

Práctica 4

①

X = "Tiempo total medido en cientos de horas que un adolescente utilizó su estéreo en un período de un año"

a)

$$\begin{aligned} P(X < 1,2) &= \int_{-\infty}^{1,2} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x dx + \int_1^{1,2} 2-x dx = \\ &= 0 + \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{1,2} = \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{42}{25} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{50} = 0,68 \end{aligned}$$

$$b) P(0,5 \leq X \leq 1) = \int_{0,5}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 0,375$$

(2) X = "Distancia entre un blanco puntual y un disparo dirigido al punto"

$$a) P(X > 0) = \int_0^1 0,75(1-x^2) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = [0,75 \left(x - \frac{x^3}{3} \right)] \Big|_0^1 + 0 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{4} - 0 = 0,5$$

$$b) P(-0,5 \leq X \leq 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} 0,75(1-x^2) dx = 0,75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-0,5}^{0,5} =$$

$$= 0,75 \cdot \left(\frac{11}{24} + \frac{11}{24} \right) = 0,75 \cdot \frac{11}{12} = 0,6875$$

$$c) P(X < -0,25 \text{ ó } X > 0,25) = P(X < -0,25) + P(X > 0,25) =$$

$$= \int_{-1}^{-0,25} 0,75(1-x^2) dx + \int_{0,25}^1 0,75(1-x^2) dx =$$

$$= 0,75 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{-0,25} + 0,75 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{0,25}^1 =$$

$$= 0,75 \left(\left(-\frac{47}{192} \right) - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + 0,75 \left(\frac{2}{3} - \frac{47}{192} \right) =$$

$$= 0,75 \left(\frac{27}{64} \right) + 0,75 \left(\frac{27}{64} \right) = \frac{81}{256} + \frac{81}{256} = 0,6328$$

$$d) F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0,75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

o Cálculos:

$$\text{Si } x < -1 \Rightarrow 0$$

$$\text{Si } -1 < x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x 0,75(1-t^2) dt = 0,75 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^x =$$

$$= 0,75 \left[\left(x - \frac{x^3}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] = 0,75 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{Si } x > 1 = F(x) = 1$$

(3)

a)

$$\circ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \circ f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{0} + \int_0^1 K \sqrt{x} dx + \underbrace{\int_1^{\infty} 0 dx}_{0} = 1$$

$$= \int_0^1 K x^{1/2} dx = K \cdot \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^1 = K \frac{1}{3/2} = 1$$

$$\therefore K \frac{1}{3/2} = 1$$

$$= K = \frac{3}{2}$$

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{s: } x < 0 \\ \frac{x^{3/2}}{3/2} & \text{s: } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{s: } x > 1 \end{cases}$$

o Cálculos:

$$\text{S: } x < 0 \Rightarrow 0$$

$$\text{S: } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^x = x^{3/2}$$

$$\text{S: } x > 1 \Rightarrow F(x) = 1$$

c)

$$P(0,3 < x < 0,6) = F(0,6) - F(0,3) = 0,6^{3/2} - 0,3^{3/2} = 0,3$$

(4)

Ejercicio 1

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^2 x(z-x) dx = \int_{-1}^2 zx - x^2 dx = \left(\frac{zx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(x^2) = \int_{-1}^2 x^2(z-x) dx = \int_{-1}^2 zx^2 - x^3 dx = 0,92$$

↳ mal Math

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 0,92 - (\frac{2}{3})^2 = 0,475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,475}$$

Ejercicio 2

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot [0,75(1-x^2)] dx = \int_{-1}^1 x (0,75 - 0,75x^2) dx = \\ = \int_{-1}^1 0,75x - 0,75x^3 dx = 0$$

↳ mal Math

$$E(x^2) = \int_{-1}^1 x^2 [0,75(1-x^2)] dx = \int_{-1}^1 x^2 (0,75 - 0,75x^2) dx = \\ = \int_{-1}^1 0,75x^2 - 0,75x^4 dx = \frac{1}{5}$$

↳ mal Math

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1/5}$$

Ejercicio 3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx = \int_0^1 x \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx = \frac{3}{5}$$

→ matMath

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) dx = \frac{3}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{12}{175}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{12/175}$$

- (5) $Y = \text{"Número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año"}$

$$Y = 60X^2 + 39X$$

$$E(Y) = E(60X^2 + 39X) = \int_{-\infty}^{\infty} (60X^2 + 39X) f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 (60X^2 + 39X) x dx + \int_1^2 (60X^2 + 39X)(2-x) dx =$$

$$= 28 + 81 = 109$$

→ teorema

→ PhotoMath

- (6) $X = \text{"Distancia desde el extremo izquierdo en el que ocurre la rotura"}$

a)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{48} - \frac{x^3}{864} & \text{si } 0 \leq x \leq 12 \\ 1 & \text{si } x > 12 \end{cases}$$

Cálculos

$$\text{si } x < 0 \Rightarrow 0$$

$$\text{si } 0 \leq x \leq 12 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{24}t(1-t/12) dt = 0 + \int_0^x \frac{1}{24}t - \frac{1}{288}t^2 dt = \frac{1}{24} \int_0^x t dt + \frac{1}{288} \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{24} \left(\frac{t^2}{2}\right|_0^x) - \frac{1}{288} \left(\frac{t^3}{3}\right|_0^x)$$

$$= \frac{x^2}{48} - \frac{x^3}{864}$$

Si $x > 12 \Rightarrow 1$

b)

$$P(X \leq 4) = F(4) = \frac{4^2}{48} - \frac{4^3}{864} = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(\frac{6^2}{48} - \frac{6^3}{864}\right) = 1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

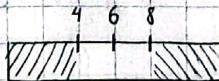
$$P(4 < X < 6) = F(6) - F(4) = \frac{1}{2} - \frac{7}{27} = \frac{13}{54}$$

c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx}_{0} + \int_0^{12} x \left[\frac{1}{24} x \left(1 - \frac{x}{12}\right) \right] dx + \underbrace{\int_{12}^{\infty} x \cdot 0 dx}_{0} = \\ &= \int_0^{12} x \left(\frac{1}{24} x - \frac{1}{288} x^2 \right) dx = \int_0^{12} \frac{1}{24} x^2 - \frac{1}{288} x^3 dx = \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{12} x^2 dx - \frac{1}{288} \int_0^{12} x^3 dx = \frac{1}{24} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{12} \right) - \frac{1}{288} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^{12} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{24} \cdot 576 \right) - \left(\frac{1}{288} \cdot 5184 \right) = 24 - 18 = 6 \end{aligned}$$

d)

El punto esperado de ruptura es $E(X)$ que es 6, se nos pide que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas de distancia, por lo tanto calculamos $P(X < 4) + P(X > 8)$



$$\begin{aligned} P(X < 4) + P(X > 8) &= F(4) + (1 - F(8)) = \frac{7}{27} + \left(1 - \left(\frac{8^2}{48} - \frac{8^3}{864}\right)\right) = \\ &= \frac{7}{27} + \left(1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{16}{27}\right)\right) = \frac{7}{27} + \left(1 - \frac{20}{27}\right) = \\ &= \frac{7}{27} + \frac{7}{27} = \frac{14}{27} \end{aligned}$$

7) X = "Cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina"

$$X \sim U(7, 10) \rightarrow a = 7; b = 10$$

a)

$$P(X \leq 8,8) = F(8,8) = \frac{8,8 - 7}{10 - 7} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

b)

$$P(7,4 < X \leq 9,5) = F(9,5) - F(7,4) = \left(\frac{9,5 - 7}{3}\right) - \left(\frac{7,4 - 7}{3}\right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{15} = 0,7$$

c)

$$P(X \geq 8,5) = 1 - F(8,5) = 1 - \left(\frac{8,5 - 7}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

d)

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{7+10}{2} = 8,5 \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = 4,5$$

8)

a) $P(Z \leq -2,24) = 0,98745$

↳ app

$$P(Z > 1,36) = 0,08691$$

↳ app

$$P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < 0) = 0,93319 - 0,5 = 0,43319$$

↳ app

$$P(0,3 < Z < 1,56) = P(Z < 1,56) - P(Z < 0,3) = 0,94062 - 0,61791 = 0,32271$$

↳ app

$$P(-0,51 < Z < 1,54) = P(Z < 1,54) - P(Z < -0,51) = P(Z < 1,54) - (1 - P(Z < 0,51))$$

$$= 0,93822 - (1 - 0,69497) = 0,93822 - 0,30503 = 0,63319$$

↳ app

b) $P(Z > z) = 0,5 \Rightarrow z = 0$ $P(Z < z) = 0,8485 \Rightarrow z = 1,03$
↳ app ↳ app

$$P(Z < z) = 0,0054 \Rightarrow z = -2,5491$$

↳ app

$$\begin{aligned} P(-z < Z < z) &= 0,90 \Rightarrow P(Z < z) - P(Z < -z) = \xrightarrow{\text{Simetría de } Z \sim N(0,1)} \\ &= P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = \\ &= P(Z < z) - 1 + P(Z < z) = \\ &= 2 \cdot P(Z < z) - 1 = 0,90 \\ &= P(Z < z) = \frac{0,9+1}{2} \\ &= P(Z < z) = 0,95 \Rightarrow z = 1,6448 \end{aligned}$$

↳ app

⑨ $X \sim N(10, 36) \rightarrow \mu = 10, \sigma^2 = 36$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

a) $P(X > 6,4) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{6,4 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(Z > -0,6) = 0,72575$ ↳ app
↳ estandarización

b) $P(4,2 < X < 16) = P\left(\frac{4,2 - 10}{\sqrt{36}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{16 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(-0,97 < Z < 1) =$
↳ estandarización
 $= P(Z < 1) - P(Z < -0,97) = 0,84134 - 0,16602 = 0,67532$ ↳ app

c) $P(X \leq 8,14) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{8,14 - 10}{\sqrt{36}}\right) = P(Z < -0,31) = 0,37828$ ↳ app
↳ estandarización

NOTA

(10) $X = \text{"Peso de un comprimido en gramos"}$ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
 $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \mu = 3 ; \sigma^2 = 0,05^2$

a) $P(X > 3,025) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{3,025 - 3}{0,05}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - \Phi(0,5) = 0,30854$

↳ estandarización ↳ app

b) $P(|X - \mu| > 0,075) = 1 - P(|X - \mu| < 0,075) =$
 $= 1 - P\left(\frac{-0,075}{0,05} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0,075}{0,05}\right) = 1 - P(-1,5 < Z < 1,5) =$
 estandarización ↳ app
 $= 1 - (P(Z < 1,5) - P(Z < -1,5)) = 1 - (0,93319 - 0,06681) = 0,13362$

c) $Y = \text{"Número de comprimidos defectuosos entre 10"}$
 $Y \sim B(n, p) \rightarrow n = 10 ; p = 0,13362$ ↳ El inciso anterior nos da la probabilidad de que 1 sea defectuoso
 $P(Y \geq 2) = 0,39423 \Rightarrow 39,423\%$

(11) $X = \text{"Tiempo de respuesta, en segundos, de un sistema de computadoras"}$
 $X \sim Exp(\lambda) \rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3 \therefore \lambda = \frac{1}{3}$

a) $P(X > 5) = 0,18$
 ↳ app (usarla con $x = 0, \{\text{muchos } 3\}$)

b) $P(X > 10) = 0,03567$
 ↳ app

(12) X_t = "Número de visitas a un sitio web en t minutos"

$$X_t \sim P(\lambda) \rightarrow \lambda = c \cdot t = 3/\text{min}$$

a) Y = "Tiempo de espera entre 2 visitas consecutivas, medida en minutos"

$$Y \sim Exp(\lambda) \rightarrow \lambda = 3 \quad \text{Por relación Poisson - Exponencial}$$

$$P(Y > 1) = 0,04979$$

↳ app

b)

$$P(Y < 3 | Y > 2) = 1 - P(Y > 3 | Y > 2) = 1 - P(Y > 1) =$$

↳ complemento

↳ prop. falta de memoria

$$= 1 - 0,04979 = 0,95021$$

↳ app

(13) X = "Tiempo en horas que un empleado usa en transporte"

$$X \sim Exp(\lambda) \rightarrow E(X) = 1/\lambda = 0,25 \rightarrow \lambda = 4$$

a)

$$P(X > 0,5) = 0,13534$$

↳ app

b)

$$P(X < 1,5 | X > 1) = 1 - P(X > 1,5 | X > 1) = 1 - P(X > 0,5) =$$

↳ complemento

↳ prop. falta de memoria

$$= 1 - 0,13534 = 0,86466$$

c)

t = "tiempo mínimo empleado"

$$P(X \geq t) = 0,5 \Rightarrow t = 0,17329$$

↳ app

14) X = "Duración de un componente en años"

- Queremos averiguar si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, esto lo podemos comprobar mediante la propiedad de falta de memoria que nos dice "si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ y t y s son números positivos, entonces $P(X > t+s | X > s) = P(X > t)$ ". Comprobando esto vemos:

$$\underbrace{P(X > 5)}_{\text{Nuevos}} = 0,5$$

$$\underbrace{P(X > 5 + a | X > a)}_{\substack{\text{Usado que ya duró "a"} \\ \text{años}}} = 0,3$$

$$P(X > 5 + a | X > a) = P(X > 5)$$

↳ Esto debería cumplirse por la propiedad

Como no se cumple la igualdad, no es exponencial