tfrac{1}{24} \int_0^x t\, dt - \tfrac{1}{288} \int_0^x t^2\, dt = \tfrac{1}{24}\left(t^2/2 \Big|_0^x\right) - \tfrac{1}{288}\left(t^3/3 \Big|_0^x\right)$$

$$= x^2/48 - x^3/864$$

Si $x > 12 \Rightarrow 1$

b)

$$P(X \leq 4) = F(4) = 4^2/48 - 4^3/864 = 1/3 - 2/27 = 7/27$$

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - (6^2/48 - 6^3/864) = 1 - (3/4 - 1/4) = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$P(4 < X < 6) = F(6) - F(4) = 1/2 - 7/27 = 13/54$$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx}_{0} + \int_0^{12} x\left[1/24\, x(1 - x/12)\right]dx + \underbrace{\int_{12}^{\infty} x \cdot 0\,dx}_{0} =$$

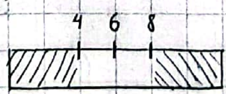
$$= \int_0^{12} x\left(1/24\, x - 1/288\, x^2\right)dx = \int_0^{12} 1/24\, x^2 - 1/288\, x^3\,dx =$$

$$= 1/24 \int_0^{12} x^2\,dx - 1/288 \int_0^{12} x^3\,dx = 1/24\left(x^3/3 \Big|_0^{12}\right) - 1/288\left(x^4/4 \Big|_0^{12}\right) =$$

$$= \left(1/24 \cdot 576\right) - \left(1/288 \cdot 5184\right) = 24 - 18 = 6$$

d)

El punto esperado de ruptura es $E(X)$ que es 6, se nos pide que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas de distancia, por lo tanto calculamos $P(X<4) + P(X>8)$



$$P(X<4) + P(X>8) = F(4) + (1 - F(8)) = 7/27 + \left(1 - \left(8^2/48 - 8^3/864\right)\right) =$$

$$= 7/27 + \left(1 - \left(4/3 - 16/27\right)\right) = 7/27 + \left(1 - 20/27\right) =$$

$$= 7/27 + 7/27 = 14/27$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

⑦ X = "Cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina"

$X \sim U(7, 10) \longrightarrow a = 7 \; ; \; b = 10$

a) $P(X \leq 8{,}8) = F(8{,}8) = \dfrac{8{,}8 - 7}{10 - 7} = 1{,}8/3 = 0{,}6$

b) $P(7{,}4 < X \leq 9{,}5) = F(9{,}5) - F(7{,}4) = \left(\dfrac{9{,}5 - 7}{3}\right) - \left(\dfrac{7{,}4 - 7}{3}\right) = 5/6 - 2/15 = 0{,}7$

c) $P(X \geq 8{,}5) = 1 - F(8{,}5) = 1 - \left(\dfrac{8{,}5 - 7}{3}\right) = 1 - 1/2 = 0{,}5$

d) $E(X) = \dfrac{a + b}{2} = \dfrac{17}{2} = 8{,}5$ $\quad V(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

⑧

a) $P(Z \leq 2{,}24) = 0{,}98745$ app $\quad P(Z > 1{,}36) = 0{,}08691$ app

$P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0) = 0{,}93319 - 0{,}5 = 0{,}43319$ app

$P(0{,}3 < Z < 1{,}56) = P(Z < 1{,}56) - P(Z < 0{,}3) = 0{,}94062 - 0{,}61791 = 0{,}32271$ app

$P(-0{,}51 < Z < 1{,}54) = P(Z < 1{,}54) - P(Z < -0{,}51) = P(Z < 1{,}54) - (1 - P(Z < 0{,}51))$

$= 0{,}93822 - (1 - 0{,}69497) = 0{,}93822 - 0{,}30503 = 0{,}63319$ app b)

$P(Z > z) = 0{,}5 \Rightarrow z = 0$
↳ app

$P(Z < z) = 0{,}8485 \Rightarrow z = 1{,}03$
↳ app

$P(Z < z) = 0{,}0054 \Rightarrow z = -2{,}5491$
↳ app

$P(-z < Z < z) = 0{,}90 \Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) =$ → Simetría de $Z \sim N(0,1)$

$= P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) =$

$= P(Z < z) - 1 + P(Z < z) =$

$= 2 \cdot P(Z < z) - 1 = 0{,}90$

$= P(Z < z) = \frac{0{,}9 + 1}{2}$

$= P(Z < z) = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}6448$
↳ app

9) $X \sim N(10, 36) \rightarrow \mu = 10 \; ; \; \sigma^2 = 36$ $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$

a)

$P(X > 6{,}4) = P\left(\overbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}^{Z} > \frac{6{,}4 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(Z > -0{,}6) = 0{,}72575$
↳ estandarización ↳ app

b)

$P(4{,}2 < X < 16) = P\left(\frac{4{,}2 - 10}{\sqrt{36}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{16 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(-0{,}97 < Z < 1) =$
↳ estandarización

$= P(Z < 1) - P(Z < -0{,}97) = 0{,}84134 - 0{,}16602 = 0{,}67532$
↳ app

c)

$P(X \leq 8{,}14) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{8{,}14 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(Z < -0{,}31) = 0{,}37828$
↳ estandarización ↳ app

NOTA

(10) X = "Peso de un comprimido en gramos" $\quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow \mu = 3 \; ; \sigma^2 = 0{,}05^2$

a)

$P(X > 3{,}025) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3{,}025-3}{0{,}05}\right) = P(Z > 0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 0{,}30854$

estandarización

app

b)

$P(|X-\mu| > 0{,}075) = 1 - P(|X-\mu| < 0{,}075) =$

$= 1 - P\left(\frac{-0{,}075}{0{,}05} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0{,}075}{0{,}05}\right) = 1 - P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) =$

estandarización

$= 1 - \left(P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5)\right) = 1 - (0{,}93319 - 0{,}06681) = 0{,}13362$

app

c)

Y = "Número de comprimidos defectuosos entre 10"

$Y \sim B(n,p) \longrightarrow n = 10 \; ; \; p = \underbrace{0{,}13362}$ → El inciso anterior nos da la probabilidad de que 1 sea defectuoso

$P(Y \geq 2) = 0{,}39423 \Rightarrow 39{,}423\ \%$

(11) X = "Tiempo de respuesta, en segundos, de un sistema de computadoras"

$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3 \;\therefore\; \lambda = \frac{1}{3}$

a)

$P(X > 5) = 0{,}18$

app (usarla con $X = 0,\{\text{muchos } 3\}$)

b)

$P(X > 10) = 0{,}03567$

app

⑫ X_t = "Número de visitas a un sitio web en t minutos"

$X_t \sim P(\lambda) \longrightarrow \lambda = c.t = 3/min$

a) Y = "Tiempo de espera entre 2 visitas consecutivas, medido en minutos"

$Y \sim Exp(\lambda) \longrightarrow \lambda = 3$ Por relación Poisson - Exponencial

$P(Y > 1) = 0{,}04979$

↳ app

b) $P(Y < 3 \mid Y > 2) = 1 - P(Y > 3 \mid Y > 2) = 1 - P(Y > 1) =$

↳ complemento ↳ prop. falta de memoria

$= 1 - 0{,}04979 = 0{,}95021$

↳ app

⑬ X = "Tiempo en horas que un empleado usa en transporte"

$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow E(X) = 1/\lambda = 0{,}25 \longrightarrow \lambda = 4$

a) $P(X > 0{,}5) = 0{,}13534$

↳ app

b) $P(X < 1{,}5 \mid X > 1) = 1 - P(X > 1{,}5 \mid X > 1) = 1 - P(X > 0{,}5) =$

↳ complemento ↳ prop. falta de memoria

$= 1 - 0{,}13534 = 0{,}86466$

c) t = "tiempo mínimo empleado"

$P(X \geqslant t) = 0{,}5 \implies t = 0{,}17329$

↳ app

NOTA

(14) X = "Duración de un componente en años"

- Queremos averiguar si $X \sim Exp(\lambda)$, esto lo podemos comprobar mediante la propiedad de falta de memoria que nos dice "si $X \sim Exp(\lambda)$ y t y s son números positivos, entonces $P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$". Comprobando esto vemos:

$$\underbrace{P(X > 5)}_{\text{Nuevos}} = 0{,}5 \qquad \underbrace{P(X > 5 + a \mid X > a)}_{\text{Usado que ya duró "a" años}} = 0{,}3$$

$$P(X > 5 + a \mid X > a) = P(X > 5)$$

Esto debería cumplirse por la propiedad

Como no se cumple la igualdad, no es exponencial